

A. DE PALMA

I. STENGERS

S. PAHAUT

## **Processus de décision et cinétique logique**

*RAIRO. Recherche opérationnelle*, tome 16, n° 2 (1982),  
p. 155-167

[http://www.numdam.org/item?id=RO\\_1982\\_\\_16\\_2\\_155\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RO_1982__16_2_155_0)

© AFCET, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## PROCESSUS DE DÉCISION ET CINÉTIQUE LOGIQUE (\*)

par A. DE PALMA, I. STENGERS et S. PAHAUT <sup>(1)</sup>

---

Résumé. — *Ce papier présente quelques commentaires des propriétés d'un formalisme développé par R. Thomas (U.L.B., Bruxelles, Belgique) pour l'étude de l'agrégation de décisions, qui sont définies comme des changements 0/1 se produisant après des délais temporels continus.*

Mots clés : Agrégation de décisions, modèles de comportement, algèbre booléenne, délais temporels.

Abstract. — *The paper presents some comments on the properties of a formalism designed by R. Thomas (U.L.B., Brussels, Belgium) for the aggregation of decisions, which are defined as 0/1 changes occurring with continuous time delay.*

Keywords: Aggregation of decisions, behavioral models, boolean algebra, time delay.

### 1. INTRODUCTION

Dans le modèle proposé, le processus de décision se déroule ainsi : le décideur doit opérer un certain nombre de choix; chaque choix offre deux issues possibles; à tout instant le décideur adopte l'une de ces issues, ce que le modèle indique par les valeurs prises par autant de variables booléennes,  $a, b, \dots, l$ , qu'il y a de choix; on dit que ce sont les *options effectives* du décideur à cet instant.

Au même instant, la considération de l'ensemble de ses options effectives va éventuellement impliquer que le décideur envisage de modifier certaines d'entre elles; le modèle l'indique par les valeurs prises par les fonctions booléennes  $A = f(a, b, \dots, l)$ ,  $B = g(a, b, \dots, l)$ ,  $\dots$ ,  $L = h(a, b, \dots, l)$ ; on dit que ce sont les *options provisoires* du décideur à cet instant.

---

(\*) Reçu juin 1979.

(<sup>1</sup>) Service de Chimie-Physique II, Université Libre de Bruxelles, B-1050, Bruxelles, Belgique.

Lorsqu'une option provisoire est maintenue un temps suffisamment long, elle devient option effective [le délai de prise d'effet nécessaire, noté  $\Delta_a, \Delta_b, \dots, \Delta_1$ , dépend et du choix et de l'issue, <sup>(2)</sup>]; au contraire, une modification envisagée pendant une durée inférieure au délai correspondant est supposée rester sans effet : cette hypothèse correspond à ce qu'on appelle un phénomène de « rattrapage » [voir fig. 1, 2 et <sup>(3)</sup>].

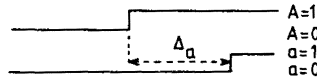


Figure 1. — Délais temporels.

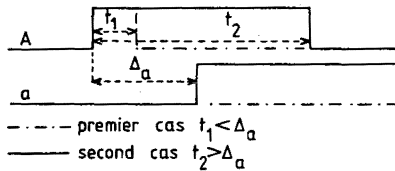


Figure 2. — Phénomène de rattrapage.

S'il arrive que toutes les options provisoires et effectives soient simultanément en accord pendant une durée supérieure à chacun des délais de prise d'effet, elles le sont à tout jamais et deviennent *options définitives* : le processus de décision est alors terminé.

La méthode de résolution proposée dans cet article dérive directement de R. Thomas [2] qui, généralisant certains modèles de S. A. Kaufman [3], a adapté le formalisme booléen à l'étude de problèmes de génétique et plus particulièrement a utilisé un outil mathématique inspiré du formalisme booléen pour décrire les mécanismes de régulation de la synthèse protéique.

<sup>(2)</sup> En termes de ce formalisme, on voit que rien n'empêche  $\Delta_a$  d'avoir des valeurs négatives. Divers problèmes peuvent se présenter à ce sujet, dont une approche pourrait être tentée en recourant au mécanisme désormais classique de la dissonance cognitive [1], qui amène les décideurs à chercher une rationalité *a posteriori* pour rétablir une compatibilité entre leurs décisions et le cours des événements.

<sup>(3)</sup> Ce phénomène implique que ce n'est que dans des cas simples ou des phases particulières que les évolutions des options effectives et des options provisoires seront reliées par des relations du type :

$$a(t) = A(t - \Delta_a);$$

dans le cas général, elles seront du type :

$$a(t) = A(\theta - \delta),$$

où  $\theta$  est le dernier instant antérieur à  $t$  tel que la fonction  $A(\cdot)$  soit constante sur  $]\theta - \Delta_a, \theta[$ . Cette hypothèse sera reprise tout au long de cet article [voir équation (6)].

Certains travaux [4] tentent de mettre en parallèle les mathématiques continues utilisant des systèmes d'équations différentielles et les mathématiques discrètes issues du formalisme booléen. L'approche que nous présentons ici a l'avantage d'être très maniable pour des problèmes comportant un petit nombre de choix interdépendants mais est restreinte en ce sens qu'elle ne permet pas, contrairement aux équations différentielles, de modéliser des systèmes englobant un grand nombre de décideurs dont les décisions interagissent [5].

**2. MODÈLE BOOLÉEN AVEC TEMPS DE RÉPONSE**

**2.1. Systèmes combinatoires et séquentiels**

La technique développée par R. Thomas dérive d'une utilisation originale des circuits séquentiels [6].

Dans les systèmes logiques considérés dans ce papier, les variables sont binaires (et prennent des valeurs notées 0 et 1); les opérations algébriques notées + (et) et . (ou) sont définies figure 3.

$x_1$	$x_2$	$x_1+x_2$	$x_1 \cdot x_2$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	0	1

Figure 3. — Définition de la somme (+) et du produit (.) logique.

On distingue deux types de système. Dans les systèmes *combinatoires*, les variables d'entrée  $x_i$  (dont on peut fixer d'une manière exogène les valeurs) déterminent immédiatement la valeur des variables de sortie  $z_i$ ; ces dernières, comme (+) et produit (.) des variables d'entrée, sont des variables logiques.

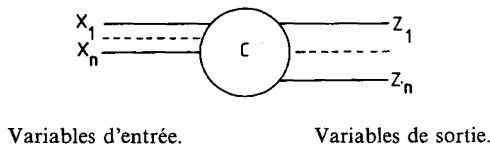


Figure 4. — Système combinatoire.

Par exemple :

$$z = x_1 \cdot x_2 + \bar{x}_3 \tag{1}$$

Cette équation peut être représentée sous forme de tableau (fig. 5).

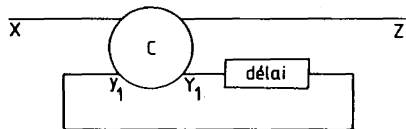
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$Z$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	1	1
0	1	0	0
1	1	0	0
1	1	1	0
1	0	1	1
1	0	0	0

Figure 5. — Table de vérité.

L'équation (1) s'écrit de manière plus simple comme :

$$z = x_3 \cdot x_1 \cdot x_2. \quad (2)$$

Par contre, dans un système *séquentiel*, la valeur des variables de sortie à l'instant  $t$  dépend de la valeur des variables d'entrée en  $t$  mais aussi de la valeur des variables d'entrée aux instants précédents. Pour stocker l'information sur les états du système aux instants précédents, on introduit les variables de mémoire notées  $y_1$ , et des fonctions de mémoire notées  $Y_1$ . Voici un cas de système séquentiel comportant une seule variable de mémoire.



$y_i$  Variables de mémoire.

$Y_i$  Fonction de mémoire.

Figure 6. — Système séquentiel.

La relation entre variable de mémoire et fonction de mémoire est :

$$y_1(t) = Y_1(t - \Delta(Y_1)), \quad (3)$$

$\Delta(Y_1)$  est un délai entre la sortie et le retour du signal dans le bloc combinatoire  $C$ . Les délais d'« enclenchement »  $\Delta_{Y_1}$  et de « déclenchement »  $\Delta_{\bar{Y}_1}$  ne sont pas en général égaux <sup>(4)</sup>.

<sup>(4)</sup> Dans cet article, chaque délai ne dépend que de la variable et du sens de la transition ( $0 \rightarrow 1$  et  $1 \rightarrow 0$ ); pour certains systèmes à plusieurs variables, il peut être réaliste de faire dépendre aussi les délais de l'état de toutes les variables du système.

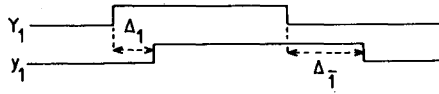


Figure 7. – Délais d'enclenchement et de déclenchement.

En toute généralité, les équations d'un système séquentiel possédant  $n$  variables d'entrée,  $p$  variables de sortie,  $r$  fonction de mémoire ainsi que  $r$  variables de mémoire décrivant l'état interne du système sont :

$$Y_j = g_j(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_r), \quad j = 1 \dots r, \quad (4)$$

$$Z_k = f_k(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_r), \quad k = 1 \dots p, \quad (5)$$

$$y_i(t) = Y_i(t - \Delta(Y_i)), \quad i = 1 \dots r, \quad (6)$$

Les équations (4) et (6) constituent un système implicite en  $y$ , dont on peut étudier les trajectoires quand on connaît les conditions initiales et la valeur des délais temporels. Un *état stable* sera caractérisé comme suit :

$$y_i(t) = Y_i(t), \quad \text{pour tout } i = 1 \dots r, \quad (7)$$

Dans les cas où pour une variable  $y_k$  au moins nous avons :

$$y_k(t) \neq Y_k(t), \quad (8)$$

on dira que l'état correspondant est *transitoire*.

## 2.2. Exemple

L'exemple suivant tente de décrire une situation mettant en scène une organisation du type commission de la Communauté européenne (ou un agent de l'État) et un ensemble de producteurs d'une denrée agricole. Le modèle fiction présenté comporte deux fonctions notées  $A$  et  $B$  et leurs variables de mémoire associées  $a$  et  $b$ .  $B$  désignera la décision de l'ensemble des producteurs relative à la production : la décision de produire,  $B = 1$ , entraînera après un délai  $\Delta_b$  la production à dépasser un niveau donné et la variable correspondante prendra la valeur 1 ( $b = 1$ ) [de même l'arrêt de la production  $B = 0$ , ne se manifestera ( $b = 0$ ) qu'après un délai  $\Delta_b$ ]. La décision de subsidiation ( $A = 1$ ) n'entraînera qu'après un délai  $\Delta_a$  une prise de conscience de cette subsidiation ( $a = 1$ ). Supposons que la décision de subsidiation ne soit prise que si la production est faible ( $b = 0$ ) :

$$A = \bar{b}. \quad (9)$$

Tandis que le producteur est supposé décidé à ne produire que s'il a pris conscience de la subsidiation :

$$B = a, \quad (10)$$

Le tableau des états (voir *fig. 8*) est construit à partir des équations (9) et (10).

a	b	A	B
$\bar{0}$	0	1	0
0	$\bar{1}$	0	0
$\bar{1}$	1	0	1
1	$\bar{0}$	1	1

Figure 8. — Tableau des états.

On a noté  $\bar{1}$  et  $\bar{0}$  les variables de mémoires susceptibles de changer au cours du temps. Le système (9), (10) ne possède aucun état stable; les états stables dans les tableaux suivant seront entourés d'un cercle. L'évolution temporelle des variables de mémoire, découle du tableau présenté à la figure 9.

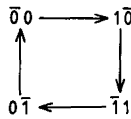


Figure 9. — Évolution des variables de mémoire.

C'est la présence d'une boucle négative unique [7] [équation (9)] qui explique le cycle présenté ci-dessus.

Pour sortir de ce cycle infernal, la commission ou l'agent peut décider de ne plus subsidier la production sans le notifier explicitement à l'utilisateur :

$$A = 0, \quad (11)$$

Le producteur quant à lui peut également modifier sa stratégie face au cycle infernal. Il ne produira plus que dans deux cas : ou bien il croit qu'il y a des subsides et le niveau de production est faible ( $b = 0$ ) [dans le cas contraire ( $b = 1$ ), le producteur, anticipant la suppression des subsides, n'est plus prêt à produire] — ou bien, quoiqu'il n'y ait pas de subsides, il y a production forte du bien en question, considéré donc comme rentable lui-même :

$$B = a\bar{b} + \bar{a}b, \quad (12)$$

Le tableau des états est représenté à la figure 10.

a	b	A	B
0	0	0	0
0	1	0	1
1	1	0	0
1	0	0	1

Figure 10. — Tableau des états.

Si l'état initial adopté pour  $a, b$  est 10 (le producteur croit à l'existence de subventions alors que celles-ci sont désormais supprimées) le système peut, selon les valeurs assignées aux délais d'enclenchement et de déclenchement, évoluer vers l'un des états stables 00 ou 01. On a donc un phénomène de *course critique*, puisque deux transitions sont en compétition. La transition amenée après le temps de réponse le plus court l'emportera. On peut considérer ici que le cas où les deux temps de réponse sont rigoureusement égaux n'a pas de sens physique et peut donc être éliminé. La figure 11 dresse un croquis des différentes évolutions du système à partir de l'état initial 10.

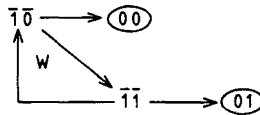


Figure 11. — Évolution des variables de mémoire.

Le système peut parcourir la boucle  $w$  un nombre fini de fois avant d'atteindre un des deux états stables. Ceci n'est vrai que parce que la machine séquentielle qui simule les équations du modèle permet de garder d'un état à un autre une mémoire du fait que certains processus ont été enclenchés même si d'autres avant eux sont devenus effectifs <sup>(5)</sup> (voir fig. 12). La modification de comportement de la commission ou de l'agent [équation (11)] ainsi que du producteur [équation (12)], a brisé le cycle infernal décrit par les équations (9) et (10) et rendu possible (mais non certain) une production non subsidiée.

<sup>(5)</sup> Par contre, si la machine n'a pas de mémoire d'un état à l'autre, lorsque les conditions de délais sont telles que le système parcourt la boucle  $w$  une fois, cette boucle s'établira de manière permanente et sera donc un cycle.



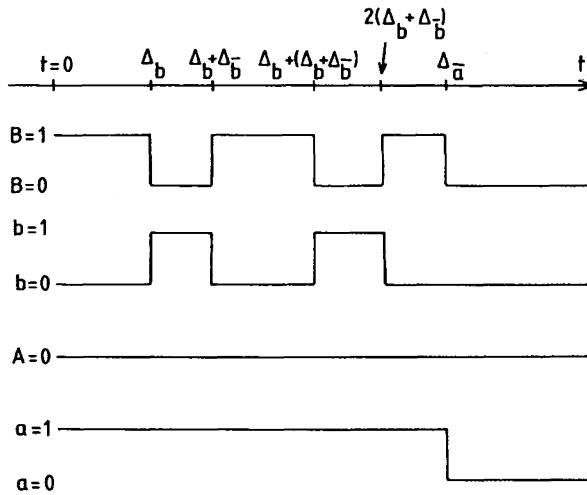


Figure 12. — Déclenchement de la variable  $a$ .

Plus généralement, il est possible d'établir des lois de comportement pour des systèmes comportant un grand nombre de boucles négatives et positives [7] et [8]. La formulation exposée pourrait bien répondre aux exigences des mécanismes de choix décrites dans l'introduction. Ce sera le sujet de la section suivante.

### 3. ARBRE DE DÉCISION

#### 3.1. Introduction

Dans cette section, nous considérerons un système fictif pour lequel les critères de choix des individus sont supposés donnés. Nous supposerons que ces critères de choix ne se basent que sur la situation qui résulte des choix effectués à ce moment par l'instance qui décide, et qu'il n'y a en particulier pas de processus d'apprentissage (délais fixés). Ce cadre confère à la description une grande simplicité.

#### 3.2. Exemple

Nous allons maintenant traiter un exemple qui permet de montrer comment on peut aboutir à une classification « naturelle » des choix. Le système proposé

comporte trois couples option provisoire-option effective ( $A, a$ ), ( $B, b$ ) et ( $C, c$ ) répondant aux équations logiques suivantes :

$$A = b + \bar{c}, \quad (13)$$

$$B = b(a + c) + \bar{b}\bar{a}\bar{c}, \quad (14)$$

$$C = c(a + b) + \bar{c}\bar{a}\bar{b}, \quad (15)$$

Le système en question offre deux particularités. D'abord, la symétrie des équations pour  $B$  et  $C$ . Ensuite, le fait que fonction  $A$  est la seule à ne pas dépendre directement de sa variable de mémoire. La logique à laquelle répondent  $B$  et  $C$  fait, quand à elle, dépendre leur valeur de la valeur de  $b$  et de  $c$ , respectivement. On remarquera aussi le rapport asymétrique de  $A$  avec  $B$  et  $C$ . Le processus correspondant à  $A$  sera enclenché dans une situation résultant soit de l'enclenchement de  $B$ , soit du blocage de  $C$ .

a	b	c	A	B	C
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0

Figure 13. — Tableau des états.

Quelle situation pourrions nous imaginer de représenter par des équations de ce type? Proposons un problème de prise de pouvoir et d'alliance politiques. Cette illustration suppose l'hypothèse préliminaire assez particulière que chaque parti décide isolément en fonction des options effectives sa participation au pouvoir ou son retrait. Nous ferions alors de  $A$  un parti majoritaire (on verra dans le tableau 13 qu'il n'y a pas de possibilité de pouvoir stable auquel il ne participe pas).  $B$  et  $C$  sont des partis d'appoint : toujours prêts à prendre le pouvoir en cas de vacance, mais qui ont besoin d'une alliance pour s'y maintenir. Les fonctions de  $A, B$  et  $C$  correspondent donc à la décision de prendre le pouvoir (et de s'y maintenir). Mais comment interpréter les temps de réponse et les équations logiques? Ces dernières représentent la logique des intérêts — et, concrètement, par exemple, la fidélité des parlementaires de chaque parti à des intérêts — qu'une participation au pouvoir donnée respecte ou viole. Les temps de réponse décrivent alors la rapidité de ce mécanisme de contrôle, qui dépend de la nature de chaque parti et éventuellement du nombre de voix obtenues aux dernières élections.

Nous pouvons, les temps de réponse étant fixés, suivre grâce au tableau des valeurs 13 la trajectoire du système à partir des différents états initiaux. Nous voyons trois états stables, correspondant à des cas où la situation de chaque parti répond à la logique des intérêts qui le régit. Ce sont des états 1 1 0, 1 0 0 et 1 1 1. Les figures 14 et 15 explorent les évolutions à partir des états transitoires. Il s'agit de deux séquences non connexes. Dans la première, deux cycles à deux états sont possibles. Dans la seconde, un état initial instable et un seul mène à l'état stable 1 1 1 : la seule manière d'amener tous les partis au pouvoir, s'ils n'y sont déjà, est de partir d'une situation où les deux partis minoritaires partagent ce pouvoir. Mais aucune évolution ne mène à une telle situation. Le graphe 16 résume la situation.

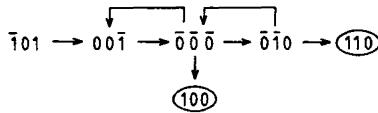


Figure 14. — Évolution des variables de mémoire.

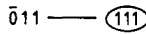


Figure 15. — Évolution des variables de mémoire.

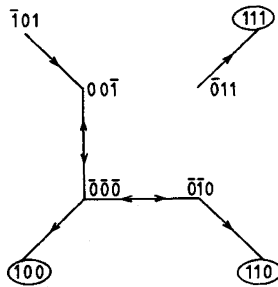


Figure 16. — Graphe des états.

Une discussion plus fine est possible pour déterminer les séquences possibles. Si l'on adopte  $00\bar{1}$  comme état initial, il n'y a qu'un seul successeur possible,  $\bar{0}00$ , qui admet lui-même trois successeurs :

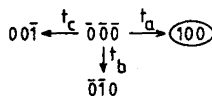


Figure 17. — Course critique à partir de l'état 000.

Si  $\Delta_a < \Delta_b$  et  $\Delta_a < \Delta_c$ , le troisième état sera 100.

Si  $\Delta_c < \Delta_a$  et  $\Delta_c < \Delta_b$ , le troisième état sera 001.

Lorsque le système sera dans ce dernier état, les ordres d'enclenchement des variables  $a$  et  $b$  seront annulés, et il ne subsistera qu'un ordre de blocage de la variable  $c$ , en sorte que le système retournera à l'état  $\overline{000}$ , dans la même situation que plus tôt. Le système présentera des oscillations un nombre de fois infini entre  $00\overline{1}$  et  $\overline{000}$ .

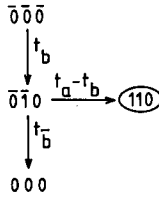


Figure 18. — Évolution des variables de mémoire.

Si  $\Delta_b < \Delta_a$  et  $\Delta_b < \Delta_c$ , le système évoluera vers l'état  $\overline{010}$ , qui peut avoir pour successeurs  $\overline{000}$  ou 110. Puisque l'ordre d'enclenchement de la variable  $a$  court sans contre-ordre à partir du passage par l'état  $\overline{000}$ , nous aurons :

Si :

$$\Delta_a < \Delta_b + \Delta_b^-, \quad \overline{010} \rightarrow 110, \tag{16}$$

Si :

$$\Delta_a > \Delta_b + \Delta_b^-, \quad \overline{010} \rightarrow \overline{000}, \tag{17}$$

Mais lorsque le système sera arrivé en  $\overline{000}$ , nous ne serons pas dans la même situation que plus haut, puisque l'ordre d'enclenchement de la variable  $a$  court depuis un temps égal à  $\Delta_b + \Delta_b^-$ .

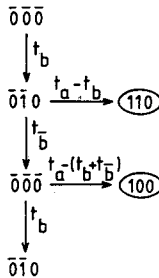


Figure 19. — Évolution des variables de mémoire.

Plus généralement :

Si :

$$k(\Delta_b + \Delta_{\bar{b}}) < \Delta_a < \Delta_b + k(\Delta_b + \Delta_{\bar{b}}), \quad \overline{000} \rightarrow 100, \quad (18)$$

Si :

$$(m-1)(\Delta_b + \Delta_{\bar{b}}) + \Delta_b < \Delta_a < m(\Delta_b + \Delta_{\bar{b}}), \quad \overline{000} \rightarrow 110, \quad (19)$$

avec  $k$  et  $m$  entiers naturels. La discussion se laisse résumer de la manière suivante :

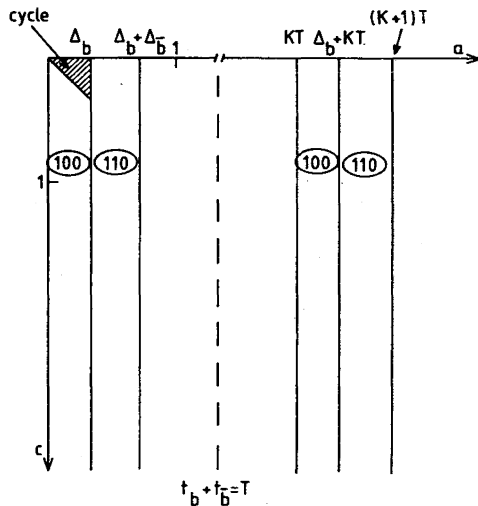


Figure 20. — Discussion générale.

On voit que le graphe des transitions d'état présente deux sous-graphes distincts, de sorte qu'il semble justifié d'étudier séparément les deux types de décision. Bien que les équations pour les choix de  $B$  et de  $C$  soient symétriques, les états stables ne sont pas symétriques par rapport aux variables  $b$  et  $c$ ; cette asymétrie provient en fait de la structure de l'équation relative aux choix de  $A$ . Une étude plus fine nous a permis de mettre en évidence deux situations qualitativement différentes lorsqu'on adopte pour état initial  $\overline{000}$ . Dans un premier cas, le système peut, en fonction de la valeur des temps de réponse, entrer dans le cycle  $\overline{000-001}$  dont il ne sortira plus. Ce cycle est stable face à des fluctuations des temps de réponse, et pourrait être observable dans une situation

réaliste. Dans un second cas, le système oscillera un nombre fini de fois entre les états  $\overline{000}$  et  $\overline{010}$ , et choisira enfin un des états stationnaires  $110$  et  $100$ . Nous pouvons interpréter ce second comportement comme une oscillation amortie.

L'idée d'un cycle infini semble manquer de réalisme dans le cas d'un processus de décision; l'existence de ce type de cycle provient de l'absence de processus d'apprentissage dans le système : un processus d'apprentissage peut modifier les temps de réponse ce qui signifie que ces derniers deviennent une fonction des états de transition du système. Des systèmes séquentiels avec propriétés d'apprentissage dans le temps de réponse ont été construits à l'aide d'éléments électroniques.

Des travaux en cours sont consacrés à l'étude analytique de ces systèmes. La simulation de systèmes séquentiels sur machines logiques est extrêmement rapide [10].

#### REMERCIEMENTS

Ce texte nous a donné l'occasion de discussions fructueuses avec les Pr I. Prigogine et R. Thomas, que nous tenons à remercier ici ainsi que J. L. Deneubourg, P. Van Ham et P. Vincke. Nous tenons à remercier les rapporteurs qui ont sensiblement amélioré la clarté de cet article. Ce travail a été partiellement financé par le Department of Transportation, Transportation System Center, Cambridge, Massachusetts (DOT-TSC, 1185), et la bourse Minna-James-Heineman.

#### BIBLIOGRAPHIE

1. E. R. HILGARD et R. C. ATKINSON, *Introduction to Psychology*, Harcourt, Brace and World, Inc., 1972.
2. R. THOMAS, *J. Theor. Biol.*, vol. 42, 1973, p. 563-585.
3. S. A. KAUFFMAN, *J. Theor. Biol.*, vol. 22, 1969, p. 437-467.
4. R. THOMAS, *Lectures Notes in Biomathematics*, R. THOMAS, éd., Springer, 1979.
5. A. DE PALMA et Cl. LEFEVRE, *Disaggregated Models and Theory about Decision-Making in Dynamic Collective Systems. Applications to Models of Demands in Transports*, submitted for publication, 1980.
6. J. FLORINE, *La synthèse des machines logiques et son automatisation*, Dunod, Paris, 1964.
7. P. VAN HAM et I. LASTERS, *J. Theor. Biol.*, vol. 72, 1978, p. 269-181.
8. R. THOMAS, *J. Theor. Biol.*, 1979 (in press).
9. S. LERMAN, *A Disaggregate Behavioral Model of Urban Mobility Decisions*, Ph. D. Thesis (M.I.T.), 1975.
10. P. VAN HAM, *A Random Simulation of Deferred Actions Logical Systems Dynamics*, I.F.A.C., Congress on discrete systems, Dresden, D.D.R., vol. 5, 1977, p. 27-35.