NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉMILE LEMOINE

# Sur une généralisation des propriétés relatives au cercle de Brocard et au point de Lemoine

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 4 (1885), p. 201-223

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__201_0>

# SUR UNE GÉNÉRALISATION DES PROPRIÉTÉS RELATIVES AU CERCLE DE BROCARD ET AU POINT DE LEMOINE;

PAR M. ÉMILE LEMOINE,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

---

§ I. — M. Brocard a étudié le premier les propriétés de deux points remarquables $\omega$ et $\omega'$ du plan d'un triangle et d'un cercle lié avec eux. Il définit ainsi (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, question 1166, tome XIV, 1875) $\omega$ et $\omega'$ : $\omega$ est le point tel que les angles $\omega$AC, $\omega$BA, $\omega$CB soient égaux : $\omega'$ est le point tel que les angles $\omega'$AB, $\omega'$BC, $\omega'$CA soient égaux. La question a été développée par le même géomètre dans la *Nouvelle Correspondance*, tome III, 1877, aux *Congrès* d'Alger et de Rouen, 1881 et 1883, dans *Mathesis*, etc., et aussi par de nombreux travaux de géomètres étrangers. M. Brocard avait appelé d'abord ces points les *points segmentaires*, mais le nom de *points de Brocard* a justement prévalu.

En 1873 au Congrès de Lyon, et dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, p. 364, 1873, et en 1874 au Congrès de Lille, je me suis occupé d'un point remarquable que j'avais appelé *centre des médianes antiparallèles* et que je définissais ainsi : Le point où concourent les droites qui, partant des sommets d'un triangle, divisent en deux parties égales la partie de l'antiparallèle au côté opposé qui est comprise entre les deux autres côtés. Depuis ce temps, de très nombreux travaux ont paru sur le même sujet tant en France qu'en Angleterre, en Allemagne et en Belgique.

Il était curieux que, dans l'étude relative aux *points* *de Brocard,* on rencontrât à chaque instant le *centre des médianes antiparallèles* et réciproquement; ce qui suit mettra bien en lumière la raison de cette liaison intime.

Dans la généralisation que nous allons faire, nous ne pouvons conserver le nom de *centre des médianes antiparallèles* qui n'aurait plus aucun sens; nous adopterons le nom de *point de Lemoine,* que MM. Neuberg, Brocard, de Longchamps, etc., nous font l'honneur d'employer.

I. Soient K un point du plan du triangle de référence ABC; $x$, $y$, $z$ les coordonnées homogènes de K; soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les points où AK, BK, CK coupent BC, AC, AB. Je pars de $\alpha$ en suivant sur le périmètre du triangle le sens ABC et j'appelle $\mu'$ l'intersection du côté CA qui, dans le sens ABC, suit BC, avec la parallèle menée par $\alpha$ au troisième côté AB; je fais la construction analogue, en marchant dans le même sens, pour les points $\beta$ et $\gamma$; j'obtiens ainsi $\nu'$ sur AB et $\lambda'$ sur BC. Il est évident que les droites A$\lambda'$, B$\mu'$, C$\nu'$ se coupent en un même point $\omega'$.

Les coordonnées de $\omega'$ sont

$$czx,\ axy,\ byz.$$

Je pars de $\alpha$ en suivant sur le périmètre du triangle le sens CBA et j'appelle $\nu$ l'intersection du côté BA qui, dans le sens CBA, suit CB, avec la parallèle menée par $\alpha$ au troisième côté AC; je fais la construction analogue, en marchant toujours dans le sens CBA, pour les points $\gamma$ et $\beta$, et j'obtiens ainsi $\mu$ sur AC et $\lambda$ sur BC.

Il est évident que les droites A$\lambda$, B$\mu$, C$\nu$ se coupent en un même point $\omega$.

Les coordonnées de $\omega$ sont

$$byx,\ czy,\ axz.$$

Pour bien distinguer l'un de l'autre les points $\omega$ et $\omega'$ nous dirons que $\omega'$ est le point *direct* par rapport au point K et que $\omega$ est le point *rétrograde*.

Si nous prenons pour point K le point de Lemoine proprement dit, point qui a pour coordonnées

$$a,\ b,\ c,$$

les points $\omega$ et $\omega'$ sont les points de Brocard.

2. *Si l'on prend un point* K' à l'intérieur *d'un triangle* A'B'C', *on peut toujours supposer que* A'B'C' *est la projection d'un triangle* ABC, *tel que le point* K, *dont* K' *est la projection, soit le point de Lemoine* (centre des médianes antiparallèles) *de* ABC. En effet, si $x'$, $y'$, $z'$ sont les coordonnées de K' (A'B'C' étant le triangle de référence), la conique

$$x'\beta\gamma + y'\alpha\gamma + z'\alpha\beta = 0$$

est une ellipse.

Or cette ellipse est telle que ses tangentes en A', B', C' forment un triangle homologique à A'B'C', K' étant le centre d'homologie.

Cette ellipse peut toujours être regardée comme la projection d'un cercle qui est alors le cercle circonscrit à ABC et où K est le point de Lemoine, d'après une propriété connue. Ce théorème fait voir que toutes les propriétés projectives des points de Brocard et de Lemoine s'appliquent au groupe général des trois points K, $\omega$, $\omega'$, formé d'un point quelconque K, de son point direct $\omega'$ et de son point rétrograde $\omega$, et réciproquement.

Si K' est extérieur au triangle A'B'C', il peut être regardé comme la projection d'un point K associé (*voir* la Note du § IV) du point de Lemoine dans le triangle

ABC et les propriétés respectives des points K, $\omega$, $\omega'$ ne sont pas modifiées.

Nous allons donner dans ce qui suit les principales propriétés des points K, $\omega$, $\omega'$ et les expressions très remarquables qui représentent les droites, les coniques, etc., liées au groupe K, $\omega$, $\omega'$; comme cas particulier, en prenant pour K le point de Lemoine, nous aurons ce qui se rapporte aux points de Brocard.

Dans tout le Mémoire, nous poserons, pour abréger,

$$a^2x^2 - yz\,bc = A, \quad b^2y^2 - zx\,ca = B, \quad c^2z^2 - xy\,ab = C.$$

3. L'équation de $\omega\omega'$ est

$$\frac{A}{x}\alpha + \frac{B}{y}\beta + \frac{C}{z}\gamma = 0. \tag{1}$$

4. L'équation de la conique $\omega\omega'$ABC est

$$\frac{A}{a}\beta\gamma + \frac{B}{b}\alpha\gamma + \frac{C}{c}\alpha\beta = 0. \tag{2}$$

Lorsque K est le point dont les coordonnées sont

$$\frac{c^2b^2 - a^4}{a}, \quad \frac{a^2c^2 - b^4}{b}, \quad \frac{b^2a^2 - c^4}{c},$$

l'équation (2) représente le cercle circonscrit au triangle ABC.

Lorsque K est sur l'une des trois ellipses qui sont tangentes à deux côtés d'un triangle aux extrémités du troisième et qui passent par le centre de gravité, ellipses dont les équations sont

$$a^2\alpha^2 - bc\,\beta\gamma = 0, \quad \ldots.$$

sur

$$a^2\alpha^2 - bc\,\beta\gamma = 0$$

par exemple, la conique que représente l'équation (2) se décompose en deux droites dont l'une est le côté BC du triangle, l'autre est la droite $A\omega$ ou $A\omega'$, car les trois points $A$, $\omega$, $\omega'$ sont alors en ligne droite.

Lorsque $K$ est sur la conique dont l'équation est

$$a\cos A(a^2\alpha^2 - bc\beta\gamma) + b\cos B(b^2\beta^2 - ca\gamma\alpha) \\ + c\cos C(c^2\gamma^2 - ab\alpha\beta) = 0,$$

et qui passe aussi par le centre de gravité $E$ de $ABC$, la conique représentée par l'équation (2) est une hyperbole équilatère.

Le centre de la conique représentée par l'équation (2) a pour coordonnées

$$\frac{A(B-C-A)}{a}, \quad \frac{B(A+C-B)}{b}, \quad \frac{C(A+B-C)}{c}.$$

§ II. — 1. Si $A_1$, $B_1$, $C_1$ sont les intersections respectivement de $B\omega'$ avec $C\omega$, de $C\omega'$ avec $A\omega$, de $A\omega'$ avec $B\omega$ ; si $A'_1$, $B'_1$, $C'_1$ sont les intersections respectivement de $C\omega'$ avec $B\omega$, de $A\omega'$ avec $C\omega$, de $B\omega'$ avec $A\omega$, on aura

| Points. | Coordonnées des points. | | |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | $bcx$, | $c^2z$, | $b^2y$, |
| $B_1$ | $c^2z$, | $cay$, | $a^2x$, |
| $C_1$ | $b^2y$, | $a^2x$, | $abz$, |
| $A'_1$ | $bcyz$, | $aby^2$, | $acz^2$. |
| $B'_1$ | $abx^2$, | $cazx$, | $cbz^2$. |
| $C'_1$ | $acx^2$, | $cby^2$, | $abzy$. |

2. Les triangles $ABC$, $A_1B_1C_1$ sont homologiques et le centre $D$ d'homologie a pour coordonnées

$$\frac{1}{a^2x}, \quad \frac{1}{b^2y}, \quad \frac{1}{c^2z};$$

l'axe d'homologie $G$ a pour équation

$$aBC\alpha + bAC\beta - cAB\gamma = 0.$$

Les équations de $B_1C_1$, $A_1C_1$, $A_1B_1$ sont

$$aA\alpha + bC\beta + cA\gamma = 0, \quad \ldots$$

*Remarque.* — Soit H le point où CD′ coupe AB,

$$\frac{HA}{HB} = \frac{ax}{by}.$$

3. Les triangles ABC, $A'_1B'_1C'_1$ sont homologiques et le centre D′ d'homologie a pour coordonnées

$$ax^2, \quad by^2, \quad cz^2.$$

L'axe d'homologie est G; $B_1C_1$ et $B'_1C'_1$ se coupent donc sur BC.

Les équations de $B'_1C'_1$, $A'_1C'_1$, $A'_1B'_1$ sont

$$bcyzA\alpha + bax^2C\beta + acx^2B\gamma = 0, \quad \ldots$$

*Remarque.* — Soit H′ le point où CD′ coupe AB, on a

$$\frac{H'A}{H'B} = \frac{b^2y^2}{a^2x^2} = \frac{\overline{HB}^2}{\overline{HA}^2}.$$

4. Il résulte de ce qui précède que, si deux points $(x, y, z)$, $(x', y', z')$ ont entre leurs coordonnées la relation

$$a^3x^2x' = b^3y^2y' = c^3z^2z',$$

le point D′ correspondant à $x$, $y$, $z$ coïncidera avec le point D correspondant à $x'$, $y'$, $z'$.

Ainsi, par exemple, le point D′ correspondant au point $a^{m-1}\,b^{m-1}\,c^{m-1}$ coïncidera avec le point D correspondant au point $\frac{1}{a^{2m+1}}\,\frac{1}{b^{2m+1}}\,\frac{1}{c^{2m+1}}$.

5. La conique $A_1B_1C_1\omega\omega'$ a pour équation

$$(3) \qquad ayz\alpha^2 + bxz\beta^2 + cxy\gamma^2 - ax^2\beta\gamma - by^2\alpha\gamma - cz^2\alpha\beta = 0.$$

elle passe par le point K

$$x, \quad y, \quad z,$$

et par le point $O_k$

$$x(by - cz - ax), \quad y(ax + cz - by), \quad z(by + ax - cz).$$

C'est la conique des sept points correspondant à K.

Si K est le point de Lemoine, elle devient le *cercle de Brocard* et elle n'est un cercle que dans ce seul cas.

*Remarque.* — L'équation (3) reste la même si l'on change $\alpha$ en $x$, $\beta$ en $y$, $\gamma$ en $z$ et réciproquement; donc, si l'on prend un point quelconque $\Theta$ de la conique des sept points correspondant à un point K, la conique des sept points correspondant à $\Theta$ passera en K.

La conique des sept points est une hyperbole équilatère lorsque K est sur la droite

$$\alpha \cos A + \beta \cos B - \gamma \cos C = 0,$$

qui est l'axe d'homologie du triangle ABC et du triangle formé par les pieds des hauteurs.

C'est une parabole si K est sur l'ellipse maxima inscrite dans ABC.

Une ellipse si K est à l'intérieur de cette ellipse.

Une hyperbole si K est à l'extérieur de cette ellipse.

Une droite si K s'éloigne à l'infini, et cette droite enveloppe l'ellipse maxima inscrite dans le triangle.

6. La conique qui passe par les cinq points $A'_1$, $B'_1$, $C'_1$, $\omega$, $\omega'$ a pour équation

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &abc(ayz\alpha^2 - bxz\beta^2 - cxy\gamma^2) - b^2c^2yz\beta\gamma \\ &\qquad - a^2c^2xz\alpha\gamma - a^2b^2xy\alpha\beta = 0, \end{aligned}\right.$$

elle passe aussi par le centre de gravité de ABC.

§ III. — On a facilement la démonstration des théorèmes suivants :

1. *Si par* D *on mène des parallèles aux trois côtés*

*du triangle* ABC, *les longueurs que deux de ces parallèles interceptent sur le troisième côté, respectivement sur* BC, AC, AB, *sont proportionnelles à* $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$.

2. *Si par* D′ *on mène des parallèles aux trois côtés du triangle* ABC, *les longueurs que deux de ces parallèles interceptent sur le troisième, respectivement sur* BC, AC, AB, *sont proportionnelles à* $a^3x^2$, $b^3y^2$, $c^3z^2$.

3. *En faisant les mêmes constructions pour* $\omega'$, *les longueurs interceptées sur* BC, AC, AB *sont proportionnelles à* $\frac{a}{by}$, $\frac{b}{cz}$, $\frac{c}{ax}$, *c'est-à-dire inversement proportionnelles aux coordonnées du point* F (voir § VIII).

4. *En faisant les mêmes constructions pour* $\omega$, *les longueurs interceptées sur* BC, AC, AB *sont proportionnelles à* $\frac{a}{cz}$, $\frac{b}{ax}$, $\frac{c}{by}$, *c'est-à-dire inversement proportionnelles aux coordonnées du point* H (voir § VIII).

5. *Si par* $\omega$ *on mène des parallèles à* AC *et à* AB *qui interceptent sur* BC *une longueur* L; *si par* $\omega'$ *on mène des parallèles à* AC *et à* AB *qui interceptent sur* BC *une longueur* L′; *on aura*

$$\frac{L}{L'} = \frac{by}{cz},$$

*et une série de relations analogues en considérant les antiparallèles aux côtés au lieu des parallèles, les longueurs interceptées sur les parallèles ou sur les antiparallèles par les côtés, etc.*

6. *Par* $\omega$ *menons une parallèle à* AC *qui coupe* CB *en* $\mathfrak{A}$ *et* AB *en* $\mathfrak{C}_1$.

*Par* $\omega$ *menons une parallèle à* BA *qui coupe* AC *en* $\mathcal{B}$ *et* BC *en* $\mathcal{A}_1$.

*Par* $\omega$ *menons une parallèle à* CB *qui coupe* BA *en* $\mathcal{C}$ *et* CA *en* $\mathcal{B}_1$.

*Par* $\omega'$ *menons une parallèle à* AB *qui coupe* BC *en* $\mathcal{A}'$ *et* CA *en* $\mathcal{B}'_1$.

*Par* $\omega'$ *menons une parallèle à* BC *qui coupe* CA *en* $\mathcal{B}'$ *et* AB *en* $\mathcal{C}'_1$.

*Par* $\omega'$ *menons une parallèle à* CA *qui coupe* AB *en* $\mathcal{C}'$ *et* BC *en* $\mathcal{A}'_1$.

*On a les relations*

$$y \times \omega'\mathcal{A}' = z \times \omega'\mathcal{B}' = x \times \omega'\mathcal{C}',$$
$$y\,ab^2 \times \omega'\mathcal{A}'_1 = z\,bc^2 \times \omega'\mathcal{B}'_1 = x\,ca^2 \times \omega'\mathcal{C}'_1,$$
$$z\,ac^2 \times \omega'\mathcal{A} = x\,ba^2 \times \omega\mathcal{B} = y\,cb^2 \times \omega\mathcal{C},$$
$$z \times \omega\mathcal{A}_1 = x \times \omega\mathcal{B}_1 = y \times \omega\mathcal{C}_1.$$

7. *Les droites* $KA_1$, $KB_1$, $KC_1$ *ont pour équations*

$$(by + cz)\alpha - bx\beta - cx\gamma = 0, \quad \ldots;$$

*donc elles sont parallèles à* BC, AC, AB *respectivement, et l'on peut dire que :*

*Les parallèles menées par* $A_1$, $B_1$, $C_1$ *respectivement à* BC, AC, AB *se coupent au point* K.

§ IV. — 1. Soient $\lambda$, $\mu$, $\nu$ (*voir* § I) les points où les droites $A\omega$, $B\omega$, $C\omega$ coupent respectivement BC, AC, AB.

Soient $\lambda'$, $\mu'$, $\nu'$ les points où les droites $A\omega'$, $B\omega'$, $C\omega'$ coupent respectivement BC, AC, AB.

On a

$$\frac{by}{ax} = \frac{\overline{\lambda C}}{\overline{\lambda B}}, \quad \frac{cz}{by} = \frac{\overline{\mu A}}{\overline{\mu C}}, \quad \frac{ax}{cz} = \frac{\overline{\nu B}}{\overline{\nu A}},$$
$$\frac{ax}{cz} = \frac{\overline{\lambda' C}}{\overline{\lambda' B}}, \quad \frac{by}{ax} = \frac{\overline{\mu' A}}{\overline{\mu' C}}, \quad \frac{cz}{by} = \frac{\overline{\nu' B}}{\overline{\nu' A}}.$$

2. On peut remarquer que les points $\lambda$, $\mu$, $\nu$ divisent

les côtés BC, CA, AB dans le même rapport que les points $\nu'$, $\lambda'$, $\mu'$ divisent les côtés AB, BC, CA, et l'on a

$$\frac{\overline{\lambda C}.\overline{\lambda' C}}{\overline{\lambda B}.\overline{\lambda' B}} = \frac{by}{cz}, \quad \frac{\overline{\mu A}.\overline{\mu' A}}{\overline{\mu C}.\overline{\mu' C}} = \frac{cz}{ax}, \quad \frac{\overline{\nu B}.\overline{\nu' B}}{\overline{\nu A}.\overline{\nu' A}} = \frac{ax}{by}.$$

Il est évident que les égalités pourraient être prises pour représenter les points $\omega$ et $\omega'$; ils seraient alors définis par une permutation tournante des lettres $a$, $b$, $c$, etc., au moyen du rapport des segments que les droites joignant ces points à un sommet déterminent sur le côté opposé; si donc on transforme par points associés [1] une figure liée à $\omega, \omega'$, la figure transformée aura par rapport aux points associés de $\omega$ et de $\omega'$ des propriétés tout à fait analogues à celles de la figure primitive par rapport à $\omega$ et $\omega'$; seulement certains segments additifs seront devenus soustractifs ou réciproquement.

Ainsi, par exemple, si nous faisons la transformation associée $-x, y, z$, aux points $\omega'$, $\omega$ dont les coordonnées sont

$$xzc,\ yxa,\ zyb, \quad xyb,\ yzc,\ zxa$$

correspondent les points $\omega'_a$, $\omega_a$ dont les coordonnées sont

$$-xzc,\ yxa,\ zyb, \quad -xyb,\ yzc,\ zxa,$$

---

(1) Voir *Congrès de Blois, Association française pour l'avancement des Sciences*. Communication de M. E. Lemoine sur les points associés du plan d'un triangle.

Il suffit, pour l'intelligence de ce que nous disons ici, de savoir :

1° Qu'à un point O dont les coordonnées sont $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ correspondent les associés $O_a$, $O_b$, $O_c$ dont les coordonnées sont respectivement

$$-\alpha, \beta, \gamma; \quad \alpha, -\beta, \gamma; \quad \alpha, \beta, -\gamma.$$

2° Que si $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ est l'équation d'une courbe M, sa transformée par points associés $M_a$ sera

$$f(-\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad \ldots.$$

qui donnent lieu à une conique passant par les sept associés de $\omega$, $\omega'$, $A_1$, $B_1$, $C_1$, K, $O_k$.

$A\omega_a$, $A\omega'_a$ coupent BC respectivement en $\lambda$ et en $\lambda'$.

$B\omega_a$, $B\omega'_a$ coupent CA respectivement aux conjugués harmoniques de $\mu$ et de $\mu'$ par rapport à A et à C.

$C\omega_a$, $C\omega'_a$ coupent AB respectivement aux conjugués harmoniques de $\nu$ et de $\nu'$ par rapport à B et à A.

A chaque point K correspondent donc quatre couples de points $\omega$, $\omega'$; quatre coniques, etc., qui jouissent de propriétés analogues.

3. On voit facilement que, comme pour tous les groupes de quatre droites associées, les quatre droites $\omega\omega'$, $\omega_a\omega'_a$, $\omega_b\omega'_b$, $\omega_c\omega'_c$ forment trois à trois quatre triangles inscrits dans ABC, c'est-à-dire que trois quelconques d'entre elles forment un triangle inscrit dans ABC et homologique avec lui; les quatre centres d'homologie de ces triangles et de ABC sont quatre points associés, celui de ABC et du triangle formé par $\omega_a\omega'_a$, $\omega_b\omega'_b$, $\omega_c\omega'_c$ a pour coordonnées

$$\frac{x}{A}, \frac{y}{B}, \frac{z}{C}, \cdots$$

4. Les droites $\mu\lambda'$ et $\lambda\mu'$ sont tangentes à la parabole qui touche CA en A et CB en B. Cette parabole a pour équation

$$c^2\gamma^2 - 4ab\alpha\beta = 0.$$

§ V. — 1. Les triangles ABC, $A_1B_1C_1$, $\omega\omega'D$ ont même centre de gravité E.

2. Si S est le milieu de $\omega\omega'$, les trois points D, E, S sont en ligne droite et l'on a

$$DE = 2ES.$$

Le milieu de BC, le milieu de $B_1C_1$ et le point S sont en ligne droite, les coordonnées de S sont

$$x(by - cz),\quad y(cz + ax),\quad z(ax + by).$$

3. Les droites AK, BK, CK coupent la conique (3) des sept points respectivement en $A_2$, $B_2$, $C_2$.

$A_2$ a pour coordonnées

$$\frac{1}{ayz},\quad \frac{1}{z(by + cz - ax)},\quad \frac{1}{y(by + cz - ax)}.$$

De même $B_2$, $C_2$, etc.

4. $A_1A_2$ a pour équation

$$a\alpha(zc - by) + b\beta(by - ax) + c\gamma(ax - cz) = 0.$$

De même $B_1B_2$, $C_1C_2$, etc.

Ces trois droites passent par le centre de gravité E de ABC qui est ainsi le centre d'homologie des deux triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$.

L'axe d'homologie $G_2$ de ces deux triangles est la polaire de E par rapport à la conique des sept points ; $G_2$ a pour équation

$$a\alpha(by - cz)^2 + b\beta(cz - ax)^2 + c\gamma(ax - by)^2 = 0.$$

$DO_h$ a pour équation

$$a^2\alpha x(cz - by)(B + C) + b^2\beta y(ax - cz)(C - A) \\ - c^2\gamma z(by - ax)(A - B) = 0.$$

5. Le milieu de $B_1C_1$, le sommet A et le point S' qui a pour coordonnées

$$\frac{1}{a(by - cz)},\quad \frac{1}{b(cz + ax)},\quad \frac{1}{c(ax - by)}$$

sont en ligne droite.

6. D' est le pôle de $\omega\omega'$ par rapport à la conique (3) des sept points.

7. Soient M, N, P les milieux de BC, AC, AB.

$MC_2$ a pour équation

$$\alpha(ax - cz) + \beta bx - \gamma cx = 0;$$

la parallèle à $MC_2$ menée par B a pour équation

$$\alpha z + 2\gamma x = 0;$$

$CC_2$ a pour équation

$$\alpha y - \beta z = 0.$$

Donc $CC_2$ passe en K.

8. Soit $J_c$ le point ayant pour coordonnées

$$x,\ y,\ -\tfrac{1}{2}z;$$

$J_c$ est l'intersection avec $CC_2$ de la parallèle à $MC_2$ menée par B. On voit que $J_c$, K, C sont en ligne droite et que $C_2$ est le milieu de $CJ_c$.

L'équation de la parallèle à AB menée par $J_c$ est

$$a\alpha z - b\beta z - 2\gamma(ax + by) = 0.$$

Cette droite coupe CP au point $I_c$

$$\frac{1}{az},\ \frac{1}{bz},\ -\frac{1}{ax+by},$$

donc $CI_c$ passe en E.

L'équation de la conique qui passe par les cinq points A, B, C, $I_c$, $J_c$ est

$$x\beta\gamma - y\alpha\gamma - z\alpha\beta = 0; \tag{5}$$

son centre est $O_k$.

Cette conique passe évidemment aussi par les points

$I_a$, $I_b$, $J_a$, $J_b$ dont les coordonnées sont respectivement

$$-\frac{1}{by-cz}, \quad \frac{1}{bx}, \quad \frac{1}{cx},$$

$$\frac{1}{ay}, \quad -\frac{1}{ax+cz}, \quad \frac{1}{cy},$$

$$-\tfrac{1}{2}x, \quad y, \quad z,$$

$$x, \quad -\tfrac{1}{2}y, \quad z.$$

On a donc, pour chaque point $K(x, y, z)$, la notion d'une conique circonscrite à ABC et qui passe par six autres points bien déterminés.

9. $NC_2$ et $AJ_c$ sont parallèles, ainsi que $C_2M$ et $BJ_c$.

10. $C_1, P, O_k$; $B_1, N, O_k$; $A_1, M, O_k$ forment trois groupes de trois points en ligne droite.

11. $PJ_c$ a pour équation

$$az\alpha - bz\beta - 2\gamma(ax - by) = 0.$$

12. Les droites $O_kD$ et G ont des directions conjuguées par rapport à la conique (5).

§ VI. — 1. Le centre Z de la conique des sept points a pour coordonnées

$$(A+\Delta)x, \quad (B+\Delta)y, \quad (C+\Delta)z,$$

en posant

$$bcyz + cazx - abxy = \Delta.$$

2. La droite $KO_k$ a pour équation

$$\alpha yz(cz - by) + \beta xz(ax - cz) + \gamma xy(by - ax) = 0;$$

elle est vérifiée par les coordonnées de Z, donc :

K, Z, $O_k$ sont en ligne droite et par suite K et $O_k$ sont les deux extrémités d'un diamètre de la conique des sept points.

3. Comme $A_2$, $B_2$, $C_2$ sont sur cette conique et sont les milieux des cordes $AJ_a$, $BJ_b$, $CJ_c$ menées par K (*voir* § V, n° 8) de la conique $ABCJ_aJ_b$[que nous nommerons *conique circonscrite des six points* et qui est représentée par l'équation (5)], on voit que cette conique et la conique des sept points sont homothétiques.

La conique (5) jouit, par rapport à la conique des sept points, des mêmes propriétés que le cercle circonscrit au triangle ABC par rapport au cercle de Brocard.

4. La polaire de C, par rapport à la conique des sept points, a pour équation

$$\alpha b y^2 + \beta a x^2 - 2xyc\gamma = 0.$$

Le pôle de AB a pour coordonnées

$$\frac{1}{x(acxz + 2b^2y^2)}, \quad \frac{1}{y(cbzy + 2a^2x^2)}, \quad \frac{1}{z(4abxy + c^2z^2)}.$$

5. Le triangle ABC et le triangle formé par les polaires de ses côtés ont, pour centre d'homologie, le point

$$\frac{x}{cbzy + 2a^2x^2}, \quad \frac{y}{acxz + 2b^2y^2}, \quad \frac{z}{bayx + 2c^2z^2}.$$

6. Si l'on mène les tangentes en ABC à la conique circonscrite des six points (5), ces trois tangentes forment un triangle homologique avec ABC ayant K pour centre d'homologie, l'axe d'homologie est la droite

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} = 0.$$

7. Le produit des trois perpendiculaires abaissées de $\omega$ sur les trois côtés de ABC est égal au produit des trois perpendiculaires abaissées de $\omega'$ sur les mêmes côtés; ce produit a pour valeur

$$\frac{8\,S^3\,abc\,x^2y^2z^2}{\Delta^3}.$$

8. La droite EZ a pour équation

$$a\alpha(cz - by)(B + C) + b\beta(ax - cz)(C + A) + c\gamma(by - ax)(A + B) = 0.$$

Le point d'intersection de EZ et de $DO_k$ est sur la conique *circonscrite des six points* et a pour coordonnées

$$\frac{1}{a(B - C)}, \quad \frac{1}{b(C + A)}, \quad \frac{1}{c(A + B)}.$$

9. Remarquons que les points que nous avons considérés peuvent se grouper deux à deux, en points se correspondant de telle façon que les produits $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ de leurs coordonnées de même nom soient proportionnels respectivement à $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}$ (¹); par exemple $\omega$ et $\omega'$, E et K, D et D', S et S', etc., sont ainsi correspondants.

Le correspondant $O'_k$ de $O_k$ a pour coordonnées

$$\frac{1}{a(by + cz - ax)}, \quad \frac{1}{b(ax + cz - by)}, \quad \frac{1}{c(ax + by - cz)}.$$

Le correspondant Z' de Z a pour coordonnées

$$\frac{1}{a(A - \Delta)}, \quad \frac{1}{b(B + \Delta)}, \quad \frac{1}{c(C + \Delta)}.$$

---

(¹) Étant donné un point quelconque dont les coordonnées sont

$$f_1(x, y, z), \quad f_2(x, y, z), \quad f_3(x, y, z),$$

on peut déterminer un transformé de ce point par la condition que ce transformé aura pour coordonnées

$$\frac{x}{af_1}, \quad \frac{y}{bf_2}, \quad \frac{z}{cf_3}.$$

Lorsque le point dont les coordonnées sont $x, y, z$ est le point de Lemoine, $x, y, z$ sont proportionnels à $a, b, c$ et l'on tombe sur la transformation *inverse* du capitaine Mathieu (*Nouvelles Annales*, p. 393, 1865).

La transformation plus générale que nous indiquons ici donne des résultats tout à fait analogues à ceux que trouve le capitaine Mathieu dans son remarquable Mémoire.

10. On verrait facilement avec tout ce qui précède que

$$\mathrm{Z}, \mathrm{D}', \mathrm{K}, \mathrm{O}_k\,;\ \mathrm{E}, \mathrm{S}', \mathrm{D}'\,;\ \mathrm{O}'_k, \mathrm{Z}', \mathrm{S}\,;\ \mathrm{O}_k, \mathrm{S}', \mathrm{Z}'\,;$$
$$\mathrm{K}, \mathrm{S}', \mathrm{D}\,;\ \mathrm{Z}, \mathrm{S}', \mathrm{O}'_k\,;\ \ldots,$$

sont en ligne droite.

§ VII. — Les six points $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\lambda'$, $\mu'$, $\nu'$ définis (§ I) ont respectivement pour coordonnées

$$0,\ cy,\ ax\,;\quad by,\ 0,\ az\,;\quad bx,\ cz,\ 0\,;\quad 0,\ ax,\ by\,;$$
$$cx,\ 0,\ by\,;\quad cz,\ ay,\ 0\,;$$

ils sont sur une conique dont l'équation est

$$\begin{aligned} abc(ayz\,\alpha^2 - bxz\,\beta^2 - cxy\,\gamma^2) &- cb\,\gamma\beta(a^2x^2 + bcyz) \\ &- ac\,\alpha\gamma(b^2y^2 - acxz) - ba\,\beta\gamma(c^2z^2 + abyz) = 0. \end{aligned}$$

J'ai cherché pour quels points K cette conique était un cercle; la recherche paraît assez compliquée, mais il est facile de voir que ces points en nombre fini sont sur l'hyperbole

$$a^2\alpha^2(c^2 - b^2) + b^2\beta^2(a^2 - c^2) + c^2\gamma^2(b^2 - a^2) = 0,$$

dont le centre est

$$\frac{1}{a(c^2 - b^2)},\quad \frac{1}{b(a^2 - c^2)},\quad \frac{1}{c(b^2 - a^2)}.$$

Cette hyperbole, qui est à elle-même son associée (*voir* § IV), passe par le centre de gravité et par les centres des cercles inscrits et exinscrits; par projection, on a donc le théorème suivant :

*Les quatre centres de chaque groupe de quatre coniques homothétiques entre elles et inscrites à un triangle, le centre de gravité et les symétriques de chaque sommet par rapport au milieu du côté opposé* (associés du centre de gravité) *sont huit points appartenant à une même hyperbole.*

§ VIII. — 1. Si l'on part de K et que l'on cherche le point direct et
trouve ω' et ω (§ I); si, partant de chacun de ceux-ci, on cherche le point
de ω', puis le point direct et le point rétrograde de ω, et ainsi de suit
points obtenus, il semble que l'on doit engendrer une série indéfinie
Le Tableau suivant, où les cases en *italique* désignent les points déj

K

$x, y, z$

ω' point direct de K

$czx, \; axy, \; byz.$

ω point rétrograde de K

$byx, \; czy, \; axy.$

H point direct de ω'

$\frac{cz}{a}, \; \frac{ax}{b}, \; \frac{by}{c}.$

K *point rétrograde de* ω'.

K *point direct de* ω.

F point rétrograde de ω

$\frac{by}{a}, \; \frac{cz}{b}, \; \frac{ax}{c}.$

D point direct d

$\frac{1}{a^2x}, \; \frac{1}{b^2y}, \; \frac{1}{c^2}$

ω' *point rétrograd*

ω *point direct*

D *point rétrogra*

démontre ce remarquable théorème :

*Si l'on part d'un point* K *et que l'on cherche le point direct et le point rétrograde de* K, *puis le point direct et le point rétrograde de chacun de ces nouveaux points, et ainsi de suite, on obtient six points différents seulement, savoir :*

1° K; 2° $\omega'$ *point direct de* K; 3° H *point direct de* $\omega'$; 4° $\omega$ *point rétrograde de* K; 5° F *point rétrograde de* $\omega$; 6° D *point direct de* H.

Les coordonnées de D dans le Tableau précédent nous montrent que ce point (*voir* § II) est le centre d'homologie des deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$.

K et D; $\omega'$ et F; $\omega$ et H sont conjugués isotomiques [1].

2. Si deux points

$$\omega;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma \quad \text{et} \quad \omega';\ \alpha',\ \beta',\ \gamma'$$

sont tels que l'on ait

$$\frac{a\alpha'}{c\gamma} = \frac{b\beta'}{a\alpha} = \frac{c\gamma'}{b\beta},$$

$\omega'$ et $\omega$ sont respectivement le point direct et le point rétrograde d'un point ayant pour coordonnées

$$\frac{b}{\gamma},\ \frac{c}{\alpha},\ \frac{a}{\beta},$$

---

(1) M. Neuberg (voir *Mémoire sur le tétraèdre*, p. 10) appelle *conjugués isotomiques* deux points tels que, si on les joint à un même sommet d'un triangle, les droites ainsi obtenues coupent le côté opposé en deux points symétriques par rapport au milieu de ce côté. *Voir* aussi de Longchamps (*Annales de l'École Normale*, année 1867), qui le premier a étudié ces points et les droites *réciproques* qui s'en déduisent; *voir* aussi même auteur : *Congres du Havre, de l'Association française pour l'avancement des Sciences*, 1877.

ou, ce qui est la même chose,

$$\frac{c}{\beta'}, \quad \frac{a}{\gamma'}, \quad \frac{b}{\alpha'}.$$

§ IX. — Nous ne voulons pas allonger indéfiniment cette étude, dans laquelle nous avons généralisé les travaux de M. Brocard [*Congrès d'Alger* (1881) *et de Rouen* (1883) *de l'Association française pour l'avancement des Sciences*], en employant les mêmes notations que lui. Cependant, pour éviter des confusions possibles avec des points dont la désignation est généralement adoptée, comme O pour le centre du cercle circonscrit à un triangle, etc., nous avons remplacé les lettres O et O′ de M. Brocard par $\omega$ et $\omega'$, ainsi que M. Neuberg l'avait déjà fait, et les lettres H, H′ par $O_k$, $O'_k$; nous dirons cependant encore quelques mots de la généralisation des résultats si intéressants obtenus par M. Brocard (*Journal de Mathématiques spéciales*, p. 197; 1884).

Ainsi il y a une hyperbole circonscrite à ABC qui passe par les points $O'_k$, E, D, Z′, S′; son équation est

$$\frac{cz - by}{a\alpha} + \frac{ax - cz}{b\beta} + \frac{by - ax}{c\gamma} = 0;$$

son centre W a pour coordonnées

$$\frac{(cz - by)^2}{a}, \quad \frac{(ax - cz)^2}{b}, \quad \frac{(by - ax)^2}{c},$$

et il est sur la conique passant par les milieux des trois côtés du triangle et homothétique à la conique *circonscrite des six points* (§ VI, n° 3).

L'équation de cette conique, qui, par rapport à la conique circonscrite des six points, joue le même rôle que le cercle des neuf points par rapport au cercle circonscrit, est

$$\begin{aligned} a^2\alpha^2(cz + by - ax) + b^2\beta^2(ax + cz - by) \\ + c^2\gamma^2(ax + by - cz) - 2abc(x\beta\gamma + y\alpha\gamma - z\alpha\beta) = 0. \end{aligned}$$

Nous nous arrêterons un instant sur les points K qui ont pour coordonnées $a^m$, $b^m$, $c^m$; ils donnent lieu, en faisant varier $m$ de $+\infty$ à $-\infty$, à toute une série de points remarquables pour les diverses valeurs qu'ont alors D, D', $O_k$, ...; on retrouvera ainsi les résultats isolés obtenus dans l'étude de ces points (*voir* Brocard, *Congrès d'Alger,* p. 150; 1881; Lemoine, *Congrès de la Rochelle,* p. 122 et suiv.; 1882).

Le cas de $m = 1$ est le plus remarquable; le point K est alors le point de Lemoine, les points $\omega$ et $\omega'$ sont les points de Brocard; c'est le cas étudié en détail par ce géomètre dans les Mémoires déjà cités.

Le cas de $m = 0$ mérite aussi une mention particulière; K est alors le centre du cercle inscrit et les points $\omega$ et $\omega'$ sont les points importants que M. Jérabek a étudiés (voir *Mathesis*, p. 192, 1re année) et qu'il nomme respectivement $I_1$ et $I_2$ (*voir* aussi notre Mémoire sur les points associés, *Congrès de Blois,* 1884).

Dans ce cas, les coordonnées de $\omega$ et de $\omega'$ ($I_1$ et $I_2$ de M. Jérabek) sont respectivement

$$b,\ c,\ a;\quad c,\ a,\ b.$$

Le point $O_k$ est le point dont les coordonnées sont

$$p-a,\quad p-b,\quad p-c:$$

c'est le point de Lemoine du triangle formé par les centres des trois cercles exinscrits (voir *Congrès de Rouen,* p. 123).

Dans le cas de $m = -1$ presque tous les points étudiés viennent se confondre au centre de gravité de ABC.

§ X. — Pour terminer nous dirons que tous les résultats précédents peuvent se généraliser encore par voie de perspective et qu'il serait facile de trouver, soit géométriquement, soit par le calcul, les mêmes séries de points en ligne droite, de droites concourantes, etc., que nous avons rencontrées; nous ajoutons ainsi quelque chose aux intéressantes recherches de M. Brocard et à la Communication de M. G. Tarry (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 3 avril 1882). Pour donner un exemple de cette généralisation par voie de perspective, nous nous contenterons de parler de la conique des sept points.

Soit un triangle ABC; soit une droite $A_a B_b C_c$ qui coupe BC en $A_a$, CA en $B_b$, AB en $C_c$.

Soient K un point quelconque du plan; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les points où AK, BK, CK coupent respectivement BC, CA, AB.

Je pars de $\alpha$ en suivant le périmètre de ABC dans le sens ACB et j'appelle $\nu$, $\lambda$, $\mu$ respectivement les intersections de AB avec $\alpha B_b$, de BC avec $\beta C_c$, de AC avec $\gamma A_a$.

Je pars de $\alpha$ en suivant sur le périmètre de ABC le sens CAB et j'appelle $\mu'$, $\nu'$, $\lambda'$ respectivement les intersections de CA avec $\alpha C_c$, de AB avec $\beta A_a$, de BC avec $\gamma B_b$ :

1° Les six points $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\lambda'$, $\mu'$, $\nu'$ appartiendront à une même conique.

2° Les trois droites $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$ se coupent en un point $\omega$ que j'appelle point rétrograde par rapport à K.

Les trois droites $A\lambda'$, $B\mu'$, $C\nu'$ se coupent en un point $\omega'$ que j'appelle point direct par rapport à K; à chaque point K correspond une infinité de groupes binaires de points $\omega$ et $\omega'$, et un groupe à chaque position de $A_a B_b C_c$; d'où l'on déduit une méthode de transformation des figures, intéressante à étudier.

3° Soient $A_1$, $B_1$, $C_1$ les intersections respectivement de $B\omega'$ avec $C\omega$, de $C\omega'$ avec $A\omega$, de $A\omega'$ avec $B\omega$; soient $A'_a$, $B'_b$, $C'_c$ les conjugués harmoniques de $A_a$ par rapport à BC, de $B_b$ par rapport à CA, de $C_c$ par rapport à

AB; les trois droites $A_1 A'_a$, $B_1 B'_b$, $C_1 C'_c$ se coupent en un point $O_k$.

4° Les sept points $\omega$, $\omega'$, $A_1$, $B_1$, $C_1$, K, $O_k$ appartiennent à une même conique.