KARL STRAMBACH

Algebraische Geometrien

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 53 (1975), p. 165-210
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__53__165_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 53 (1975)

Algebraische Geometrien.

Karl Strambach (*)

Einleitung.

Seit zwanzig Jahren untersucht man intensiv die Struktur topologischer Geometrien. Ist ihre Punktmenge ein lokal kompakter zusammenhängender topologischer Raum einer Dimension $\leqslant 2$ (für projektive Ebenen reicht es $\leqslant 4$ zu fordern), so kann man weitgehende Strukturaussagen machen, indem man tiefe Ergebnisse der Theorie der Lieschen Transformationsgruppen und der algebraischen Topologie anwendet (Salzmann [1967], [1970], [1971], Breitsprecher [1971] und [1972], Strambach [1970], [1972], Groh [1968], [1970] und [1973]).

In dieser Arbeit wollen wir dagegen untersuchen, welchen Einfluß die Algebraische Geometrie auf geometrische Strukturen ausübt. Eine abstrakte Geometrie G besteht aus einer Menge $\mathfrak{P}$ von Punkten, in der ein System $\mathfrak{S}$ von Teilmengen, den sogenannten Blöcken, so ausgezeichnet ist, daß gewisse Inzidenzaxiome gelten. Wir werden von einer algebraischen Geometrie sprechen, wenn $\mathfrak{P}$ von den algebraischen Punkten einer k-Varietät V gebildet wird (k ist ein kommutativer algebraisch abgeschlossener Körper), $\mathfrak{S}$ ein System algebraischer irreduzibler Kurven (manchmal auch nur irreduzibler Untervarietäten) auf V ist, deren algebraische Punkte die jeweiligen geometrischen Axiome erfüllen, und die auf $\mathfrak{P}$ realisierte Geometrie als Unterstrukturen gewisse affine bzw. dual affine Ebenen besitzt, in denen die Parallelperspektivitäten birationale Abbildungen sind. Für projektive

(*) Indirizzo dell'A.: Mathematisches Institut der Universität, Bismarckstrasse 1 1/2 D-852 Erlangen, Rep. Fed. Tedesca.

Ebenen sind die Parallelperspektivitäten etwa dann birational, wenn sowohl die Punktmenge als auch die Geradenmenge aus den algebraischen Punkten von Varietäten bestehen und die das Verbinden zweier Punkte bzw. das Schneiden zweier Geraden beschreibenden Abbildungen algebraische Morphismen zwischen der Varietät der Punkte und der der Geraden sind. (vgl. Breitsprecher [1972]). Analoges trifft auch für Möbius- und Laguerreebenen zu. Anstatt verlangen zu müssen, daß alle geometrischen Operationen algebraische Morphismen sind, sind die Parallelprojektivitäten bereits dann algebraische Morphismen, wenn die folgenden Abbildungen birational ausfallen: Einerseits die Zuordnungen, die jedem Punkt den durch ihn gehenden Kreis eines Berührbüschels zuweisen, andererseits die Abbildungen, die jedem Kreis eines beliebigen Berührbüschels $\mathfrak{X}$ mit dem Träger p den von p verschiedenen Schnittpunkt dieses Kreises mit einem durch p gehenden nicht zu $\mathfrak{X}$ gehörenden Kreis L zuordnen. Auch die Voraussetzung, daß die Blöcke algebraische Kurven sein sollen, ist für projektive Ebenen sowie Möbius- order Laguerreebenen jedenfalls dann entbehrlich, wenn sowohl die Punktmenge, als auch die Blockmenge dieser Geometrien algebraische Varietäten bilden und die geometrischen Operationen algebraische Morphismen sind: Verlangt man dann nämlich von den Geraden bzw. Kreisen, daß sie vollständige Teilvarietäten der Varietät der Punkte sind, läßt sich zeigen, daß es Kurven sein müssen und V eine Fläche ist.

Wir zeigen in dieser Arbeit, daß die eben genannten algebraischen Forderungen schon so einschneidend sind, daß sie jeweils die stärksten Schließungssätze (Satz von Pappos, Satz von Miquel) erzwingen und zu klassischen Modellen der betrachteten Geometrien führen.

Würde man für die Punktmenge $\mathfrak{P}$ einer Geometrie statt aller algebraischen nur die rationalen Punkte einer k-Varietät über einem (nicht notwendig algebraisch abgeschlossenen) Körper k und als Blöcke statt absolut irreduzibler nur relativ zu k irreduzible Kurven nehmen, so würde man, wie die von Segre und Kuiper gefundenen, über der Punktmenge der reellen Eben realisierten Beispiele nichtdesarguesscher algebraischer projecktiver und affiner Ebenen zeigen, eine viel größere Fülle von Geometrien erfassen; doch die Rationalitätsfragen sind in der Algebraischen Geometrie erst andiskutiert, und es scheint, daß einem zur Beschreibung algebraischer Geometrien von diesem allgemeineren Ansatz her kein anwendungsreife Theorie der Algebraischen Geometrie zur Verfügung steht. Läßt man hingegen, wie wir es getan haben, alle algebraischen Punkte einer Varietät (über enim algebraisch abgeschlossenen Körper) als Punkte der Geometrie zu, so kann man reichlich aus dem überquellenden Füllhorn der Ergebnisse der klassischen Algebraischen Geometrie schöpfen.

In dieser Arbeit betrachten wir konkret algebraische projektive, affine und dual affine Ebenen sowie algebraische Möbius-und Laguerregeometrien (1). Es zeigt sich, daß diese geometrischen Strukturen, wenn überhaupt, nur auf rationalen quasiprojektiven Flächen F darstellbar sind (6.3); der algebraische Abschluß $\overline{F}$ ist vielmehr eine Veronesesche Fläche des n-dimensionalen projektiven Raumes oder eine ihrer Projektionen.

Ist auf einer Varietät (über einem algebraisch abgeschlossenen Körperk) eine algebraische projektive, affine oder dual affine Ebene realisiert, so ist diese algebraisch isomorph zur projektiven bzw. affinen Ebene über k. Auch die projektiven Abschließungen der algebraische Geometrien tragenden Varietäten sowie die zulässigen Systeme von Blöcken werden von uns bestimmt, und zwar nicht nur bis auf algebraische Isomorphie, sondern sogar bis auf die (viel engere) projektive Äquivalenz.

Trägt eine Varietät F eine projektive Ebene, deren Blöcke irreduzible algebraische Kurven sind und die eine affine Unterebene besitzt, in welcher die Parallelperspektivitäten zwischen Punktreihen und Parallelklassen algebraische Morphismen sind, so ist F projektiv äquivalent zur projektiven Ebene $\mathbf{P}_2$, zur Veroneseschen Fläche V^n des n-dimensionalen projektiven Raumes oder zu einer biregulären Projektion von V^n in einen niederdimensionalen projektiven Raum. Die Geraden der Geometrie sind im Falle der Charakteristik von k ungleich 2 stets Bilder der gewöhnlichen Geraden unter einem algebraischen Isomorphismus α, der $\mathbf{P}_2$ auf F abbildet; hat k die Charakteristik 2, so kann das System der Geraden außerdem nur das Bild der im § 5 durch die Gleichungen (1) beschriebenen Kurven unter einem algebraischen Isomorphismus von $\mathbf{P}_2$ auf F sein. Sind die Geraden

(1) Man hätte in unserem Rahmen auch algebraische Minkowskiebenen (vgl. Benz (1973)) definieren und behandeln können. Obgleich wir darauf verzichtet haben, wird jedem Leser klar, daß auch jede algebraische auf einer Varietät (über einem algebraisch algeschlossenen Körper) realisierte Minkowskiebene, deren Blöcke irreduzible algebraische Kurven sind, miquelisch sein muß, denn für algebraische Minkowskiebenen kann man ebenfalls eine aus algebraischen Morphismen bestehende dreifach transitive Gruppe von Projektivitäten einen Blocks auf sich definieren, die sich wegen § 3 als scharf dreifach transitiv herausstellt.

der projektiven Ebene ebene Kurven, so ist F sogar projektiv äquivalent zur projektiven Ebene $\mathbb{P}_2$.

Ist auf der Varietät F eine affine Ebene dargestellt, die sich nicht durch Hinzufügung einer algebraischen irreduziblen Kurve des projektiven Abschlusses $\overline{F}$ zu einer algebraischen projektiven Ebene ergänzen läßt, so ist die projektive Abschließung $\overline{F}$ das Bild einer Veroneseschen Fläche V der Ordnung n^2 unter einer solchen Projektion σ, die außerhalb einer nichtsingulären Kurve K der Ordnung n auf V biregulär ist. Ist π eine bireguläre Abbildung von V auf die projektive Ebene $\mathbb{P}_2$, bei der den Kurven n-ter Ordnung die projektiven Geraden entsprechen und K^π die « uneigentliche » Gerade von $\mathbb{P}_2$ ist, so gilt $F = (\overline{F} \setminus K)^\sigma$, und die Blöcke der affinen Ebene sind Bilder der Kurven eines solchen Kegelschnittsystems unter der Abbildung $\sigma\pi^{-1}$, welches dem im Satz 5.1 (2) beschriebenen projektiv äquivalent ist. Ist $\overline{F}$ eine Regelfläche (und darunter zählen wir auch die Kegel), so ist $\overline{F}$ projektiv äquivalent zum Bild einer Normregelfläche einer der Klassen $\frac{1}{2}(r-1)$, $\frac{1}{2}(r-2)$, $\frac{1}{2}(r-3)$ mit $r \geqslant 3$ unter einer im Satz 8.1 beschriebenen Projektion. Und als Regelfläche erweist sich der projektive Abschluß $\overline{F}$ von F etwa schon dann, wenn er nicht algebraisch isomorph zur projektiven Eben $\mathbb{P}_2$ ausfällt und singularitätenfrei oder in einem projektiven Raum normal (Bertini S. 217) ist. Sind die Geraden einer zu einer algebraischen projektiven Ebene nicht ergänzbaren affinen Ebene insbesondere ebene Kurven, so ist der projektive Abschluß $\overline{F}$ der die affine Ebene tragenden Fläche F entweder in den dreidimensionalen oder in den vierdimensionalen projektiven Raum einbettbar. Liegt der Abschluß $\overline{F}$ im dreidimensionalen projektiven Raum, so ist er, falls er nicht zur projektiven Ebene projektiv äquivalent ist, entweder eine reguläre Quadrik oder ein quadratischer Kegel oder die Regelfläche von Chasles-Cayley (Bertini S. 347). Ist $\overline{F}$ ein Kegel, so entsteht die Fläche F aus $\overline{F}$ durch die Herausnahme einer Erzeugenden, und die Geraden der affinen Ebene werden zusammen mit den Spuren aller Mantellinien von $\overline{F}$ in F von genau den Schnitten solcher Ebenen mit F gebildet, die durch einen (und denselben) auf L liegenden nichtsingulären Punkt von $\overline{F}$ gehen. Ist $\overline{F}$ eine reguläre Quadrik, so entsteht F aus $\overline{F}$ durch Entfernung zweier verschiedener einander treffender Erzeugenden L_1 und L_2, und die Geraden der affinen Ebene sind genau alle Schnitte von F mit solchen Ebenen, die durch $L_1 \cap L_2$ gehen. Ist schließlich $\overline{F}$ die Regelfläche dritter Ordnung von Chasles-Cayley, so entsteht F aus $\overline{F}$ durch die Herausnahme der minimalen Leitgeraden L sowie einer von ihr verschiedenen Erzeugenden G; die Geraden von F sind dann entweder die Spuren aller Schnitte von $\overline{F}$

in F mit solchen Ebenen, die durch G gehen, oder die Spuren aller Schnitte von $\overline{F}$ in F mit Ebenen, die L enthalten. Läßt sich dagegen der Abschluß $\overline{F}$ nicht in den dreidimensionalen projektiven Raum einbetten, so ist er das Bild der Veroneseschen Fläche des fünfdimensionalen Raumes unter einer Projektion, die kein algebraischer Isomorphismus ist und als Zentrum einen außerhalb von $\overline{F}$ befindlichen Punkt hat. $\overline{F}$ ist vielmehr so algebraisch isomorph zur projektiven Ebene $\mathbb{P}_2$, in der aber Punktepaare der uneigentlichen Geraden G mittels einer Involution aus $PGL_2(k)$ identifiziert worden sind, daß den Blöcken von F die affinen Geraden von $\mathbb{P}_2 \setminus G$ entsprechen.

Die Klassifikation der dual affinen Ebenen, die sich auf einer Varietät so darstellen lassen, daß die Blöcke irreduzible algebraische Kurven sind, läßt sich auf die Bestimmung der affinen algebraischen Ebenen zurückführen: Faßt man nämlich die Klassen paarweise paralleler Punkte als Gesamtheiten algebraischer Punkte von neuen, eine Parallelenschar bildenden Blöcken auf, so erhält man eine algebraische affine Ebene.

Möbiusebenen sind in vielerlei Hinsicht seltene Geometrien. So kennt man nur zweierlei Sorten endlicher Möbiusebenen (vgl. Dembowski, Kap. 6) und von den auf topologischen Mannigfaltigkeiten realisierbaren nur solche, die auf der 2-Sphäre darstellbar sind (Strambach [1970], [1972]). Groh hat neuerdings [1973] bewiesen, daß die 2-Sphäre die einzige topologische kompakte Mannigfaltigkeit ist, die topologische Möbiusebenen tragen kann. Dieser Aspekt des seltenen Vorkommens von Möbiusebenen außerhalb der 2-Sphäre wird für algebraische Möbiuebenen vollauf bestätigt. Auf keiner Varietät F läßt sich nämlich eine Möbiusebene so realisieren, daß ihre Blöcke irreduzible Kurven von F wären.

Für Laguerre-Ebenen fällt dagegen die Realisierbarkeit auf Varietäten günstiger aus. Sind die Blöcke der auf einer Varietät F realisierten algebraischen Laguerregeometrie ebene irreduzible Kurven oder läßt sich F in den dreidimensionalen projektiven Raum über einem algebraisch algeschlossenen Körper k einbetten, so existiert (zu jedem algebraisch abgeschlossenen) Körper k bis auf projektive Transformationen genau eine Laguerre-Ebene, deren Blöcke algebraische irreduzible Kurven auf F sind: Sie läßt sich auf einem quadratischen Kegel über k mit herausgenommenem singulärem Punkt p (Spitze) darstellen; ihre Blöcke sind genau die Schnitte von F mit solchen Ebenen, die p nicht enthalten, und die algebraischen Punkte der Spuren von Mantellinien des Kegels in F bilden die Klassen paralleler Punkte. (Hat der Körper k die Charakteristik 2, so folgt die Einzigkeit des quadratischen Kegels über k etwa nach Arf, Satz 6, S. 157.) Ist der projektive Abschluß $\bar{F}$ der eine algebraische Laguerreebene tragenden Varietät F singularitätenfrei oder in einem projektiven Raum normal (Bertini S. 217), so ist $\bar{F}$ algebraisch isomorph zu einer Normregelfläche der Klasse $\frac{1}{2}(r-3)$ mit ungeradem $r \geqslant 3$, wobei im Falle der Regularität von $\bar{F}$ sogar $r \geqslant 5$ gilt. Ist nun der projektive Abschluß $\bar{F}$ der eine algebraische Laguerregeometrie tragenden Varietät F eine Regelfläche, so ist sie Bild einer rationalen Normregelfläche $\hat{\bar{F}}$ der Klasse $\frac{1}{2}(r-3)$ mit $r \geqslant 3$ unter einer im Satz 9.1 genauer beschriebenen Projektion σ; F entsteht aus $\bar{F}$, indem man das Bild der Minimalleitkurve M von $\hat{\bar{F}}$ unter σ entfernt. Die Blöcke von der auf F realisierten Laguerreebene sind Urbilder der Kreise der isotropen Ebene (Benz-Mäurer § 5) unter einer im Satz 9.1 beschriebenen birationalen Abbildung; desgleichen gilt für die Klassen paralleler Punkte.

In der Theorie der topologischen Geometrien, die sich auf einer topologischen Mannigfaltigkeit darstellen lassen, spielen bei vielen Untersuchungen die Kollineationsgruppen dieser Geometrien, die sich in allen bislang betrachteten Fällen als Liegruppen herausgestellt haben, eine entscheidende Rolle. In unseren Untersuchungen übernimmt hingegen diese herausragende Stellung die Gruppe der Projektivitäten eines Blocks auf sich; sie besteht nämlich aus algebraischen Automorphismen einer irreduziblen algebraischen Kurve, und die Automorphismengruppen algebraischer Kurven sind bestens bekannt (Rosenlicht). Mit Hilfe der Projektivitätengruppe ist es nicht schwer, das Geschlecht der projektiven Abschließungen von Blöcken zu bestimmen und zu beweisen, daß jede algebraische Geometrie extrem strengen Schließungssätzen genügt (Satz 3.2, Satz 3.3, Korollar 6.2).

Zum Schluß möchten wir nochmals hervorheben, daß die Klassifikation der Geometrien tragenden Varietäten und der zulässigen Systeme von Blöcken meistens bis auf projektive Äquivalenz durchgeführt wird.

Bezeichnungen und Festsetzungen. Mit $\Gamma\mathfrak{M}$ bzw. $\Gamma_{x,y}$ bezeichnen wir die Standgruppe der auf einer Menge $\mathfrak{M}$ operierenden Transformationsgruppe Γ; es ist genau die Untergruppe von Γ, die $\mathfrak{M}$ (als Ganzes) bzw. die sowohl den Punkt x als auch den Punkt y festläßt. Die (algebraische) Isomorphie zweier Varietäten wird manchmal durch $\approx$ kenntlich gemacht.

Eine quasiprojektive Varietät ist eine bezüglich der Zariski-Topologie offene (und daher dichte) Teilmenge einer projektiven Varietät. Es sei k ein kommutativer algebraisch abgeschlossener Körper. Ist dann $\mathfrak{a}$ ein Ideal des Polynomringes $k[X]$, so nennen wir die Nullstellenmenge von $\mathfrak{a}$ eine abgeschlossene algebraische Menge in k^n (vgl. Mumford S. 11). Unter einer projektiven bzw. affinen irreduziblen Varietät V über dem algebraisch abgeschlossenem Körper k verstehen wir in dieser Arbeit die Nullstellenmenge eines (im projektiven Fall homogenen) Primideals von $k[X]$ im n-dimensionalen projektiven bzw. affinen Raum S über einem Universalkörper Ω (Zariski-Samuel, Chop VII, § 3, S. 167, Cor. 1 and van der Waerden [1959] § 118). Da bekanntlich die algebraischen Punkte (d.h. Punkte, deren Koordinatenringe Quotientenkörper haben, die algebraische Erweiterungen von k sind) dicht in V liegen (vgl. etwa Lang S. 76) und V daher durch sie bestimmt ist, werden wir manchmal stillschweigend die Gesamtheit der algebraischen Punkte von V schon mit V identifizieren und eine (affine bzw. projektive) irreduzible Varietät V auch als die Nullstellenmenge eines (im projektiven Fall homogenen) Primideals $\mathfrak{p}$ von $k[X]$ im n-dimensionalen projektiven bzw. affinen Raum S' über dem algebraisch abgeschlossenen Körper k auffassen (vgl. Zariski [1947], S. 5-6). Eine Prävarietät (X, o_X) ist ein topologischer Raum X zusammen mit einer Garbe o_X von k-Algebren auf X, so daß die Halme dieser Garbe lokale Ringe sind und X eine endliche Überdeckung durch offene Mengen U besitzt, so daß die Restriktionen von o_X auf die Mengen U affine Varietäten sind. (Diese Definition stimmt mit der von Borel S. 23 überein und unterscheidet sich von der in Mumford S. 48 gegebenen nur dadurch, daß X nicht zusammenhängend sein muß.) Ist der einer Prävarietät $\mathfrak{V}$ zugrundeliegende topologische Raum zusammenhängend, so nennt man $\mathfrak{V}$ irreduzibel. Unter einer (abstrakten) Varietät V verstehen wir (vgl. Mumford S. 68) eine Prävarietät, so daß die Diagonale in $V \times V$ abgeschlossen ist (Mumford S. 69). Eine Varietät V heißt vollständig, wenn für alle Varietäten Y der Projektionsmorphismus von $V \times Y$ auf Y eine abgeschlossene Abbildung ist (Mumford S. 103); sie heißt irreduzibel, wenn sie als Prävarietät irreduzibel ist.

Die algebraischen Gleichungen, die eine affine (projektive) irreduzible Varietät V beschreiben, sind über dem algebraisch abgeschlossenen Köper k irreduzible Polynome (Formen) (Hodge-Pedoe S. 6) Zwischen affinen Varietäten und ihren projektiven Abschlüssen besteht ein kanonischer Zusammenhang (Zariski-Samuel, Chap. VII, § 3-§ 6, vgl. aber auch Zariski [1969] S. 1-4 oder Weir S. 9-14 oder Mumford S. 11-22); aus einer projektiver Varietät erhält man durch Herausnahme der Hyperebene $X_0 = 0$ eine affine und aus einer affinen Varietät durch Homogenisierung ihres assozierten Ideals (Zariski-Samuel, Chap. VII, § 5) den projektiven Abschluß dieser Varietät. Daher ist es zulässig, zwischen affinen und projektiven Koordinaten einer Varietät, je nach Lage des Problem hin und her zu pendeln.

Als Punktmenge einer auf einer k-Varietät V realisierten algebraischen Geometrie wird stets die Gesamtheit aler algebraischen (nulldimensionalen) Punkte von V angesehen.

Eine Veronesesche Fläche der Ordnung n^2 wird in den homogenen Parametern x_0, x_1, x_2 durch die Parameterdarstellung $x_{i_0 i_1 i_2} = \varrho x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2}$ mit $i_0 + i_1 + i_2 = n$ und $0 \neq \varrho \in k$ gegeben, wobei rechts sämtliche Monome n-ten Grades in den x stehen (Burau [1950], S. 21). Eine ausgezeichnete Rolle unter den Veroneseschen Flächen spielt die Veronesesche Fläche V vierter Ordnung im fünfdimensionalen projektiven Raum, die mittels (§) $x_{ij} = \varrho y_i y_j$ ($i \leqslant j$ und $0 \neq \varrho \in k$) definiert werden kann (vgl. auch Bertini S. 363). Die Geraden der projektiven Ebene gehen unter der Abbildung (§) in irreduzible Kegelschnitte über. Dies trifft auch dann zu, wenn die Charakteristik des Körpers k gleich 2 ist; so kann z.B. das Bild einer Geraden $y_0 = by_1 + cy_2$ unter (§), indem man der Beziehungen $x_{00} = (by_1 + cy_2)^2 = (b^2 y_1^2 + c^2 y_1^2)$ gedenkt, als Durchschnitt der folgenden Hyperebenen beschrieben werden:

$$x_{01} = bx_{11} + cx_{12} \qquad x_{02} = bx_{12} + cx_{22}$$

$$x_{00} = b^2 x_{11} + c^2 x_{22} \qquad x_{12}^2 = x_{11} x_{22} \, .$$

Man kann (auch im Falle beliebiger Charakteristik von k) von der Veroneseschen Fläche V des fünfdimensionalen Raumes als der normalen Bildfläche aller Kegelschnitte sprechen, denn die irreduziblen Kegelschnitte werden unter (§) auf Kurven vierter Ordnung von V abgebildet. Außerdem gilt, daß jede Fläche, die eine Fläche von Kegelschnitten (∞^2 Kegelschnitte) enthält, die Veronesesche Fläche vierter Ordnung oder einer ihrer Projektionen ist (Bertini S. 369). Hat der Körper k eine von 2 verschiedene Charakteristik, so kann man alles nützliche über Veronesesche und Steinersche Flächen Bertini Kap. 15 und 16 oder Burau [1950], S. 23-33 entnehmen. Die Steinersche Fläche kann man aber auch ohne Rücksicht auf die Charakteristik von k als Projektion der Veroneseschen Fläche V des fünfdimensionalen projektiven Raumes von einer zur V disjunkten Geraden auf einen dreidimensionalen projektiven Raum definieren (Bertini S. 370).

1. Geometrische Axiome.

Es sei eine Menge M gegeben; ihre Elemente wollen wir Punkte nennen. Wir sagen daß auf M eine Geometrie realisiert ist, wenn dort ein System $\mathfrak{S}$ von Teilmengen, wir wollen sie Blöcke nennen, so ausgezeichnet ist, daß gewisse Axiome erfüllt sind.

Auf M liegt eine projektive Ebene vor, wenn gilt:

(a 1) Mit zwei verschiedenen Punkten inzidiert genau ein Block.

(a 2) Zwei verschiedene Blöcke haben genau einen Punkt gemeinsam.

(a 3) Es gibt vier verschiedene Punkte, von denen keine drei in einem Block enthalten sind.

Ist M die Gesamtheit der algebraischen Punkte einer k-Varietät (k ein beliebiger kommutativer algebraisch abgeschlossener Körper) und sind die Blöcke (aus $\mathfrak{S}$) algebraische Punkte algebraischer irreduzibler Kurven von M (d.h. irreduzible Untervarietäten von M der Dimension 1), so sprechen wir genau dann von einer algebraischen projektiven Ebene, wenn außerdem eine affine Unterebene von M algebraisch ist in dem in diesem Abschnitt noch zu definierenden Sinn. (Oft werden wir aber auch die Kurven, deren algebraische Punkte einen Block bilden, selbst als Blöcke bezeichnen.)

Ist die Punktmenge M die projektive Ebene über k, so besteht $\mathfrak{S}$ aus lauter ebenen algebraischen Kurven, und wegen des Satzes von Bezout (vgl. etwa Fulton S. 112) haben dann je zwei Blöcke stets mindestens einen Punkt gemeinsam; daher kann man im Fall der projektiven Ebene als Punktmenge die Forderung (a 2) durch die folgende, zu (a 2) äquivalente, ersetzen:

(a 2′) Zwei verschiedene Blöcke haben höchstens einen Punkt gemeinsam.

Auch (a 3) kann für algebraische projektive Ebenen formal etwa wie folgt abgeschwächt werden.

(a 3′) Nicht alle Punkte von M liegen auf einem Block.

Es seien L_1 und L_2 zwei verschiedene Blöcke und p ein Punkt, der weder mit L_1 noch mit L_2 inzidiert. Zu jedem Punkt x auf L_1 existiert genau ein p enthaltender Block B_x, der mit x inzidiert.

Durch die Zuordnung $\mathfrak{c}\colon x \mapsto B_x \cap L_2$ werden dann die Punkte von L_1 umkehrbar eindeutig auf die Punkte von L_2 abgebildet. $\mathfrak{c}$ heißt die Perspektivität zwischen L_1 und L_2 mit dem Zentrum p. Durch Hintereinanderausführung von Perspektivitäten entstehen Projektivitäten. Die Projektivitäten eines Blocks G auf sich bilden eine Gruppe $\Pi(G)$, die auf den Punkten von G dreifach transitiv operiert (Pickert S. 9). Sind G_1 und G_2 zwei Blöcke, so sind die Gruppen $\Pi(G_1)$ und $\Pi(G_2)$ isomorph, denn ist $\mathfrak{v}$ eine beliebige Perspektivität von G_1 auf G_2, so gilt $\mathfrak{v}^{-1}\Pi(G_1)\mathfrak{v} = \Pi(G_2)$ (vgl. etwa Dembowski S. 160). Die Gruppe $\Pi(G)$ ist genau dann scharf dreifach transitiv, wenn auf M eine papposche Ebene realisiert ist (Pickert S. 139).

Wir sagen, daß auf M eine affine Ebene vorliegt, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

(b 1) Durch zwei verschiedene Punkte geht genau ein Block.

(b 2) Durch jeden nicht auf einem beliebigen Block G liegenden Punkt p geht genau ein Block T, der mit G keinen Punkt gemeinsam hat; man sagt, T ist die Parallele zu G in p.

(b 3) Es gibt vier Punkte, die nicht in einem Block enthalten sind.

Blöcke, die entweder gleich sind oder keinen Punkt gemeinsam haben, nennt man parallel. Diese Parallelitätsrelation ist eine Äquivalenzrelation und führt zur Einteilung der Menge aller Geraden in Parallelscharen. Es seien L_1 und L_2 zwei Blöcke und $\mathfrak{A}$ eine Parallelenschar, zu der weder L_1 noch L_2 gehört; dann geht durch jeden Punkt $x \in L_1$ genau ein Block G_x aus $\mathfrak{A}$ und die Abbildung $\alpha\colon x \mapsto G_x \cap L_2$ definiert eine Parallelperspektivität zwischen L_1 und L_2. Durch Hintereinanderausführung von Parallelperspektivitäten erhält man Parallelprojektionen, und die Parallelprojektionen eines Blocks B auf sich bilden eine Gruppe $\Gamma(B)$, die auf den Punken von B zweifach transitiv operiert. Die Gruppen $\Gamma(B_1)$ und $\Gamma(B_2)$ zweier Blöcke B_i sind stets isomorph. Die Gruppe $\Gamma(B)$ ist genau dann scharf zweifach transitiv, wenn die auf M realisierte affine Ebene desarguessch (aber nicht notwending pappossch) ist. Aus der scharfen zweifachen Transitivität von $\Gamma(B)$ folgt zunächst, und zwar auf zweierlei Weise, daß die affine Ebene E eine Translationsebene ist. Einmal läßt sich in ihr mit Hilfe von $\Gamma(B)$ ein Abstandsverhältnis definieren (vgl. Schleiermacher § 1, S. 314 und Lemma 5), und zum zweiten wird die Gruppe $\Gamma(B)$ der Projektivitäten schon durch die Menge der Abbildungen $x \to a \circ x + b$ mit $a, b \in B$ dargestellt, wenn G als die V-Gerade eines Bezugsystems (vgl. Pickert 1.5) genommen wird und « $\circ$ » sowie « $+$ » die ternären Operationen bedeuten

(Pickert, 8.5). Daß die Translationsebene E den Rang 2 über ihrem Kern hat, folgt sofort nach Schleiermacher, Korollar auf S. 315.

Man spricht von einer dual affinen Ebene auf M, wenn auf den Punkten von M eine Parallelitätsrelation, die eine Äquivalenzrelation ist, so gegeben ist, daß gilt:

(c 1) Durch zwei nicht parallele Punkte geht genau ein Block.

(c 2) = (b 2).

(c 3) Ist p ein Punkt und G ein Block, so existiert auf G genau ein zu p paralleler Punkt.

(c 4) Es gibt drei nicht parallele Punkte, die nicht in einem Block enthalten sind.

Faßt man jede Klasse paralleler Punkte als einen Block auf, so wird jeße dual affine zu einer affinen Ebene. Sind nun L_1 und L_2 zwei verschiedene Blöcke und $\mathfrak{A}$ eine Schar paralleler Blöcke, so daß keines der L_i zu $\mathfrak{A}$ gehört, so kann man wiederum die Parallelperspektivität zwischen L_1 und L_2 bezüglich $\mathfrak{A}$ definieren, und von der Gruppe $\Sigma(G)$ von Projektivitäten eines Blocks G auf sich sprechen. $\Sigma(G)$ operiert auf den Punkten von G zweifach transitiv. Scharf zweifach transitiv ist sie genau dann, wenn die auf M realisierte dual affine Ebene desarguessch ist.

Ist M die Gesamtheit aller algebraischen Punkte einer k-Varietät (k ist ein algebraisch abgeschlossener Körper) und sind die Blöche (über Klassen paralleler Punkte wird nichts ausgesagt) einer auf M realisierten affinen bzw. dual affinen Ebene algebraische Punkte algebraischer irreduzibler Kurven von M, so sprechen wir von einer auf M realisierten algebraischen affinen bzw. algebraischen dual affinen Ebene genau dann, wenn die folgenden Abbildungen birational sind: Jede Perspektivität, die den Punkten eines Blocks S die mit ihnen inzidenten Blöcke einer S nicht enthaltenden Klasse paralleler Blöcke zuordnet sowie jede Perspektivität, die den Blöcken einer Parallelklasse $\mathfrak{X}$ von Blöcken ihre Schnittpunkte mit einem nicht zu $\mathfrak{X}$ gehörenden Block zuweist; dabei trage die Parallelklasse $\mathfrak{X}$ die zu einem Block isomorphe Struktur einer algebraischen Varietät, die ihr durch die Schnittpunkte mit einem festen nicht zu $\mathfrak{X}$ gehörendem Block aufgeprägt wird. Es ist klar, daß die eben geschilderten Abbildungen genau dann birational sind, wenn die affinen Perspektivitäten birationale Abbildungen sind. (Oft werden wir aber auch die Kurven, deren algebraische Punkte einen Block bilden, selbst als Blöcke bezeichnen.)

Ist auf M eine projektive, affine oder dual affine Ebene dargestellt, so sagen wir, auf M liegt eine Geometrie vom Typ 2 vor. Auf M ist eine algebraische Geometrie vom Typ 2 realisiert, wenn dort eine algebraische projektive, affine oder dual affine Ebene vorliegt.

Die Punktmenge M trägt eine Möbiusebene, wenn das System $\mathfrak{S}$ von Blöcken den folgenden Bedingungen genügt:

(d 1) Durch drei verschiedene Punkte geht genau ein Block.

(d 2) Ist T ein beliebiger Block und q ein Punkt auf T, so existiert zu jedem nicht mit T inzidenten Punkt p genau ein Bolck B_p, der durch p geht und mit T genau den Punkt q gemeinsam hat. Man sagt, B_p ist der Berührblock von p an T im Punkt q.

(d 3) Es gibt vier verschiedene nicht auf einem Block liegende Punkte.

Eine Laguerre-Ebene ist auf M genau dann realisiert, wenn dort eine Parallelitätsrelation so gegeben ist, daß für die Blöcke gilt:

(e 1) Durch drei paarweise nicht parallele Punkte geht genau ein Block.

(e 2) Ist T ein beliebiger Block und q ein Punkt auf T, so existiert zu jedem nicht mit T inzidenten Punkt p, der zu q nicht parallel ist, genau ein Block B_p, der durch p geht und mit T genau den Punkt q gemeinsam hat. Man sagt, B_p ist der Berührblock von p an T in q.

(e 3) Ist H ein beliebiger Block und p ein Punkt, so existiert auf H genau ein Punkt q, der zu p parallel ist. (Inzidiert p mit H, so ist $p = q$.)

(e 4) Es gibt vier paarweise nicht parallele Punkte, die nicht in einem Block enthalten sind.

Sei p ein Punkt einer Möbius- bzw. Laguerrebene $\mathbf{M}$. Entfernt man aus $\mathbf{M}$ den Punkt p bzw. die Klasse der zu p parallelen Punkte, je nachdem ob eine Möbius- oder Laguerreebene vorliegt, und betrachtet die mit p inzidenten Blöcke (ohne die herausgenommenen Punkte) als Geraden einer Inzidenzstruktur $\mathbf{M}_p$, so erhält man eine affine bzw. dual affine Ebene, je nachdem ob $\mathbf{M}$ eine Möbius- bzw. Laguerreebene gewesen ist; $\mathbf{M}_p$ bezeichnen wir als eine Unterebene von $\mathbf{M}$.

Es seien L_1 und L_2 zwei verschiedene Blöcke einer Möbius- bzw.

Laguerreebene M und $p_i \in L_i$ zwei Punkte; gilt $p_1 \neq p_2$, so sei $p_1 \notin L_2$ und $p_2 \notin L_1$, liegt eine Laguerreebene vor, so seien p_1 und p_2 darüber hinaus nicht parallel.

Ist $p_1 \neq p_2$, so betrachten wir die Menge $\mathfrak{X}(p_1, p_2) = \mathfrak{X}$ der mit p_1 und p_2 inzidenten Blöcke von M. Zu jedem Punkt x auf L_1 (der im Fall einer Laguerreebene nicht zu p_2 parallel ist), gibt es in $\mathfrak{X}$ genau einen Block B_x, der mit x inzidiert (Ist $x = p_1$, so ist B_x der Block aus $\mathfrak{X}$, der L_1 in p_1 berührt.) Der Block B_x trifft L_2 entweder noch in einem von p_2 verschiedenen Punkt y oder berührt L_2 im Punkte p_2. Wir können nun die Punkte von L_1 durch die folgende Zuordnung α, die man eine Perspektivität von L_1 auf L_2 nennt, bijektiv auf die Punkte von L_2 abbilden. Wir definieren $x^\alpha = y$, falls $|B_x \cap L_2| = 2$ ist, und $x = p_2$ für den Fall, daß B_x den Block L_2 berührt (vgl. Groh [1973], § 2). Ist M eine Möbiusebene, so ist die Perspektivität α damit erklärt. Ist M eine Laguerreebene, so gibt es auf L_1 genau einen Punkt, der zu p_2 parallel ist und durch den daher kein Block aus $\mathfrak{X}$ geht; diesem Punkt weisen wir als Bild unter α den auf L_2 liegenden zu p_1 parallelen Punkt zu, und α ist auch für eine Laguerreebene wohldefiniert. Gilt $p_1 = p_2$, so wählen wir aus M als die Menge $\mathfrak{X}$ ein weder L_1 noch L_2 enthaltendes Berührbüschel von Blöchen, die mit p_1 inzidieren (d.h. eine Parallelenschar in der Unterebene $\mathbf{M}_p$); die Perspektivität α wird dann in **M** von der durch $\mathfrak{X}$ in der Unterebene $\mathbf{M}_p$ bestimmten Parallelperspektivität induziert. Durch Hintereinanderausführung von Perspektivitäten entstehen wiederum Projektivitäten von M. Die Projektivitäten eines (und damit jedes) Blockes G auf sich bilden eine Gruppe Σ, die auf G dreifach transitiv operiert. Hat M mindestens 14 Punkte auf jedem Block, so operiert Σ auf G sogar genau dann scharf dreifach transitiv, wenn M miquelsch ist, d.h. darstellbar als die Geometrie der ebenen Schnitte einer Quadrik bzw. eines Kegels (Freudenthal-Strambach, Benz, [1960], Benz-Mäurer).

Ist **M** wiederum die Gesamtheit aller algebraischen Punkte einer quasiprojektiven Varietät M und sind die Blöcke (über Klassen paraller Punkte wird keine algebraische Voraussetzung gemacht) einer auf M realisierten Möbiusebene bzw. Laguerregeometrie algebraische Punkte von algebraischen irreduziblen Kurven von M, so liege auf M genau dann eine algebraische Möbius- bzw. Laguerre-Eben vor, wenn jede affine bzw. dual affine Unterebene der Möbius- bzw. Laguerreebene algebraisch ist. (Oft werden wir aber auch Kurven, deren algebraischen Punkte einen Block bilden, selbst als Blöcke bezeichnen.)

Die folgende Aussage werden wir oft ohne ausdrücklichen Hinweis verwenden:

Satz 1.1. *Es sei auf einer Varietät V eine Geometrie vom Typ 2 oder eine Möbius- bzw. Laguerre-Ebene so realisiert, daß ihre Blöcke algebraische irreduzible Kurven auf V sind. Dann ist V ebenfalls eine irreduzible Varietät.*

Beweis. Angenommen, V wäre relativ zum Körper k reduzibel und zerfiele in mindestens zwei verschiedene Zusammenhangskomponenten V_j. Da jeder Block B irreduzibel ist, muß B in genau einer Zusammenhangskomponente von V enthalten sein. Sei x ein (algebraischer) Punkt von V_i. Wir betrachten die Menge $\mathfrak{X}$ aller Blöcke, die mit x inzidieren. Ist dann y ein nicht zu x paralleler (algebraischer) Punkt von V, so gibt es in $\mathfrak{X}$ einen Block C, der y enthält. Da $C \subseteq V_i$ gilt, gehört auch y zu V_i. Daher sind alle (algebraischen) Punkte von V, die nicht zu V_i gehören, parallel zu x. Sei L ein beliebiger Block aus $\mathfrak{X}$ und y ein (algebraischer) Punkt aus $V \setminus V_i$, der also zu x parallel ist. Da jeder Block nur einen (algebraischen) Punkt einer Parallelklasse enthält, gibt es auf L einen (algebraischen) Punkt z, der nicht zu y parallel ist. Daher existiert aber ein irreduzibler Block J, der sowohl z als auch y enthält, und dies ist wegen $J \subseteq V_i$ nicht möglich.

Nach Breitsprecher [1972] hätte man unter einer algebraischen Geometrie eine solche Inzidenzstruktur zu verstehen, deren Punkt- und Block menge algebraische Varietäten sind und in der die geometrischen Operationen aus algebraischen Morphismen bestehen. Es ist klar, daß sowohl die Möbius- und Laguerreebenen als auch die Geometrien vom Typ 2, falls sie algebraischen Geometrien im Sinne von Breitsprecher sind, auch algebraische Geometrien in dem von uns definierten Sinn darstellen, wenn nur die Blöcke aus Kurven bestehen. Daß wir als Blöcke einer Geometrie algebraische Kurven nehmen, erscheint auf den ersten Blick zu eng, doch ist diese Forderung für viele Arten algebraischer Geometrien im Sinne von Breitsprecher unter sehr milden Voraussetzungen von selbst erfüllt. Dies dokumentiert der nächste Satz, dessen Beweis für den Fall von projektiven Ebenen ich einer Mitteilung von U. Ott verdanke.

Satz 1.2. *Es sei $\mathbf{P}$ eine projektive Ebene bzw. eine Möbius- order Laguerregeometrie, so daß sowohl die Menge $\mathfrak{B}$ der Punkte als auch die Menge $\mathfrak{p}$ der Blöcke algebraische Varietäten bilden. Ist $\mathbf{P}$ eine projektive Ebene und Δ bzw. ∇ die Diagonale von* $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$, *so seien die das Verbinden und Schneiden beschreibenden Abbildungen*

$$\alpha\colon [(\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}) \setminus \Delta] \to \mathfrak{B} \quad \text{bzw.} \quad \beta\colon [(\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}) \setminus \nabla] \to \mathfrak{p}$$

algebraische Morphismen. Ist $\mathbf{P}$ *eine Möbius- order Laguerreebene, so sei die zu jedem Punkt eines Blocks* L *gehörige affine Unterebene (die im Falle einer Laguerregeometrie aus der dual affinen Unterebene durch Hinzunahme der Klassen paralleler Punkte als neuer Geraden entsteht) eine algebraische affine Ebene im Sinne von Breitsprecher, d.h., in jeder solchen Unterebene seien die das Verbinden, Schneiden und Parallelenziehen beschreibenden Abbildungen algebraische Morphismen. Ist dann ein (und damit) jeder Block von* $\mathbf{P}$ *eine vollständige zusammenhängende Teilvarietät von* $\mathfrak{p}$ *und sind im Falle einer Laguerreebene die Klassen paralleler Punkte ebenfalls algebraische zusammenhängende Teilvarietäten der Punktmenge, so ist jeder Block von* $\mathbf{P}$ *sogar eine irreduzible algebraische Kurve.*

Beweis. Da jede Perspektivität von $\mathbf{P}$ bzw. jeder Unterebene von $\mathbf{P}$ birational ist, haben alle Blöcke die gleiche Dimension. Angenommen, der Block L habe die Dimension $n > 1$. In L liegt dann eine (bezüglich der Zariski-Topologie) abgeschlossene, also vollständige zusammenhängende Untervarietät K der Dimension $n-1$. Das Komplement $L \setminus K$ ist eine nichtleere offene Teilvarietät von L, die wegen $n \geqslant 1$ zwei verschiedene Punkte p und s enthält. Sei nun $Q \neq L$ ein Block durch p, der im Falle einer Möbius- bzw. Laguerreebene auch durch s gehen möge.

Da $L \setminus K$ eine offene Teilvarietät von L ist und $n \geqslant 1$ gilt, liegt in $L \setminus K$ ein sowohl von p als auch von s verschiedener Punkt q. Mit S sei ein von L verschiedener Block durch q bezeichnet, der, falls eine Möbius- oder Laguerreebene vorliegt, Q im Punkt p berührt. Es gibt eine offene Umgebung W von p in Q, die eine affine Teilvarietät von Q ist. Dann ist das Komplement $Z = Q \setminus W$ eine nichtleere abgeschlossene, also vollständige Teilvarietät von Q. Wir betrachten die durch die disjunkten Teilvarietäten Z und K bestimmte Blockmenge $\mathfrak{Y}$: Ist $\mathbf{P}$ eine Möbius- oder Laguerreebene, so sei $\mathfrak{Y}$ die von Z und K in der affinen Unterebene $\mathbf{P}_p$ bestimmte Menge von Geraden (die durch das Verbinden eines Punktes von Z mit einem aus K entsteht); man beachte dabei, daß keine Gerade aus $\mathfrak{Y}$ parallel zu S verläuft. $\mathfrak{Y}$ ist dann eine zu $Z \times K$ algebraisch isomorphe, also vollständige Teilvarietät T der Blockmenge $\mathfrak{B}$. Mit α sei diejenige Abbildung bezeichnet, die jeder Geraden aus T (im Falle einer Möbius- bzw. Laguerreebene arbeitet man in der affinen Unterebene $\mathbf{P}_p$) ihren Schnittpunkt mit S zuordnet; da keine Gerade aus T in der Unterebene $\mathbf{P}_p$ zu S parallel ist, ist die Abbildung α auch im Falle einer Möbius- bzw. Laguerreebene wohldefiniert. Da das Schneiden in der projektiven Ebene $\mathbb{P}$ ein algebraischer Morphismus ist bzw. die zu p gehörige affine Untere $\mathbb{P}_p$ (falls eine Möbius- oder Laguerreebene vorliegt) algebraisch im Sinne von Breitsprecher sein soll, ist das Bild $\alpha(T)$ der vollständigen Varietät T unter α ebenfalls eine abgeschlossene und daher vollständige Teilvarietät von S (Mumford S. 104). Die Varietät $\alpha(T)$ kann wegen $q \notin \alpha(T)$ nicht ganz S ein, und das Komplement C von $\alpha(T)$ in S ist eine offene nichtleere Teilvarietät von S; also enthält C außer des Punktes q noch einen weiteren Punkt z, der sogar als weder auf L noch auf Q liegend vorausgesetzt werden darf. Projiziert man nun vom Punkt z als Zentrum die Gerade L auf die Gerade Q (liegt eine Möbius- bzw. Laguerreebene vor, so arbeitet man in der affinen Unterebene $\mathbb{P}_p$ und projiziert $L\setminus\{p, q\}$ nach Q), so ist das Bild K^β unter dieser Abbildung β eine vollständige Teilvarietät (Mumford S. 104), die nicht nur in Q, sondern sogar in der affinen Varietät $W \subset Q$ enthalten ist.

Das Bild einer vollständigen zusammenhängenden Varietät in einer affinen ist aber ein Punkt (Mumford S. 104), woraus sich $n-1=0$ und $n=1$ ergibt.

2. Die Blöcke einer algebraischen Geometrie.

Unter einer irreduziblen Kurve C verstehen wir eine bezüglich der Zariski-Topologie zusammenhängende offene Teilmenge einer vollständingen eindimensionalen Varietät (über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k). Da jede solche Kurve C eine quasiprojektive Varietät ist (vgl. Šafarevič [1972] S. 355), ist es sinnvoll von ihrer projektiven Abschließung C zu reden.

Hilfssatz 2.1. *Auf einer k-Varietät (k ist ein algebraisch abgeschlossener Köper) sei eine algebraische Geometrie vom Typ 2 definiert. Dann ist jede (geometrische) Projektivität eines Blocks T_1 auf einen Block T_2 eine (über k definierte) birationale Abbildung zwischen den projektiven Abschließungen $\overline{T}_1$ und $\overline{T}_2$ von T_1 bzw. T_2.*

Beweis. Algebraische aus algebraischen Funktionen zusammengesetzte Funktionen sind algebraisch, und die Hintereinanderausführung zweier birationaler Abbildungen ist wieder birational.

Da jede Projektivität π von T_1 auf T_2 als Produkt von endlich vielen Perspektivitäten σ_j, $j=1, \ldots, n$ von G_j auf G_{j+1} darstellbar ist und jeder der Blöcke G_j eine quasiprojektive Kurve ist, können wir voraussetzen, daß alle Blöcke G_j in demselben projektiven Raum enthalten sind und von projektiven Abschließungen $\overline{T}_i$ von T_i reden. Es genügt dann nur zu zeigen, daß eine Perspektivität bezüglich einer beliebigen Parallelenschar $\mathfrak{T}$ einen Isomorphismus zwischen T_1 und T_2 vermittelt, weil der Block T_i jeweils eine offene und dichte Teilmenge der projektiven Abschließung $\overline{T}_i$ ist. Voraussetzungsgemäß sind nun alle Abbildungen, die dem Punkt einer beliebigen Geraden K die mit ihm inzidente Gerade einer Parallelenschar zuordnen, algebraische Isomorphismen.

Da jeder (algebraische) Punkt von T_2 als Schnittpunkt von T_2 mit einem Block aus $\mathfrak{Z}$ erhalten werden kann, vermittelt die durch $\mathfrak{Z}$ bewirkte Perspektivität σ von T_1 auf T_2 einen algebraischen Isomorphismus zwischen T_1 und T_2, weil sie umkehrbar ist. Da der Block T_1 in seiner projektiven Abschließung $\overline{T}_i$ jeweils als offene Teilmenge dichtliegt, induziert σ zwischen $\overline{T}_i$ und $\overline{T}_2$ eine birationale Abbildung, und der Hilfssatz ist bewiesen.

Lemma 2.2. *Sei L eine irreduzible über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k definierte algebraische Kurve und Γ eine Gruppe algebraischer Automorphismen von L. Hat der projektive Abschluß $\bar{L}$ der Kurve L das Geschlecht $g \geqslant 1$, so ist die Standgruppe Γ_x endlich, wenn nur der* (*algebraische*) *Punkt x von L kein Fixpunkt unter Γ ist.*

Beweis. Die projektive über k definierte Kurve $\bar{L}$ besitzt ein nichtsinguläres Modell C (Abhyankar S. 236); daher existiert ein (über k definierter) endlicher Morphismus f von C auf $\bar{L}$, der auf einer offenen Menge von $\bar{L}$ eineindeutig ist. Jeder Automorphismus $\gamma \in \Gamma$ definiert eine rationale (über k definierte) Abbildung $\Gamma \circ f$ zwischen C und $\bar{L}$. Da C eine normale Varietät ist, folgt etwa nach dem Theorem 7 aus Zariski [1943], daß $\gamma \circ f$ eindeutig zu einem (über k definierten) Morphismus fortsetzbar ist; dieser sei wiederum mit $\gamma \circ f$ bezeichnet. Zwei Morphismen $\gamma_1 \circ f$ und $\gamma_2 \circ f$ unterscheiden sich um einen Automorphismus τ von C, d.h., es gilt $\gamma_1 \circ f \cdot \tau = \gamma_2 \circ f$. (Fulton S. 180.) Es bezeichne nun θ die volle Automorphis-mengruppe von C und $\mathfrak{N}$ die endliche Menge der Urbilder des Punktes x auf L bezüglich des Morphismus f. Ist $\theta_{\mathfrak{n}}$ die Untergruppe von θ, die $\mathfrak{N}$ (als Ganzes) invariant läßt, so ist die Standgruppe Γ_x jedenfalls dann endlich, wenn $\theta_{\mathfrak{n}}$ endlich ist, denn die Elemente $\gamma_i \circ f$ mit $\gamma_i \in \Gamma_x$ unterscheiden sich um ein Element aus $\theta_{\mathfrak{n}}$. Ist z ein Punkt aus $\theta_{\mathfrak{n}}$, so ist $\theta_{\mathfrak{n}}$ genau dann endlich, wenn die Standgruppe θ_z endlich ist. Ist θ eine unendliche Gruppe, so enthält sie einen abelschen Normalteiler N von endlichem Index, für den nach Rosenlicht S. 7 Lemma, $N \cap \theta_z = 1$ gelten muß. Dann hat aber N auch endlichen Index insbesondere in der Gruppe $N \cdot \theta_z$, und $(N\theta_z)/N \cong \theta_z/(N \cap \theta_z) \cong \theta_z$ ist eine endliche Gruppe. Ist θ selbst schon endlich, so ist die Behauptung trivialerweise erfüllt.

LEMMA 2.3. *Sei L eine (bezüglich der Zariski-Topologie) offene Teilmenge einer projektiven (über k definierten) irreduziblen algebraischen Kurve C vom Geschlecht 0 und Γ eine Gruppe algebraischer Automorphismen von L, so daß die Standgruppe Γ_a jedes (algebraischen) Punktes aus L unendlich ist. Dann ist C eine nichtsinguläre Kurve, die lauter rationale Punkte besitzt, und es gilt $|C \setminus L| \leqslant 1$. Ist L echt in C enthalten, so gilt sogar $|C \setminus L| = 1$.*

BEWEIS. Mit C' sei das nichtsinguläre Modell von C bezeichnet und mit h ein endlicher Morphismus von C' auf C (vgl. etwa Fulton, S. 179-180). C' ist algebraisch isomorph zur projektiven Geraden. Jeder Automorphismus $\gamma \in \Gamma$ definiert eine rationale Abbildung $\gamma \circ h$ zwischen C' und C, die zu einem Morphismus fortsetzbar ist (Zariskis Haupttheorem, Lang, S. 124). Da sich zwei verschiedene Morphismen $\gamma_i h$ mit $\gamma_i \in \Gamma$ nur um Automorphismen von C' unterscheiden (vgl. Chevalley, S. 52 und Fulton, S. 161 sowie 153), wird Γ von algebraischen Automorphismen der Kurve C' induziert.

Die volle Gruppe Λ algebraischer Automorphismen von C' ist isomorph zu $PGL_2(k)$; sie operiert auf C' scharf dreifach transitiv (Borel, 10.8, Rosenlicht, S. 2, Lemma). Die Kurve C enthält unendlich viele einfache (algebraische) Punkte (Zariski [1947], S. 16); bei diesen sind die Abbildungen $\gamma \circ h$ mit $\gamma \in \Gamma$ stets umkehrbar (Lang, S. 204, Corollary). Würde also für ein $\tau \in \Lambda$ die Beziechnung $h = h \circ \tau$ gelten, so hätte τ auf C' die Urbilder einfacher Punkte von C' als Fixpunkte, woraus $\tau = 1$ folgt. Daher induziert Γ auf C' eine zu Γ isomorphe Gruppe $\bar{\Gamma}$. Ist a ein Punkt aus L, so ist die Γ_a entsprechende Untergruppe $\bar{\Gamma}_{h^{-1}(a)} = \phi$ ebenfalls unendlich. Sie läßt die endlichen Punktmengen $h^{-1}(a)$ und $h^{-1}(C \setminus L)$ jeweils invariant; daher enthält sie eine Untergruppe Δ von endlichem Index, unter welcher sowohl $h^{-1}(a)$ als auch $h^{-1}(C \setminus L)$ jeweils punktweise festbleibt. Δ ist eine unendliche Untergruppe von $PGL_2(k)$, und daher gilt $|h^{-1}(a)| \cup |h^{-1}(C \setminus L| \leqslant 2$ für alle $a \in L$. Da einfache Punkte von L unter Γ wiederum in einfache Punkte transformiert werden (Zariski [1947] S. 10), bleibt die höchstens endliche Menge $\mathfrak{N}$ der singulären Punkte von L unter Γ invariant. $\bar{\Gamma}$ läßt dann die höchstens endliche Punktmenge $h^{-1}(\mathfrak{N})$ invariant. Wäre $\mathfrak{N}$ nicht leer, so gälte $|h^{-1}(\mathfrak{N})| \geqslant 2$. Da die Standgruppe $\bar{\Gamma}_a$ auch für Punkte $a \notin h^{-1}(\mathfrak{N})$ unendlich ist und $\bar{\Gamma}_a \leqslant PGL_2(k)$ gilt, folgte für $\mathfrak{N} \neq \emptyset$ ein Widerspruch. Die Mengen $h^{-1}(a)$ bzw. $h^{-1}(C \setminus L)$ bestehen also jeweils nur aus einem bzw. höchstens einem Punkt, woraus die Biholomorphie von h (vgl. Lang S. 94) und somit auch die Nichtsingularität von C folgt (Lang, S. 204).

3. Schließungssätze in algebraischen Geometrien.

HILFSSATZ 3.1. *Ist k ein algebraisch abgeschlossener Körper, so ist jede zweifach transitive Untergruppe ϕ von $PGL_2(k)$ scharf dreifach transitiv und gleich der vollen Gruppe $PGL_2(k)$.*

BEWEIS. Nach Strambach [1966] enthält ϕ die Gruppe $PSL_2(k)$. Da k algebraisch abgeschlossen ist, gilt $PSL_2(k) = PGL_2(k) = \phi$.

SATZ 3.2. *Auf der k-Varietät M (k ist ein algebraisch abgeschlossener Körper) sei eine algebraische Geometrie vom Typ 2 realisiert. Dann ist die projektive Abschliesung $\bar{B}$ jedes Blocks B eine singularitätenfreie rationale projektive Kurve mit $|\bar{B} \setminus B| \leqslant 1$, und die auf M dargestellte algebraische Geometrie ist stets desarguessch. Liegt auf M sogar eine projektive Ebene vor, so ist jeder Block vollständig und daher eine projektive Kurve. Ist auf M eine affine bzw. dual affine Ebene realisiert, so gilt $|\bar{B} \setminus B| = 1$.*

BEWEIS. Liegt auf M eine algebraische projektive Ebene vor, so sei B ein Block einer solchen Unterebene A, deren Parallelperspektivitäten birationale Abbildungen sind; sonst sei B ein Block einer affinen bzw. dual affinen algebraischen Ebene. Da die Gruppe $\Lambda(B)$ der Parallelprojektivitäten eines Blocks B auf sich aus algebraischen Morphismen besteht (Hilfssatz 2.2) und die projektive Abschließung $\bar{B}$ von B, die eine irreduzible und nichtsinguläre Kurve des Geschlechts 0 ist (Lemma 2.2), aus B durch Hinzufügnug höchstens eines Punktes entsteht (Lemma 2.3), induziert $\Lambda(B)$ auf $\bar{B}$ eine Gruppe algebraischer Automorphismen, die mit Λ bezeichnet sei. Nach Rosenlicht S. 2, Lemma, kann man Λ als Gruppe projektiver Transformationen (eines projektiven Raumes) auffassen, die $\bar{B}$ invariant lassen; nach Borel, 10.8, ist sie eine Untergruppe von $PGL_2(k)$, und die Gruppe $PGL_2(k)$ operiert auf $\bar{B}$ scharf dreifach transitiv gilt.

Liegt auf M eine affine oder dual affine Ebene vor, so ist $\Lambda(B)$ zweifach transitiv (vgl. § 1). Angenommen, es sei $\bar{B} = B$. Nach 3.1 ist $\Lambda(B)$ scharf dreifach transitiv, und die Standgruppe Λ_x jedes Punktes

$x \in \bar{B}$ enthält einen regulären Normalteiler, weil Λ_x sogar als Permutationsgruppe isomorph zur Gruppe der Abbildungen $\{z \to az + b; a \neq 0, b \in k\}$ ausfällt. Nach Schleiermacher müßte dann auf M eine mindestens moufangsche Ebene realisiert sein. Da jedoch keine moufangsche affine Ebene eine scharf dreifach transitive Gruppe von Parallelprojektivitäten besitzt, erhalten wir einen Widerspruch, der zeigt, daß $\bar{B} \setminus B = 1$ gelten muß. Es sei p der Punkt aus $\bar{B}$, der nicht zu B gehört, und ϕ die volle Gruppe algebraischer Automorphismen von $\bar{B}$. Dann ist $\Lambda(B)$ isomorph zu einer Untergruppe der Standgruppe ϕ_p von ϕ auf p. Da $\phi = PGL_2(k)$ auf $\bar{B}$ scharf dreifach transitiv wirkt, folgt $\Lambda(B) = \phi_p$, und $\Lambda(B)$ operiert auf B scharf zweifach transitiv, woraus sich ergibt (§ 1), daß die auf M realisierte affine bzw. dual affine Ebene desarguessch sein muß.

Liegt auf M eine projektive Ebene vor, so ist diese mit A ebenfalls desarguessch.

SATZ 3.3. *Ist auf einer k-Varietät V (k ist ein algebraisch algeschlossener Körper) eine algebraische Laguerreebene realisiert, so ist diese Geometrie miquelsch. Jeder Block der Geometrie ist eine singularitätenfreie projektive rationale Kurve.*

BEWEIS. Da jede Unterebene der auf V realisierten algebraischen Laguerreebene $\mathfrak{B}$ algebraisch ist, ist jede Unterebene von $\mathfrak{B}$ desarguessch. Daher besitzt jeder Block von $\mathfrak{B}$ eine dreifach transitive Gruppe algebraischer Automorphismen und ist folglich eine projektive Gerade bzw. ein Kegelschnitt. Nach 6.2 ist jede Unterebene E von $\mathfrak{B}$ sogar papposch, und die Blöcke von $\mathfrak{B}$, die keine Geraden von E sind, bilden in E ein System von Kegelschnitten. Nun folgt aber die Behauptung mit Freudenthal-Strambach, Bemerkung 3.

BEMERKUNG. Ist auf der Varietät V eine algebraische Möbiusebene realisiert, so ist jeder Block B ebenfalls eine projektive rationale singularitätenfreie Kurve, denn B besitzt eine dreifach transitive Gruppe algebraischer Automorphismen.

4. Dimension der algebraische Geometrien tragenden Varietäten.

SATZ 4.1. *Auf einer Varietät $\mathfrak{P}$ sei eine algebraische Geometrie vom Typ 2 oder eine algebraische Möbius- bzw. Laguerreebene realisiert. Dann ist $\mathfrak{P}$ zweidimensional, also eine Fläche.*

Beweis. Sei t ein Punkt einer Möbiusebene bzw. $\mathfrak{T}$ der in $\mathfrak{P}$ gebildete algebraische Abschluß einer Klasse paralleler Punkte einer Laguerreebene. Da sowohl $\mathfrak{P}\setminus t$ als auch $\mathfrak{P}\setminus\mathfrak{T}$ irreduzibel ist, in $\mathfrak{P}$ jeweils dicht liegt, und auf diesen Varietäten eine algebraische affine bzw. dual affine Ebene realisiert ist, reicht es, die Behauptung für algebraische Geometrien vom Typ 2 zu beweisen.

Mit $\mathfrak{L}$ bezeichnen wir eine Parallelenschar von Blöcken. Die Punkte von W werden von den Blöcken aus $\mathfrak{L}$ schlicht überdeckt. Die Abbildung α, die jedem Punkt von p den mit ihm inzidenten Block aus $\mathfrak{L}$ zuordnet, ist definitionsgemäß ein algebraischer Morphismus. Daß die Abbildung β, die jedem Element aus $\mathfrak{L}$ einen Punkt auf einem nicht zu der Parallelenschar $\mathfrak{L}$ gehörenden Block T zuweist, ein algebraischer Morphismus ist, folgt ebenfalls aus unserer Definition einer algebraischen affinen bzw. dual affinen Ebene.

Der algebraische Morphismus $h=\beta\circ\alpha$ ist ein dominierender Morphismus von $\mathfrak{P}$ auf T (Mumford S. 91); ist dann p ein Punkt auf T, so gilt nach Mumford (Th. 2, S. 92)

$$\dim h^{-1}(p) \geqslant \dim p + (\dim W - \dim T)\,.$$

Da $\dim h^{-1}(p)=\dim T=1$ und $\dim p=0$ ist, folgt $1\geqslant\dim W-1$ oder $\dim W\leqslant 2$, womit alles gezeigt ist.

5. Projektive Klassifikation der auf Untervarietäten einer projektiven Ebene realisierten algebraischen Geometrien.

Jede Varietät dieses Paragraphen ist Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Unter Punkten verstehen wir stets nulldimensionale Punkte der Varietät.

Lemma 5.1. *Sei F eine quasiprojektive Varietät, deren projektive Abschließung $\bar{F}$ die projektive Ebene über k ist. Trägt F eine algebraische Geometrie vom Typ 2, so ist diese stets papposch.*

(*a*) *Ist auf F die projektive Ebene realisiert, so ist $F=\bar{F}$, und die Blöcke sind die gewöhnlichen Geraden, es sei denn, F ist eine Varietät über einem Körper k der Charakteristik 2. In diesem Fall kann das System der Blöcke außerdem zu der Gesamtheit $\mathfrak{J}$ derjenigen Kurven* *projektiv äquivalent sein, die sich durch die Gleichungen*

$$(1) \qquad x_3^2 + ex_2^2 + dx_1^2 + cx_1x_2 = 0 \quad \textit{sowie} \quad rx_1 + sx_2 = 0$$

mit festem $0 \neq c \in k$ *und beliebigen* $e, d, r, s \in k$ *beschreiben lassen.*

(*b*) *Ist auf* F *die Geometrie einer affinen Ebene realisiert, so entsteht die Varietät* F *aus* $\overline{F}$ *durch Herausnahme einer projektiven Kurve. Ist die Charakteristik von* k *von* 2 *verschieden, so entsteht* F *aus* $\overline{F}$ *durch Herausnahme einer gewöhnlichen projektiven Geraden, und das System der Blöcke besteht entweder aus genau allen gewöhnlichen Geraden dieser affinen Ebene oder ist affin äquivalent zu der Gesamtheit der durch die Gleichungen*

$$(2) \qquad \{a + cy^2 + cx + by = 0 \; ; \; a, b, c \in k\}$$

beschriebenen Kurven.

Ist die Charakteristik von k *hingegen gleich* 2, *so kann außer den gerade beschriebenen Möglichkeiten* F *projektiv äquivalent sein zu einer affinen Ebene, die aus der in* (*a*) *beschriebenen projektiven Ebene durch Herausnahme der Punkte einer Kurve des Systems* $\mathfrak{J}$ *entsteht; ihre Blöcke sind dann genau die Spuren aller restlichen Kurven* (1) *in* F.

(*c*) *Ist auf* F *die Geometrie einer dual affinen Ebene realisiert, so kann dies nur so geschehen, daß man die algebraisehen Punkte der Blöcke einer Parallenschar einer in* (*b*) *beschriebenen affinen Ebene zu Klassen paralleler Punkte deklariert.*

Beweis. Zunächst behandeln wir den Fall, daß $F = \overline{F}$ gilt; dann kann nach dem Satz von Bezout F nur eine projektive Ebene tragen.

Angenommen, das System $\mathfrak{S}$ der Blöcke einer auf F realisierten projektiven Ebene enthalte einen irreduziblen Kegelschnitt T. Es seien p_1 und p_2 zwei verschiedene Punkte auf T. Die jeweils mit p_i inzidenten Blöcke sind gewöhnliche Geraden oder irreduzible Kegelschnitte, die mit T jeweils genau den Punkt p_i gemeinsam haben. Da durch jeden Punkt von $F \setminus T$ genau ein mit p_i inzidenter Block geht und T nicht singulär ist, bildet die Menge $\mathfrak{X}_i$ der mit p_i inzidenten Blöcke jeweils ein Kegelschnittsbüschel mit p_i als vierfachem Grundpunkt. Daher sind die Tangenten P_i an T in den Punkten p_i jeweils Blöcke. Es sei $t = P_1 \cap P_2$. Die mit t inzidenten Blöcke — ihre Gesamtheit sei mit $\mathfrak{X}_t$ bezeichnet—sind alles gewöhnliche projektive Geraden, denn wäre Y ein mit t inzidenter Kegelschnitt, so müßte P_1 oder P_2 mit Y zwei verschiedene Punkte gemeinsam haben. Jeder Block aus $\mathfrak{X}_t$ ist also eine Tangente an T; dies ist aber nach Fulton S. 219-220 nur dann möglich, wenn der Körper k die Charakteristik 2 hat. Trifft dies zu, so können wir etwa $t = (0, 0, 1)$ annehmen. Die mit $(0, 0, 1)$ inzidenten Geraden haben dann die Form

$$(*) \qquad rx_1 + sx_2 = 0$$

mit beliebigen $r, s \in k$. Man rechnet nach, daß eine zweiparametrige Schar $\mathfrak{I}'$ von irreduziblen Kegelschnitten, die von jeder Geraden der Form $(*)$ berührt werden, notwendigerweise durch die Gleichungen

$$ax_3^2 + ex_2^2 + dx_1^2 + cx_1x_2 = 0$$

mit beliebigen e und d aus k beschrieben wird; da jeder Kegelschnitt aus $\mathfrak{I}'$ irreduzibel ist und je zwei Kegelschnitte aus $\mathfrak{I}'$ jeweils einen vierfachen Punkt gemeinsam haben, kann a zu 1 normiert werden, und $c \neq 0$ ist eine für alle Kegelschnitte aus $\mathfrak{I}'$ feste Zahl. Die eineindeutige involutorische Abbildung

$$\alpha\colon (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, x_3 + c\sqrt{x_1 x_2})$$

« glättet » die Blöcke der projektiven Ebene zu gewöhnlichen Geraden.

Nun sei vorausgesetzt, daß $\overline{F} \neq F$ gilt. Da je zwei Blöcke einer Geometrie vom Typ 2 algebraisch isomorph sind, ist entweder jeder Block eine projektive Kurve, oder keiner der Blöcke ist projektiv abgeschlossen.

Angenommen, jeder Block sei eine projektive Kurve, Nicht alle Blöcke können gewöhnliche projektive Geraden sein, denn F kann wegen des Bezoutschen Satzes (oder wegen 3.2) weder die Geometrie einer affinen noch einer dual affinen Ebene tragen. Sei also T ein Block, der ein irreduzibler Kegelschnitt ist. Wir betrachten die Gesamtheit $\mathfrak{X}$ derjenigen Blöcke, die mit einem Punkt p auf T inzidieren. $\mathfrak{X}$ bildet ein Kegelschnittsbüschel mit p als vierfachem Punkt; da eine beliebige Kurve C aus $\mathfrak{X}$ gemeinsame Punkte mit F hat, ist C stets ein Block. Das Büschel $\mathfrak{X}$ überdeckt mit $F \setminus p$ auch die Punktmenge $\overline{F} \setminus p$ schlicht. Also gäbe es in $\mathfrak{X}$ Kurven, die Punkte aus $\overline{F} \setminus F$ enthielten, was einen Widerspruch gegen unsere Annahme bedeutet, daß jeder Block projektiv abgeschlossen ist.

Daher entsteht die projektive Abschließung jedes Blocks durch Hinzunahme eines Punktes von $\overline{F} \setminus F$ (2.3 und 3.2). Wir setzen nun voraus, daß alle Blöcke durch einen Punkt d aus $\bar{F} \setminus F$ gehen. Angenommen, es gebe zwei Blöcke B_1 und B_2, deren Abschließungen $\bar{B}_i$ einander in d weniger als dreifach schneiden. Da $|B_1 \cap B_2| \leqslant 1$ gilt, haben B_1 und B_2 in F einen mindestens zweifachen Punkt b gemeinsam. Wir Wir betrachten die Gesamtheit der Abschließungen $\bar{C}_b$ der durch b gehenden Blöcke C_b. Da jedes $\bar{C}_b$ mit $\bar{B}_i$ genau die Punkte b und d gemeinsam hat, gehört $\bar{C}_b$ zu dem Kegelschnittsbüschel $\mathfrak{C}$, das durch die $\bar{B}_i$ bestimmt wird. Die gemeinsame Tangente L an die irreduziblen Kegelschnitte von $\mathfrak{C}$ in b kann dann keine Abschließung eines Blocks sein; daher besteht $L \cap F$ aus lauter zu b parallelen Punkten. Wir betrachten die beiden durch B_i bestimmten Parallelenscharen $\mathfrak{B}_i$. Die Abschließungen von Blöcken aus $\mathfrak{B}_i$ gehören jeweils zu einem Kegelschnittsbüschel $\mathfrak{K}_i$, das d als vierfachen Punkt hat. Die Kurven aus $\mathfrak{K}_i$ überdecken F jeweils schlicht, und jeder Punkt x von F ist ein mindestens zweifacher Schnittpunkt je einer Kurve W_1 aus $\mathfrak{K}_1$ mit genau einer Kurve W_2 aus $\mathfrak{K}_2$. Da jeder Kurve aus $\mathfrak{K}_i$ die projektive Gerade L trifft, folgt $L \subseteq F$. Da jeder Block genau einen Punkt einer Klasse paralleler Punkte enthält, gibt es außerhalb von L keine zu b parallelen Punkte. Die gemeinsame Tangente S an die Kurven W_i in x ist wegen $d \notin S$ keine projektive Abschließung eines Blocks; daher besteht die Gesamtheit der algebraischen Punkte von S aus lauter zu x parallelen Punkten. Da die Punkte von S in einer von L verschiedenen Parallelklasse liegen, müßte $S \cap L$ leer sein, was zu einem Widerspruch führt.

Also haben die Abschließungen je zweier beliebiger Blöcke d als einen mindestens dreifachen Schnittpunkt. Wir betrachten nun die Gesamtheit $\mathfrak{B}$ der Kegelschnitte in $\bar{F}$, die einander in d mindestens dreifach treffen. Die irreduziblen Kegelschnitte von $\mathfrak{B}$ besitzen in d eine gemeinsame Tangente Z, die weder ein Block sein noch aus lauter parallelen Punkten bestehen kann, da sie von keiner Kurve aus $\mathfrak{B}$ außerhalb des Punktes d getroffen wird; daher gilt $Z \subseteq \bar{F} \setminus F$. Alle anderen Kurven aus $\mathfrak{B}$ haben mit F Punkte gemeinsam; sonst gäbe es in $\mathfrak{B}$ eine irreduzible Kurve J mit $J \cap F = \emptyset$, aber etwa $|J \cap B| = 2$ mit einem $B \in \mathfrak{B}$ und $B \cap F \neq \emptyset$, was im Widerspruch zu 2.3 und 3.2 steht. Daher gilt sogar $Z = \bar{F} \setminus F$.

Die affine Varietät F kann man nun so koordinatisieren, daß Z die Gerade $x_1 = 0$ und $d = (0, 1, 0)$ werden. Mann kann leicht nachrechnen, daß die Kurven des Systems $\mathfrak{B}$ dann durch die Gleichungen

$$(+) \qquad ax_1^2 + cx_2^2 + cx_1x_2 + bx_1x_3 = 0 \qquad \text{mit } a, c, b \in k$$

beschrieben werden kann; interessiert man sich nur für die affinen Punkte, d.h. nur für die Punkte $\{(1, x_2/x_1, x_3/x_1); x_1 \neq 0\}$, so läßt sich jeder Block bzw. jede Klasse paralleler Punkte mittels einer der in der Behauptung auftretenden Gleichungen (2) beschreiben. Durch den algebraischen Isomorphismus $(x, y) \mapsto (x + y^2, y)$ werden die Blöcke bzw. die Blöcke und die Klassen paralleler Punkte zu gewöhnlichen affinen Geraden « geglättet », und die auf F auf diese Weise realisierte affine bzw. dual affine algebraische Ebene ist papposch.

Nun bleibt noch der Fall zu betrachten, daß nicht alle Abschließungen von Blöcken durch den gleichen Punkt aus $\overline{F} \setminus F$ gehen. Wir können annehmen, daß es unter den Abschließungen von Blöcken irreduzible Kegelschnitte gibt, denn sonst ist F die zweidimensionale affine Varietät, auf der eine affine bzw. dual affine Geometrie nur so realisiert werden kann, daß das System der Blöcke bzw. der Blöcke und der Klassen paralleler Punkte aus genau allen gewöhnlichen affinen Geraden besteht.

Es sei $\overline{T}$ ein irreduzibler Kegelschnitt, der die Abschließung eines Blocks T sei; es gilt $\overline{T} = T \cup w$ mit $w \in \overline{F} \setminus F$ (2.3 und 3.2) Wegen 3.2 ist auf F eine affine bzw. dual affine Ebene realisiert. Also existiert durch jeden Punkt x von F ein zu T paralleler Block B_x; die projektiven Abschließungen $\overline{B}_x$ dieser Blöcke sind Kurven des Kegelschnittsbüschels $\mathfrak{T}$, das w als einen vierfachen Punkt besitzt und zu welchem $\overline{T}$ gehört. $\mathfrak{T}$ überdeckt $\overline{F} \setminus w$ schlicht. Jede Kurve aus $\mathfrak{T}$, die mit F einen Punkt gemeinsam hat, trifft die Menge $\overline{F} \setminus F$ nur im Punkt w weil sie dann ein zu T paralleler Block ist. Also muß insbesondere die Kurve Q aus $\mathfrak{T}$, die mit dem zu $\overline{F} \setminus F$ gehörenden Punkt s der projektiven Abschließung $\overline{X}$ eines nicht mit w inzidenten Blocks X inzidiert, ganz zu $\overline{F} \setminus F$ gehören. Gäbe es außerdem noch eine weitere Kurve aus $\mathfrak{T}$, die ganz in $\overline{F} \setminus F$ läge, so schnitte diese die w meidende Kurve $\overline{X}$ in einem von s verschiedenen Punkt, und es gälte $|\overline{X} \cap (\overline{F} \setminus F)| \geqslant 2$, was wiederum im Widerspruch zu 2.3 und 3.2 steht. Also ist $Q = \overline{F} \setminus F$.

Die projektiven Abschließungen einer Schar $\mathfrak{G}$ paralleler Blöcke treffen Q in genau einem Punkt q, der dann ein vierfacher Punkt des von diesen Abschließungen zusammen mit Q gebildeten Kegelschnittsbüschels ist, wenn die Abschließungen der Blöcke aus $\mathfrak{G}$ nicht das Büschel der mit q inzidenten gewöhnlichen Geraden bilden. Die zu verschiedenen Parallelscharen, deren projektive Abschließungen nicht aus lauter gewöhnlichen projektiven Geraden bestehen, zugehörigen Kegelschnittsbüschel haben verschiedene Funkte von Q als vierfache Punkte. Sei x ein Punkt aus F. Wir betrachten die Menge $\mathfrak{Q}$ der mit x inzidenten Blöcke. Die Menge der projektiven Abschließungen von Blöcken aus $\mathfrak{Q}$ besteht entweder aus allen mit x inzidenten gewöhnlichen projektiven Geraden, oder sie bildet ein Kegelschnittsbäschel $\mathfrak{G}$ welches x als vierfachen Punkt besitzt, denn $\mathfrak{G}$ enthält nicht nur einen irreduziblen Kegelschnitt. Da die durch x gehende Klasse paralleler Punkte von keinem Block aus $\mathfrak{Q}$ in einem weiteren Punkt getroffen wird, ist sie die Gesamtheit der in $\bar{F}\setminus Q$ liegenden algebraischen Punkte einer Geraden oder eines irreduziblen Kegelschnitts. Daher kann man die Klassen paarweise paralleler Punkte stets als eine neue Schar paralleler Geraden ansehen und jede auf F realisierte dual affine Ebene zu einer algebraischen affinen Ebene ergänzen. Da die projektiven Abschließungen von Blöcken, die mit x inzidieren, im Fall einer affinen Ebene die Punkte von $Q=\bar{F}\setminus F$ schlicht überdecken, läßt sich durch Hinzunahme der Punkte von Q aus der auf F realisierten affinen Ebene kanonisch eine auf $\bar{F}$ realisierte projektive algebraische Ebene E konstruieren, indem man die projektiven Abschließungen der Blöcke der affinen Ebene zusammen mit der Kurve Q als Blöche von E nimmt.

6. Rationalität der algebraische Geometrien tragenden Varietäten.

Satz 6.1. *Sei F eine algebraische Varietät, die eine affine bzw. dual affine Ebene trägt. Dann ist F algebraisch isomorph zur affinen Ebene $k\times k$; es gibt sogar einen algebraischen Isomorphismus α, der die Blöcke der Geometrie auf F auf eines der in* § 5 *beschriebenen Kurvensysteme in $k\times k$ abbildet.*

Beweis. Es seien X und L zwei verschiedene nicht parallele Blöcke auf F und $\bar{X}$ bzw. $\bar{L}$ ihre projektiven Abschließungen (Vgl. § 2); $\mathfrak{S}$ sei eines der in § 5 beschriebenen Kurvensysteme in $k\times k$.

Da X bzw. L rationale singularitätenfreie Kurven sind und die Gruppe der algebraischen Automorphismen von L wegen $|\bar{L}\setminus L|=1$ zweifach transitiv ist, gibt es algebraische Isomorphismen φ_X und φ_L von X bzw. L auf zwei verschiedene nicht parallele Blöcke aus $\mathfrak{S}$ mit $\varphi_X(X\cap L)=\varphi_L(X\cap L)$. Mit $\mathfrak{X}$ bzw. $\mathfrak{L}$ seien die von X bzw. L auf F bestimmten Parallelenscharen bezeichnet, mit $\tilde{\mathfrak{X}}$ bzw. $\tilde{\mathfrak{L}}$ die beiden mittels $\varphi_X(X)$ bzw. $\varphi_L(L)$ in $\mathfrak{S}$ ausgezeichneten Parallelescharen. Sind X_1 und X_2 zwei Geraden aus $\mathfrak{X}$, so sei $\alpha_{X_2}^{X_1}$ die Parallelperspektivität, die X_1 auf X_2 mit Hilfe der Parallelenschar $\mathfrak{L}$ abbildet; sind $\tilde{X}_1$ und $\tilde{X}_2$ zwei Geraden aus $\tilde{\mathfrak{X}}$, so bildet die Parallelperspektivität $\tilde{\alpha}_{\tilde{X}_2}^{\tilde{X}_1}$ die Gerade $\tilde{X}_1$ mit Hilfe von $\tilde{\mathfrak{L}}$ auf $\tilde{X}_2$ ab. Analog definiert man die Parallelperspektivitäten $\beta_{L_2}^{L_1}$ bzw. $\tilde{\beta}_{\tilde{L}_2}^{\tilde{L}_1}$; sie bilden $L_1 \in \mathfrak{L}$ bzw. $\tilde{L}_1 \in \tilde{\mathfrak{L}}$ mit Hilfe von $\mathfrak{X}$ bzw. $\tilde{\mathfrak{X}}$ auf L_2 bzw. $\tilde{L}_2$ ab. Die Abbildungen $\alpha_{X_2}^{X_1}$, $\tilde{\alpha}_{\tilde{X}_2}^{\tilde{X}_1}$, $\beta_{L_2}^{L_1}$, $\tilde{\beta}_{\tilde{L}_2}^{\tilde{L}_1}$ sind algebraische Isomorphismen zwischen Blöcken (Hilfssatz 2.1). Den algebraischen Isomorphismus γ zwischen F und $k\times k$, der ein geometrischer Isomorphismus wird, definiert man nun wie folgt:

Ist $Z \neq X$ ein Block aus $\mathfrak{X}$, so sei $Z\gamma = Z(\alpha_X^Z \cdot \varphi_X \cdot \tilde{\alpha}_{\tilde{Z}}^{\varphi_X(X)})$, wobei $\tilde{Z}$ diejenige Gerade aus $\tilde{\mathfrak{X}}$ ist, für die $\varphi_L(L \cap Z) = \varphi_L(L) \cap \tilde{Z}$ gilt.

Ist $H \neq L$ eine Gerade aus $\mathfrak{L}$, so sei $H\gamma = H(\beta_X^Z \cdot \varphi_L \cdot \tilde{\beta}_{\tilde{H}}^{\varphi_L(L)})$, wobei $\tilde{H}$ diejenige Gerade aus $\tilde{\mathfrak{L}}$ ist, für die $\varphi_X(X \cap H) = \varphi_X(X) \cap \tilde{H}$ gilt.

Ist nun t ein beliebiger algebraischer Punkt von F, so gibt es genau einen Block W aus $\mathfrak{X}$ und genau einen Block S aus $\mathfrak{L}$, so daß $S \cap W = t$ ist. Es gilt $t\gamma = S\gamma \cap W\gamma$. Da auf F eine algebraische affine bzw. dual affine Ebene realisiert ist, ist die Abbildung $F \to \mathfrak{X}\times\mathfrak{Y}$, die durch $t \mapsto (S, W)$ definiert ist, ein algebraischer Morphismus. Nach der Definition von γ ist auch die durch $(S, W) \mapsto (S\gamma, W\gamma)\colon \mathfrak{X}\times\mathfrak{Y} \to \tilde{\mathfrak{X}}\times\tilde{\mathfrak{Y}}$ gegebene Abbildung ein algebraischer Morphismus. Da schließlich in $k\times k$ das Schneiden von Geraden aus zwei verschiedenen Parallelscharen birational ausfällt, ist $t \mapsto t\gamma\colon F \to (k\times k)$ ein algebraischer Morphismus, dessen Umkehrung ebenfalls algebraisch ist.

Aus dem Satz 6.2 ergibt sich nun sofort das wichtige 3.2 verschärfende.

KOROLLAR 6.2. *Jede algebraische Geometrie vom Typ* 2 (*also jede projektive, affine bzw. dual affine Ebene*) *ist papossch. Ist A eine dual affine Ebene, so ist die Abschließung* $\bar{\mathfrak{T}}$ *jeder Klasse* $\mathfrak{T}$ *paarweise paralleler Punkte eine projektive singularitätenfreie rationale Kurve, und es gilt* $|\bar{\mathfrak{T}}\setminus\mathfrak{T}| = 1$.

Die Wichtigkeit des Satzes 6.1 spiegelt außerdem insbesondere das folgende Korollar, das uns die Einbettbarkeit von algebraische Geometrien tragenden Varietäten in projektive Räume liefert.

KOROLLAR 6.3. *Ist F eine algebraische Varietät, die eine algebraische Geometrie vom Typ* 2 *trägt oder auf der eine algebraische Möbius- bzw. Laguerreebene realisiert ist, so ist F quasiprojektiv.*

BEWEIS. Trägt die Varietät F über dem algebraisch abgeschlossenem Körper k eine algebraische affine bzw. dual affine Eben, so ist F nach 6.1 algebraisch isomorph zu $k\times k$, also eine glatte Fläche. Nach

Šafarevič [1966] S. 188 ist dann F quasiprojektiv (vgl. auch Šafarevič [1972] S. 385, Bemerkung 1). Ist auf F eine projektive Ebene bzw. eine Möbius- oder Laguerregeometrie realisiert, so jeder Punkt von F in einer algebraischen affinen bzw. dual affinen Unterebene der auf F realisierten Geometrie enthalten, und die Punktmengen dieser Unterebenen bilden glatte offene Untervarietäten von F. Daher ist F selbst eine glatte Fläche und nach Šafarevič [1966] S. 188 folglich quasiprojektiv.

Eine etwas wage Charakterisierung der algebraische Geometrien tragenden Varietäten gestattet das folgende

KOROLLAR 6.4. *Sei F eine in algebraische Varietät, die eine Geometrie vom Typ 2 trägt oder auf der eine Möbius- bzw. Laguerreebene realisiert ist. Dann ist die projektive Abschließung $\overline{F}$ von F eine Veronesesche Fläche oder eine ihrer Projektionen.*

BEWEIS. Da eine Möbius- bzw. Laguerreebene auf (bezüglich der Zariski-Topologie) offenen Teilen von F eine Geometrie vom Typ 2 induziert, reicht es, die Behauptung für den Fall zu zeigen, daß F eine Geometrie vom Typ 2 trägt. Dann ist aber mit F (vgl. 6.1) auch die projektive Abschließung $\overline{F}$ eine rationale Fläche, und diese ist nach Burau [1950], S. 23, Satz 7, Projektion einer Veroneseschen Fläche.

7. Projektive Klassifikation algebraischer projektiver Ebenen und algebraischer Möbiusgeometrien.

SATZ 7.1. *Auf einer k-Varietät F (k ist ein algebraisch abgeschlossener Körper) läßt sich keine Möbiusebene realisieren, deren Blöcke irreduzible algebraische Kurven sind.*

BEWEIS. Nimmt man aus F einen Punkt p heraus, so ist $F\setminus p$ ebenfalls eine k-Varietät und daher ist voraussetzungsgemäß die in $F' = F\setminus p$ realisierte Unterebene der Möbiusgeometrie eine algebraische affine Ebene. Nach Satz 6.1 ist aber F' algebraisch isomorph zu $k\times k$, und es gibt einen Isomorphismus α von F' auf $k\times k$, bei dem das System der Geraden auf eines der im Satz 5.1 beschriebenen Systeme abgebildet wird. Die nicht mit p inzidenten Kreise der Möbiusebene müßten unter α auf projektive Kurven abgebildet werden, (vgl. § 3), die ganz in $k\times k$ lägen, also zu der uneigentlichen Geraden von $k \times k$ disjunkt wären. Da aber k algebraisch abgeschlossen ist, haben zwei ebene projektive Kurven in der projektiven Abschließung von $k \times k$ stets mindestens einen gemeinsamen Punkt, und dies ein Widerspruch.

SATZ 7.2. *Trägt eine k-Varietät F eine algebraische projektive Ebene, so ist F projektiv äquivalent zur projektiven zweidimensionalen Ebene $\mathbb{P}_2$, zu einer n-dimensionalen Veroneseschen Fläche V^n oder zu einer biregulären Projektion P von V^n in einen niederdimensiosionalen projektiven Raum. Ist F projektiv äquivalent zur Veroneseschen Fläche V^n oder zu einer ihrer biregulären Projektionen, so ist das System der Blöcke auf F das Bild des Systems der gewöhnlichen Geraden von $\mathbb{P}_2$ unter einem algebraischen Isomorphismus α von $\mathbb{P}_2$ auf F oder, und dies trifft nur für den Fall zu, daß die Charakteristik von k gleich 2 ist, das Bild eines solchen Kurvensystems unter α, das dem im Satz* 5.1 (1) *beschriebenen System von Geraden und Kegelschnitten projektiv äquivalent ist.*

BEWEIS. Nehmen wir aus der eine projektive Ebene tragenden Fläche F einen Block G heraus, so erhalten wir eine affine Ebene A, die als algebraische Fläche unter einer biregulären Abbildung σ zu $k \times k$ isomorph ist, und das System der Blöcke geht in eines der im Satz beschriebenen über.

Gehen in $k \times k$ die projektiven Abschließungen von affinen Geraden nicht durch einen Punkt, so füllen die algebraischen Punkte von $\mathbb{P}_2 \setminus (k \times k)$ genau eine Gerade G^* der Geometrie aus; daher kann der algebraische Isomorphismus σ zwischen $F \setminus G$ und $k \times k$ zu einem (die geometrische Struktur erhaltenden) algebraischen Isomorphismus σ zwischen $\mathbb{P}_2$ und F erweitert werden. Also ist F projektiv abgeschlossen.

Gehen in $k \times k$ die projektiven Abschließungen von affinen Blöcken alle durch einen Punkt t, so wird der Isomorphismus σ zwischen A und $k \times k$ von einer birationalen Abbildung $\hat{\sigma}$ induziert, die F in die projektive Ebene $\mathbb{P}_2$ abbildet; dabei wird jeder Punkt des Blocks G unter $\hat{\sigma}$, sofern sein Bild eindeutig definiert ist, auf den Punkt t abgebildet. Nach § 5 können in $\mathbb{P}_2$ die $\hat{\sigma}$-Bilder der projektiven Abschließungen der Geraden von A durch die Gleichungen

$$(*) \qquad a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_2 x_1 x_2 + a_3 x_1 x_3 = 0$$

mit $a_i \in k$ und nicht alle $a_i = 0$ beschrieben werden. Die birationale Abbildung π von $\mathbb{P}_2$ in $\mathbb{P}_2$, die durch $x_1 \mapsto x_1$, $x_3 \mapsto x_3$; $x_2 \mapsto x_2 + x_3^2 x_1^{-1}$

gegeben ist, « glättet » die Kurven (*) zu gewöhnlichen Geraden und ordnet dem Punkt $t=(0,1,0)$ alle Punkte der Geraden $\{(0,x_2,x_3);$ $x_i\in k$ nicht beide x_i gleich $0\}$ zu. Die Einschränkung von π auf $k\times k$ ist ein algebraischer Automorphismus, die Abbildung $\pi\cdot\sigma$ ist, wenn man sie auf F einschränkt, ein algebraischer Isomorphismus zwischen F und $\mathbf{P}_2$. Da F sowohl offen als auch abgeschlossen (bezüglich der Zariski-Topologie) in der projektiven Abschließung $\overline{F}$ liegt, gilt $F=\overline{F}$, und die Behauptung gilt.

KOROLLAR 7.3. *Trägt eine in den dreidimensionalen projektiven Raum* $\mathbf{P}_3$ *über dem algebraisch abgeschlossenen Körper* k *einbettbare quasiprojektive* k*-Varietät* F *eine algebraische projektive Ebene, deren Blöcke ebene algebraische Kurven sind, so ist* F *projektiv äquivalent zur zweidimensionalen projektiven Ebene* $\mathbf{P}_2$.

BEWEIS. Angenommen, dies sei nicht der Fall; dann besteht eine bezüglich der Zariski-Topologie offene Teilmenge im Raum der Blöcke aus Kegelschnitten. Nach dem Satz von Darboux (Bertini, S. 370, vgl. auch Satz 7.2) wäre dann F nicht biregulär auf die Veronesesche Fläche 4. Ordnung im 5-dimensionalen projektiven Raum beziehbar.

Eine algebraische affine Ebene A wollen wir projektiv ergänzbar nennen, wenn die projektiven Abschließungen der Blöcke zusammen mit den so hinzugekommenen Punkten (die eine singularitätenfreie rationale Kurve ausfüllen), eine algebraische projektive Ebene bilden. Eine algebraische dual affine Ebene heiße projektiv ergänzbar, wenn sie zu einer projektiv ergänzbaren algebraischen affinen Ebene wird, wenn man die Klassen paarweise paralleler Punkte als neue Blöcke auffaßt.

Die im Satz 7.2 durchgeführte Bestimmung aller algebraischen projektiven Ebenen bis auf projektive Äquivalenz ist zugleich eine projektive Klassifikation der projektiv ergänzbaren algebraisch affinen und dual affinen Ebenen. Jede algebraischen affine projektiv ergänzbare Ebene erhält man aus einer algebraische projektiven Ebene F, indem man aus F eine Gerade herausnimmt; jede algebraische projektiv ergänzbare dual affine Ebene ist eine projektiv ergänzbare algebraische affine Ebene, in der man eine Schar von Parallelen als Klassen paarweise paralleler Punkte ansieht.

Daher werden wir im nächsten Abschnitt nur die projektive Klassifikation von solchen algebraischen affinen und dual affinen Ebenen angehen, die nicht projektiv ergänzbar sind.

8. Projektive Klassifikation von projektiv nicht ergänzbaren algebraischen affinen und dual affinen Ebenen.

Unter die rationalen Normregelflächen zählen wir auch die rationalen Normalkegel.

Da nach Satz 6.1 und § 5 folgt, daß jede algebraische dual affine Ebene algebraische affine Ebene ist, in der man eine Schar von Parallelen als Klassen paarweise unverbundener Punkte auszeichnet, reicht es, sich mit den projektiv nicht ergänzbaren algebraisch affinen Ebenen zu beschäftigen.

SATZ 8.1. *Die projektive Abschließung $\overline{F}$ der eine projektiv nicht ergänzbare algebraische affine Ebene tragenden quasiprojektiven k-Varietät F (k ist ein algebraisch abgeschlossener kommutativer Körper) sei eine Regelfläche.*

Ist $\overline{F}$ eine im r-dimensionalen projektiven Raum $\mathbf{P}_r$ mit $r \geqslant 3$ enthaltene Normregelfläche (d.h. keine Projektion einer Regelfläche gleicher Ordnung, die einem höherdimensionalen projektiven Raum, als $\mathbf{P}_r$ es ist, angehörte), so ist $\overline{F}$ eine rationale Regelfläche der Klasse $\frac{1}{2}(r-1)$ oder $\frac{1}{2}(r-3)$ bzw. $\frac{1}{2}(r-2)$; die ersten beiden Möglichkeiten treten dann auf, wenn r ungerade ist, der letzte Fall trifft dann zu, wenn r gerade ist.

Ist r ungerade, so entsteht F dadurch, daß man aus $\overline{F}$ eine Minimalleitkurve M und eine Erzeugende H ($\neq M$) entfernt; hat $\overline{F}$ die Klasse $\frac{1}{2}(r-3)$, so ist M eindeutig bestimmt, im Falle der Klasse $\frac{1}{2}(r-1)$ gibt es unendlich viele Leitkurven, die die Rolle von M übernehmen können. Ist die Regelfläche $\overline{F}$ von der Klasse $\frac{1}{2}(r-1)$, so erlaubt sie eine ebene birationale Abbildung π_1, die $\overline{F}$ auf die projektive Ebene $\mathbf{P}_2$ so abbildet, daß H und M zwei verschiedene Punkte der Geraden

$$G = \{(0, x_2, x_3);\ x_i \in k,\ \textit{nicht beide } x_i \textit{ gleich Null}\}$$

zugeordnet werden. Auf $\overline{F}$ hat π_1 genau einen Fundamentalpunkt, nämlich $M \cap H$, und diesem entspricht in $\mathbf{P}_2$ die Gerade G; die Restriktion von π_1 auf $\overline{F} \setminus (M \cup H)$ vermittelt einen algebraischen Isomorphismus $\tilde{\pi}_1$ zwischen F und der affinen Ebene $A = \mathbf{P}_2 \setminus G$.

Ist die Regelfläche $\overline{F}$ von der Klasse $\frac{1}{2}(r-3)$, so erlaubt sie eine birationale Abbildung π_2, die $\overline{F}$ auf die projektive Ebene $\mathbf{P}_2$ so abbildet, daß Minimalleitkurve M (im Fall $r = 3$ ist M ein Punkt und $\overline{F}$ ein quadratischer Kegel) als auch einer Erzeugenden H der Punkt $t = (0, 1, 0)$

zugewiesen wird. Auf $\bar{F}$ *hat* π_2 *genau einen Fundamentalpunkt, nämlich einen Punkt* p *von* $H \cap F$, *der nicht zu* M *gehört, und diesem entspricht in* $\mathbb{P}_2$ *eine Gerade — sie heiße* G *—, die als uneigentliche Gerade von* $\mathbb{P}_2$ *angesehen werden kann; die Restriktion von* π_2 *auf* $\bar{F} \setminus (M \cup H)$ *induziert einen algebraischen Isomorphismus* $\tilde{\pi}_2$ *zwischen* F *und der affinen Ebene* $A = \mathbb{P}_2 \setminus G$.

Ist r *gerade, so erlaubt* $\bar{F}$ *einen algebraischen Morphismus* π_3 *von* $\bar{F}$ *auf* $\mathbb{P}_2$, *bei dem die Minimalleitkurve* M *auf den Punkt* $t = (0, 1, 0)$ *abgebildet wird (und bei dem natürlich auf* $\bar{F}$ *keine Fundamentalpunkte existieren); die Restriktion von* π_3 *auf* $\bar{F} \setminus M$ *ist ein algebraischer Isomorphismus* $\tilde{\pi}_3$ *zwischen* $\bar{F} \setminus M$ *und* $\mathbb{P}_2 \setminus t$. *Die die Geometrie tragende Fläche* F *entsteht dadurch, daß man aus* $\bar{F}$ *das vollständige Urbild einer mit* t *inzidenten Geraden, etwa* G, *bezüglich des Morphismus* π_3 *(das also* M *enthält) herausnimmt.*

In allen Fällen kann man als Geraden der auf F *realisierten affinen Ebene entweder die Bilder der gewöhnlichen Geraden von* $A = \mathbb{P}_2 \setminus G$ *unter* $\tilde{\pi}_i^{-1}$ $(i = 1, 2, 3)$ *oder die Bilder eines solchen Kegelschnittssystems unter* $\tilde{\pi}_i^{-1}$ *nehmen, das zu dem im Satz* 5.1 (2) *beschriebenen affin äquivalent ist.*

Ist $\bar{F}$ *keine Normregelfläche, so ist* $\bar{F}$ *das Bild einer Normregelfläche* $\hat{\bar{F}}$ *einer der Klassen* $\frac{1}{2}(r-1)$, $\frac{1}{2}(r-2)$, $\frac{1}{2}(r-3)$ *unter einer Projektion* σ *mit den folgenden Eigenschaften:*

Es existiert eine Erzeugende H *und eine Minimalleitkurve* M, *so daß die Restriktion* $\tilde{\sigma}$ *von* σ *auf* $\hat{\bar{F}} \setminus (M \cup H)$ *ein algebraischer Isomorphismus auf* F *ist. Die die Geometrie tragende Fläche* F *ist* $\tilde{\sigma}(\hat{\bar{F}} \setminus (M \cup H))$, *die Geraden der Geometrie sind Bilder entweder der gewöhnlichen affinen Geraden oder eines solchen Kegelschnittsystems unter der Abbildung* $\tilde{\pi}_j^{-1}\sigma$ $(j = 1, 2, 3)$, *welches zu dem im Satz* 5.1 (2) *beschriebenen affin äquivalent ist.*

Beweis. Ist $\bar{F}$ eine Normregelfläche der Klasse $m < (r-1)/2$ so ist sie auf die projektive Ebene $\mathbb{P}_2$ so birational abbildbar, daß ihre hyperebenen Schnitte den ebenen Kurven der Ordnung $r - m - 1$ mit einem $(r - m - 2)$-fachen Punkt und $r - 2m - 2$ festen Tangenten in diesem Punkt entsprechen (Bertini, S. 344). Hat die Normregelfläche $\bar{F}$ die Klasse $(r-1)/2$, so ist sie auf $\mathbb{P}_2$ so birational abbildbar, daß ihre hyperebenen Schnitte ebenen Kurven der Ordnung $(r+1)/2$ mit einem $(r-1)/2$ fachen Basispunkt und einem einfachen Basisflunkt entsprechen (Bertini, S. 344). Nun folgt aber für Normregelpächen die Behauptung leicht nach Satz 5.1 und Bertini S. 335-336.

Ist $\overline{F}$ keine Normregelfläche, so ist sie das Bild einer Normregelfläche $\hat{\overline{F}}$ unter einer Projektion σ (Bertini, S. 333). Da F algebraisch isomorph unter einem Morphismus φ zur affinen Ebene A über k ist (Satz 6.1) und es eine ebene Abbildung von $\hat{\overline{F}}$ gibt, die weder mehr Basiskurven noch Basispunkte als eine ebene Abbildung von $\overline{F}$ hat (Bertini, Kap. 15.4), liegen die Punkte von $\hat{\overline{F}}$, bei denen die Eineindeutigkeit von σ verletzt sein kann, auf $\overline{F} \setminus \sigma^{-1}\varphi^{-1}(A)$. Daher läßt sich die projektive Ebene $\mathbf{P}_2$, die A abschließt, so unter einer birationalen Abbildung β so auf $\hat{\overline{F}}$ abbilden, daß die Restriktion von β auf A der algebraische Isomorphismus $\sigma^{-1}\varphi^{-1}$ ist, und der Satz ist bewiesen, wenn man für den Fall eines geraden r bedenkt, daß bei der ebenen Minimalabbildung von $\hat{\overline{F}}$ die Erzeugenden von $\overline{F}$ in Geraden durch den Punkt $\pi_3(M)$ übergehen. (Bertini, S. 344).

SATZ 8.2. *Die projektive Abschließung $\overline{F}$ der eine projektiv nicht ergänzbare algebraische affine Ebene tragenden (quasiprojektiven) k-Varietät (k algebraisch abgeschlossen) sei singularitätenfrei. Dann ist $\overline{F}$ entweder eine Regelfläche oder algebraisch isomorph zur projektiven Ebene $\mathbf{P}_2$ über k.*

Wir können annehmen, daß $\overline{F}$ algebraisch isomorph zu $\mathbf{P}_2$ ausfällt, denn andernfalls klärt der vorige Satz die Verhältnisse. Dann ist $\overline{F}$ projektiv äquivalent zu einer Veroneseschen Fläche oder zum Bild unter einer solchen Projektion einer Veroneseschen Fläche, die ein algebraischer Isomorphismus ist (also insbesondere auch zu $\mathbf{P}_2$). Ist π ein algebraischer Isomorphismus von $\overline{F}$ auf $\mathbf{P}_2$, so entsteht F aus $\overline{F}$, indem man das Urbild einer Geraden G bezüglich π herausnimmt. Interpretiert man G als uneigentliche Gerade, so besteht das System der Blöcke auf F aus den Urbildern der Kurven bezüglich π, die zu einem zu 5.1 (2) *affin äquivalenten Kegelschnittsystem gehören.*

BEWEIS. Daß $\overline{F}$ eine Regelfläche ist oder zur projektiven Ebene algebraisch isomorph ausfällt, folgt etwa nach Šafarevič [1968], S. 109. Der Rest ergibt sich mit Bertini, S. 365-368 und Satz 6.1.

Eine Varietät eines projektiven Raumes $\mathbf{P}_n$ (über dem Körper k) heißt normal, wenn sie nicht durch Projektion einer in einem projektiven Raum höherer Dimension liegenden Varietät derselben Ordnung erhalten werden kann (Bertini, S. 217).

SATZ 8.3. *Die projektive Abschließung $\overline{F}$ der eine projektiv nicht ergänzbare algebraische affine Ebene tragenden nicht in $\mathbf{P}_2$ einbett-*

baren k-Varietät F sei normal im n-dimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}_n$ *über* k $(n \geqslant 3)$. *Dann ist* $\overline{F}$ *entweder die Veronesesche Fläche vierter Ordnung in* $\mathbb{P}_5$ *oder die rationale Normregelfläche der Ordnung* $n-1$ *und entweder einer der Klassen* $\frac{1}{2}(n-1)$ *bzw.* $\frac{1}{2}(n-3)$ *oder der Klasse* $\frac{1}{2}(n-2)$, *je nachdem ob* n *ungerade oder gerade ist.* (*Für* $n=3$ *und die Klasse* 0 *erhält man insbesondere quadratische Kegel*).

Wie F *aus* $\overline{F}$ *entsteht und welche Kurven als Geraden zugelassen sind, wurde in den Sätzen* 8.1 *und* 8.2 *geklärt.*

Beweis. Da $\overline{F}$ eine Fläche ist (Satz 4.1.), hat $\overline{F}$ die Ordnung $n-1$ (Bertini, S. 217). Wegen der Irreduzibilität von $\overline{F}$ folgt alles übrige aus dem Satz von del Pezzo (Bertini, S. 375).

Hilfssatz 8.4. *Auf einer quasiprojektiven Fläche F sei eine algebraische projektive bzw. affine Ebene realisiert, so daß ihre Geraden aus den algebraischen Punkten von ebenen Kurven bestehen. Enthält F zwei verschiedene nichtparallele Blocke, deren Abschlüsse projektive Geraden sind, so ist F in den dreidimensionalen projektiven Raum einbettbar.*

Bweeis. Der projektive Abschluß $\overline{F}$ von F, der nicht zur projektiven Ebene isomorph sei, sei in einem minimal gewählten projektiven Raum $\mathbb{P}_n$ eingebettet. Die projektiven Abschließungen von Blöcken in $\mathbb{P}_n$ sind projektive Geraden und Kegelschnitte (3.2). K_1 und K_2 seien verschiedene Geraden, die projektive Abschlüsse von nichtdisjunkten Blöcken sind und E die von ihnen aufgespannte Ebene. Es seien $w_i \in K_i \cap F$ zwei Punkte, die nicht zu $K_1 \cap K_2$ gehören. Dann geht durch die w_i ein Block T, der in einer Ebene $\tilde{T}$ enthalten ist. Es gilt $\dim(E \cap \tilde{T}) \geqslant 1$, und daher erzeugt E mit $\tilde{T}$ einen höchstens dreidimensionalen Unterraum S von $\mathbb{P}_n$. Ist q ein beliebiger mit keinem der Blöcke T und $K_i \cap F$ inzidenter Punkt von F, so gehen durch ihn Blöcke G, die sowohl T als auch die beiden Blöcke $K_i \cap F$ jeweils so schneiden, daß die Punkte $G \cap T$ bzw. $K_i \cap F$ alle verschieden sind. Dann liegt aber mit G auch q in S, und es gilt $\overline{F} \subseteq S \subseteq P_3$.

Hilfssatz 8.5. *Die quasiprojektive in einen dreidimensionalen projektiven Raum einbettbare Fläche F, deren projektive Abschließung $\overline{F}$ nicht zur projektiven Ebene isomorph sei, trage eine affine Ebene. Sei $\tilde{A}$ eine Ebene, so daß $\tilde{A} \cap F$ einen Block der Geometrie als eine Zusammenhangskomponente besitzt. Dann ist jede Zusammenhangskomponente von $\tilde{A} \cap F$ ein Block der Geometrie.*

Beweis. A sei eine projektive Gerade bzw. ein Kegelschnitt, so daß $A \cap F$ ein Block ist; sie liege in der Ebene $\tilde{A}$. Angenommen $\tilde{A} \cap F$ sei nicht irreduzibel; ist C eine von A verschiedene Zusammenhangskomponente von $\tilde{A} \cap \overline{F}$, so ist C ebenfalls eine Kurve (Lang, S. 36 oder van der Waerden [1939], S. 175, oder Weil S. 116). Wir setzen voraus, daß $C_1 = C \cap F$ kein Block ist. Es sei x ein Punkt auf $C_1 \setminus (A \cap F)$. Wir betrachten die Verbindungblöcke $B_\iota = x \cup y_\iota$ für Punkte $y_i \in C_1 \setminus (A \cap F)$ und $y_\iota \neq x$; es gibt unter ihnen unendlich viele Blöcke E_ι, die A treffen und daher in $\tilde{A}$ enthalten sind. Sei z ein Punkt von F, der nicht in $\tilde{A}$ liegt. In der Menge $E_1 \setminus x$ gibt es einen Punkt w, der mit z so verbindbar ist, daß der Block $T = z \cup w$ nicht durch x geht. T trifft die Ebene $\tilde{A}$ außer w in höchstens einem weiteren von x verschiedenen Punkt. Dann meidet aber T unendlich viele der E_ι, was nicht möglich ist.

Satz 8.6. *Es sei F eine quasiprojektive nicht in den dreidimensionalen projektiven Raum einbettbare k-Varietät (k ist ein algebraisch abgeschlossener Körper), auf eine projektiv nicht ergänzbare algebraische affine Ebene realisiert ist. Sind die projektiven Abschließungen von Blöcken dieser Geometrie ebene Kurven, so ist die projektive Abschließung $\overline{F}$ von F in den vierdimensionalen projektiven Raum einbettbar und das Bild der Veroneseschen Fläche V^* des fünfdimensionalen projektiven Raumes unter einer Projektion α, die kein algebraischer Isomorphismus ist und als Zentrum einen außerhalb von V^* befindlichen Punkt hat. $\overline{F}$ ist algebraisch isomorph zur projektiven Ebene $\mathbf{P}_2$, in der aber Punktepaare einer (etwa der uneigentlichen) Geraden G mittels einer Involution aus $PGL_2(k)$ [etwa mittels $z \mapsto (-1)/z$] identifiziert werden. Ist π ein algebraischer Isomorphismus zwischen $\mathbf{P}_2$ und V^*, der die Geraden von P_2 auf die Kegelschnitte von V^* abbildet, so gilt $\overline{F} = \mathbf{P}_2^{\pi\alpha}$ und $F = (\mathbf{P}_2 \setminus G)^{\pi\alpha} = A^{\pi\alpha}$; die Blöcke der affinen Ebene sind die Bilder der affinen Geraden von A unter $\pi\alpha$.*

Beweis. Da F sich nicht in den dreidimensionalen projektiven Raum (über k) einbetten läßt, enthält die auf F dargestellte affine Ebene höchstens zwei nichtparallele Blöcke, deren Abschlüsse projektive Geraden sind (8.4). Sann besitzt die projektive Abschliessung $\overline{F}$ von F eine Fläche von Kegelschnitten (Hodge-Pedoe S. 57-58). Nach Korollar 6.4 und Bertini S. 369 läßt sich dann $\overline{F}$ als Bild einer Projektion α der Veronesechen Fläche V^* vierter Ordnung im fünfdimensionalen projektiven Raum $\mathbf{P}_5$ konstruieren. Ist $\mathbf{P}_5$ der projektive Raum minimaler Dimension, in den $\overline{F}$ einbettbar ist, so ist $\overline{F} = V^*$, und die Geraden von F sind Urbilder der gewöhnlichen Geraden unter einem algebraischen Isomorphismus; dann wäre aber die affine Ebene projektiv ergänzbar.

Sei nun $\overline{F}$ eine Projektion von V^* in den vierdimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}_4$; dann ist ihre Ordnung $\geqslant 3$, denn eine Quadrik ist in den dreidimensionalen Raum einbettbar (Hodge-Pedoe, S. 202).

Sei $\overline{F}$ eine Kubik; L bezeichne einen irreduziblen Kegelschnitt, der die projektive Abschließung eines Blocks ist. Ist H die L enthaltende Hyperebene, so enthält $H \cap \overline{F}$, weil $\overline{F}$ eine Kubik ist, außer L eine projektive Gerade, die nach 8.5 ebenfalls Abschließung eines Blocks ist (van der Waerden [1939], S. 177). Dann enthält aber F unendlich viele Blöcke, deren projektive Abschließungen Geraden sind, und $\overline{F}$ ist eine rationale Regelfläche dritter Ordnung im $\mathbb{P}_4$, also eine Normregelfläche (vgl. auch Burau [1950], S. 31). Nach 8.1 sind dann unter den projektiven Abschließungen von Blöcken hyperebene Schnitte von $\overline{F}$, die Ordnung 3 haben und nicht eben sind.

Also ist die Ordung von $\overline{F}$ gleich 4, und das Projektionszentrum der Projektionsabbildung α muß ein außerhalb von V^* liegender Punkt p des $\mathbb{P}_5$ sein (Bertini, S. 34 und 216). Wäre α ein algebraischer Isomorphismus von V^* auf $\overline{F}$, so trüge eine offene Teilmenge von V^* eine projektiv nicht ergänzbare affine Ebene mit ebener Kurven als Blöcken, was nicht möglich ist.

Ist α kein algebraischer Isomorphismus, so geht durch p eine Sehne S (die $\overline{F}$ in zwei verschiedenen Punkten trifft). Durch S geht dann eine Ebene E des projektiven Raumen $\mathbb{P}_5$, so daß $E \cap S$ ein Kegelschnitt K ist, und alle in E liegenden, mit p inzidenten Geraden sind Sehnen von V^*. Würde durch p eine Sehne Q gehen, die nicht in E läge, so existierte eine Ebene $D \neq E$, die Q enthielte und V^* in einem Kegelschnitt C schnitte. Wegen $C \cap K \neq \emptyset$ gälte $E \cap D = Q$ und $|C \cap K| = 2$, was nicht möglich ist, denn C und K haben genau einen Punkt gemeinsam. Daher liegen alle Sehnen durch p an die Veronesesche Fläche V^* in der Ebene E.

Bei der Projektionsabbildung α werden dann unendlich viele Punkte des Kegelschnitts K zu Paaren identifiziert, aber außerhalb von K ist α eineindeutig.

In der Ebene E induziert α auf dem Kegelschnitt K bekanntlich eine Involution, die der Gruppe $PGL_2(k)$ angehört (vgl. Buekenhout). V^* läßt sich mittels eines algebraischen Isomorphismus π so auf die projektive Ebene $\mathbb{P}_2$ abbilden, daß die Geraden von $\mathbb{P}_2$ den Kegelschnitten von V^* entsprechen und der Kegelschnitt K unter π auf die « uneigentliche » Gerade G von $\mathbb{P}_2$ abgebildet wird. Somit gilt $\overline{F} = (\mathbb{P}_2^{\pi^{-1}})^\alpha$, und der Satz gilt.

SATZ 8.7. *Es sei F eine quasiprojektive nicht in den zweidimensionalen, wohl aber in den dreidimensionalen projektiven Raum einbettbare k-Varietät, auf der eine projektiv nich ergänzbare algebraische affine Ebene realisiert ist. Sind die projektiven Abschließungen von Blöcken dieser Geometrie ebene Kurven, so ist die projektive Abschließung $\overline{F}$ von F entweder eine reguläre Quadrik oder ein quadratischer Kegel über k oder die Chasles-Cayleysche Regelfläche (vgl. etwa Bertini, S. 347) über k.*

Ist $\overline{F}$ ein Kegel, so entsteht die Punktmenge F der Geometrie aus $\overline{F}$ durch die Herausnahme einer Erzeugenden L, und die Geraden der affinen Ebene werden zusammen mit den Spuren aller Mantellinien von $\overline{F}$ in F von genau den Schnitten solcher Ebenen mit F gebildet, die durch einen (und denselben) auf L liegenden nichtsingulären Punkt von $\overline{F}$ gehen.

Ist $\overline{F}$ eine reguläre Quadrik, so entsteht F aus $\overline{F}$ durch Entfernung zweier verschiedener einander treffenden Erzeugenden L_1 und L_2, und die Geraden der affinen Ebene sind genau alte Schnitte von F mit solchen Ebenen, die durch $L_1 \cap L_2$ gehen.

Ist $\overline{F}$ die Chasles-Cayleysche Regelfläche, so entsteht F aus $\overline{F}$ durch Entfernung der minimalen Leitgeraden L sowie einer von ihr verschiedenen Erzeugenden G; die Geraden von F sind dann entweder die Spuren aller Schnitte von $\overline{F}$ in F mit solchen Ebenen die durch G gehen, oder die aller Schnitte von $\overline{F}$ in F mit Ebenen, die L enthalten.

BEWEIS. Da die projektive Abschließung $\overline{F}$ von F nicht zur projektiven Ebene $\mathbb{P}_2$ projektiv isomorph ist, besitzt die auf F dargestellte affine Ebene keine drei Blöcke, deren Abschließungen projektive Geraden wären und die zu verschiedenen Parallelscharen gehörten. Dann enthält aber $\overline{F}$ eine Fläche von Kegelschnitten (Hodge-Pedoe S. 57-58), und $\overline{F}$ ist eine in den dreidimensionalen projektiven Raum einbettbare Projektion der Veroneseschen Fläche V^* des fünfdimensionalen Raumes. Nach dem Satz von Darboux (Bertini, S. 370) ist dann $\overline{F}$ entweder eine Regelfläche höchsten dritten Grades oder die Steinersche Fläche.

Sei nun $\overline{F}$ eine Regelfläche dritten Grades. Die ebenen Schnitte von $\overline{F}$ bilden unter der ebenen Minimalabbildung π (Bertini S. 346-348) ein System $\mathfrak{S}$ von Kegelschnitten, die durch einen Punkt t gehen, der das Bild einer Leitgeraden von $\overline{F}$ ist. Nach § 6 wissen wir, daß die Fläche F aus $\overline{F}$ dadurch entsteht, daß man aus $\overline{F}$ das vollständige Urbild $\pi^{-1}(G)$ einer mit t inzidenten Geraden G der projektiven Ebene $\mathbb{P}_2$ entfernt. F ist dann mittels der Restriktion $\hat{\pi}$ von π auf $\overline{F} \setminus \pi^{-1}(G)$

algebraisch isomorph auf die Varietät $\mathbb{P}_2 \setminus G$ abbildbar. Daher ist $\bar{F}$ die Regelfläche von Chasles-Cayley (Bertini, S. 346-347); das vollständige Urbild $\pi^{-1}(G)$ besteht aus der (einzigen) Leitgeraden L von $\bar{F}$ sowie einer Erzeugenden S, und es gilt $\pi(L) = t$ und $\pi(S) = G$. Faßt man G als uneigentliche Gerade der affinen Ebene $A = \mathbb{P}_2 \setminus G$ auf, so werden die Blöcke entweder von den Urbildern der affinen Geraden von A oder von den Urbildern der Kurven eines zu 5.1 (2) affin äquivalenten Kegelschnittsystems bezüglich π gebildet. Die Urbilder von solchen affinen Geraden bezüglich π, die nicht durch t gehen, liegen in ebenen Schnitten, die als weitere Zusammenhangskomponente die Erzeugende S haben; daher bestehen sie aus irreduziblen Kegelschnitten.

Die Urbilder eines Kegelschnittsystems bezüglich π, das in t einen dreifachen Punkt und G als Tangente besitzt, bestehen aus Schnitten von $\bar{F}$ mit solchen Ebenen, die durch die Gerade $L = \pi^{-1}(t)$ gehen. Nun wollen wir den Fall untersuchen, daß $\bar{F}$ die Steinersche Fläche ist. Ist π ein algebraischer Isomorphismus der Veroneseschen Fläche V^* des fünfdimensionalen Raumes auf die projektive Ebene $\mathbb{P}_2$ und G die « uneigentliche » Gerade von $\mathbb{P}_2$, so vermittelt die Restriktion der Abbildung $\alpha\pi^{-1}$ auf $\mathbb{P}_2 \setminus G$ einen algebraischen Isomorphismus von $\mathbb{P}_2 \setminus G$ auf F (Satz 6.1); dabei bezeichnet α die Projchtionsabbildung. Da $\pi^{-1}G$ ein Kegelschnitt von V^* ist, dürfte die Projektionsabbildung α höchstens für Punkte von $\pi^{-1}G$ nicht umkehrbar eindeutig sein; aber unter α werden bekanntlich drei verschiedene Kegelschnitte auf Doppelgeraden der Steinerschen Fläche abgebildet (Bertini, S. 399), und dies liefert einen Widerspruch.

Also ist $\bar{F}$ entweder eine reguläre Quadrik oder ein quadratischer Kegel des dreidimensionalen projektiven Raumes. Da F und die affine Ebene $k \times k$ algebraisch isomorph sind, entsteht F aus $\bar{F}$ nach Satz 6.1 dadurch, daß man aus $\bar{F}$ entweder ewei einander treffende oder nur eine Erzeugende entfernt, je nachdem ob $\bar{F}$ singularitätenfrei oder ein Kegel ist. Die übrigen Behauptungen folgen nun unmittelbar nach Bertini S. 343-44.

Satz 8.8. *Die projektive Abschließung $\bar{F}$ der eine projektiv nicht ergänzbare algebraische affine Ebene tragenden k-Varietät ist das Bild einer Veroneseschen Fläche V der Ordnung n^2 unter einer solchen Projektion σ, die zwar selbst kein Isomorphismus, aber die außerhalb einer nichtsingulären Kurve K der Ordnung n auf V biregulär ist. Ist π eine bireguläre Abbildung von V auf die projektive Ebene $\mathbb{P}_2$, bei der den Kurven n-ter Ordnung die projektiven Geraden entsprechen, und K^π die*

« uneigentliche » Gerade von $\mathbb{P}_2$ *ist so gilt* $F = \overline{F} \setminus (K^{\sigma})$, *und die Blöcke der Geometrie sind Bilder der Kurven eines solchen Kegelschnittsystems unter der Abbildung* $\sigma\pi^{-1}$, *welches dem im Satz* 5.1 (2) *beschriebenen affin äquivalent ist.*

BEWEIS. Nach 6.4 wissen wir, daß $\overline{F}$ eine Projektion einer Veroneseschen Fläche ist. Wegen 6.1 muß die Projektionsabbildung außerhalb einer Kurve n-ter Ordnung biregulär sein. Der letzte Teil der Behauptung folgt aus 5.1.

9. Projektive Klassifikation algebraischer Laguerreebenen.

Unter die rationalen Normregelflächen zählen wir auch die Kegel.

HILFSSATZ 9.1. *Keine dual affine Unterebene einer auf einer (quasiprojektiven) Varität* F *dargestellten Laguerreebene läßt sich zu einer algebraischen projektiven Ebene ergänzen.*

BEWEIS. Sei p ein Punkt von F und F_p die dual affine Unterebene der auf F dargestellten Laguerregeometrie, die durch Entfernung des durch p bestimmten Klasse $\mathfrak{L}$ paralleler Punkte entsteht; ihre Blöcke sind die durch p gehenden Zykel ohne den Punkt p. Dann gehen aber die projektiven Abschließungen von mehreren Parallelscharen alle durch einen Punkt (nämlich p) und dies widerspricht 7.2.

SATZ 9.2. *Die projektive Abschließung* $\overline{F}$ *der eine algebraische Laguerreebene tragenden (quasiprojektiven) k-Varietät sei eine Regelfläche.*

Ist $\overline{F}$ *eine im r-dimensionalen projektiven Raum* $\mathbb{P}_r$ *mit* $r \geqslant 3$ *enthaltene Normregelfläche (d.h., keine Projektion einer Regelfläche gleicher Ordnung, die einem höherdimensionalen projektiven Raum, als* $\mathbb{P}_r$ *es ist, angehörte), so ist* $\overline{F}$ *eine rationale Regelfläche der Klasse* $\frac{1}{2}(r-3)$. *Sie erlaubt eine ebene birationale Abbildung* π, *die sowohl die Minimalleitkurve* M *als auch eine Erzeugende* H *auf einen Punkt* t *und einen nicht auf* M *liegenden Punkt auf eine mit* t *inzidente Gerade* G *abbildet, die als uneigentliche Gerade der projektiven Ebene* $\mathbb{P}_2$ *angesehen werden kann.*

Die Fläche F *entsteht aus* $\overline{F}$ *dadurch, daß man aus* $\overline{F}$ *die Minimalleitkurve* M *entfernt. Die Klassen paralleler Punkte bestehen aus den algebraischen Punkten der Spuren der Erzeugenden von* $\overline{F}$ *in* F, *und die Zykel sind die in* F *liegenden Urbilder der isotropen Kreise der eigentlich isotropen Ebene* $A = \mathbb{P}_2 \setminus G$ *(vgl. Benz-Mäurer* § 5) *bezüglich* π, *d.h., die Urbilder eines solchen Kurvensystems bezüglich* π, *das projektiv äqui-*

valent zu dem durch die Gleichungen

$$\{x + ay^2 + by + c = 0;\ a, b, c \in k\} \quad \textit{beschriebenen ausfällt.}$$

Ist $\overline{F}$ keine Normregelfläche, so ist $\overline{F}$ das Bild einer Normregelfläche $\hat{\overline{F}}$ der Klasse $\frac{1}{2}(r-3)$ unter einer Projektion σ mit den folgenden Eigenschaften:

Ist M die Minimalleitkurve, so ist die Restriktion $\hat{\sigma}$ von σ auf $\hat{\overline{F}}\setminus M$ eine bireguläre Abbildung auf F. Ist π eine ebene birationale Abbildung von $\hat{\overline{F}}$ mit den eingangs geschilderten Eigenschaften, so bestehen die Klassen paralleler Punkte von F aus algebraischen Punkten der in $F = \hat{\sigma}(\hat{\overline{F}}\setminus M)$ liegenden Urbilder von solchen projektiven Geraden bezüglich $\pi\hat{\sigma}^{-1}$, die mit $t = M^\pi$ inzidieren. Die Blöcke von F sind genau die in F befindlichen Urbilder der isotropen Kreise des projektiven Abschlußes der eigentlich isotropen Ebene bezüglich der birationalen Abbildung $\pi\hat{\sigma}^{-1}$.

Beweis. Nimmt man mit einem (algebraischen) Punkt von F zugleich die Klasse $\mathfrak{C}$ paralleler Punkte heraus, der p angehört, so ist $F' = F\setminus\mathfrak{C}$ wiederum eine quasiprojektive k-Varietät (vgl. 6.3), auf der die dual affine Unterebene F_p der auf F realisierten miquelschen Laguerreebene (3.3) vorliegt; F_p ist nicht projektiv ergänzbar (9.1). Wir betrachten zunächst den Fall, daß die projektive Abschließung $\overline{F} = \overline{F'}$ eine Normregelfläche ist (Bertini, Kap. 14). Nach 6.1 und 8.1 wissen wir, daß sich $\overline{F}$ unter einer birationalen Abbildung π so auf die projektive Ebene $\mathbb{P}_2$ abbilden läßt, daß die Restriktion von π auf die affine Ebene $k \times k = \mathbb{P}_2\setminus G$, wobei G die « uneigentliche » Gerade sei, ein algebraischer Isomorphismus ist. Auf G wird unter π eine Erzeugende H und eine Minimalleitlinie M abgebildet. Es gilt $\overline{F}\setminus F' = M \cup H$.

Angenommen, die Klasse von $\overline{F}$ sei $\frac{1}{2}(r-1)$; dann sind M^π und H^π zwei verschiedene Punkte auf G. Ist M der projektive Abschluß von $\mathfrak{C}$, so ist der projektive Abschluß jeder Klasse paralleler Punkte eine Minimalleitlinie (Bertini, S. 336), und die zu den Klassen paralleler Punkte bei der projektiven Abschließung hinzukommenden Punkte füllen ganz H aus (vgl. 3.3, 6.2). Ist H der projektive Abschluß von $\mathfrak{C}$, so ist der projektive Abschluß jeder Klasse paralleler Punkte eine Erzeugende und die zu den Klassen paralleler Punkte bei der projektiven Abschließung hinzukommenden Punkte füllen ganz M aus. Da der Punkt $M \cap H$ weder zu F noch zum projektiven Abschluß einer von $\mathfrak{C}$ verschiedenen Klasse paralleler Punkte gehört und p^π entweder gleich M^π oder H^π ausfällt, gehen die projektiven Abschließungen der ebenen Bilder von Blöcken der dual affinen Ebene F_p unter π alle entweder durch M^π oder H^π.

Interpretiert man die Klassen paarweise paralleler Punkte als eine Schar paralleler Geraden, so erhält man eine algebraische affine Ebene; daher gehen auch die Bilder der projektiven Abschließungen der Klassen paralleler Punkte unter π alle durch p^π $\big(5.1\,(2)\big)$. Da auch alle Punkte von $\mathfrak{C}$ unter π auf p^π abgebildet werden und $\mathfrak{C}$ zu der Kurve ϑ derjenigen Punkte fremd ist, die bei der Abschließung aller Klassen paralleler Punkte zu F hinzukommt, wird ϑ unter π auf den von p^π verschiedenen Punkt der Menge $\{M^\pi, H^\pi\}$ abgebildet. Dann müssen aber die projektiven Abschließungen der von $\mathfrak{C}$ verschiedenen Klassen paarweise paralleler Punkte sowohl durch M^π als auch durch H^π gehen, was Satz 5.1 (2) widerspricht.

Wäre $\frac{1}{2}(r-2)$ die Klasse von $\overline{F}$, so würden wir $p \in H$ nicht auf der (eindeutig bestimmten) Minimalleitlinie M wählen. M^π wäre dann ein Punkt t auf der uneigentlichen Gerade G, für die $H^\pi = G$ gälte, weil π auf $\overline{F}$ keine Fundamentalpunkte hätte. Die projektiven Abschließungen der Klassen paralleler Punkte sind Erzeugende von $\overline{F}$, die bei der Abschließung dieser Klassen zu F hinzukommenden Punkte füllen ganz M aus. Die projektiven Abschließungen der ebenen Bilder von Blöcken der dual affinen Ebene F_p unter π gehen alle durch $p^\pi \neq t$. Sieht man die Klassen paarweise paralleler Punkte als eine Schar paralleler Geraden an, so erhält man eine algebraische affine Ebene. Wegen des Satzes 5.1 (2) gehen dann aber auch die Bilder der projektiven Abschließungen der Klassen paralleler Punkte durch p^π. Da die Abschließung jeder Klasse paralleler Punkte auch mit M einen Punkt gemeinsam hat, geht ihr Bild unter π nicht nur durch p^π, sondern auch durch t, was 5.1 (2) widerspricht.

Also hat $\overline{F}$ die Klasse $\frac{1}{2}(r-3)$ mit $r \geqslant 3$; dann gilt $M^\pi = H^\pi$, und diese Bilder sind Punkte. Die projektiven Abschließungen von Klassen paralleler Punkte sind Erzeugende von $\overline{F}$, und die zu F bei der projektiven Abschließung hinzukommenden Punkte füllen ganz M aus. Der Punkt $p \in F$ kann als Fundamentalpunkt der Abbildung π genommen und $p^\pi = G$ als uneigentliche Gerade von $\mathbb{P}_2$ angesehen werden. In der affinen Ebene $A = \mathbb{P}_2 \setminus G$ bilden die Bilder der Spuren von Blöcken der miquelschen Laguerreebene unter π ein System $\mathfrak{S}$ von Kurven, das zur eigentlichen isotropen Ebene (vgl. Benz-Mäurer § 5, Grünwald) unter einem algebraischen Morphismus isomorph ist. Die projektiven Abschließungen der Kurven aus $\mathfrak{S}$ bilden ein Kegelschnittsystem, so daß drei verschiedene Punkte von A, von denen keine zwei auf einer projektiven Geraden durch $M^\pi = H^\pi$ liegen (dann wären sie nämlich parallel), genau einem Kegelschnitt aus $\mathfrak{S}$ angehören. Zu $\mathfrak{S}$ gehören dann aber auch die nicht mit M^π inzidenten projektiven Geraden (die zusammen mit G jeweils einen zerfallenden Kegelschnitt liefern), denn durch drei verschiedene Punkte einer solchen Geraden kann kein irreduzibler Kegelschnitt gehen. Dann ist aber $\mathfrak{S}$ sogar projektiv äquivalent zum System der Kreise der eigentlich isotropen Ebene, und die Behauptung folgt für Normregelflächen.

Ist $\overline{F}$ keine Normregelfläche, so ist sie das Bild einer Normregelfläche $\hat{\overline{F}}$ unter einer Projektion σ (Bertini, S. 333). Nimmt man aus F eine Klasse $\mathfrak{C}$ paralleler Punkte heraus, so ist $F \setminus \mathfrak{C}$ algebraisch isomorph zur eigentlichen isotropen Ebene A, weil auf F die miquelsche Laguerreebene realisiert ist. Unter jedem solchen algebraischen Isomorphismus γ werden die Spuren von Blöcken der Laguerreebene auf ein System $\mathfrak{S}$ von Kurven abgebildet, das algebraisch isomorph zum System $\mathfrak{T}$ der isotropen Kreise der eigentlich isotropen Ebene ist. Da $\mathfrak{S}$ wie $\mathfrak{T}$ aus Kegelschnitten bestehen und durch keine drei verschiedene kollineare Punkte von A ein irreduzibler Kegelschnitt geht, ist $\mathfrak{S}$ zu $\mathfrak{T}$ sogar projektiv äquivalent. Es sei $\hat{\gamma}$ eine birationale Abbildung von $\overline{F}$ auf den projektiven Abschluß $\overline{A}$ von A, die γ fortsetzt. Da auch $\hat{\overline{F}}$ birational auf den projektiven Abschluß $\overline{A}$ beziehbar ist, es eine ebene Abbildung von $\hat{\overline{F}}$ auf $\overline{A}$ gibt, die weder mehr Basiskurven noch Basispunkte als $\hat{\gamma}$ besitzt (Bertini, Kap. 15.4), und durch die Wahl von ebenen Abbildungen von F es stets so eingerichtet werden kann, daß eine gegebene Erzeugende von $\overline{F}$ keine Fundamentalkurve wird, liegen die Punkte von $\hat{\overline{F}}$, bei denen die Eineindeutigkeit von σ verletzt sein kann, auf M. Daher läßt sich der projektive Abschluß $\overline{A}$ von A unter einer birationalen Abbildung β so auf $\hat{\overline{F}}$ abbilden, daß $\beta = \sigma^{-1}\hat{\gamma}^{-1}$ gilt.

Satz 9.3. *Die projektive Abschließung $\overline{F}$ der eine Laguerreebene tragenden (quasiprojektiven) k-Varietät sei singularitätenfrei. Dann ist $\overline{F}$ algebraisch isomorph zu einer Regelfläche der Klasse $\frac{1}{2}(r-3)$ mit ungeradem $r \geqslant 5$, und der Satz 9.2 klärt die Verhältnisse.*

Beweis. Nach Šafarevič [1968], S. 109 ist $\overline{F}$ entweder eine Regelfläche oder algebraisch isomorph zur projektiven Ebene. Ist F_p die dual affine Unterebene der auf F realisierten Laguerreebene, die durch die Herausnahme der durch p bestimmten Klasse $\mathfrak{C}$ paralleler Punkte entsteht, so ist F_p nach 9.1 nicht projektiv ergänzbar. Interpretiert man die von $\mathfrak{C}$ verschiedenen Klassen paralleler Punkte als Geraden einer Parallelenschar, so erhält man aus F_p eine affine Ebene, die sich biregulär so auf die affine Ebene $A = k \times k$ abbilden läßt, daß die Bilder der Blöcke in A ein Kegelschnittsystem bilden, welches zu dem im Satz 5.1 (2) beschriebenen affin äquivalent ist. Wäre $\overline{F}$ isomorph zur projektiven Ebene, so gingen dann aber die projektiven Abschließungen der von $\mathfrak{C}$ verschiedenen Klassen paralleler Punkte alle durch p, was ihrer Disjunktheit in F widerspräche.

SATZ 9.4. *Die projektive Abschließung $\overline{F}$ der eine Laguerreebene tragenden (quasiprojektiven) Varietät sei normal (vgl. Bertini, S. 217) im n-dimensionalen projektiven Raum $\mathbf{P}_n$ über dem Körper k (mit $n \geqslant 2$). Dann ist F die rationale Normregelfläche der Ordnung $n-1$ und der Klasse $\frac{1}{2}(n-3)$ mit ungeradem $n \geqslant 3$.*

BEWEIS. Da $\overline{F}$ eine Fläche ist (Satz. 4.1), hat $\overline{F}$ die Ordnung $n-1$ (Bertini, S. 217). Wegen der Irreduzibilität von $\overline{F}$ und der Nichtsingularität einer Veroneseschen Fläche folgt alles übrige aus dem Satz von del Pezzo (Bertini, S. 375) und 9.3.

SATZ 9.5. *Sind die projektiven Abschließungen von Zykeln einer auf der (quasiprojektiven) Varietät F realisierten Laguerregeometrie ebene algebraische Kurven, so ist die projektive Abschließung $\overline{F}$ von F ein quadratischer Kegel. F entsteht aus $\overline{F}$ durch die Herausnahme des singulären Punktes s von $\overline{F}$. Die Zykel der Laguerreebene sind genau die nicht durch die Spitze s gehenden ebenen Schnitte von F; die Klassen paralleler Punkte werden genau von den Spuren der Mantellinien von $\overline{F}$ in F gebildet.*

BEWEIS. Ist F_p die dual affine Unterebene der Laguerregeometrie, die durch die Entfernung der durch p bestimmten Klasse paralleler Punkte entsteht, so ist F_p projektiv nicht ergänzbar (9.1). Nach den Sätzen 8.6. 8.7 und 9.2 ist dann aber $\overline{F}$ ein quadratischer Kegel des dreidimensionalen projektiven Raumes, und die Behauptung folgt.

SATZ 9.6. *Die projektive Abschließung $\overline{F}$ der eine Laguerreebene tragenden Varietät F sei einbettbar in den dreidimensionalen projektiven Raum $\mathbf{P}_3$. Dann ist $\overline{F}$ ein quadratischer Kegel, und die Verhältnisse sind bis auf projektive Äquivalenz durch den Satz 9.5 geklärt.*

BEWEIS. Ist F_p die dual affine Unterebene, die durch die Herausnahme der durch p bestimmten Klasse $\mathfrak{C}$ paralleler Punkte entsteht, so ist sie nicht projektiv ergänzbar (9.1). Wegen des Satzes 5.1 (2) erlaubt dann $\bar{F}$ eine ebene birationale Abbildung π, bei der dem projektiven Abschluß $\bar{\mathfrak{C}}$ von $\mathfrak{C}$ (es gilt $|\bar{\mathfrak{C}} \setminus \mathfrak{C}| = 1$) der Punkt p^π von $\mathbb{P}_2$ zugeordnet wird. Es sei $\mathfrak{J} = \bar{F} \setminus F$. Besteht $\mathfrak{J}$ nur aus einem Punkt (der dann jede Klasse paralleler Punkte abschließt), so ist $\bar{F}$ algebraisch isomorph zu einem quadratischen Kegel, denn die Spuren von Zykeln bilden in $F_p^\pi \simeq k \times k$ isotrope Kreise (vgl. Benz-Mäurer § 5, Grünwald), und der Kegel kann nach Herausnahme einer Mantellinie, die algebraisch isomorph zum projektiven Abschluß von $\mathfrak{C}$ ist, mittels eines algebraischen Isomorphismus auf F_p abgebildet werden. Da jedoch eine zum Kegel algebraisch isomorphe Fläche zu ihm schon projektiv äquivalent ist, wäre der Satz bewiesen. Es gelte daher $|\mathfrak{J}| \geqslant 2$.

Da die Kollineationsgruppe Γ einer miquelschen Laguerreebene auf den Klassen paralleler Punkte eine scharf dreifach transitive Permutationsgruppe Δ induziert, ist dann $\mathfrak{J}$ eine irreduzible algebraische Kurve. Auf $\mathfrak{J}$ wirkt Δ als eine scharf dreifach transitive Gruppe algebraischer Automorphismen, und daher ist $\mathfrak{J}$ eine rationale singularitätenfreie Kurve (vgl. 2.2 und 2.3). Jede Klasse paralleler Punkte trifft $\mathfrak{J}$ in genau einem Punkt, und verschiedene Klassen paralleler Punkte haben mit $\mathfrak{J}$ verschiedene Punkte gemeinsam. Ist P der projektive Abschluß einer Klasse paralleler Punkte, so ist P ebenfalls eine singularitätenfreie rationale Kurve. Wir wollen zeigen, daß $\bar{F}$ algebraisch isomorph zu $P \times \mathfrak{J}$ sein muß. Es sei $P \cap \mathfrak{J} = t$. Ist nun x ein beliebiger Punkt von $\bar{F}$, so kann man ihm auf kanonische Weise zwei « Koordinaten » zuordnen: Die erste Koordinate sei der Schnittpunkt der durch x bestimmten Abschließung P_x der x enthaltenden Parallelklasse mit $\mathfrak{J}$, die zweite derjenige Punkt x^δ auf P, der sich als Bild von x unter einer fest gewählten zu $SO_2(k)$ isomorphen Untergruppe von Γ ergibt. Da $P \times \mathfrak{J}$ algebraisch isomorph zur regulären Quadrik $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ ist, läßt sich dann auch $\bar{F}$ unter einem algebraischen Isomorphismus φ auf eine reguläre Quadrik $Q \simeq \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ abbilden. Die in Q dichte Untervarietät F^φ müßte dann aber eine Laguerregeometrie tragen können, was 9.2. widerspricht.

LITERATUR

Abhyankar S. S., *Resolution of singularities of embedded algebraic surfaces*, Academic Press, New York and London (1966).

Arf C., *Untersuchungen über quadratische Formen in Körpern der Charakteristik* 2, Teil 1, J. reine angew. Math., **183** (1941), pp. 148-167.

BENZ W., *Über Möbius-Ebenen*, Jahresber. DMV, **63** (1960), pp. 1-27.
BENZ W., *Vorlesungen über Geometrie der Algebren*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1973).
BENZ W. - MÄURER H., *Grundlagen der Laguerregeometrie*, Jahresber. DMV, **67** (1964), pp. 14-42.
BERTINI E., *Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume*, Seidel, Wien (1924).
BOREL A., *Linear Algebraic Groups*, Benjamin, New York and Amsterdam (1969).
BREITSPRECHER S., *Projektive Ebenen, die Mannigfaltigkeiten sind*, Math. Z., **121** (1971), pp. 157-174.
BREITSPRECHER S., *Zur Topologie zweidimensionaler projektiver Ebenen*, Geometriae Dedicata, **1** (1972), pp. 22-32.
BUEKENHOUT F., *Plans projectivs à ovaoides pascaliens*, Archiv der Math., **17** (1966), pp. 89-93.
BURAU W., *Grundmannigfaltigkeiten der projektiven Geometrie*, Memoria Publicada en Collactanea Mathematica, vol. III, Barcelona (1950).
DEMBOWSKI P., *Finite Geometries*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York (1968).
CHEVALLEY C., *Introduction to the Theory of Algebraic Functions of one Variable*, Amer. Math. Soc., New York (1951).
FREUDENTHAL H. - STRAMBACH K., *Schließungssätze und Projektivitäten in der Möbius- und Laguerregeometrie*, Math. Z., **143** (1975), pp. 213-234.
FULTON W., *Algebraic Curves*, Benjamin, New York (1969).
GROH, H.-J., *Topologische Laguerreebenen I*, Abhandl. Math. Sem. Hamburg, **32** (1968), pp. 216-231.
GROH H.-J., *Topologische Laguerreebenen II*, Abhandl. Math. Sem. Hamburg, **34** (1970), pp. 11-22.
GROH H.-J., *Möbius Planes with Locally Euclidian Circles are Flat*, Math. Annalen, **201** (1973), pp. 149-156.
GRÜNWALD J., *Über duale Zahlen und ihre Anwendung in der Geometrie*, Monatshefte Math. Phys., **17** (1906), pp. 81-136.
HODGE W. V. D. - PEDOE D., *Methods of Algebraic Geometry II*, University Press, Cambridge (1952).
KUIPER N. H., *A real analytic non-desarguesian plane*, Nieuw Archief voor Wiskunde, **5** (1957), pp. 19-24.
LANG S., *Introduction to Algebraic Geometry*, Interscience Publishers, New York (1958).
LEFSCHETZ S., *Algebraic Geometry*, Princeton University Press, Princeton (1953).
MUMFORD D., *Introduction to Algebraic Geometry*, Harvard University Press.
PICKERT G., *Projektive Ebenen*, Springer-Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg (1955).
ROSENLICHT M., *Automorphisms of Function Fields*, Trans. Am. Math. Soc., (1955), pp. 1-11.

ŠAFAREVIČ J. R., *Lectures on Minimal Models and Birational Transformations of Two Dimensional Schemes*, Tata Institute, Bombay (1966).

ŠAFAREVIČ J. R., *Algebraische Flächen*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig (1968).

ŠAFAREVIČ J. R., *Osnovy algebrai$_n$eckoj geometriji* (Russisch), Moskau (1972).

SALZMANN H., *Topological planes*, Advances Math., **2** (1967), pp. 1-60.

SALZMANN H., *Kollineationsgruppen kompakter, vierdimensionaler Ebenen*, Math. Z., **117** (1970), pp. 112-124.

SALZMANN H., *Kollineationsgruppen kompakter, vierdimensionaler Ebenen II*, Math. Z., **121** (1971), pp. 104-110.

SCHLEIERMACHER A., *Reguläre Normalteiler in der Gruppe der Projektivitäten bei projektiven und affinen Ebenen*, Math. Z., 114 (1970), p. 313-320.

SEBRE B., *Sulle ovali nei piani lineari finiti*, Rend. Accad. Naz. Lincei, **17** (1954), pp. 141-142.

SEGRE B., *Lectures on modern geometry*, Edizioni Cremonese, Roma (1961).

STRAMBACH K., *Reichhaltige Untergruppen geometrischer Gruppen*, Math. Z., **93** (1966), pp. 243-264.

STRAMBACH K., *Über die Zerlegungsgleichheit von Polygonen bezüglich Untergruppen nichteuklidischer Bewegungsgruppen*, Math. Z., **93** (1966), pp. 276-288.

STRAMBACH K., *Sphärische Kreisebenen*, Math. Z., **113** (1970), pp. 266-292.

STRAMBACH K., *Sphärische Kreisebenen mit einfacher Automorphismengruppe*, Geometriae Dedicata, **1** (1973), pp. 182-220.

VAN DER WAERDEN B. L., *Einführung in die Algebraische Geometrie*, Springer-Verlag, Berlin (1939).

WEIL A., *Foundations of Algebraic Geometry*, Am. Math. Soc., Providence (1962).

WEIR A. J., *Notes on Algebraic Geometry*, Queen Mary College, London (1962).

ZARISKI O., *Foundations of a general theory of birational correspondences*, Trans. Am. Math. Soc., **53** (1943), pp. 490-542.

ZARISKI O., *The concept of a simple point of an abstract algebraic variety*, Trans. Am. Math. Soc., **62** (1947), pp. 1-52.

ZARISKI O., *On Introduction to the Theory of Algebraic Surfaces*, Lecture Notes in Math., vol. **83**, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York (1969).

ZARISKI O. - SAMUEL P., *Commutative Algebra II*, D. van Nostrand Company, New York (1960).

Manoscritto pervenuto in redazione l'8 agosto 1974.