Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge

Michèle Chambat

Brève communication. Localisation de valeurs propres, régions de Gudkov

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, tome 5, nº R3 (1971), p. 82-88

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1971__5_3_82_0>

R.I.R.O.
(5e année, N° R-3, 1971, p. 82-88)

LOCALISATION DE VALEURS PROPRES REGIONS DE GUDKOV

par Michèle CHAMBAT (1)

Résumé. — *R. S. Varga* [2] *a introduit le domaine minimal de Gerschgörin de localisation des valeurs propres d'une matrice complexe. L'objet principal de ce papier (partie IV) est d'effectuer sur les régions de Gudkov (partie II) le même travail que Varga sur des cercles de Gerschgörin.*

I. RAPPELS

Définition : la matrice A de taille n sur K ($= \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) est à diagonale dominante si

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \qquad i = 1 \dots n$$

Toute matrice à diagonale dominante est régulière. Tout théorème de régularité sur les matrices correspond à un théorème de localisation de valeurs propres. Le plus ancien est dû à Gerschgörin et on en a tiré depuis de nombreuses généralisations sous le nom de théorème de type Gerschgörin. Nous allons rappeler ici quelques résultats dus à Varga [2] et [3].

Soit λ une valeur propre de A. Soit x un vecteur de $\mathbf{R}^n$ positif et X la matrice diagonale associée, λ est aussi valeur propre de $X^{-1}AX$. Pour tout x positif de $\mathbf{R}^n$, la matrice $X^{-1}(A - \lambda I)X$ n'est pas régulière, donc elle n'est pas à diagonale dominante :

$$\forall\, x > 0 \quad \exists\, i \in [1, n] : |\lambda - a_{ii}| \leqslant \sum_{j \neq i} \frac{x_j}{x_i} |a_{ij}| = \Lambda_i(x)$$

Posons

$$G_i(x) = \{ z \in \mathbf{C} / |\lambda - a_{ii}| \leqslant \Lambda_i(x) \}$$

$$G(x) = \bigcup_{i=1}^{n} G_i(x) \tag{1}$$

(1) Lyon I, S.A.N.T.I., U.E.R. de Mathématiques, Villeurbanne.

C'est le domaine de Gerschgörin associé à la matrice $X^{-1}AX$.

Toutes les valeurs propres de A appartiennent à $G(x)$ pour tout x de $\mathbf{R}^n$. Considérons le domaine de matrices

$$\Omega_A = \{ B = (b_{ij}) / b_{ii} = a_{ii}\, i = 1 \dots n,\ |b_{ij}| = |a_{ij}|\ \forall\, i \neq j \}$$

le domaine de Gerschgörin défini par (1) associé à chaque matrice de Ω_A est le même; Varga a donc donné le résultat :

Théorème 1 : Toutes les valeurs propres des matrices de Ω_A sont contenues dans le *domaine minimal de Gerschgörin* :

$$G(\Omega_A) = \bigcap_{x>0} G(x) \tag{2}$$

II. REGIONS DE GUDKOV

Définition [5] : On appelle G-matrice (ou matrice de Gudkov) toute matrice A telle que $|a_{ii}| > R_i \qquad i = 1 \dots n$ où :

$$\left\{\begin{aligned} R_1 &= \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}| \\ R_i &= \sum_{j<i} |a_{ij}| \frac{R_j}{|a_{jj}|} + \sum_{j>i} |a_{ij}| \qquad i = 2 \dots, n-1 \\ R_n &= \sum_{j=1}^{n-1} |a_{nj}| \frac{R_j}{|a_{jj}|} \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Gudkov a prouvé que toute matrice vérifiant ces n conditions était non singulière (condition G).

Définition : la matrice $A = (a_{ij})$ est dite H-matrice si la matrice de Jacobi J associée à A existe et est telle que $\rho(|J|) < 1$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & & -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} \\ & 0 & \\ & \ddots & \\ -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} & & 0 \end{pmatrix}$$

avec la notation :

$$|B| = (|b_{ij}|) \qquad \text{si } B = (b_{ij})$$

F. Robert [5] a montré le théorème suivant :

Théorème 2-1 : *la classe des H-matrices contient celle des G-matrices qui contient celle des matrices à diagonale dominante.*

$$\text{la condition } G \text{ s'écrit } S\infty\infty((I - |L|)^{-1}|U|) < 1$$

où L et U sont les matrices triangulaires respectivement inférieure et supérieure de J, matrice de Jacobi associée à A.

Les théorèmes de type Gerschgörin s'appuient sur la négation de la diagonale dominance, d'où l'idée d'introduire des domaines plus fins de localisation en niant la propriété G.

Si λ est valeur propre de A, la matrice $A - \lambda I$ n'est pas régulière, donc ce n'est pas une G-matrice et il existe un indice i tel que

$$|a_{ii} - \lambda| \leqslant R_i(\lambda)$$

(où $R_i(\lambda)$ est la quantité définie par des équations identiques à (3) pour la matrice $A - \lambda I$).

Introduisons les ensembles :

$$\begin{array}{ll} (4) & K_1 = \{ z \in \mathbf{C} / |a_{11} - z| \leqslant R_1(z) \} \\ i = 2 - n - 1 & K_i = \{ z \in \mathbf{C} / |a_{ii} - z| \leqslant \sum_{j<i} |a_{ij}| \dfrac{R_j(z)}{|a_{jj} - z|} + \sum_{j>i} |a_{ij}| = R_i(z) \} \\ & K_n = \{ z \in \mathbf{C} / |a_{nn} - z| \leqslant \sum_{j<n} |a_{nj}| \dfrac{R_j(z)}{|a_{jj} - z|} = R_n(z) \} \end{array}$$

D'où le :

Théorème 2-2 : *les valeurs propres de A sont contenues dans le domaine de Gudkov*

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$$

De plus ce domaine est inclus dans celui de Gerschgörin.

$$K \subset G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i \qquad \text{où } G_i = \{ z \in \mathbf{C} / |a_{ii} - z| \leqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \}$$

Remarque : C'est uniquement cette deuxième affirmation qui justifie l'introduction du domaine de Gudkov car il perd la propriété la plus remarquable de celui de Gerschgörin : sa simplicité.

Exemple : $n = 3$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad P(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 1 - \sqrt{5})(\lambda - 1 + \sqrt{5})$$

G_1 = cercle de centre — 1 et de rayon 1

G_2 = cercle de centre 1 et de rayon 2

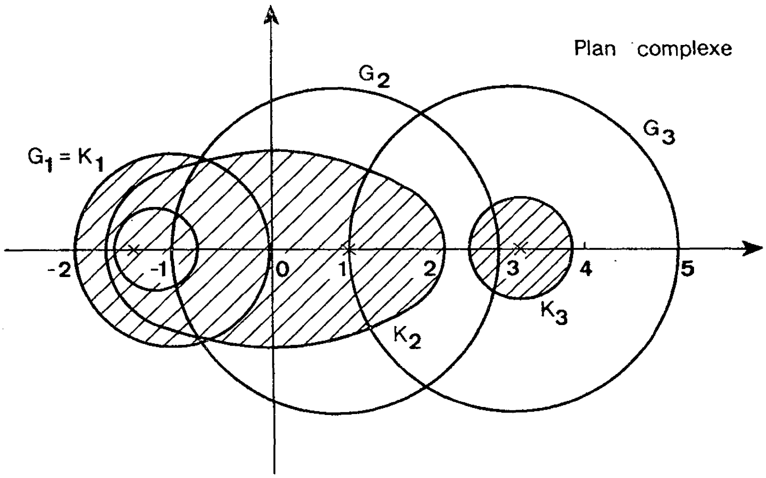
G_3 = cercle de centre 3 et de rayon 2

Régions de Gudkov : $K_1 = G_1$

$$K_2 = \left\{ z/|z-1| \leqslant \frac{1}{|z+1|} + 1 \right\}$$

$$= \{ z \in \mathbf{C}/|(z-1)(z+1)| - |z+1| - 1 \leqslant 0 \}$$

$$K_3 = \left\{ z/|z-3| \leqslant \frac{2}{|z+1|} \right\} = \{ z \in \mathbf{C}/|z^2 - 2z - 3| \leqslant 2 \}$$



On voit nettement sur ce schéma le gain apporté par le domaine de Gudkov (région hachurée) sur celui de Gerschgörin (réunion des cercles G_1, G_2 et G_3).

REMARQUE. Contrairement au cas de Gerschgörin, les régions de Gudkov dépendent de l'ordre des lignes de la matrice A. Il pourra donc être intéressant de considérer des permutations sur les lignes de la matrice.

On retrouve sur cet exemple quelques propriétés immédiates de ces régions :

— Sur ce schéma, l'intersection des deux premiers cercles est contenue dans K_2 :

$$\left(\bigcap_{j=1}^{i} G_j \right) \subset \left(\bigcap_{j=1}^{i} K_j \right) \subset K_i \qquad i = 1 \ldots n$$

— Seule la troisième région K_3 est en deux morceaux et possède un morceau disjoint du reste du domaine.

$$\forall j < i, \quad a_{ij} \text{ appartient à } K_i \text{ dès que } a_{ij} \text{ est non nul.}$$
$$a_{ii} \text{ appartient toujours à } K_i.$$

Donc le domaine ne sera jamais formé de morceaux disjoints si la matrice ne possède aucun élément hors de la diagonale nul.

Ces régions sont assez compliquées et il ne saurait être question en général d'avoir leur forme géométrique. Notons cependant que l'on peut très facilement savoir si un point z appartient à K ou non. Elles peuvent donc être utilisées simplement numériquement comme régions d'exclusions.

Nous aurons par la suite besoin du résultat suivant :

III. UNE CARACTERISATION DES H-MATRICES

Soit A une matrice (n, n) quelconque, Δ une matrice diagonale régulière, L et U les matrices triangulaires inférieure et supérieure de la matrice de Jacobi J associée à A.

Montrons la caractérisation :

Théorème 3 : *Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *A est une H-matrice.*

(*b*) *Il existe une matrice diagonale régulière Δ telle que $\Delta^{-1}A\Delta$ soit à diagonale dominante.*

(*c*) *Il existe une matrice diagonale régulière Δ_1 telle que $\Delta_1^{-1}A\Delta_1$ soit une G-matrice.*

Démonstration :

(*b*) $\Rightarrow$ (*c*) car la classe des matrices à diagonale dominante est inclue dans la classe des G-matrices.

(*c*) $\Rightarrow$ (*a*) la classe des G-matrices est contenue dans celle des H-matrices donc $\Delta_1^{-1}A\Delta_1$ est une H matrice, c'est-à-dire $\rho(|J_{\Delta_1^{-1}A\Delta_1}|) < 1$.

Or cette matrice de Jacobi n'est autre que la transmuée de celle de A par Δ_1, elles ont donc même rayon spectral et A est une H matrice

(*a*) $\Rightarrow$ (*b*).

D'après M^lle^ Odiard [7], pour toute matrice positive ou nulle M, on a :

$$\rho(M) = \inf_{\Delta'} S_{\infty\infty}(\Delta'^{-1}M\Delta')$$

Δ' diagonale positive

La matrice $|L| + |U|$ est positive ou nulle, donc :

$$\rho(|L| + |U|) = \inf_{\Delta' \text{ positif}} S_{\infty\infty}(\Delta'^{-1}(|L| + |U|)\Delta')$$

Dire que ce rayon spectral est inférieur à 1, c'est dire qu'il existe une diagonale positive Δ, donc régulière telle que

$$S_{\infty\infty}(\Delta^{-1}(|L| + |U|)\,\Delta) < 1$$

REMARQUE : Dans la caractérisation précédente, on peut se restreindre à des diagonales positives.

IV. LE DOMAINE MINIMAL DE GUDKOV

Si l'on considère la famille de matrices Ω_A définie dans I, les domaines de Gudkov associés aux matrices B de Ω_A sont encore tous identiques.

Soit λ une valeur propre de A. Pour toute diagonale positive régulière Δ, la matrice $\Delta^{-1} A\Delta - \lambda I$ est singulière, donc elle n'est pas une G-matrice.

Si on pose :

$$R_1(\lambda, x) = \sum_{j=2}^{n} \frac{x_j}{x_1} |a_{1j}|$$

$$i = 2 - n - 1 \qquad R_i(\lambda, x) = \sum_{j<i} \frac{x_j}{x_i} \frac{R_j(\lambda, x)}{|a_{jj} - \lambda|} |a_{ij}| + \sum_{j>i} \frac{x_j}{x_i} |a_{ij}|$$

$$R_n(\lambda, x) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{x_j}{x_n} \frac{R_j(\lambda, x)}{|a_{jj} - \lambda|} |a_{n\,j}|$$

où x est le vecteur formé de la diagonale de Δ.

$$\forall\ \Delta \text{ diagonale} > 0,\ \exists\ i \in [1, n]\ |a_{ii} - \lambda| \leqslant R_i(\lambda, x)$$

En introduisant les ensembles de Gudkov

$$K_1(x) = \{\, z \in \mathrm{C}/|a_{11} - z| \leqslant R_1(z, x)\,\} = G_1(x)$$

$$K_i(x) = \{\, z \in \mathrm{C}/|a_{ii} - z| \leqslant R_i(z, x)\,\}\ i = 2 - n$$

et

$$K(x) = \bigcup_{i=1}^{n} K_i(x)$$

Les valeurs propres de A appartiennent à $K(x)$ pour tout x positif; donc aussi $K^* = \bigcap_{x>0} K(x)$, appelé domaine minimal de Gudkov.

Théorème 4 : *Le domaine minimal de Gudkov coïncide avec le domaine minimal de Gerschgörin.*

Démonstration : Toute matrice à diagonale dominante étant une G-matrice, on a $K^* \subset G(\Omega_A)$.

Réciproquement si z est un complexe de $G(\Omega_A)$, pour toute matrice diagonale positive Δ, la matrice $\Delta^{-1} A\Delta - zI$ n'est pas diagonale dominante; c'est dire d'après le théorème 3 qu'elle n'est pas non plus une G-matrice, ce qui démontre le théorème.

REMARQUE. On retrouve dans ce théorème le résultat montré par Levinger [4] dans un article faisant suite à celui de Varga, et donnant une nouvelle caractérisation de $G(\Omega_A)$

$G(\Omega_A) = \{ z \in \mathbf{C} / A - zI$ n'est pas une H matrice $\}$.

Ce résultat est immédiat d'après l'équivalence $(a) \Leftrightarrow (b)$ du théorème 3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. S. VARGA, *Matrix Iterative Analysis*, Prentice Hall (1962).

[2] R. S. VARGA, *Minimal Gerschgörin sets*, Pac. J. of math., 15, n° 2 (1965).

[3] R. S. VARGA et B. LEVINGER, *Minimal Gerschgörin sets II*, Pac. J. of Math., 17, n° 2 (1966).

[4] B. W. LEVINGER, *Minimal Gerschgörin sets III*, Lin. Algebra, 2 (1969), 13-19.

[5] F. ROBERT, Thèse Grenoble (1968).

[6] A. OSTROWSKI, *Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale*. Comment. Math. Helv. 10-1 (1937).

[7] C. ODIARD, *Un corollaire du théorème de Perron-Frobénius*, Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, R-2/1971.