

JEAN-PIERRE CROUZEIX

**Brève communication. Continuité des applications  
linéaires multivoques**

*Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique*, tome 7, n° R1 (1973), p. 62-67

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1973\\_\\_7\\_1\\_62\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1973__7_1_62_0)

© AFCET, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## CONTINUITÉ DES APPLICATIONS LINÉAIRES MULTIVOQUES

par Jean-Pierre CROUZEIX (1)

Résumé. — On étudie la continuité des applications linéaires multivoques à partir des définitions introduites par Berge. La sci-continuité se ramène à la continuité d'une application linéaire univoque associée, et l'on étudie la relation entre sci-continuité et fermeture, ainsi qu'avec la distance d'Haussdorff.

Les notations et définitions sur les multiapplications et leur continuité sont celles de Berge [1].

### I. DEFINITION ET RAPPELS

On dira que  $\Gamma$  est une multiapplication de  $X \rightarrow Y$  si  $\Gamma$  est une application de  $X \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ .

Par définition  $\text{dom } \Gamma = \{ x \in X / \Gamma(x) \neq \emptyset \}$  ;  
graphe ( $\Gamma$ ) =  $\{ (x, y) / y \in \Gamma(x) \}$

$\Gamma^-$  est l'application de  $Y \rightarrow X$  de même graphe que  $\Gamma$ .

Si  $\Gamma_1$  est une multiapplication de  $X \rightarrow Y$ ,  $\Gamma_2$  une multiapplication de  $Y \rightarrow Z$  alors le produit de composition est défini par :

$\Gamma_2 \circ \Gamma_1(x) = \{ z / \exists y \in Y \text{ avec } (x, y) \in \text{graphe}(\Gamma_1) \text{ et } (y, z) \in \text{graphe}(\Gamma_2) \}$ .

Il en résulte que :  $(\Gamma_2 \circ \Gamma_1)^- = \Gamma_1^- \circ \Gamma_2^-$  ;

*Définition :*

Soit  $X, Y$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbf{R}$ ,  $\Gamma$  une multiapplication de  $X \rightarrow Y$   
 $\Gamma$  est dite linéaire si :

1)  $y \in \Gamma(x), y' \in \Gamma(x') \Rightarrow y + y' \in \Gamma(x + x')$

---

(1) Université de Clermont-Ferrand, Département de Mathématiques Appliquées.

$$2) \quad y \in \Gamma(x), \lambda \in \mathbf{R} \Rightarrow \lambda y \in \Gamma(\lambda x).$$

$\Gamma$  sera dite non dégénérée si  $\exists x \in \text{dom } \Gamma$  avec  $x \neq 0$ .

On trouvera dans Berge les résultats suivants :

$$1^\circ \Gamma \text{ linéaire, } \Gamma \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \in \Gamma(0) \\ \forall x \in \text{dom } (\Gamma), \lambda \in \mathbf{R} \Gamma(\lambda x) = \lambda \Gamma(x), \text{ si } \lambda \neq 0 \\ \forall x, x' \in \text{dom } (\Gamma) \Gamma(x + x') = \Gamma(x) + \Gamma(x'). \end{cases}$$

2° Le produit de composition de 2 multiapplications linéaires donne une multiapplication linéaire.

3°  $\Gamma$  linéaire  $\Rightarrow \Gamma^-$  linéaire.

4°  $\Gamma$  linéaire,  $\Gamma(0) = \{0\} \Leftrightarrow \Gamma$  linéaire univoque.

5° Si  $A$  est convexe  $\subset X$ ,  $\Gamma$  linéaire de  $X \rightarrow Y$  alors  $\Gamma(A)$  est convexe dans  $Y$ .

En particulier  $\Gamma(x)$  est convexe  $\forall x \in X$ .

## II. CARACTERISATION DES MULTIAPPLICATIONS LINÉAIRES

### Proposition 1

Soit  $\Gamma$  une multiapplication de  $X \rightarrow Y$  avec  $\Gamma \neq \emptyset$  (c a d  $\text{dom } \Gamma \neq \emptyset$ ) alors  $\Gamma$  linéaire  $\Leftrightarrow$  graphe  $(\Gamma)$  est un sous espace vectoriel de  $X \times Y$ .

*Démonstration :*

$\Rightarrow$  Soit  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2) \in \text{graphe } (\Gamma)$  alors  $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}$  on a

$$\lambda y_1 + \mu y_2 \in \lambda \Gamma(x_1) + \mu \Gamma(x_2) = \Gamma(\lambda x_1 + \mu x_2)$$

donc,  $(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2) \in \text{graphe } (\Gamma)$ .

$\Leftarrow$  Soit  $G = \text{graphe } (\Gamma)$ ,  $(x, y) \in G \Rightarrow (\lambda x, \lambda y) \in G$ .

En outre,  $(x, y), (x', y') \in G \Rightarrow [(x + x'), (y + y')] \in G$  d'où la linéarité de  $\Gamma$ .

### Corollaire 1

Soit  $\Gamma$  une multiapplication linéaire de  $X \rightarrow Y$  avec  $\Gamma \neq \emptyset$  alors  $\Gamma(0)$  est un sous espace vectoriel de  $Y$ ,  $\Gamma(x)$  est un sous espace affine de  $Y$ .

*Démonstration :*

$$\Gamma(0) \simeq \text{graphe } (\Gamma) \cap (\{0\} \times Y) \quad ; \quad \Gamma(x) \simeq \text{graphe } (\Gamma) \cap (\{x\} \times Y).$$

**Corollaire 2**

Soit  $\Gamma$  une multiapplication linéaire de  $X \rightarrow Y$  avec  $\Gamma \neq \emptyset$   $\Pi$  l'application canonique de  $Y \rightarrow Y/\Gamma(0)$  alors  $\gamma = \Pi \circ \Gamma$  de  $X \rightarrow Y/\Gamma(0)$  est une application linéaire univoque et  $\Gamma$  est parfaitement défini par la donnée de  $\gamma$  et de  $\Gamma(0)$ . En fait  $\Gamma = \Pi^{-1} \circ \gamma$ .

*Démonstration :*

Puisque  $\Gamma(0)$  est un sous espace vectoriel,  $Y/\Gamma(0)$  est un espace vectoriel,  $\gamma$  est linéaire comme produit de deux multiapplications linéaires. Puisque  $\gamma(0) = \Pi(\Gamma(0)) = \{0\}$ ,  $\gamma$  est univoque.

EXEMPLE :

Soit  $F$  un sous espace vectoriel de  $Y$ , la multiapplication linéaire de  $X \rightarrow Y$  constante :  $\Gamma(x) = F \forall x \in X$  a pour application univoque associée

$$\gamma(x) = 0 \quad \forall x \in X.$$

**III. S.C.I. ET S.C.S. CONTINUITE****Proposition 2**

Soit  $X, Y$  deux e.v.t.,  $\Gamma$  une multiapplication linéaire de  $X \rightarrow Y$  avec  $\text{dom } \Gamma = X$ ,  $\gamma$  l'application linéaire univoque de  $X \rightarrow Y/\Gamma(0)$  associée à  $\Gamma$ . On munit  $Y/\Gamma(0)$  de la topologie quotient, alors  $\gamma$  continue  $\Leftrightarrow \Gamma$  s.c.i.  $\Leftarrow \Gamma$  s.c.s. en tout point.

*Démonstration :*

a)  $\gamma$  continue  $\Rightarrow \Gamma$  sci : En effet  $\Gamma = \Pi^{-1} \circ \gamma$ ;  $\Pi$  est ouverte donc  $\Pi^{-1}$  est sci,  $\gamma$  est continue donc sci,  $\text{im } (\gamma) \subset \text{dom } (\Pi^{-1}) = Y$  donc  $\Gamma$  est sci.

b)  $\Gamma$  sci  $\Rightarrow \gamma$  continue : en effet  $\gamma = \Pi \circ \Gamma$ ,  $\Pi$  est continue donc sci,  $\Gamma$  est sci par hypothèse et  $\text{im } (\Gamma) \subset \text{dom } (\Pi) = Y$  donc  $\gamma$  est sci, or  $\gamma$  est univoque donc  $\gamma$  est continue.

c)  $\Gamma$  scs en tout point  $\Rightarrow \gamma$  continue : soit  $\mathring{V}$  un ouvert de  $Y/\Gamma(0)$ ,

$V = \Pi^{-1}(\mathring{V})$  est un ouvert de  $Y$ ,

or  $\gamma^{-1}(\mathring{V}) = \Pi^{+}(V) = \{x/\Gamma(x) \subset V\}$  car  $\gamma(x) \in \mathring{V} \Leftrightarrow \Gamma(x) \subset V$ .

Puisque  $\Gamma$  est scs en tout point  $\Gamma^{+}V$  est un ouvert de  $X$  donc  $\gamma^{-1}(\mathring{V})$  est un ouvert de  $X$ .

REMARQUE :

En général, on n'a pas  $\Gamma$  sci  $\Rightarrow \Gamma$  scs en tout point comme le prouve le contre exemple suivant :

Soit  $\Gamma$  la multiapplication de  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  définie par :  
 $\Gamma(x) = \{x\} \times \mathbf{R} \forall x \in \mathbf{R}$ ,  $\Gamma$  est bien linéaire et est sci. Soit

$$V = \{(x, y) \mid |xy| < 1\}$$

c'est un ouvert de  $\mathbf{R}^2$  et l'on a  $\Gamma^+ V = \{0\}$  qui n'est pas un ouvert de  $\mathbf{R}^2$ .

La scs continuité apparaît donc comme une notion trop forte pour étudier la continuité des multiapplications linéaires.

#### IV. FERMETURE

Une multiapplication est dite fermée (Berge) si son graphe est fermé.

**Lemme :**

Soit  $X, Y$  e.v.t.,  $\Gamma$  une multiapplication linéaire de  $X \rightarrow Y$  si  $\Gamma(x_0)$  est fermé pour un  $x_0 \in \text{dom } \Gamma$  alors  $\Gamma(x)$  est fermé  $\forall x \in X$ .

*Démonstration :*

— Si  $\Gamma(x_0)$  est fermé pour  $x \in \text{dom } \Gamma$ , alors  $\Gamma(0)$  est fermé.

En effet soit  $y_0 \in \Gamma(x_0)$  alors  $\Gamma(0) = \Gamma(x_0) - y_0$  est fermé.

— Si  $\Gamma(0)$  est fermé alors  $\Gamma(x)$  est fermé: si  $x \notin \text{dom } \Gamma$ ,  $\Gamma(x) = \emptyset$ ; si  $x \in \text{dom } \Gamma$  soit  $y \in \Gamma(x)$  alors  $\Gamma(x) = \Gamma(0) + y$  est fermé.

#### Proposition 3

Soit  $X, Y$  deux e.v.t.,  $\Gamma$  une multiapplication linéaire de  $X \rightarrow Y$ ,  $\Gamma \neq \emptyset$   $\gamma$  l'application linéaire univoque associée de  $X \rightarrow Y/\Gamma(0)$  où  $Y/\Gamma(0)$  est muni de la topologie quotient, alors  $\Gamma$  fermée  $\Leftrightarrow \gamma$  fermée.

*Démonstration :*

Soit  $F = \{0\} \times \Gamma(0)$ ;  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $X \times Y$ ;  $(X \times Y/F)$  muni de la topologie quotient est isomorphe topologiquement à  $X \times (Y/\Gamma(0))$  muni de la topologie produit de  $X$  par  $Y/\Gamma(0)$ . Soit  $G = \text{graphe } (\Gamma)$  et  $g = \text{graphe } (\gamma)$  :

a)  $G$  fermé  $\Rightarrow g$  fermé;  $G$  est un fermé  $F$  — saturé de  $X \times Y$  ( $G + F = G$ ) donc son image dans  $(X \times Y)/F$  est fermée. Cette image correspond à  $g$  dans l'isomorphie donc  $g$  est fermé.

b)  $g$  fermé  $\Rightarrow G$  fermé; l'image de  $G$  dans  $(X \times Y)/F$  est alors fermée, comme  $G$  est  $F$  — saturé  $G$  est fermé dans  $X \times Y$ .

#### Corollaire 1

Soit  $X, Y$  deux e.v.t.,  $\Gamma$  une multiapplication linéaire de  $X \rightarrow Y$ . Si  $\Gamma$  est sci de  $\text{dom } \Gamma \rightarrow Y$ , si  $\text{dom } (\Gamma)$  est fermé dans  $X$  et  $\Gamma(0)$  fermé dans  $Y$  alors  $\Gamma$  est fermé.

$\Gamma(0)$  fermé  $\Rightarrow Y/\Gamma(0)$  séparé;  $\gamma$  est continu de  $\text{dom } \Gamma = \text{dom } \gamma \rightarrow Y/\Gamma(0)$  donc graphe  $(\gamma)$  fermé dans  $\text{dom } \Gamma \times Y/\Gamma(0)$  par suite graphe  $(\Gamma)$  fermé dans  $\text{dom } \Gamma \times Y$ . Puisque  $\text{dom } \Gamma$  est fermé,  $\Gamma$  est fermé dans  $X \times Y$ .

### Corollaire 2

*Soit  $X, Y$  deux e.v.t. métrisables complets.*

$\Gamma$  une multiapplication linéaire de  $X \rightarrow Y$  alors  $\text{dom } \Gamma$  fermé et  $\Gamma$  fermé  $\Rightarrow \Gamma$  sci de  $\text{dom } \Gamma \rightarrow Y$ .

*Démonstration :*

$\Gamma$  fermé  $\Rightarrow \Gamma(0)$  fermé de  $Y$  et  $\gamma$  fermée;  $\text{dom } \Gamma = \text{dom } \gamma$  est un e.v.t. métrisable complet ainsi que  $Y/\Gamma(0)$  puisque  $\Gamma(0)$  est fermé. L'application linéaire  $\gamma : \text{dom } \Gamma \rightarrow Y/\Gamma(0)$  est donc continue (théorème du graphe fermé) d'où  $\Gamma$  est sci.

### Corollaire 3

*Soit  $X, Y$  deux e.v.t. métrisables complets.*

$\Gamma$  une multiapplication linéaire de  $X \rightarrow Y$  alors  $\Gamma$  fermée,  $\Gamma$  sci de  $\text{dom } \Gamma \rightarrow Y \Rightarrow \text{dom } \Gamma$  fermé dans  $X$ .

*Démonstration :*

$\Gamma$  fermée  $\Rightarrow \gamma$  fermée,  $\Gamma$  sci  $\Rightarrow \gamma$  continue de  $\text{dom } \Gamma \rightarrow Y/\Gamma(0)$ . Considérons l'application  $\hat{p} : \text{graphe } (\gamma) \rightarrow \text{dom } \Gamma$  définie par :  $\hat{p}(x, \gamma(x)) = x$ ; elle est linéaire bijective et bicontinue; graphe  $(\gamma)$  est fermé dans  $X \times Y/\Gamma(0)$  qui est complet, donc graphe  $(\gamma)$  est complet;  $\text{dom } \Gamma$  et graphe  $(\gamma)$  étant isomorphes topologiquement,  $\text{dom } \Gamma$  est complet donc est fermé dans  $X$ .

Du point de vue géométrique les corollaires 2 et 3 peuvent s'énoncer comme suit; soit  $X, Y$  deux e.v.t. métrisables complets,  $G$  un sous-espace vectoriel fermé de  $X \times Y$ ,  $M$  sa projection sur  $X$  :

Une C.N.S. pour que  $M$  soit fermé est que  $G$  soit le graphe d'une multiapplication s.c.i. de  $M \rightarrow Y$ .

### Corollaire 4

Toute multiapplication linéaire de  $\Gamma$  de  $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$  est fermée et s.c.i. de  $\text{dom } \Gamma \rightarrow \mathbf{R}^p$ .

En effet tout sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$  est fermé donc  $\Gamma$  est fermé, comme en outre  $\text{dom } \Gamma$  sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^n$  est fermé  $\Gamma$  est sci.

## V. RELATIONS AVEC LA DISTANCE D'HAUSSDORFF

Soit  $Y$  un e.v.t. métrisable où la distance  $d$  est invariante par translation  $\Gamma(0)$  un sous-espace vectoriel de  $Y$ .

On définit  $\tilde{d}$  sur  $(Y/\Gamma(0)) \times (Y/\Gamma(0))$  par :

$$\tilde{d}(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}) = \text{Inf} [d(x, y) / x \in \overset{\circ}{x}, y \in \overset{\circ}{y}].$$

L'invariance par translation de  $d$  nous donne :

$$\tilde{d}(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}) = \text{Inf} [d(x, y) / x \in \overset{\circ}{x}] \quad \forall y \in \overset{\circ}{y}.$$

Il est facile de voir que  $\tilde{d}$  définit un écart sur  $Y/\Gamma(0)$ , que la topologie induite par cet écart coïncide avec la topologie quotient. Si  $\Gamma(0)$  est fermé, la topologie quotient est séparée et l'écart est une distance.

### Proposition 4

Soit  $X$  un e.v.t.,  $Y$  un e.v.t. métrisable (distance  $d$ ) où la distance est invariante par translation.

$\Gamma$  une multiapplication linéaire de  $X \rightarrow Y$ , avec  $\Gamma(0)$  fermé.

$\mathcal{J}$  l'ensemble des fermés non vides de  $Y$  muni de la distance d'Haussdorff  $\delta$  induite par  $d$ .

$\Gamma$  peut être considéré (cf. lemme) comme une application de  $\text{dom } \Gamma \rightarrow \mathcal{J}$ , alors  $\Gamma$  continu de  $\text{dom } \Gamma \rightarrow \mathcal{J} \Leftrightarrow \Gamma$  sci de  $\text{dom } \Gamma \rightarrow Y$ .

On peut prendre  $\text{dom } \Gamma = X$ . La proposition résulte alors du fait que si  $x_1, x_2 \in X$  et si  $\overset{\circ}{y}_1 = \gamma(x_1), \overset{\circ}{y}_2 = \gamma(x_2)$  alors :

$$\tilde{d}(\overset{\circ}{y}_1, \overset{\circ}{y}_2) = \delta(\Gamma(x_1), \Gamma(x_2)).$$

En effet

$$\tilde{d}(\overset{\circ}{y}_1, \overset{\circ}{y}_2) = \text{Inf} [d(y_1, y_2) / y_2 \in \overset{\circ}{y}_2] \quad \forall y_1 \in \overset{\circ}{y}_1$$

donc

$$\tilde{d}(y_1, y_2) = \text{Sup}_{y_1 \in \overset{\circ}{y}_1} \text{Inf}_{y_2 \in \overset{\circ}{y}_2} [d(y_1, y_2)]$$

de même

$$\tilde{d}(y_1, y_2) = \text{Sup}_{y_2 \in \overset{\circ}{y}_2} \text{Inf}_{y_1 \in \overset{\circ}{y}_1} [d(y_1, y_2)].$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERGE, *Espace topologique, fonctions multivoques* (Dunod, Paris 1959).
- [2] HORVATH John, *Topological vector spaces and distributions*, (vol. 1, Addison Wesley 1966).