RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

SERGE DUBUC

MONIQUE TANGUAY

Déplacement de matériel continu unidimensionnel à moindre coût

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 20, nº 2 (1986), p. 139-161

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1986__20_2_139_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 20, n° 2, mai 1986, p. 139 à 161)

DÉPLACEMENT DE MATÉRIEL CONTINU UNIDIMENSIONNEL A MOINDRE COÛT (*)

par Serge DUBUC ([1]) et Monique TANGUAY ([2])

Résumé. — *Nous traitons d'abord de problèmes de transport dont la fonction de coût est composée sous la forme $c(f(x), g(y))$. Nous indiquons comment on peut réduire de tels problèmes. Par la suite, nous proposons et comparons deux algorithmes pour résoudre numériquement le problème de Kantorovitch pour des masses situées sur l'axe réel. Lorsque $2n$ variables duales sont utilisées, la précision des algorithmes est dans bien des cas de l'ordre de $1/n^2$. L'exécution de ces méthodes est très efficace pour un coût composé avec une fonction quasi monotone.*

Mots clés : Programmation continu; problèmes de transport.

Abstract. — *We study transportation problems whose cost function is of the type $c(f(x), g(y))$. We give a way to reduce such problems. Afterwards, two algorithms for the numerical solution of Kantorovitch's problem are presented and compared when masses lie in intervals. If $2n$ dual variables are used, both algorithms are precise with the order of $1/n^2$ in most cases. These methods are especially efficient when the cost function, up to a change of variable, is quasi-monotone.*

Keywords: Continuous programs; transportation problems.

1. INTRODUCTION

Nous traitons du problème de transport des masses de Kantorovitch [9]. Soient deux espaces compacts X et Y munis de mesures respectives μ et ν où $\mu(X)=\nu(Y)$, soit $c(x,y)$ une fonction continue sur l'espace-produit $X\times Y$, $c(x,y)$ désigne le coût de transport d'une unité de matériel du point x au point y, on recherche une mesure σ sur l'espace-produit $X\times Y$ de marges μ et ν telle que le coût total de transport:

$$\gamma=\iint c(x,y)\,d\sigma(x,y)$$

soit minimal. Le problème dual consiste à maximiser la valeur:

$$\gamma^*=\int u(x)\,d\mu(x)+\int v(y)\,d\nu(y)$$

(*) Reçu avril 1985.
([1]) Département de Mathématiques et de Statistique, Université de Montréal, C. P. 6128, succ. « A », Montréal, Québec, Canada H3C 3J7.
([2]) Recherche en prévision numérique, Environnement (service atmosphérique), 5e étage, 2121 route transcanadienne, Dorval, Québec, Canada H3P IJ3.

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research, 0399-0559/86/01 139 23/$ 4.30

pour deux fonctions continues u et v définies respectivement sur X et Y, soumises aux contraintes $u(x)+v(y) \leqq c(x, y)$. Ces deux problèmes sont équivalents en ce sens qu'ils admettent tous deux une solution et $Y = Y^*$.

Le problème de transport a une longue histoire. En 1781, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, Monge a fait l'étude de ce problème. Ses travaux très géométriques ont été poursuivis par Appell [2, 3] en 1887. Au tournant des années quarante, la variante discrète du problème de transport a été formulée par Hitchcock [8] et Kantorovitch [9] développait la version continue sous la forme actuelle.

L'organisation de cet article procède comme suit. Après quelques rappels sur le problème de Kantorovitch, nous traitons de problèmes de transport dont la fonction de coût est composée sous la forme $c(f(x), g(y))$. Dans un tel cas, on peut réduire le problème initial de transport à l'aide des fonctions $f(x)$ et $g(y)$. Dans un exemple, nous illustrons cette réduction. Par la suite, nous proposons et comparons deux algorithmes pour résoudre numériquement le problème de Kantorovich lorsque X et Y sont des intervalles. Le calcul de l'ordre de convergence des algorithmes dépendra de deux propriétés: premièrement la concavité des fonctions duales optimales pour une fonction de coût concave, deuxièmement la présence cachée de formules de quadrature qui sont des règles du trapèze. Lorsque $2n$ variables duales sont utilisées, la précision des algorithmes est dans bien des cas de l'ordre de $1/n^2$. Enfin, nous indiquerons que les calculs se font très rapidement pour un coût composé avec une fonction quasi-monotone.

2. RAPPELS

Dans cette section, nous rappelons les résultats dont nous aurons besoin à l'égard du problème de transport de Kantorovitch. Ce sera aussi l'occasion de fixer la notation que nous emploierons. Soient deux espaces compacts X et Y munis de mesures respectives μ et ν où $\mu(X) = \nu(Y)$, on désignera par $\Sigma(\mu, \nu)$ la totalité des mesures sur $X \times Y$ dont μ et ν sont les marges respectives: σ est une mesure de $\Sigma(\mu, \nu)$ si pour tout compact K de X et pour tout compact L de Y, $\sigma(K \times Y) = \mu(K)$ et $\sigma(X \times L) = \nu(L)$. Ceci revient à supposer que pour tout couple de fonctions continues $u(x)$ et $v(y)$, l'une définie sur X, l'autre sur Y:

$$\iint u(x)\, d\sigma(x, y) = \int u(x)\, d\mu(x)$$

et

$$\iint v(y)\, d\sigma(x, y) = \int v(y)\, d\nu(y).$$

Si $c(x, y)$ est une fonction continue dite de coût sur l'espace-produit $X \times Y$, le problème de Kantorovitch est le programme continu primal:

$$\gamma = \inf \left\{ \iint c(x, y)\, d\sigma(x, y) : \sigma \in \Sigma(\mu, \nu) \right\}. \tag{1}$$

Si le coût de transport $\iint c(x, y)\, d\sigma_0(x, y)$ d'une mesure σ_0 sur l'espace-produit $X \times Y$ de marges μ et ν est γ, on dit que σ_0 est optimal. Kantorovitch [9] a montré que l'existence d'une mesure optimale est toujours assurée.

On entend par partage (continu) des coûts un couple de fonctions continues $u(x)$ et $v(y)$ définies respectivement sur X et sur Y tel que pour tout x et y, $u(x) + v(y) \leqq c(x, y)$. On notera par $P(c)$ l'ensemble des partages des coûts. Le problème dual est le problème de maximum:

$$\gamma^* = \sup \left\{ \int u(x)\, d\mu(x) + \int v(y)\, d\nu(y) : (u, v) \in P(c) \right\}. \tag{2}$$

On dira de deux fonctions u_0 et v_0 qu'elles sont optimales si $(u_0, v_0) \in P(c)$ et si $\int u_0(x)\, d\mu(x) + \int v_0(y)\, d\nu(y) = \gamma^*$. Dubuc et Tanguay [5] ont démontré que l'existence de fonctions duales optimales est toujours assurée. Les problèmes (1) et (2) sont équivalents en ce sens que $\gamma = \gamma^*$. Pour une discussion plus complète, nous renvoyons à Kretschmer [10], Levin et Milyutin [11], Dubuc et Tanguay [5].

Nous rappelons la définition du support d'une mesure. Si σ est une mesure sur un espace topologique, le support de la mesure est formé de tous les points p tels que σ ne s'annulle sur aucun des voisinages de p. La notation de ce support sera S_σ.

3. COÛTS COMPOSÉS ET RÉDUCTION DE PROGRAMMES DE TRANSPORT

Soient deux espaces compacts de probabilités, (X, μ) et (Y, ν), soient $f(x)$ et $g(y)$ deux fonctions continues définies respectivement sur X et Y et dont les valeurs sont prises respectivement dans des espaces compacts R et S et soit $c(r, s)$ une fonction continue définie sur $R \times S$, on dira que la fonction définie sur $X \times Y$, $c(f(x), g(y))$ est une fonction composée de coûts. Les fonctions f et g induisent des mesures α et β sur R et S respectivement : si A est un compact de R et si B est un compact de S :

$$\alpha(A)=\mu\{x: f(x) \in A\} \quad \text{et} \quad \beta(B)=\nu\{y: g(y) \in B\}.$$

Partant de cette notation, on peut exposer deux problèmes de transport :

$$\gamma=\inf\left\{\iint c(r, s)\, d\rho(r, s): \rho \in \Sigma(\alpha, \beta)\right\}. \tag{3}$$

$$\gamma'=\inf\left\{\iint c(f(x), g(y))\, d\sigma(x, y): \sigma \in \Sigma(\mu, \nu)\right\}. \tag{3'}$$

THÉORÈME 1 : *Les deux problèmes* (3) *et* (3′) *sont équivalents au sens que* $\gamma=\gamma'$. *D'une façon plus précise, supposons que* ρ_0 *est une mesure optimale pour le programme* (3), *alors* :

(*a*) *il existe une mesure* σ *de marques* μ, ν *dont le support est contenu dans* $\{(x, y): (f(x), g(y)) \in S_{\rho_0}\}$.

(*b*) *si* σ *est une mesure de marges* μ, ν *dont le support est contenu dans* $\{(x, y): (f(x), g(y)) \in S_{\rho_0}\}$, alors σ est une mesure optimale pour le programme (3′).

Démonstration : Vérifions d'abord que $\gamma \leqq \gamma'$. Soit σ_0 une mesure optimale pour le programme (3′), désignons par ρ l'image de la mesure σ_0 par l'application $(x, y) \to (f(x), g(y))$: pour toute partie compacte C de $R \times S$:

$$\rho(C)=\sigma_0\{(x, y): (f(x), g(y)) \in C\}.$$

Il est facile de vérifier que les marges respectives de ρ sont α et β. On obtient donc l'inégalité :

$$\gamma \leqq \iint c(r, s)\, d\rho(r, s)=\iint c(f(x), g(y))\, d\sigma_0(x, y)=\gamma'.$$

Avant de vérifier la validité de la partie (*a*), citons la conséquence suivante du théorème 11 de Strassen [12]. Si $\{X, \mu\}$ et $\{Y, \nu\}$ sont deux espaces de probabilités, si K est un compact de $X \times Y$, la condition nécessaire et suffisante pour que K porte une probabilité de marges respectives μ et ν est que pour tout couple de compacts (A, B), le premier de x, le second de Y, alors $\mu(A)+\nu(B) \leqq 1$ lorsque $A \times B$ ne rencontre pas K.

Soit ρ_0 une mesure optimale du problème (3), désignons par K le support de ρ_0 et par $L=\{(x, y):(f(x), g(y))\in K\}$. Soient A et B deux compacts, le premier dans X, le second dans Y, tels que $A\times B$ ne rencontre pas L, $f(A)\times g(B)$ ne peut pas rencontrer K. Par le théorème de Strassen $\alpha(f(A))+B(g(B))\leqq 1$. Or $\alpha(f(A))$ est la mesure μ de l'image inverse de $f(A)$ par f, cette image inverse recouvre A. D'où $\mu(A)\leqq\alpha(f(A))$. Il est aussi vrai que $\nu(B)\leqq\beta(g(B))$. La condition $\mu(A)+\nu(B)\leqq 1$ est donc remplie. Un second appel au théorème de Strassen montre donc que L porte une mesure dont les marges respectives sont μ et ν.

Procédons maintenant à la démonstration de la partie (b). Prenons deux fonctions duales optimales u et v pour le programme (3):

$$u(r)+v(s)\leqq c(r, s) \qquad \text{et} \qquad \int u(r)\,d\alpha(r)+\int v(s)\,d\beta(s)=\gamma.$$

Il devient nécessaire que $u(r)+v(s)=c(r, s)$ si $(r, s)\in S_{\rho_0}$. Soit σ une mesure de $X\times Y$ concentrée sur $\{(x, y):(f(x), g(y))\in S_{\rho_0}\}$. Ainsi:

$$\begin{aligned}\iint c(r, s)\,d\rho_0(r, s)&=\int u(r)\,d\alpha(r)+\int v(s)\,d\beta(s)\\&=\int u(f(x))\,d\mu(x)+\int v(g(y))\,d\nu(y)=\iint c(f(x), g(y))\,d\sigma(x, y)\end{aligned}$$

La dernière identité vient du fait que pour tout (x, y) du support de σ, $u(f(x))+v(g(y))=c(f(x), g(y)))$. On a donc montré que:

$$\gamma=\iint c(r, s)\,d\rho_0(r, s)=\iint c(f(x), g(y))\,d\sigma(x, y)\geqq\gamma'.$$

Puisque nous avons déjà montré que $\gamma\leqq\gamma'$, γ et γ' sont égaux. ■

4. ILLUSTRATION DE LA RÉDUCTION

Rappelons d'abord la définition de fonctions quasi monotones. Une fonction $c(x, y)$ de deux variables est dite quasi monotone, si pour tout choix de deux points du plan (x, y) et (x', y') tels que $x\leqq x'$ et $y\leqq y'$, alors:

$$c(x, y)-c(x', y)-c(x, y')+c(x', y')\geqq 0.$$

Considérons deux espaces compacts de probabilités $\{X, \mu\}$ et $\{Y, \nu\}$ ainsi que deux fonctions continues réelles $f(x)$ et $g(y)$ définies respectivement sur

X et Y. Si $c(r, s)$ est une fonction quasi-monotone, le problème primal qui nous intéresse est le problème (3′) de minimiser

$$\iint c(f(x), g(y))\, d\sigma(x, y).$$

Désignons par R l'image de X par f, par α l'image de μ par f, par S l'image de Y par g, par β l'image de ν par g. Selon le théorème 1, le problème (3′) se réduit au problème (3) de minimiser $\iint c(r, s)\, d\rho(r, s)$.

Comme R et S sont des parties compactes de la droite réelle, on peut définir les fonctions de répartition $F(r)$ et $G(s)$ associées respectivement à α et β. On peut associer à la mesure plane ρ la fonction de répartition plane $H(r, s)$. Le problème (3) devient :

$$\gamma = \inf\left\{ \iint c(x, y)\, dH(x, y) : H \text{ admet } F \text{ et } G \text{ comme marges} \right\} \tag{4}$$

Or le problème (4) admet une solution très explicite comme en fait foi le prochain théorème.

Théorème(Cambanis, Simons et Stout [4], Tchen [13]) : *Si $F(x)$ et $G(y)$ sont deux fonctions de répartitions et si $c(x, y)$ est une fonction quasi monotone, bornée et continue à droite, la fonction de répartition $H_0(x, y) = \max(0, F(x) + G(y) - 1)$ est une solution optimale au problème* (4).

Ce théorème joint au théorème 1 fournit le résultat suivant.

Théorème2: *Soient (X, μ) et (Y, ν) deux espaces compacts de probabilités, soient $f(x)$ et $g(y)$ deux fonctions continues réelles définies respectivement sur X et Y et soit $c(r, s)$ une fonction continue, quasi monotone, définie sur le plan cartésien, on pose $F(r) = \mu\{x : f(x) \leqq r\}$, $G(s) = \nu\{y : g(y) \leqq s\}$ et $H_0(r, s) = \max(0, F(r) + G(s) - 1)$. Toute mesure σ_0 de marges μ et ν concentrée sur le compact: $\{(x, y) : (f(x), g(y)) \in S_{H_0}\}$ est solution du problème primal* (3′).

Remarque: En général, le support de H_0 est constitué des points (x, y) tels que pour tout $\delta > 0$, $H_0(x + \delta, y + \delta) > H_0(x - \delta, y - \delta)$. Si $F(a) = 0$, $F(b) = 1$, $G(c) = 0$ et $G(d) = 1$ et si F et G sont continues et croissantes sur les intervalles respectifs $[a, b]$ et $[c, d]$, alors le support de H_0 n'est rien d'autre que la courbe du rectangle $[a, b] \times [c, d]$ d'équation $F(x) + G(y) = 1$.

Exemples: Illustrons le dernier théorème par trois exemples. Les deux premiers sont simples. Dans le premier cas, prenons pour X un intervalle $[a, b]$, pour Y un intervalle symétrique $[-d, d]$ et une fonction de coût $\varphi(x, y)$

telle que partout dans le rectangle $X \times Y$, la dérivée seconde mixte de φ est non positive. La fonction $c(x, y) = \varphi(x, -y)$ est quasi-monotone. Appliquons le dernier résultat avec $f(x) = x$ et $g(y) = -y$ au problème primal de minimiser :

$$\iint c(f(x), g(y))\, d\sigma(x, y) = \iint \varphi(x, y)\, d\sigma(x, y)$$

où $\sigma \in \Sigma(\mu, \nu)$. Si $\mu(x)$ et $\nu(y)$ sont les fonctions respectives de répartition des mesures μ et ν, alors les fonctions correspondantes F et G sont $F(r) = \mu(r)$ et $G(s) = 1 - \nu(-s)$. La fonction de répartition de deux variables $H_0(r, s)$ est $\max(0, \mu(r) - \nu(-s))$. Toute mesure σ_0 de marges μ et ν concentrée sur le compact: $\{(x, y) : (x, -y) \in S_{H_0}\}$ est solution du problème primal posé.

Comme deuxième exemple, considérons le transport d'une distribution de masses uniformément réparties sur le segment $[-1, 1]$ de l'axe des abscisses vers la distribution de masses uniformément réparties sur le segment $[-1, 1]$ de l'axe des ordonnées. Prenons comme fonction de coût la distance du déplacement. On peut donc prendre X et Y comme $[-1, 1]$; la mesure μ, comme la mesure ν d'ailleurs, est la mesure de Lebesgue. La fonction de coût $\varphi(x, y)$ est $(x^2 + y^2)^{1/2}$. Si l'on pose $c(r, s) = (r + s)^{1/2}$, $f(x) = x^2$ et $g(y) = y^2$, alors $\varphi(x, y) = c(f(x), g(y))$. Puisque le signe de la dérivée seconde mixte de c est négatif, on peut reprendre le calcul de l'exemple 1. La fonction $F(r)$ vaut $r^{1/2}$ et $G(s)$ vaut $s^{1/2}$. Si l'on cherche une mesure σ dont les marges sont les mesures de Lebesgue sur chacun des axes et qui minimise $\iint (x^2 + y^2)^{1/2}\, d\sigma(x, y)$, il suffit de prendre une mesure σ qui respecte les marges données et dont le support est porté par les points du carré $X \times Y$ qui satisfont l'équation $F(x^2) = G(y^2)$. Cette équations donne les deux diagonales $y = x$ et $y = -x$. Le transport à moindre coût n'est pas unique. Citons certains transports optimaux: $y = x$ est un transport optimal, tout comme le transport $y = -x$; le transport $y = x$ si $|x| < 1/2$ et $y = -x$ pour les autres valeurs de x est aussi un transport optimal.

L'exemple suivant est beaucoup plus complexe. Trouvons la plus petite valeur que peut prendre l'espérance de $\eta(e^{\varepsilon} - 2\varepsilon)$ lorsque ε et η sont deux variables aléatoires distribuées uniformément sur [0, 1]. Il s'agit de minimiser l'intégrale $\iint y(e^x - 2x)\, d\sigma(x, y)$ parmi les mesures σ portées par le carré-unité du plan cartésien et dont les marges respectives sont uniformes sur [0, 1]. On a que $f(x) = e^x - 2x$, $g(y) = y$ et la fonction de coût $c(r, s)$ est rs, une fonction quasi monotone. On détermine facilement les deux fonctions de répartition

F et G. Pour s compris entre 0 et 1, $G(s)=s$. Pour $r \leqq \ln(2)$, $F(r)=0$, pour $r \geqq 1$, $F(r)=1$. Si r est compris entre $\ln(2)$ et 1 et si $x_1(r)$ et $x_2(r)$ sont les deux solutions, rangées par ordre croissant, à l'équation $e^x - 2x = r$, alors $F(r) = \min(x_2(r), 1) - x_1(r)$.

Si ε est une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$, si η est la variable aléatoire fonctionnellement liée à ε: $\eta = 1 - F(f(\varepsilon))$, la mesure plane σ_0 associée au vecteur aléatoire (ε, η) sera une mesure optimale pour le minimum de $\iint y(e^x - 2x)\, d\sigma(x, y)$. Si $w(x)$ est la seconde racine à l'équation $e^w - 2w = e^x - 2x$, la valeur minimale des intégrales doubles est:

$$E(\eta(e^\varepsilon - 2\varepsilon)) = \int_0^{w(1)} x(e^x - 2x)\, dx + \int_{w(1)}^{1} (1 - |w(x) - x|)(e^x - 2x)\, dx = 0{,}329\,978\,27.$$

5. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE

Nous abordons la résolution numérique du problème (1) lorsque le matériel continu est unidimensionnel: X et Y sont des intervalles compacts. Les deux algorithmes proposés suivent deux approches distinctes. Le premier partage les espaces X et Y en sous-intervalles et réduit le problème de Kantorovitch en un problème de Hitchcock [8]. Le second algorithme remplace les fonctions duales u, v par des fonctions voisines u_n et v_n situées dans des sous-espaces vectoriels de dimension finie.

Premier algorithme

Soit $P = \{p_i\}_{i=0}^n$ une partition de l'intervalle $X = [p_0, p_n]$ selon $n+1$ points, soit $Q = \{q_j\}_{j=0}^n$ une partition de l'intervalle $Y = [q_0, q_n]$ selon $n+1$ points, P détermine n sous-intervalles A_i de X, Q détermine n sous-intervalles B_j de Y. On note par x_i le centre de masse de A_i par rapport à μ et par y_j le centre de masse de B_j par rapport à ν. $c_{i,j}$ sera la matrice des coûts $c(x_i, y_j)$. Σ_1 désignera le polytope de transport des matrices d'ordre n à éléments non négatifs $s_{i,j}$, $1 \leqq i \leqq n$, $1 \leqq j \leqq n$ et telles que la somme de la i-ième ligne vaut $\mu(A_i)$ et celle de la j-ième colonne vaut $\nu(B_j)$. Considérons le problème de Hitchcock:

$$\gamma_1 = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} s_{i,j} : s_{i,j} \in \Sigma_1 \right\}. \tag{5}$$

On souhaite que pour les valeurs suffisamment grandes de n, γ_1 soit une bonne approximation de la quantité γ du problème (1).

Second algorithme

On introduit deux sous-espaces vectoriels $L(P)$ et $L(Q)$ de fonctions linéaires par morceaux. Les fonctions sont continues et n'admettent de changements de pente que selon les points de P pour $L(P)$ et de Q pour $L(Q)$. On pose le problème d'optimisation:

$$\gamma_2=\sup\left\{\int u(x)\,d\mu(x)+\int v(y)\,d\nu(y)\right\} \tag{6}$$

où u varie dans $L(P)$ et v dans $L(Q)$ en respectant les contraintes $u(p_i)+v(q_j)\leqq c(p_i, q_j)$ pour i et j compris entre 0 et n. Comme tantôt, on espère que Y_2 soit une bonne approximation de Y.

Ce problème est un programme linéaire qui est le dual d'un problème de Hitchcock comme le dit le prochain lemme. Avant de l'énoncer, désignons par $f_i(x)$ (i est un entier compris entre 0 et n) la fonction de $L(P)$ qui vaut 0 en chacun des nœuds de P sauf au nœud p_i où elle vaut 1. Par rapport aux nœuds de Q, on définit de façon analogue des fonctions de Lagrange $g_j(y)$. Σ_2 désignera la totalité des matrices $s_{i,j}$, $0\leqq i\leqq n$, $0\leqq j\leqq n$, à éléments non négatifs dont la somme de leur i-ième ligne est $\int f_i(x)\,d\mu(x)$ et la somme de leur j-ième colonne est $\int g_j(y)\,d\nu(y)$.

LEMME 3. — *Le problème* (6) *est le dual d'un problème de Hitchcock portant sur $n+1$ puits et $n+1$ sources, dont la matrice des coûts est $c_{i,j}=c(p_i, q_j)$, $0\leqq i\leqq n$, $0\leqq j\leqq n$:*

$$\gamma_2=\inf\left\{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} c_{i,j}s_{i,j}: s_{i,j}\in\Sigma_2\right\} \tag{7}$$

Démonstration: Si u appartient à $L(P)$ et v à $L(Q)$:

$$u(x)=\sum_{i=0}^{n} u(p_i)f_i(x)$$

et

$$\int u\,d\mu=\sum_{i=0}^{n} u(p_i)\int f_i(x)\,d\mu(x).$$

L'expression $\int u d\mu + \int v d\nu$ est :

$$\sum_{i=0}^{n} u(p_i) \int f_i(x)\, d\mu(x) + \sum_{j=0}^{n} v(q_j) \int g_j(y)\, d\nu(y).$$

Le problème (6) est un programme linéaire par rapport aux variables $u(p_i)$ et $v(g_j)$. C'est le problème dual du problème de Hitchcock (7). ■

Comparaisons

Les deux algorithmes proposés mènent à la résolution d'un problème de transport discret. De façon à réduire le temps de calcul dû à l'utilisation d'une matrice de coûts de forte taille (d'ordre voisin de 100 dans les calculs suivants), nous avons adopté la procédure suivante. Pour un exemple donné, nous résolvons une suite de problèmes de transport en doublant le nombre de sources et de puits à chaque étape. Ces problèmes sont emboîtés dans le sens où la solution optimale précédente aide à la formation d'une solution initiale approximative pour le problème courant. Chaque problème de Hitchcock est résolu à l'aide de la théorie des réseaux de transport par l'entremise de RNET [7]. Nous avons résolu numériquement le troisième exemple de la section 4, en partageant [0, 1] en n sous-intervalles de longueur égale. Le tableau suivant présente les résultats à 10^{-8} près. Nous savons que $\gamma = 0{,}329\,978\,27$.

n	γ_1	$\lvert\gamma_1-\gamma\rvert$	γ_2	$\lvert\gamma_2-\gamma\rvert$
8	0,330 192 10	2,1 E-4	0,330 0157 76	1,8 E-4
16	0,330 025 42	4,7 E-5	0,330 011 70	3,3 E-5
32	0,329 987 78	9,5 E-6	0,329 984 46	6,2 E-6
64	0,329 980 60	2,3 E-6	0,329 979 71	1,4 E-6
128	0,329 978 88	6,1 E-7	0,329 978 65	3,9 E-7

L'écart entre γ_1 à γ est sensiblement égal à $0{,}02\, n^{-2{,}1}$. L'écart entre γ_2 à γ est sensiblement égal à $0{,}02\, n^{-2{,}2}$. Le coefficient de détermination de la relation linéaire entre le logarithme de l'écart et le logarithme de n est de 99,9 % dans les deux cas.

6. PROPRIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS DUALES

Avant d'amorcer l'étude de la convergence des deux algorithmes, nous dégageons deux propriétés importantes des fonctions duales optimales du problème (2).

DÉFINITIONS : Soit (u, v) un partage des coûts, on dit qu'un point x de X est un point équilibré du partage s'il existe un y de Y tel que $u(x)+v(y)=c(x, y)$. Un point y de Y sera un point équilibré du partage s'il existe un x de X tel que $u(x)+v(y)=c(x, y)$. Si dans un partage des coûts, tous les points de X et tous les points de Y sont équilibrés, on dira du partage qu'il est équilibré.

LEMME4 : *Soient u et v deux fonctions duales optimales pour le problème* (2), *on pose :*

$$v_1(y)=\inf\{c(x, y)-u(x): x \in X\}$$

et

$$u_1(x)=\inf\{c(x, y)-v_1(y): y \in Y\}.$$

(u_1, v_1) est un partage équilibré optimal des coûts.

Démonstration : On vérifie que v_1 est continue. Puis, on remarque que $u(x)+v_1(y) \leqq c(x, y)$ et que $v(y) \leqq v_1(y)$. (u, v_1) est un couple de fonctions duales pour lequel :

406 $$\int u(x)\, d\mu(x)+\int v_1(y)\, d\nu(y) \geqq \int u(x)\, d\mu(x)+\int v(y)\, d\nu(y).$$

L'optimalité du couple (u, v) assure également l'optimalité du couple (u, v_1). Tout point de Y est équilibré pour (u, v_1). En transposant l'argument, (u_1, v_1) est aussi un partage optimal. Les points de Y restent équilibrés pour (u_1, v_1). Les points de X le deviennent nécessairement. ■

THÉORÈME5 : *Soit c une fonction continue de coût définie sur $[a, b] \times Y$, concave selon sa première variable, on désigne par m_g le maximum en y de $(\partial c / \partial x)(a, y)$ et par m_d le minimum en y de $(\partial c / \partial x)(b, y)$. Soit X une partie compacte de $[a, b]$, on suppose que (u, v) est un partage du coût c, (u est définie sur X et v sur Y). Si $x_1<x_2<x_3$, si u est équilibrée au point x_2, alors les inégalités suivantes pour les pentes des sécantes ont lieu :*

$$u[x_1, x_2] \geqq u[x_2, x_3],$$
$$m_g \geqq u[x_2, x_3], u[x_1, x_2] \geqq m_d.$$

Démonstration : La condition d'équilibre de u en x_2 permet de choisir un y_2 tel que $u(x_2)+v(y_2)=c(x_2, y_2)$. La condition de partage des coûts donne les deux inégalités :

$$u(x_1)+v(y_2) \leqq c(x_1, y_2) \quad \text{et} \quad u(x_3)+v(y_2) \leqq c(x_3, y_2).$$

Si t est le scalaire $(x_2-x_1)/(x_3-x_1)$, si l'on additionne la dernière inégalité multipliée par t à l'avant-dernière inégalité multipliée par $1-t$, on a que:

$$(1-t)\,u(x_1)+tu(x_3)+v(y_2)\leqq(1-t)\,c(x_1,y_2)+tc(x_3,y_2).$$

La concavité selon la variable x de c et le fait que $u(x_2)=c(x_2,y_2)-v(y_2)$ donne que $(1-t)\,u(x_1)+tu(x_3)\leqq u(x_2)$. Ceci revient à dire que:

$$(x_3-x_2)(u(x_1)-u(x_2))+(x_2-x_1)(u(x_3)-u(x_2))\leqq 0,$$

ou encore que:

$$(u(x_2)-u(x_1))/(x_2-x_1)=u[x_1,x_2]\geqq u[x_2,x_3]=(u(x_3)-u(x_2))/(x_3-x_2).$$

La première inégalité annoncée est établie.

Revenons à l'inégalité $u(x_3)+v(y_2)\leqq c(x_3,y_2)$. Puisque:

$$v(y_2)=c(x_2,y_2)-u(x_2),$$

on obtient que:

$$u(x_3)-u(x_2)\leqq c(x_3,y_2)-c(x_2,y_2).$$

Or la concavité de c permet de dire que:

$$(c(x_3,y_2)-c(x_2,y_2))/(x_3-x_2)\leqq m_g.$$

D'où $u[x_2,x_3]\leqq m_g$, ce qui est la seconde inégalité annoncée. L'autre inégalité annoncée s'obtient de la seconde en changeant la variable x par $-x$. ■

Remarque: Si u est équilibrée en chacun des points de X, u sera concave sur X.

7. ORDRE DE CONVERGENCE DU PREMIER ALGORITHME

Nous démontrons dans les trois prochaines sections que sous des hypothèses raisonnables, l'ordre de convergence des deux algorithmes proposés est de l'ordre $1/n^2$ pour des partitions régulières de X et de Y. Les hypothèses que nous retenons dans les prochaines sections sont les suivantes. X et Y sont des intervalles: $X=[x_g, x_d]$ et $Y=[y_g, y_d]$. De la fonction de coût c, on exige que $\partial^2 c/\partial x^2$ et $\partial^2 c/\partial y^2$ existent et sont continues. Le nombre a désignera le maximum en (x, y) de $\frac{1}{2}(\partial^2 c/\partial x^2)$ (x, y), le nombre b sera le maximum de $\frac{1}{2}\partial^2 c/\partial y^2$. On définit les deux nombres U et V :

$$U=\sup\left\{\frac{\partial c}{\partial x}(x_g, y): y\in Y\right\}-\inf\left\{\frac{\partial c}{\partial x}(x_d, y): y\in Y\right\}+2a(x_d-x_g),$$

$$V=\sup\left\{\frac{\partial c}{\partial y}(x, y_g): x\in X\right\}-\inf\left\{\frac{\partial c}{\partial y}(x, y_d): x\in X\right\}+2b(y_d-y_g).$$

Si P et Q sont des partitions respectives de X et de Y et si γ_1 et γ_2 sont les valeurs optimales des problèmes (5) et (6), notre objectif est d'exprimer les écarts de γ_1 et γ_2 à γ en ce qu'ils proviennent de la fonction de coût à l'aide des seules quantités a, b, U et V. Les majorations que nous allons trouver sont intimement liées à des formules de quadrature, des règles fermées ou ouvertes composées du trapèze.

Si f est une fonction continue sur X, la règle ouverte du trapèze pour estimer $\int f d\mu$ est le nombre $T_1(f, P)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mu(A_i)$. De même si g est continue sur Y, $T_1(g, Q)=\sum_{j=1}^{n} g(y_j)\nu(B_j)$. Nous désignons par $e_1(P)$ et $e_1(Q)$ les erreurs commises pour évaluer $\int x^2 d\mu(x)$ et $\int y^2 d\nu(y)$ à l'aide la règle ouverte du trapèze:

$$e_1(P)=\int x^2 d\mu(x)-T_1(x^2, P)$$

et

$$e_1(Q)=\int y^2 d\nu(y)-T_1(y^2, Q).$$

Avant de définir la règle fermée du trapèze, nous mettons en évidence une projection de $C(X)$ sur $L(P)$. Rappelons que L(P) désigne les fonctions continues, linéaires par morceaux et dont les changements de pente n'ont lieu qu'aux nœuds de la partition P. Si f est une fonction définie sur X, $f_P(x)$ désignera la fonction de $L(P)$ telle que $f_P(p)=f(p)$ pour chaque nœud p de P. La règle fermée du trapèze pour estimer $\int f d\mu$ est le nombre $T_2(f, P))=\int f_P d\mu$. Si g est définie sur Y, $T_2(g, Q)=\int g_Q d\nu$. Nous désignons par $e_2(P)$ et $e_2(Q)$ les erreurs commises pour évaluer $\int x^2\, d\mu(x)$ et $\int y^2\, d\nu(y)$ à l'aide de la règle fermée du trapèze:

$$e_2(P) = \int x^2\, d\mu(x) - T_2(x^2, P)$$

et

$$e_2(Q) = \int y^2\, d\nu(y) - T_2(y^2, Q).$$

LEMME 6: *Si* γ, γ_1 *et* γ_2 *sont les valeurs optimales des problèmes* (1), (5) *et* (6) *relativement à une fonction de coût* c, *si* Γ, Γ_1 *et* Γ_2 *sont les valeurs optimales des problèmes* (1), (5) *et* (6) *relativement aux coûts* $C(x, y) = c(x, y) - ax^2 - by^2$, *alors* $\gamma - \gamma_1 = \Gamma - \Gamma_1 + ae_1(P) + be_1(Q)$ *et* $\gamma - \gamma_2 = \Gamma - \Gamma_2 + ae_2(P) + be_2(Q)$.

Démonstration: Comparons γ et Γ. Il y a correspondance biunivoque entre les partages de coûts pour c et ceux de C: si (u, v) est un partage de coûts pour c, $U(x) = u(x) - ax^2$ et $V(y) = v(y) - by^2$ est un partage pour C. Or $\int U\, d\mu + \int V d\nu = \int u d\mu + \int v d\nu - t$ où:

$$t = a \int x^2\, d\mu(x) + b \int y^2\, d\nu(y).\ \Gamma = \gamma - t.$$

Comparons γ_1 et Γ_1. Le problème (5) est analogue au problème (1). La valeur Γ_1 est égale à $\gamma_1 - a\,T_1(x^2, P) - b\,T_1(y^2, Q)$. D'où:

$$\Gamma - \Gamma_1 = \gamma - \gamma_1 - ae_1(P) - be_1(Q).$$

Ce qui donne la première identité. L'autre s'obtient de la même façon. ■

THÉORÈME 7. — $\gamma - \gamma_1 \leqq ae_1(P) + be_1(Q)$.

Démonstration: Vu le lemme 6, il suffit de démontrer que $\gamma \leqq \gamma_1$ lorsque la fonction de coût c est concave selon chacune de ses variables. Choisissons deux fonctions duales optimales u et v pour le problème de Kantorovitch (1). Pour tout couple (x, y), $u(x) + v(y) \leqq c(x, y)$ et $\int u d\mu + \int v d\nu = Y$. Si x_i est le centre de masse de A_i pour μ et si y_i est le centre de masse de B_j pour ν, on introduit les variables duales du problème (5): $u_i = u(x_i)$ et $v_j = v(y_j)$. Pour tout couple (i,j), $u_i+v_j \leqq c(x_i, y_j)$. Désignons par t la quantité $\sum_{i=1}^{n} u_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{n} v_j \nu(B_j)$. Par dualité dans le problème (5), on obtient l'inégalité $t \leqq \gamma_1$.

Étudions l'écart entre t et Y. Vu le lemme 4, on peut supposer que (u, v) est un partage équilibré des coûts. Selon le théorème 5, $u(x)$ et $v(y)$ sont concaves. Vu cette concavité:

$$\int u d\mu \leqq T_1(u, P) = \sum_{i=1}^{n} u_i \mu(A_i)$$

et

$$\int v d\nu \leqq T_1(v, Q) = \sum_{j=1}^{n} v_j \nu(B_j).$$

D'où $\gamma \leqq t$. Il s'ensuit que $\gamma \leqq \gamma_1$. ■

On pose $\delta_1(P)$ comme le maximum sur i de $(1/2) \int_{A_i} |x-x_i| d\mu(x)$ et $\delta_1(Q)$ comme le maximum sur j de $(1/2) \int_{B_j} |y-y_j| d\nu(y)$.

THÉORÈME 8: $\gamma - \gamma_1 \geqq a e_1(P) + b e_1(Q) - U \delta_1(P) - V \delta_1(Q)$.

Démonstration: Vu le lemme 6, il suffit de démontrer que:

$$\gamma \geqq \gamma_1 - U \delta_1(P) - V \delta_1(Q),$$

alors que la fonction de coût c est concave selon chacune de ses variables. Choisissons deux vecteurs duaux optimaux u_i et v_j pour le programme linéaire (5). Pour tout i et j:

$$u(i) + v(j) \leqq c(x_i, y_j)$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{n} v_j \nu(A_j) = \gamma_1.$$

Par le lemme 4, on peut supposer que les vecteurs u_i et v_j sont équilibrés. Désignons par x_0 et x_{n+1} les extrémités de X, y_0 et y_{n+1} seront celles de Y.

On introduit quatre autres constantes u_0, v_0, u_{n+1} et v_{n+1}:

$$u_0=\min\{c(x_0, y_j)-v_j: 1\leqq j\leqq n\},$$
$$u_{n+1}=\min\{c(x_{n+1}, y_j)-v_j: 1\leqq j\leqq n\},$$
$$v_0=\min\{c(x_1, y_0)-u_i: 0\leqq i\leqq n+1\}\; v_{n+1}=\min\{c(x_i, y_{n+1})-u_i: 0\leqq i\leqq n+1\}.$$

Désignons par P' la répartition $\{x_i\}_{i=0}^{n+1}$ et par Q' la partition $\{y_j\}_{j=0}^{n+1}$. Introduisons les deux fonctions linéaires par morceaux u et v de $L(P')$ et de $L(Q')$ respectivement telles que $u(x_i)=u_i$ et $v(y_j)=v_j$ pour i et j compris entre 0 et $n+1$. Sur le rectangle $[x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j]$, la fonction $u(x)+v(y)$ est linéaire. Elle est majorée par $c(x, y)$ en chacun des sommets du rectangle, cette majoration se prolonge à tout le rectangle vu la concavité selon chaque variable de c. Les deux fonctions u et v forment donc un partage des coûts pour c. D'où $\gamma\geqq\int u\,d\mu+\int v\,d\nu$. Si t désigne la quantité $\int u\,d\mu+\int v\,d\nu$, on obtient l'inégalité $\gamma\geqq t$.

Étudions l'écart entre t et γ_1, $t-\gamma_1$. Cet écart est formé de deux contributions l'une par rapport à la mesure μ, l'autre par rapport à la mesure ν. Limitons-nous d'abord à la première contribution. Celle-ci est la somme de n termes dont le i-ième est:

$$r_i=\int_{p_{i-1}}^{x_i}\frac{u_{i-1}-u_i}{x_{i-1}-x_i}(x-x_i)\,d\mu(x)+\int_{x_i}^{p_i}\frac{u_{i+1}-u_i}{x_{i+1}-x_i}(x-x_i)\,d\mu(x).$$

Ici i varie de 1 à n. On peut simplifier l'écriture en posant:

$$\Delta_i=\frac{u_{i+1}-u_i}{x_{i+1}-x_i}.$$

En se servant du fait que:

$$\frac{1}{2}\int_{A_i}(\Delta_i-\Delta_{i-1})(x-x_i)\,d\mu(x)=0,$$

on obtient que:

$$r_i=\frac{1}{2}\int_{A_i}(\Delta_i-\Delta_{i-1})\,|x-x_i|\,d\mu(x).$$

Selon le théorème 5, la suite Δ_i est décroissante et $\Delta_1-\Delta_n\leqq U$. De là, on obtient la minoration $r_i\geqq(\Delta_i-\Delta_{i-1})\,\delta_1(P)$. On fait la somme de ces inégalités pour obtenir $\sum_{i=1}^{n} r_i \geqq -U\delta_1(P)$. D'où $t-\gamma_1 \geqq -U \ \delta_1(P) - V \ \delta_1(Q)$ et $\gamma \geqq \gamma_1 - U\delta_1(P) - V\delta_1(Q)$. ■

8. ORDRE DE CONVERGENCE DU SECOND ALGORITHME

Nous démontrons dans cette section une majoration et une minoration de la valeur minimale γ_2. Ces bornes seront suffisamment fortes et simples qu'elles permettront de prévoir l'ordre de convergence du second algorithme. Nous maintenons les hypothèses de régularité sur la fonction de coût c et gardons les quantités a, b, U et V précédemment décrites.

THÉORÈME 9: $\gamma - \gamma_2 \geqq ae_2(P) + be_2(Q)$.

Démonstration: Vu le lemme 6, il suffit de démontrer que $\gamma \geqq \gamma_2$ alors que la fonction de coût c est concave selon chacune de ses variables. Soit un couple (u, v) deux fonctions de $L(P)$ et de $L(Q)$ respectivement telles que pour i et j compris entre 0 et n:

$$u(p_i) + v(q_j) \leqq c(p_i, q_j) \qquad \text{et} \qquad \int u\, d\mu + \int v\, d\nu = \gamma_2.$$

Sur le rectangle $[p_{i-1}, p_i] \times [q_{j-1}, q_j]$, la fonction $u(x) + v(y)$ est linéaire. Elle est majorée par $c(x, y)$ en chacun des sommets du rectangle, cette majoration se prolonge à tout le rectangle vu la concavité selon chaque variable de $c(x, y)$. Les deux fonctions u et v forment donc un partage des coûts pour c. D'où $\gamma \geqq \gamma_2$. ■

Avant d'énoncer la prochaine minoration de Y_2, il nous faut avoir en main une majoration de l'erreur de la règle fermée composée du trapèze lorsque la fonction à intégrer est concave. Si P est la partition de X, dans chacun des intervalles $[p_{i-1}, p_i]$ engendrés par la partition, choisissons un point z_i tel que:

$$p_{i-1} \int_{p_{i-1}}^{z_i} d\mu(x) + p_i \int_{z_i}^{p_i} d\mu(x) = \int_{p_{i-1}}^{p_i} x\, d\mu(x).$$

Un tel choix est toujours possible. On définit alors $\delta_2(P)$ comme le maximum sur i des intégrales:

$$w_i = \int_{p_{i-1}}^{z_i} (x - p_{i-1})\, d\mu(x) = \int_{z_i}^{p_i} (p_i - x)\, d\mu(x).$$

Pour une partition Q de Y, on définit de manière analogue le paramètre $\delta_2(Q)$.

THÉORÈME 10: *Si u est une fonction concave sur X, dérivable aux extrémités de X, alors :*

$$\int u\,d\mu - T_2(u, P) \leqq \delta_2(P)[u'(x_g) - u'(x_d)].$$

Démonstration: Regardons la contribution de l'erreur de la règle du trapèze dans chacun des intervalles $[p_{i-1}, p_i]$ en posant:

$$r_i = \int_{p_{i-1}}^{p_i} (u(x) - u_p(x))\,d\mu(x).$$

La fonction u admet une dérivée à droite m_0 en p_{i-1} et une dérivée à gauche m_1 en p_i. Sur $[p_{i-1}, z_i]$, $u(x)$ est majorée par $u(p_{i-1}) + m_0(x - p_{i-1})$. De même, sur $[z_i, p_i]$, $u(x)$ est majorée par $u(p_i) + m_1(x - p_i)$. Si m est la pente $[u(p_i) - u(p_{i-1})]/(p_i - p_{i-1})$, alors on obtient la majoration:

$$r_i \leqq (m_0 - m)\int_{p_{i-1}}^{z_i} (x - p_{i-1})\,d\mu(x) + (m - m_1)\int_{z_i}^{p_i} (p_i - x)\,d\mu(x).$$

Vu le choix de z_i, les deux intégrales:

$$\int_{p_{i-1}}^{z_i} (x - p_{i-1})\,d\mu(x) \qquad \text{et} \qquad \int_{z_i}^{p_i} (p_i - x)\,d\mu(x)$$

sont égales à un même nombre w_i. D'où le membre à droite dans la dernière inégalité est le nombre $(m_0 - m_1)w_i$. Par suite, $r_i \leqq (m_0 - m_1)\delta_2(P)$. En faisant la somme de ces inégalités sur i, on obtient que:

$$\int u\,d\mu - T_2(u, P) \leqq \delta_2(P)\sum_{i=1}^{n}[u'(p_{i-1}+0) - u'(p_i - 0)]$$

$$\leqq \delta_2(P)[u'(x_g) - u'(x_d)]. \quad \blacksquare$$

Remarque: Dans un certain sens, la majoration donnée est optimale. Pour s'en convaincre, il faudrait consulter Dubuc et Todor [6].

THÉORÈME 11: $\gamma - \gamma_2 \leqq U\delta_2(P) + V\delta_2(Q) + ae_2(P) + be_2(Q)$.

Démonstration: Vu le lemme 6, il suffit de démontrer que:

$$\gamma \leqq \gamma_2 + U\delta_2(P) + V\delta_2(Q),$$

alors que la fonction de coût c est concave selon chacune de ses variables. Choisissons deux fonctions duales optimales équilibrées u et v pour le problème (1). On a que pour tout x et y:

$$u(x)+v(y)\leqq c(x,y)$$

et

$$\int u(x)\,d\mu(x)+\int v(y)\,d\nu(y)=\gamma.$$

On introduit les deux fonctions linéaires par morceaux u_P et v_P associées à u et v. (u_p, v_p) est un couple admissible pour le problème (6). Si $t=\int u_P\,d\mu+\int v_P\,d\nu$, on a l'inégalité $t\leqq\gamma_2$.

Étudions l'écart entre t et γ. $\gamma-t$ est la somme de deux termes, chacun étant une erreur dans l'application de la règle du trapèze: $\gamma-t=\int u\,d\mu-T_2(u,P)+\int v\,d\nu-T_2(v,Q)$. Vu le théorème 5, u est concave et la variation de $u'(x)$ est inférieure à U. Par le théorème 10, $\int u\,d\mu-T_2(u,P)\leqq U\,\delta_2(P)$. Un argument semblable tient pour v:

$$\int v(y)\,d\nu(y)-T_2(v,Q)\leqq V\,\delta_2(Q),$$

$$\gamma-t\leqq U\,\delta_2(P)+V\,\delta_2(Q).$$

Or $t\leqq\gamma_2$. D'où la conclusion $\gamma\leqq\gamma_2+U\,\delta_2(P)+V\,\delta_2(Q)$. ■

9. ORDRE DE CONVERGENCE POUR DES MESURES ABSOLUMENT CONTINUES

Nous considérons le cas où X et Y coïncident avec l'intervalle [0, 1] et que les mesures μ et ν admettent des densités bornées, les bornes étant respectivement D et E. n est une valeur entière qui ne changera pas au cours de cette section. P et Q seront les partitions régulières de X et de Y:

$$P=\{i/n\}_{i=0}^{n} \qquad \text{et} \qquad Q=\{j/n\}_{j=0}^{n}.$$

LEMME 12:

$$0\leqq e_1(P)\leqq D/(12\,n^2), \qquad 0\leqq\delta_1(P)\leqq D/(8\,n^2),$$
$$0\leqq -e_2(P)\leqq D/(6\,n^2) \qquad \textit{et} \qquad 0\leqq\delta_2(P)\leqq D/(8\,n^2).$$

Démonstration: Si x_i est le centre de masse du i-ième intervalle A_i, $e_1(P)$ est la somme sur i des intégrales $\int_{A_i}(x-x_i)^2\,d\mu(x)$. Si m_i est le point milieu de A_i:

$$\int_{A_i}(x-x_i)^2\,d\mu(x)\leqq\int_{A_i}(x-m_i)^2\,d\mu(x)\leqq D\int_{A_i}(x-m_i)^2\,dx=D/(12\,n^3).$$

D'où $e_1(P)\leqq D/(12\,n^2)$.

Seconde inégalité: Remarquons que les deux intégrales:

$$\int_{p_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)\,d\mu(x)\qquad\text{et}\qquad\int_{x_i}^{p_i}(x-x_i)\,d\mu(x)$$

sont égales. Si $m_i\leqq x_i$, alors on a que:

$$\delta_1(P)=\int_{x_i}^{p_i}(x-x_i)\,d\mu(x)\leqq\int_{m_i}^{p_i}(x-m_i)\,d\mu(x)\leqq D/(8\,n^2).$$

Un argument semblable joue si $m_i>x_i$.

Troisième inégalité: $-e_2(P)$ est la somme sur i des intégrales $\int_{A_i}(x-p_{i-1})(p_i-x)\,d\mu(x)$. Chacune des intégrales est majorée par:

$$D\int_{A_i}(x-p_{i-1})(p_i-x)\,dx=D/(6\,n^3).$$

D'où $-e_2(P)\leqq D/(6\,n^2)$.

Quatrième inégalité: Si z_i est solution de l'équation:

$$p_{i-1}\int_{p_{i-1}}^{z}d\mu(x)+p_i\int_{z}^{p_i}d\mu(x)=\int_{p_{i-1}}^{p_i}x\,d\mu(x),$$

les deux intégrales suivantes sont égales:

$$\int_{p_{i-1}}^{z_i}(x-p_{i-1})\,d\mu(x)=\int_{z_i}^{p_i}(p_i-x)\,d\mu(x)=w_i.$$

Si $m_i\leqq z_i$, alors on peut dire que:

$$w_i=\int_{z_i}^{p_i}(p_i-x)\,d\mu(x)\leqq\int_{m_i}^{p_i}(p_i-x)\,d\mu(x)\leqq D\int_{m_i}^{p_i}(p_i-x)\,dx=D/(8\,n^2).$$

Un argument semblable joue si $m_i > z_i$. Or $\delta_2(P)$ est le maximum des nombres w_i. D'où $\delta_2(P) \leqq D/(8n^2)$. ■

Si on relie le lemme 12 aux théorèmes 7, 8, 9 et 11, on obtient le résultat suivant.

THÉORÈME 13: *On suppose que X et Y coïncident avec* [0, 1], *que les mesures* μ *et* ν *admettent des densités bornées respectivement par D et E et que* $P=Q$ *est la partition régulière de* $n+1$ *points de* [0, 1]. *Si* γ, γ_1 *et* γ_2 *sont les valeurs optimales des problèmes* (1), (5) *et* (6) *pour une même fonction de coût, alors:*

$$-(UD+VE)/(8n^2)-(a-D+b-E)/(12n^2)$$

$$-(UD+VE)/(8n^2)-(a_-D+b_-E)/(12n^2) \leqq \gamma-\gamma_1 \leqq (a_+D+b_+E)/(12n^2),$$

$$-(a_-D+b_-E)/(6n^2) \leqq \gamma-\gamma_2 \leqq (UD+VE)/(8n^2)+(a_+D+b_+E)/(6n^2),$$

où t_+ désigne le nombre $(|t|+t)/2$ et t_-, le nombre $(|t|-t)/2$.

10. CONCLUSION

A notre connaissance, il y a peu d'articles sur la résolution numérique du problème de Kantorovitch. Outre Levin, il y a la contribution d'Anderson et de Philpott [1]. Ces deux derniers font appel à la théorie duale, mais ne sont pas amenés à résoudre un problème de Hitchcock. Notre approche met bien en relief l'importance des fonctions duales et notre estimation des taux de convergence est explicite. On peut regretter que les méthodes proposées ne soient pas plus précises, mais la simplicité de celles-ci permet des calculs extrêmement rapides pour certaines fonctions de coût. C'est ce que nous exposons maintenant.

Revenons au problème (3′) de minimiser $\iint c(f(x), g(y))\, d\sigma(x, y)$ où $\sigma \in \Sigma(\mu, \nu)$. Lorsque l'on applique le premier algorithme pour approcher le problème initial, on doit résoudre le problème de Hitchcok (5) de déterminer le minimum γ_1 de:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c(f(x_i), g(y_j))\, s_{i,j},$$

où la matrice s appartient à Σ_1. Sous l'hypothèse que c est une fonction quasi monotone, le théorème 2 permet le calcul rapide de γ_1. Rien n'empêche d'appliquer le théorème 2 avec comme espaces des probabilités $X_n = \{x_i\}_{i=1}^n$, $Y_n = \{y_j\}_{j=1}^n$. Si $\{A_i\}$ est la partition de X, la mesure discrète μ_n à utiliser sur X_n est telle que $\mu_n(\{x_i\})=\mu(A_i)$. On définit la mesure ν_n de façon analogue.

On introduit deux fonctions $p(x)$ et $q(y)$ définies respectivement sur X_n et Y_n. Au départ, $p(x)=\mu_n(\{x\})$ et $q(y)=\nu_n(\{y\})$. L'affectation initiale de γ_1 est la valeur nulle. On effectue des mises à jour successives de p, de q et de γ_1 selon un procédé itératif. Tant que p n'est pas identiquement nulle, on complète les trois opérations suivantes :

(*a*) On choisit un a dans $\{x \in X_n : p(x)>0\}$ tel que $f(a)$ est aussi petit que possible.

(*b*) On choisit un b dans $\{y \in Y_n : q(y)>0\}$ tel que $g(b)$ est aussi grand que possible.

(*c*) On pose r comme le plus petit des deux nombres $p(a)$ et $q(b)$. On modifie p, q et $\gamma_1 : p(a)$ et $q(b)$ sont diminuées de r, γ_1 est augmentée de $rc(f(a), g(b))$.

Le nombre de cycles pour exécuter la tâche ne dépassera jamais $2n$. Si un tri préliminaire est entrepris en réordonnant les points de X_n et de Y_n de telle sorte que f et g deviennent monotones dans le nouvel ordre, à chaque cycle la détermination du point (a, b) se fait en une seule étape. Le temps global du calcul de γ_1 est au plus de l'ordre de $n \ln(n)$. Les méthodes générales de calcul de γ_1 qui ne se servent pas de la forme de la fonction de coût donnent des temps de calcul de l'ordre de n^4, c'est notre impression. Si n vaut cent, on a diminué le temps de calcul par un facteur de un million.

Notre dernier commentaire tient à ce que les algorithmes proposés admettent une généralisation naturelle à des problèmes de transport de matériel continu multidimensionnel dans le cadre de la méthode des éléments finis. Il serait bon de connaître les taux de convergence de tels algorithmes. Nous laissons la question ouverte. A la suggestion de l'arbitre, nous indiquons une autre piste de recherche. On peut modifier le premier algorithme en prenant comme matrice $c_{i,j}$ les intégrales de la fonction de coût $c(x, y)$ sur des rectangles. Quel est le taux de convergence de la valeur optimale des problèmes de Hitchcock ainsi obtenus ? Il est probable que le taux de convergence soit comparable aux taux que nous avons obtenus.

BIBLIOGRAPHIE

1. E. J. Anderson et A. B. Philpott, *Duality and an Algorithm for a Class of Continuous Transportation Problems*, Oper. Res., vol. 9, n° 2, 1984, p. 222-231.
2. P. E. Appell, *Mémoire sur les déblais et les remblais des systèmes continus ou discontinus*, Mémoires présentés par divers savants, vol. 29, 2ᵉ série, 1887, p. 181-208.

3. P. E. APPELL, *Le problème géométrique des déblais et remblais*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.
4. S. CAMBANIS, G. SIMONS et W. F. STOUT, *Inequalities for Ek (X, Y) when the Marginals Are Fixed*, Z. Wahrsch. und Verw. Gebiete, vol. 36, n° 4, 1976, p. 285-294.
5. S. DUBUC et M. TANGUAY, *Varaibles duales dans un programme continu de transport*, Cahiers Centre Études Rech. Opér., vol. 26, n° 1, 1984, p. 17-23.
6. S. DUBUC et F. TODOR, *La règle du trapèze pour l'intégrale de Riemann-Stieltjes (II)*, Ann. Sc. Math. Québec, vol. 8, n° 2, 1984, p. 141-153.
7. M. D. GRIGORIADIS et T. HSU, *The Rutgers Minimum Cost Network Flow Subroutines*, Rutgers University, New Jersey, 1979.
8. F. L. HITCHCOCK, *The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities*, J. Math. Phys., Mass. Inst. Techn., vol. 20, n° 2, 1941, p. 224-230.
9. L. KANTOROVITCH, *On the Translocation of Masses*, C.R. (Doklady) Acad. Sc. U.R.S.S. (N.S.), vol. 37, n° 7-8, 1942, p. 199-201.
10. K. S. KRETSCHMER, *Programmes in Paired Spaces*, Canad. J. Math., vol. 13, 1961, p. 221-238.
11. V. L. LEVIN et A. A. MILYUTIN, *The Problem of Mass Transfer with a Discontinuous Cost Function and the Mass Statement of the Duality for Convex Extremal Problems*, Uspehi Mat. Nauk. vol. 34, n° 3, 1979, p. 3-68.
12. V. STRASSEN, *The Existence of Probability Measures with Given Marginals*, Ann. of Math. Stat., vol. 36, 1965, p. 423-439.
13. 13. A. H. TCHEN, *Inequalities for Distributions with Given Marginals*, Ann. Probab., vol. 8, n° 4, 1980, p. 814-827.