J. PELLAUMAIL

Décomposition de *M*-matrice et buffer d'un multiplexeur ATM

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 26, nº 2 (1992), p. 153-175

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1992__26_2_153_0>

Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 26, n° 2, 1992, p. 153 à 175)

DÉCOMPOSITION DE *M*-MATRICE ET BUFFER D'UN MULTIPLEXEUR ATM (*)

par J. PELLAUMAIL [1]

Résumé. — *On donne un algorithme qui permet de calculer, suivant un schéma explicite, la perte moyenne de messages, par unité de temps et en régime stationnaire, d'un système muni d'une mémoire tampon. Ceci utilise un théorème de décomposition d'une* M-*matrice spécifique. L'algorithme proposé est particulièrement efficace pour des paramètres associés à la situation que l'on rencontre dans l'étude de la mémoire paragonale d'un multiplexeur ATM.*

Abstract. — *In the performance evaluation of the "Asynchronous Transfer Mode (ATM)" a fundamental and difficult question arises: is it possible to limit the lost of messages by using buffers? For computing such a lost, an algorithm is stated; this algorithm is explicit, fast and needs only a few memory. It rests upon a decomposition theorem for some* M-*matrices.*

Keywords : L-matrix, M-matrix; irreducible positive matrix; steady-state probability.

INTRODUCTION

Dans les transmissions de données en temps réel, on a très souvent la situation suivante : un système électronique (bus de liaison, multiplexeur asynchrone, etc.) dispose de n canaux pour écouler les messages qu'il reçoit en provenance de diverses stations émettrices. Quand le nombre de messages est supérieur à la capacité d'écoulement des n canaux, les messages « supplémentaires » sont stockés dans un buffer mais celui-ci a une capacité limitée, en général assez faible. Lorsque le buffer est saturé, les messages « en trop » sont perdus. On considère le cas où l'évolution du buffer est rapide par rapport à celle du nombre de stations émettrices.

(*) Reçu février 1991.
[1] I.N.S.A., Laboratoire L.A.N.S., 20, avenue des Buttes-de-Coësmes, 35043 Rennes Cedex.

Une question cruciale est alors de dimensionner la taille du buffer et le nombre $n+\sigma$ de stations auxquelles on alloue une ligne virtuelle connaissant n et en fonction d'une perte moyenne de messages imposée.

Du point de vue mathématique, ceci conduit à étudier un système linéaire exceptionnellement mal conditionné, alors que l'on veut évaluer un pourcentage de perte qui peut être de l'ordre de 10^{-9}.

Pour mieux situer le problème, nous allons donner un exemple pour lequel l'algorithme proposé dans ce travail semble optimum : en fait une partie de ce qui suit est d'ordre mathématique et reste utilisable dans des situations plus générales que celle associée à cet exemple.

On considère le buffer global (mémoire paragonale) associé à un multiplexeur. On appelle n le nombre de canaux d'émission de ce multiplexeur et j le nombre de stations (actives) qui sont en cours d'émission de messages vers le multiplexeur. On suppose que ces stations ont toutes le même débit (dans les autres cas *cf.* D.3). On suppose aussi que l'évolution du nombre de stations actives est markovienne (dans les autres cas *cf.* D.4).

Le système « état du buffer et nombre de stations actives » est donc markovien et l'essentiel est de déterminer son régime stationnaire. On étudie ce système par l'intermédiaire de la chaîne incluse aux instants d'observation $t(k)$, le délai $t(k+1)-t(k)$ entre deux tels instants étant fixe ce qui revient à étudier le système différentiel associé par la méthode d'Euler.

On est donc ramené à résoudre un système linéaire de la forme $q\hat{a}=q$ où q est la probabilité stationnaire (de la chaîne incluse) et $\hat{a}$ la matrice d'évolution. On appellera « slot » le délai entre deux instants d'observation $t(k)$ et $t(k+1)$.

Attention : le choix du délai entre deux instants d'observation, c'est-à-dire du « pas de temps », est mathématique et non pas technologique. Plus précisément, on choisit ce délai suffisamment court pour que l'on puisse négliger la probabilité d'avoir deux stations qui changent d'état (actif et non-actif) conjointement et pendant ce délai (*cf.* les commentaires proposés en D.4). Par contre, plus ce délai est court, plus la matrice $\hat{a}$ est de grande dimension et mal conditionnée; or l'algorithme proposé ici reste très stable même si $\hat{a}$ est très mal conditionnée.

On appellera « message » la quantité d'information que véhicule chaque canal durant un slot : le choix de l'unité de temps (le slot) induit le choix de l'unité d'information (le message). Par commodité, mais ceci n'est pas une hypothèse cruciale, on supposera aussi que chaque station active envoie au multiplexeur un message par slot. Ceci signifie notamment que, à l'intérieur de chaque slot, on travaille en « valeur moyenne », ce qui est la méthode normale quand on discrétise le temps.

Un état du système markovien étudié est caractérisé par un couple (j, h) où j est le nombre de stations actives et h est le nombre de places occupées dans le buffer, chaque place correspondant à un message non transmis. Ce système ne rentre pas dans le cadre général des réseaux de files d'attente. Soit n'' la taille du buffer, c'est-à-dire le nombre de messages qu'il peut contenir. Lorsque le buffer est plein, les messages supplémentaires sont perdus. La matrice d'évolution $\hat{a}$ est précisée à la section C.1.

Cette matrice est tridiagonale par blocs relativement à j (mais pas relativement à h); on pourrait donc, « en théorie », utiliser la méthode des probabilités tabou (*cf.* [Chu]) qui est une amélioration de la chaîne incluse et dont l'intérêt a été redécouvert récemment (*cf.* [Neu], [Leb] et [LJG]). Il faudrait alors raisonner par récurrence sur j et, pour chaque valeur de j, inverser une matrice $(n'' \times n'')$; en D.1 on choisira n'' entre 100 et 200. De plus, il faut mettre en évidence des pourcentages de pertes de l'ordre de 10^{-9} et donc des probabilités encore plus faibles alors que le système global est très mal conditionné. Une telle méthode nécessiterait donc des moyens de calcul puissants alors que l'algorithme proposé ici a été implémenté sur un petit « micro de salon ». Enfin, pour des exemples un peu plus sophistiqués, il faudrait multiplier la taille du système par 10 ou 100 d'où la nécessité de disposer d'un algorithme performant.

On peut aussi ne pas tenir compte de la structure « en trame », considérer qu'à chaque pas de temps il y a un seul message qui est écoulé et supposer que l'évolution reste cependant markovienne : c'est la méthode utilisée dans [Leb] et qui, semble-t-il, est actuellement l'approximation la plus efficace. [Leb] donne de plus un panorama assez complet des autres travaux dans ce domaine.

De même, il est presque impossible de procéder par simulation informatique « bête » compte tenu de la précision demandée. Évidemment, on peut utiliser une simulation « intelligente » qui revient à utiliser l'algorithme proposé ci-dessous, les inversions des « petites » matrices étant effectuées par des méthodes de « Monte-Carlo ». Le lecteur plus intéressé par les applications peut se reporter à l'exemple numérique qui est proposé à la section D. L'algorithme est expliqué à la section C.

Cet algorithme utilise plusieurs théorèmes sur la résolution et sur la décomposition de certaines M-matrices : ces théorèmes sont énoncés et démontrés aux paragraphes A et B. Leur cadre d'utilisation potentielle est beaucoup plus vaste que celui de l'exemple expliqué en C.1. Je suis heureux de remercier l'équipe « évaluation de performances » du C.N.E.T. de Lannion, et notamment J. P. Boyer, qui m'a signalé l'importance de ce problème il y a déjà quelques années.

A. CADRE GÉNÉRAL

A.1. Préliminaire

Nous allons d'abord rappeler ou introduire quelques conventions. On posera systématiquement :

$$a_1 = a(1), \qquad b_{ij} = b(i, j), \qquad \text{etc.}$$

le choix entre ces deux notations étant purement typographique.

Si H et K sont deux ensembles finis, on dira que a est une matrice indexée par $H \times K$ si, en tant qu'objet, a est une fonction réelle définie sur $H \times K$: le mot « réelle » est omis car toutes les matrices considérées dans ce travail sont des matrices réelles.

On dit que la matrice a, indexée par $H \times K$, est *positive* (resp. *strictement positive*) si, pour tout élément (h, k) de $H \times K$, on a $a(h, k) \geqq 0$ [resp. $a(h, k) > 0$]. Si v et w sont deux matrices indexées par $H \times K$, on écrira $v \geqq w$ (resp. $v > w$) si $(v - w)$ est une matrice positive (resp. strictement positive).

Dans toute la suite de ce paragraphe, v est une matrice (carrée) indexée par $H \times H$. On dit que v est une L-matrice si, pour tout élément (h, k) de $H \times H$ avec $h \neq k$ on a $v(h, k) \leqq 0$ et $v(h, h) \geqq 0$. Soit s la matrice unicolonne indexée par H dont tous les termes sont égaux à 1 : on dit que v est une L-*matrice à diagonale dominante* si v est une L-matrice telle que $vs \geqq 0$. Notons que si on a à la fois $vs \geqq 0$ et $v(h, k) \leqq 0$ pour tout élément (h, k) de $H \times H$ avec $h \neq k$, alors v est une L-matrice (à diagonale dominante). On dit que v est *à diagonale strictement dominante* si $vs > 0$.

On dit que v est une M-*matrice inversible* si v est une L-matrice inversible dont l'inverse est une matrice positive. Notons que, suivant les auteurs, une M-matrice peut, ou non, être singulière : pour lever toute ambiguité nous utiliserons systématiquement l'expression « M-matrice inversible ».

Nous dirons que v est une μ-*matrice* si v est une M-matrice inversible à diagonale dominante. Quand on décompose des matrices associées à des calculs de probabilités stationnaires, les M-matrices inversibles que l'on obtient sont (presque) toujours des μ-matrices.

Nous utiliserons la propriété suivante :

P1 : Soit v une matrice carrée; v est une M-*matrice inversible si et seulement si il existe une matrice diagonale d inversible telle que $w = d'vd$ est une* L-*matrice à diagonale strictement dominante, d' désignant la matrice inverse de d* (*cf.* [GoM] *ou* [BPl]).

A.2. Théorème 1

Soit E un ensemble fini (non vide) et $\hat{e}$ un élément de E. Soit G le complémentaire de $\{\hat{e}\}$ dans E; on suppose que G n'est pas vide. Soit $a(4)$ et $c(2)$ deux nombres. Soit $a(1)$ une matrice carrée indexée par $G \times G$ et $a(3)$ une matrice uniligne indexée par G. Soit $a(2)$ et $c(1)$ deux matrices unicolonnes indexées par G. Soit $s(1)$ la matrice unicolonne indexée par G dont tous les termes sont égaux à 1. *Soit $\hat{a}$, $\hat{s}$ et $\hat{c}$ les matrices définies en notation par blocs par :*

$$\hat{a} := \begin{pmatrix} a(1) & a(2) \\ a(3) & a(4) \end{pmatrix}, \qquad \hat{c} := \begin{pmatrix} c(1) \\ c(2) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \hat{s} := \begin{pmatrix} s(1) \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice $\hat{a}$ est donc une matrice indexée par $E \times E$ tandis que les matrices $\hat{c}$ et $\hat{s}$ sont des matrices unicolonnes indexées par E.

Soit $\hat{q}$ une matrice uniligne « inconnue » indexée par E que l'on peut écrire (en notation par blocs) :

$\hat{q} = (q(1), q(2))$ où $q(2)$ est un nombre réel et $q(1)$ est une matrice uniligne indexée par G. On suppose que $\hat{q}\hat{a} = \hat{q}$ et que $\hat{q}\hat{s} = 1$.

Soit $u(1)$ la matrice unité indexée par $G \times G$; on suppose que la matrice $g := (u(1) - a(1))$ est inversible et on note a' sa matrice inverse. On a alors :

$$\hat{q}\hat{c} = (a_3 a' c_1 + c_2)/(a_3 a' s_1 + 1).$$

Vérification : Les relations $\hat{q}\hat{a} = \hat{q}$ et $\hat{q}\hat{s} = 1$ peuvent s'écrire :

$$q_1 a_1 + q_2 a_3 = q_1, \qquad q_1 a_2 + q_2 a_4 = q_2 \qquad \text{et} \qquad q_1 s_1 + q_2 = 1$$

La première de ces trois relations donne

$$q_1 = q_2 a_3 a'$$

d'où

$$q_2 a_3 a' s_1 + q_2 = 1 \quad \text{soit} \quad q_2 = 1/(1 + a_3 a' s_1)$$

et

$$\hat{q}\hat{c} = q_1 c_1 + q_2 c_2 = q_2 (a_3 a' c_1 + c_2)$$

d'où le résultat annoncé.

A.3. Remarques

Lorsque $\hat{a}$ est une matrice stochastique irréductible, la matrice $\hat{q}$ existe, est unique et positive : c'est la probabilité stationnaire d'une chaîne de Markov X (à temps discret) qui admet $\hat{a}$ comme matrice d'évolution entre l'instant t et l'instant $(t+1)$. Si $\hat{c}$ représente le « coût » entre l'instant t et l'instant $(t+1)$ (ce coût dépendant de l'état du processus X), *$\hat{q}\hat{c}$ est le coût moyen par unité de temps en régime stationnaire.*

Le théorème qui précède revient à utiliser la « chaîne incluse » associée aux instants où le processus X repasse dans l'état $\hat{e}$ ($\hat{e}$ est fixé). On déduit facilement de l'étude classique de cette situation que la matrice $g := (u(1) - a(1))$ est alors une μ-matrice (*cf.*, par exemple, [Rev]). La quantité $a(3)\,a'\,s(1)$ est associée au délai moyen entre deux retours au point $\hat{e}$; la quantité $a(3)\,a'\,c(1)$ est associée au coût moyen entre deux retours au point $\hat{e}$.

On a donc ramené le calcul de $\hat{q}\hat{c}$ au calcul de $a(3)\,a'\,s(1)$ d'une part et $a(3)\,a'\,c(1)$ d'autre part, la matrice a' étant l'inverse de la μ-matrice g. On va maintenant proposer une technique pour calculer ces deux quantités.

Soit $\hat{u}$ la matrice unité indexée par $E \times E$; soit $(y(1), y(2))$ la solution du système suivant :

$$(y(1), y(2))(\hat{u} - \hat{a}) = (0, \ldots, 0, 1)$$

où $y(2)$ est un nombre réel et $y(1)$ est une matrice uniligne indexée par G. On a alors :

$$y(1) = y(2)\,a(3)\,a'$$

autrement dit, à la constante multiplicative près $y(2)$, $a(3)\,a'$ peut être considéré comme une probabilité stationnaire $y(1)$ en restriction à G.

A.4. Théorème 2

Soit G un ensemble fini; soit (A', A, A'') une partition de G les ensembles A', A et A'' étant non vides. On considère neuf matrices r', w', v', v, r, w, w'', v'' et r'' indexées respectivement par $A' \times A'$, $A' \times A$, $A' \times A''$, $A \times A'$, $A \times A$,

$A \times A''$, $A'' \times A'$, $A'' \times A$ et $A'' \times A''$. Soit g la matrice indexée par $G \times G$ et définie, en notation par blocs, par :

$$g := \begin{pmatrix} r' & -w' & -v' \\ -v & r & -w \\ -w'' & -v'' & r'' \end{pmatrix}$$

On se donne aussi trois matrices unicolonnes x', x et x'' indexées respectivement par A', A et A''. Soit y', y et y'' trois matrices « inconnues » unicolonnes indexées respectivement par A', A et A''.

On appellera S le système linéaire suivant :

$$S: \quad g \begin{pmatrix} y' \\ y \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ x \\ x'' \end{pmatrix}$$

Autrement dit, le système S est équivalent à l'ensemble des trois relations matricielles $S1$, $S2$ et $S3$ données ci-dessous :

$$S1 \quad r' y' - w' y - v' y'' = x'$$

$$S2 \quad -vy' + ry - wy'' = x$$

$$S3 \quad -w'' y' - v'' y + r'' y'' = x''.$$

On notera u' et u'' les matrices unités associées respectivement à A' et A''.

1° *On suppose que r est une matrice inversible et on appelle m sa matrice inverse. On suppose que les matrices $g' := (r' - w' mv)$ et $g'' := (r'' - v'' mv)$ sont des matrices inversibles et on appelle m' et m'' leurs matrices inverses respectives. On pose :*

$$h' := m' (v' + w' mw) \text{ et } h'' := m'' (w'' + v'' mv).$$

On suppose qu'il existe une matrice unicolonne y'' indexée par A'' telle que :

$$S4 \quad y'' = h'' h' y'' + m'' (x'' + v'' mx) + h'' m' (x' + w' mx)$$

On pose :

$$y' := h' y'' + m' (x' + w' mx)$$

et

$$y := mx + mvy' + mwy''$$

Les matrices unicolonnes y', y et y'' constituent alors une solution du système S.

La suite de l'énoncé de ce théorème donne des conditions suffisantes pour que les hypothèses proposées dans ce 1° soient satisfaites en tout ou en partie.

2° *On suppose que g est une* L-*matrice à diagonale dominante* (*resp. strictement dominante*), *que r est une matrice inversible et que son inverse m est une matrice positive : r', r'', g' et g'' sont alors des L-matrices à diagonale dominante* (*resp. strictement dominante*).

3° *On suppose que g est une* M-*matrice inversible : r, g' et g'' sont alors des M-matrices inversibles.*

4° *On suppose que g est une* μ-*matrice : r, g' et g'' sont alors des* μ-*matrices.*

5° *On suppose que r est une matrice inversible, que sa matrice inverse m est positive et que g est une* L-*matrice à diagonale dominante :* $(u'' - h'' h')$ *est alors une L-matrice à diagonale dominante.*

6° *On suppose que g est une* M-*matrice inversible* (*resp. une* μ-*matrice*) *:* $(u'' - h'' h')$ *est alors aussi une* M-*matrice inversible* (*resp. une* μ-*matrice*) *et le système $S4$ a une et une seule solution y''.*

Preuve : 1° La relation $S2$ se déduit immédiatement de la définition de y. On pose :

$$z := r' y' - w' y - v' y'' - x'$$

et on veut prouver que $z = 0$ (relation $S1$). On remplace d'abord y par sa valeur de définition puis y', ce qui donne successivement

$$z = r' y' - w' mx - w' mvy' - w' mwy'' - v' y'' - x'$$

$$z = g' y' - (v' + w' mw) y'' - (x' + w' mx)$$

$$z = g' h' y'' + x' + w' mx - (v' + w' mw) y'' - (x' + w' mx)$$

$$z = 0 \text{ (d'après la définition de } h')$$

ce qui prouve la relation $S1$.

Par ailleurs, on pose :

$$z' := w'' y' - v'' y + r'' y'' - x''$$

On veut prouver que $z' = 0$. On remplace y par sa valeur de définition puis y' ce qui donne successivement :

$$z' = -(w'' + v'' mv) y' + (r'' - v'' mw) y'' - (x'' + v'' mx)$$

$$m'' z' = -h'' y' + y'' - m'' (x'' + v'' mx)$$

$$m'' z' = -h'' h' y'' - h'' m' (x' + w' mx) + y'' - m'' (x'' + v'' mx)$$

et $S4$ implique $m'' z' = 0$ d'où $z' = 0$, ce qui prouve la relation $S3$ et achève la preuve du 1°.

2° La propriété énoncée au 2° du théorème est évidente pour les matrices r' et r''. De plus, tous les termes autres que ceux de la diagonale des matrices g' et g'' sont négatifs.

Soit s', s et s'' les matrices unicolonnes indexées respectivement par A', A et A'' et dont tous les termes sont égaux à 1.

Si g est à diagonale dominante, on a $r' s' \geqq w' s$ et $rs \geqq vs'$. Les matrices m, w' et v étant positives on a :

$$s = mrs \geqq mvs' \quad \text{d'où} \quad r' s' \geqq w' s \geqq w' mvs'$$

et g' est une L-matrice à diagonale dominante. On montre de même que cette matrice est à diagonale strictement dominante s'il en est ainsi pour g; par ailleurs on étudie g'' exactement de la même façon que g'.

3° En utilisant la propriété P1 rappelée dans les préliminaires, on se ramène au cas où la matrice g est à diagonale strictement dominante : le 3° se déduit alors du 2° qui précède.

4° On suppose que g est une μ-matrice : le 3° qui précède montre que r, g' et g'' sont des M-matrices inversibles; de plus, elles sont à diagonale dominante (*cf.* le 2°); ce sont donc des μ-matrices.

5° On suppose que g est une L-matrice à diagonale dominante, que la matrice r est inversible et que son inverse est une matrice positive. On a alors :

$$r' s' - w' s \geqq v' s'' \qquad \text{et} \qquad rs - vs' \geqq ws''$$

ce qui implique :

$$(v' + w' mw) s'' = v' s'' + w' mws''$$
$$\leqq r' s' - w' s + w' m (rs - vs') \leqq (r' - w' mv) s' = g' s'$$

donc

$$h' s'' \leqq m' g' s' = s'$$

On prouverait de même que $h'' s' \leqq s''$ ce qui implique $h'' h' s'' \leqq h'' s' \leqq s''$ et $(u'' - h'' h')$ est une L-matrice à diagonale dominante (puisque u'' est une L-matrice et que h' et h'' sont des matrices positives).

6° Le 6° se déduit alors du 5° exactement comme les 3° et 4° se déduisaient du 2°.

B. FILE UNIQUE

B.1. Données et interprétation

Soit n et n' deux entiers avec $0 < n < n'$. On appelle J (resp. J', J'') l'ensemble des entiers j tels que $0 \leqq j \leqq n'$ (resp. $0 \leqq j < n$, $n \leqq j \leqq n'$). Soit b, b' et ν trois fonctions définies sur J. On suppose que :

$$b'(0) = 0, \qquad b(n') = 0, \qquad 1 > b(0) > 0, \qquad 1 > b(n') > 0$$

et,

$$\text{pour} \quad 0 < j < n', \qquad b(j) > 0, \qquad b'(j) > 0 \qquad \text{et} \qquad b(j) + b'(j) < 1$$

Soit β la fonction définie sur J par $\beta(n) := 1$ et, quel que soit j, $0 \leqq j < n'$:

$$\beta(j)\, b(j) = \beta(j+1)\, b'(j+1)$$

On construit cette famille β par récurrence croissante pour $j > n$ et par récurrence décroissante pour $j < n$. On pose aussi :

$$\beta' := \sum_{j=0}^{n'} \beta(j).$$

On peut interpréter ce qui précède de la façon suivante : J est l'ensemble des états d'une file unique, l'état de cette file étant caractérisée par le nombre j de clients dans la file. On considère un processus markovien homogène qui admet J comme ensemble d'états et qui évolue à temps discret. On suppose qu'entre t et $(t+1)$ il peut y avoir l'arrivée ou le départ d'un client, le taux d'arrivée (respectivement de départ) d'un client étant $b(j)$ (respectivement $b'(j)$) quand l'état de la file est j; $[1 - b(j) - b'(j)]$ est donc la probabilité qu'il n'y ait pas de changement d'état entre t et $(t+1)$. La famille $\beta(j)/\beta'$ pour j élément de J est la probabilité stationnaire associée à ce processus.

B.2. Théorème 3

On considère les hypothèses et notations données en B.1. soit S' le système suivant d'équations où γ est une fonction « inconnue » définie sur J' :

$$(b'_{n-1}+b_{n-1})\gamma_{n-1}-b'_{n-1}\gamma_{n-2}=\nu_{n-1}$$

$$b_0\gamma_0-b_0\gamma_1=\nu_0 \quad \textit{et, pour } 0<j<n-1:$$

$$(b'_j+b_j)\gamma_j-b'_j\gamma_{j-1}-b_j\gamma_{j+1}=\nu_j.$$

Ce système S' admet une et une seule solution. Plus précisément, posons, pour $0\leqq h\leqq n$:

$$\alpha_h:=\sum_{j=h}^{n-1}\{1/[b_j\beta_j]\}$$

On a alors, pour $0\leqq h<(n-1)$:

$$\gamma_h=\sum_{j=0}^{h}\nu_j\beta_j\alpha_h+\sum_{j=h+1}^{n-1}\nu_j\beta_j\alpha_j$$

et

$$\gamma_{n-1}=\sum_{j=0}^{n-1}\nu_j\beta_j\alpha_{n-1}$$

Vérification : Le système S' est de la forme $\gamma=\eta\gamma+\nu$ où la transposée de η est une matrice positive irréductible. De plus, si i est la matrice unité, $(i-\gamma)$ est une L-matrice à diagonale dominante et, en $(n-1)$, il y a dominance stricte : $(i-\gamma)$ est donc une M-matrice inversible. Notamment, *le système S' a une et une seule solution.* Il suffit donc de vérifier que la famille γ définie à la fin du théorème satisfait au système S'. Compte tenu de cette définition de γ, on a :

$$\gamma_h-\gamma_{h-1}=(\alpha_h-\alpha_{h-1})\left(\sum_{j=0}^{h-1}\nu_j\beta_j\right)$$

$$b'_h(\gamma_h-\gamma_{h-1})=-\frac{b'(h)}{b(h-1)\beta(h-1)}\left(\sum_{j=0}^{h-1}\nu_j\beta_j\right)=-\frac{1}{\beta(h)}\sum_{j=0}^{h-1}\nu_j\beta_j$$

$$b_h(\gamma_h-\gamma_{h+1})=\frac{1}{\beta(h)}\left\{\nu_h\beta_h+\sum_{j=0}^{h-1}\nu_j\beta_j\right\}.$$

On en déduit, en additionnant ces deux relations, que l'équation en h de S' est satisfaite; on a aussi :

$$b_0(\gamma_0-\gamma_1)=\frac{1}{\beta(0)}\nu_0\beta_0$$

ce qui donne la relation de S' associée à $h=0$. Enfin :

$$b'_{n-1}(\gamma_{n-1}-\gamma_{n-2})=-\frac{1}{\beta(n-1)}\sum_{j=0}^{n-2}\nu_j\beta_j$$

et

$$b_{n-1}\gamma_{n-1}=b_{n-1}\alpha_{n-1}\left\{\nu_{n-1}\beta_{n-1}+\sum_{j=0}^{n-2}\nu_j\beta_j\right\}$$

L'addition des deux relations ci-dessus donne l'équation de S' associée à $(n-1)$ puisque l'on a : $\alpha_{n-1}=1/(b_{n-1}\beta_{n-1})$.

B.3. Interprétation et remarques

Considérons la file unique évoquée dans la deuxième partie de B.1. Soit $\nu(j)$ le « coût » entre t et $(t+1)$ quand le processus est dans l'état j à l'instant t; $\gamma(j)$ est alors le coût moyen, quand le processus est dans l'état j, pour $0\leqq j<n$, avant de revenir dans l'état n.

Notamment si on pose $\nu(j):=1$ pour $0\leqq j<n$, $\gamma(j)$ est le délai moyen, quand le processus est dans l'état j, pour $0\leqq j<n$, avant de revenir dans l'état n.

En général, ν est une fonction positive (ou négative !); dans ce cas, les formules qui donnent γ en fonction de ν ne font intervenir que des sommes et des produits de quantités positives.

B.4. Théorème 4

On considère les hypothèses et notations données en B.1. Soit S'' le système suivant d'équations où γ est une fonction « inconnue » définie sur J'' :

$$(b'_n+b_n)\gamma_n-b_n\gamma_{n+1}=\nu_n$$

$$b'_{n'}\gamma_{n'}-b'_{n'}\gamma_{n'-1}=\nu_{n'}\quad \textit{et, pour } n<j<n':$$

$$(b'_j+b_j)\gamma_j-b'_j\gamma_{j-1}-b_j\gamma_{j+1}=\nu_j.$$

Ce système S'' admet une et une seule solution. Plus précisément, posons, pour $n \leqq h \leqq n'$:

$$\alpha'_h := \sum_{j=n}^{h} \{ 1/(b'_j \beta_j) \}$$

On a alors, pour $n \leqq h \leqq n'$:

$$\gamma_h = \sum_{j=n}^{h-1} \nu_j \beta_j \alpha'_j + \sum_{j=h}^{n'} \nu_j \beta_j \alpha'_h.$$

Vérification : On peut déduire ce théorème 4 du théorème 3 par un changement de variable; en fait, il est plus simple de le vérifier directement en procédant comme le théorème 3. Cette vérification est laissée au lecteur.

C. CAS PARTICULIER

C.1. Données et notations

On considère les hypothèses et notations données en B.1 et soit $n'' > 0$.

On appelle E' l'ensemble des couples (j, h) d'entiers positifs avec $j \leqq n'$ et $h \leqq n''$.

Soit f la fonction définie sur E' par :

$$f(j, h) := \inf. \{ n'', \sup. \{ 0, (h+j-n) \} \}$$

Autrement dit :

pour $h+j \leqq n, f(j, h) := 0$

pour $h+j \geqq n+n'', f(j, h) := n''$

pour $n \leqq h+j \leqq n+n'', f(j, h) := h+j-n$

Soit $\hat{s}$ la matrice unicolonne indexée par E' dont tous les termes sont égaux à 1. Soit $\hat{a}$ la matrice indexée par $E' \times E'$ et définie par

$$\hat{a}((j, h), (j', h')) = \begin{cases} (1-b(j)-b'(j)) & si \quad j'=j \quad et \quad h'=f(j, h) \\ b(j) & si \quad j'=j+1 \quad et \quad h'=f(j, h) \\ b'(j) & si \quad j'=j-1 \quad et \quad h'=f(j, h) \\ 0 & dans\ tous\ les\ autres\ cas. \end{cases}$$

$\hat{a}$ est une matrice stochastique ($\hat{a}\hat{s} = \hat{s}$).

Soit $\hat{q}$ la fonction définie sur E' qui satisfait aux deux conditions suivantes ($\hat{q}$ étant considérée comme une matrice uniligne) :

d'une part, $\hat{q}\hat{s}=1$

d'autre part,

$$\hat{q}=\hat{q}\hat{a}. \tag{R}$$

On sait (*cf.*, par exemple, [Gan], [Rev] ou [Sen]) que la famille $\hat{q}$ existe et est unique. Soit E l'ensemble des éléments e de E' tels que $\hat{q}(e)>0$. En restriction à E, $\hat{a}$ est irréductible.

Par ailleurs, pour tout élément (j, h) de E, on pose :

$$\hat{c}(j, h):=\sup.\{0, (h+j-n-n'')\}$$

et on considère $\hat{c}$ comme une matrice unicolonne.

Le problème à résoudre est de donner un algorithme permettant de calculer la quantité $\hat{q}\hat{c}$. Cet algorithme doit être adapté au cas où n et n'' sont assez grands (par exemple $n>30$ et $n''>1000$), $b(j)$ et $b'(j)$ sont assez petits (par exemple $<1/100$) et $p(j, n'')$ est très petit pour $j>n$. *Le système R est alors remarquablement « mal conditionné » :* on peut même le considérer comme un exemple test.

C.2. Remarque

Soit $\beta(j)$, pour $0\leqq j\leqq n'$, la famille de nombres positifs définie en B.1.

D'une part, quel que soit j, $0\leqq j\leqq n'$, on a :

$$\sum_{h=0}^{n''} p(j, h)=\beta(j)/\beta'$$

D'autre part, pour $j\leqq n$, on a :

$$p(j, 0)=p(n, 0)\,\beta(j)$$

et, pour $j\geqq n$:

$$p(j, n'')=p(n, n'')\,\beta(j)$$

Ces trois propriétés se déduisent immédiatement de l'étude classique d'une file unique (« processus de naissances et de morts généralisé »).

C.3. Modèle expérimental

On considère un ensemble de stations émettrices : pour simplifier l'étude, on suppose que ces stations sont identiques. A un instant donné, soit j le nombre de ces stations qui sont actives. On étudie l'évolution à temps discret, c'est-à-dire aux instants t, $t+1$, $t+2$, etc. Soit b_j(resp. b'_j) la probabilité pour qu'il y ait une station active de plus (resp. de moins) à l'instant $(t+1)$ s'il y en a j à l'instant t.

On suppose qu'entre t et $(t+1)$ chaque station active envoie un et un seul message; tous les messages arrivent à un même « standard » qui peut en écouler n entre t et $(t+1)$. *Si le nombre de stations actives est strictement supérieur à n, les messages « en trop » sont stockés dans une « mémoire tampon » (un buffer) qui peut contenir n'' messages.*

Quand le tampon est plein, les messages « en trop » sont perdus. Quand le nombre de stations actives est strictement inférieur à n, le standard écoule des messages en attente dans le tampon en fonction des places disponibles.

Un état e est caractérisé par un couple (j, h) où j est le nombre de stations actives et h le nombre de messages en attente dans le tampon.

Le modèle probabiliste associé au contexte expérimental que l'on vient de décrire est une chaîne de Markov X à temps discret qui admet E comme ensemble d'états. Son évolution est caractérisée par le fait que, quel que soit l'instant t :

$$\text{Proba}\,[X_{t+1}=e' \text{ sachant } X_t=e]=\hat{a}(e, e')$$

La famille $\hat{q}$ définie précédemment est la probabilité stationnaire de cette chaîne de Markov X. Si X est dans l'état e à l'instant t, $\hat{c}(e)$ est le nombre de messages perdus entre l'instant t et l'instant $t+1$.

C.4. Cœur de l'algorithme

1° Rappelons (*cf*. la fin de C.1) que le *problème posé est de calculer la quantité $\hat{q}\hat{c}$*. Pour cela on utilise d'abord le *théorème* 1 de la section A.2 *en choisissant* $\hat{e}:=(n, 0)$ (c'est-à-dire le cas où le buffer est vide et où il y a n stations émettrices actives). Le problème est alors de calculer les quantités $a_3\, a'\, c_1$ et $a_3\, a'\, s_1$.

Notons que $a_3(e)=\hat{a}(\hat{e}, e)$ donc $a_3(e)=0$ sauf $a_3(n-1, 0)=b'(n)$ et $a_3(n+1, 0)=b(n)$.

En résumé pour cette première étape, on a (puisque $c_2=0$) :

$$\hat{q}\hat{c}=\xi/\xi' \textit{ avec}$$

$$\xi:=b'(n)(a'c_1)(n-1,0)+b(n)(a'c_1)(n+1,0)$$

$$\xi':=b'(n)(a's_1)(n-1,0)+b(n)(a's_1)(n+1,0)+1$$

où, par exemple, $(a'c_1)(n-1,0)$ désigne la valeur en $(n-1,0)$ de la matrice unicolonne $a'c_1$.

2° Écrivons

$$\hat{x}=\begin{pmatrix} x' \\ x \\ x'' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{y}=\begin{pmatrix} y' \\ y \\ y'' \end{pmatrix}$$

Compte tenu du 1° ci-dessus, le problème est de calculer $a'\hat{x}$ avec $\hat{x}=c(1)$ d'une part et $\hat{x}=s(1)$ d'autre part. En fait, seules interviennent les valeurs de $a'\hat{x}$ en $(n-1,0)$ et $(n+1,0)$.

On utilise alors le théorème 2 de la section A.4 : rappelons que $g=u(1)-a(1)$ et que a' est la matrice inverse de g; autrement dit, $a'x$ est la solution $\hat{y}$ du système $S:g\hat{y}=\hat{x}$. Pour la commodité du lecteur et faciliter les explications ultérieures, explicitons les équations du système S (rappelons que la fonction f a été définie en C.1).

3° Le système S s'écrit : pour tout élément (j,h) de G, on a :

$$\hat{y}(j,h)=\hat{x}(j,h)+(1-b_j-b'_j)\hat{y}[j,f(j,h)]+b_j\hat{y}[j+1,f(j,h)]+b'_j\hat{y}[j-1,f(j,h)]$$

avec la convention $\hat{y}(n,0)=0$.

4° La matrice g associée à ce système est une μ-matrice (situation classique : *cf.*, par exemple, [Rev]). Toutes les hypothèses proposées dans le théorème 2 sont donc satisfaites; notamment, le système $S4$ a une et une seule solution (quel que soit $\hat{x}$) et résoudre ce système $S4$ est une étape cruciale de la résolution de S.

C.5. Potentiel

1° Résoudre le système $S4$ c'est inverser l'opérateur $(u''-h''h')$: dans le cas ici considéré, le plus simple et le plus efficace est d'utiliser la « technique du potentiel » (*cf.*, par exemple [Rev]), c'est-à-dire d'utiliser le fait que l'inverse de la matrice $(u''-h''h')$ vaut :

$$\sum_{k=0}^{\infty} (h''h')^k$$

En effet, si les fonctions b et b' sont « petites », cette série converge très rapidement.

2° Pour alléger les notations, posons :

$$\lambda' := m'(x'+w'mx) \qquad \text{et} \qquad \lambda'' := m''(x''+v''mx)$$
$$\varphi' := m'w'm \qquad \text{et} \qquad \varphi'' := m''v''m$$

Dans le cas considéré ici les matrices v' et w'' sont nulles et on a :

$$h' = \varphi' w \qquad \text{et} \qquad h'' = \varphi'' v$$

3° Le système $S4$ implique :

$$y'' = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi'' v \varphi' w)^k \right\} (\lambda'' + \varphi'' v \lambda')$$
$$y' = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi' w \varphi'' v)^k \right\} (\lambda' + \varphi' w \lambda'')$$

Les applications qui à x' et x'' associent vx' et wx'' respectivement sont immédiates à implémenter : plus précisément :

$$(vx')(n, h) = b'_n x'(n-1, h) \,\text{et}\, (wx'')(n, h) = b_n x''(n+1, h)$$

Pour calculer y' et y'', il suffit donc de savoir déterminer λ', λ'' et les applications qui à x associent $\varphi' x$ et $\varphi'' x$ respectivement.

C.6. λ', λ'' et les opérateurs φ' et φ''

Considérons *a priori* le système S' suivant :

$$S': \begin{pmatrix} r' & -w' \\ -v & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ x \end{pmatrix}.$$

Un calcul élémentaire montre que ceci implique :

$$y' = m'(x'+w'mx)$$

Ceci montre d'abord que λ' est la restriction à A' de la solution de S'; de plus, $\varphi' x$ est la restriction à A' de la solution du système S' où on a imposé $x'=0$.

De façon analogue, considérons *a priori* le système S'' suivant :

$$S'': \begin{pmatrix} r & -w \\ -v'' & r'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x'' \end{pmatrix}.$$

On vérifie comme ci-dessus que λ'' est la restriction à A'' de la solution de S''. De plus, $\varphi'' x$ est la restriction à A'' de la solution du système S'' où on a imposé $x''=0$.

On a donc ramené le calcul de y' et y'' à la résolution des systèmes S' et S''. Notons d'ailleurs que, une fois que le système S' est résolu et pour les calculs ultérieurs, seules interviennent les valeurs de y' pour les états de la forme $(n-1, h)$, $0 \leqq h \leqq n''$. La remarque analogue vaut pour S''.

C.7. Résolution de S' et S''

1° Considérons d'abord le système S'. D'une part ce système est facile à expliciter puisque c'est une partie des équations du système S (*cf.* C.4, 3°) où on a supprimé certains termes. De plus, dans le cas de l'exemple ici considéré, ce système admet une résolution simple, rapide, explicite et robuste.

2° Dans un premier temps, considérons la restriction de S' à l'ensemble des états de la forme $(j, 0)$ avec $0 \leqq j < n$: les équations de cette restriction ne font intervenir que les valeurs de $\hat{y}$ sur ce même domaine. De plus, elles ont exactement la forme considérée au théorème 3 de la section B.2. On connaît donc la solution explicite de ces équations.

3° On procède ensuite par récurrence croissante sur h : en effet, la simple écriture des équations de S', pour $h>0$ et $j<n$, montre que les valeurs de $\hat{y}(j, h)$ s'expriment directement explicitement en fonction des valeurs de $\hat{y}(j', h')$ avec $h'<h$. Pour chaque valeur de h, on calcule $\hat{y}(n, h)$ une fois que l'on connaît $\hat{y}(n-1, h)$.

4° La résolution du système S'' est tout à fait analogue. On commence par calculer la solution de la restriction de ce système S'' à l'ensemble des états de la forme (j, n'') avec $n \leqq j \leqq n'$ en utilisant le théorème 4 de la section B.4. Ensuite on procède par récurrence décroissante sur h.

C.8. Remarque

On vérifie facilement que, pour toute matrice unicolonne x indexée par A, on a :

$$(\varphi' x)(n-1, 0)=0$$

La « contribution » de $\varphi' x$ quand on multiplie « à gauche » par la matrice $a(3)$ est donc nulle, ce qui implique que :

$$a_3\begin{pmatrix} y' \\ y \\ 0 \end{pmatrix}=a_3\begin{pmatrix} \lambda' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad g\begin{pmatrix} y' \\ y \\ y'' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ x \\ x'' \end{pmatrix}$$

Ceci permet de simplifier légèrement l'algorithme de calcul de y' et y'' : plus précisément, dans la résolution de S' et pour $k \geqq 1$ (donc sauf pour le calcul de λ') les valeurs pour les états de la forme $(j, 0)$ avec $j<n$ sont nulles.

Cette simplification, est très spécifique et liée au choix de $\hat{e}$. Son principal intérêt est de donner, sous une forme analytique simple (*cf*. le théorème 3), la valeur exacte de la contribution de $y'(n-1, 0)$ dans le calcul final.

D. EXPLOITATION ET COMPLÉMENTS

D.1. Un jeu de paramètres

Le programme informatique associé à l'exemple introduit en B.1 et C.1 a été implémenté sur un Amstrad 2086 non muni de calculateur particulier. Pour de petites valeurs de n' et n'', ce programme a été vérifié par comparaison avec une résolution directe du système $\hat{q}\hat{a}=\hat{q}$ et $\hat{q}\hat{s}=1$.

On a notamment considéré le cas où les taux b et b' sont définis comme suit :

$$b(j):=\tau(n+\sigma-j)^{+}+\tau''$$
$$b'(j):=\tau' j$$

où σ est un entier, $\sigma>0$, et τ, τ' et τ'' sont trois réels positifs tels que les conditions données en B.1. soient satisfaites.

Par exemple, on a considéré le cas $n=40$, $n'=50$, $\sigma=5$, $\tau=\tau'=5.10^{-4}$ et $\tau''=\tau/10$. Dans ce cas, il faut choisir (exactement) $n''=154$ (n'' est la taille du buffer) pour avoir $\hat{a}\hat{c}<10^{-9}$. De plus, dans le développement en série introduit en C.5, le rapport entre deux termes successifs est de l'ordre de

1/10 : il suffit donc de prendre $k=0$ pour avoir un ordre de grandeur de $\hat{a}\hat{c}$ (rappelons que, pour $k=0$, cette quantité est presque donnée explicitement) et il suffit de prendre $k=3$ pour décider que $n''=155$ suffit et $n''=154$ ne suffit pas (pour avoir $\hat{a}\hat{q}<10^{-9}$). *Le temps total d'exécution est d'environ k minutes* (rappelons que l'on a utilisé un petit « micro de bureau »). *Le nombre total d'états est* $156\times 51=7.956$ *:* c'est le nombre d'inconnus du système $\hat{q}\hat{a}=\hat{q}$ à résoudre.

Dans ce cas, *la taille mémoire totale utilisée est inférieure à* 10 000 *chiffres*; de plus, la très grande stabilité des calculs fait que le résultat obtenu ne varie pas (avec l'erreur relative liée au micro utilisé) quand on exploite ce même programme sur un micro plus puissant qui opère en double précision.

D.2. Interprétation

Le jeu de paramètres considéré en D.1 ci-dessus peut être interprété de la façon suivante : on modélise un multiplexeur asynchrone qui dispose de $n=40$ canaux de transmission; un grand nombre de stations « identiques » peuvent accéder à ce multiplexeur; un mécanisme interne fait qu'une *ligne virtuelle* est attribuée à chaque station qui le demande tant que le nombre total de telles stations est inférieur ou égal à $(n+\sigma)$: nous dirons que ces stations sont les *stations éveillées*. En plus de cette charge « normale », il peut y avoir des *stations prioritaires* dont on ne peut pas refuser l'accès.

On observe l'évolution en période de saturation, c'est-à-dire quand il y a $(n+\sigma)$ stations éveillées sans compter les stations prioritaires. *On suppose que chaque station éveillée a deux états possibles : actif et inactif; j est le nombre de stations actives* (lesquelles sont, *a fortiori*, éveillées). On suppose, ce qui est (presque) toujours le cas que l'écoulement du trafic est rapide par rapport à la variation de l'état des stations.

On découpe alors le temps en intervalles égaux, que l'on appellera slots, suffisamment courts pour que la probabilité d'avoir deux stations qui changent d'état au cours d'un même slot soit relativement négligeable : attention, ceci est un choix de modélisation mathématique relativement indépendant de la situation technologique étudiée.

τ (resp. τ') est la probabilité pour une station de passer de l'état inactif (resp. actif) à l'état actif (resp. inactif) au cours d'un slot : il faut donc avoir τ et τ' relativement négligeables par rapport à 1. En D.1 on a choisi $\tau=\tau'$ (cas d'un échange téléphonique par exemple). Quand le nombre de stations actives est supérieur à $(n+\sigma)$ un mécanisme interne empêche les autres stations de devenir actives, à l'exception des stations prioritaires. La probabilité d'avoir une nouvelle station prioritaire active durant un slot est τ''.

Durant chaque slot, le multiplexeur écoule n messages et reçoit j messages, j étant le nombre de stations actives. Plus précisément, dans ce qui suit, on appelle message la quantité d'information qu'un canal transmet au cours d'un slot : cette quantité dépend donc évidemment de l'unité de temps (le slot) que l'on a choisie. Quand j est strictement supérieur à n, les messages que l'on ne peut pas écouler sont stockés dans le buffer : quand le buffer est saturé, les messages « en trop » sont perdus. *Le problème posé est d'évaluer le nombre moyen de messages perdus.*

*Dans la situation considérée en D.*1, *un buffer de* 155 *places est le prix à payer pour que le nombre moyen de messages perdus reste inférieur à* 10^{-9} *tout en assurant un débit potentiel de* 45 *messages par slot, au lieu de* 44.

D.3. Stations contrastées

Dans ce qui précède, supposer que les stations sont identiques, ou, tout du moins, ont des comportements analogues, est une hypothèse essentielle. En fait, on a souvent la superposition de flux à haut débit et de flux à faible débit, le rapport entre les débits de ces deux flux étant supérieur à cent. Dans ce cas, et relativement au problème posé, il n'y a pas intérêt à choisir une modélisation markovienne qui prenne en compte simultanément ces deux flux.

Contrairement aux modélisations habituelles, il semble mathématiquement préférable de commencer par modéliser uniquement les flux à haut débit puis, en fonction de la place qu'ils laissent disponible, étudier les flux à faible débit; ceci permet dans chacun de ces deux cas d'adapter séparément l'ordre de grandeur des paramètres à la situation considérée.

D.4. Compléments

Dans le modèle proposé en D.1, il faut bien différencier les hypothèses contraignantes des autres. Par exemple, supposer que la probabilité de changer d'état (actif-inactif) pour une station éveillée durant un slot est « markovienne », c'est-à-dire ne dépend pas du passé, n'est pas une hypothèse contraignante car le mélange des stations, même si elles ne sont pas rigoureusement identiques, fait que, globalement, cette hypothèse est très bien satisfaite. De même on pourrait facilement, avec des modifications évidentes, adapter le programme informatique mis au point au cas où les probabilités de changements d'état des stations dépendent de h, le nombre de places occupées dans le buffer. Supposer qu'il ne peut pas y avoir deux stations qui changent d'état simultanément n'est pas non plus une restriction dans la mesure où cette éventualité a une probabilité faible (sauf si la taille du buffer n'est que de quelques unités).

Par contre, nous avons supposé que, pour $j > n + \sigma$, les stations éveillées inactives ne peuvent pas se réactiver ce qui est une forte restriction. S'il y a des stations prioritaires et si on veut lever cette restriction, l'ensemble J des stations doit distinguer les stations éveillées normales des stations prioritaires : le programme informatique actuellement mis au point ne permet pas de prendre en compte cette situation. Par contre la méthode générale proposée pourrait être utilisée mais il faudrait remplacer le point unique $\hat{e}$ par l'ensemble des états pour lesquels le buffer est vide et le nombre de stations actives vaut n et effectuer les adaptations associées.

CONCLUSION

L'étude des pertes de messages dues à la capacité insuffisante d'un buffer fait intervenir un système linéaire exceptionnellement mal conditionné. Cependant, on donne un algorithme de résolution de ce système qui est complètement explicite, qui ne fait intervenir aucune soustraction, et qui n'utilise que des sommes, des produits ou des quotients de termes positifs. Enfin, le nombre total de ces opérations est peu élevé.

Cette résolution repose sur plusieurs théorèmes concernant les M-matrices : le domaine d'utilisation potentielle de ces théorèmes dépasse largement l'exemple particulier évoqué ci-dessus.

Compte tenu de sa simplicité et de son efficacité, la méthode proposée pourrait être étendue à une situation plus générale que celle considérée dans ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

[BeP] R. Bellamine et J. Pellaumail, Opérateurs positifs et probabilités stationnaires, *R.A.I.R.O., Rech. Opér.*, 1989, 3.

[BP] A. Berman et R. J. Plemmons, Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences, Academic Press, 1979.

[Boy] P. Boyer, Bearer capabilities in ATM networks, Race 1022 workshop, Paris, October 1989, C.N.E.T., Lannion.

[Chu] K. L. Chung, Markov Chains with Stationary Transition Probabilities, *Springer-Verlag*, 1967.

[Duf] I. S. DUFF, Research Direction in Sparse Matrix Computations, *Stud. Math.*, 1984, *24*, p. 83-139, Springer-Verlag.

[Gan] F. R. GANTMACHER, Théorie des matrices, *Dunod*, Paris, 1966.

[GoM] G. H. GOLUB et G. A. MEURANT, Résolution numérique des grands systèmes linéaires, *Eyrolles*, Paris, 1983.

[GoV] G. H. GOLUB et C. F. VAN LOAN, Matrix Computations, *The Johns Hopkins University press*, 1983.

[HeG] G. HEBUTERNE, A. GRAVEY, A Space-Priority Queueing Mechanism for Multiplexing ATM Channels, *I.T.C. Specialist Seminar*, Adelaide, September 1989.

[Leb] J. Y. LE BOUDEC, An efficient solution method for Markov models of ATM links with loss priorities, *IEEE J. Commun.*, 1991, *9*, 3.

[LJG] G. LATOUCHE, P. A. JACOBS, D. P. GAVER, Finite Markov chain skip free in one direction, *Naval Res. Logist.*, *Quarterly*, *31*, 1984, p. 571-588.

[Neu] M. F. NEUTS, 1. Matrix-geometric Solutions in Stochastic Models, *The Johns Hopkins University Press*, London, 1981. 2. Structured Stochastic Matrices of M/G/1 Type and their Applications, *Marcel Dekker*, 1989.

[Pel] J. PELLAUMAIL, Graphes et probabilités stationnaires, *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1990, *26*, 1.

[Pel1] J. PELLAUMAIL, Décomposition de L-matrices et probabilités stationnaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1991, *312*, série I, p. 459-462.

[Rev] D. REVUZ, Markov Chains, *North-Holland*, 1975.

[Sen] E. SENETA, Non-Negative Matrices and Markov Chains, *Springer-Verlag*, 1981.

[Wu] J. Y. WU, Contribution à l'étude d'une chaîne de télécommunication privée haut débit à intégration de service, Projet de thèse, 1991.