Séminaire BOURBAKI Novembre 2003
56e année, 2003-2004, no 924, p. 1 à 14

LA CONJECTURE DE GREEN GÉNÉRIQUE
[d'après C. Voisin]

par **Arnaud BEAUVILLE**

1. ÉNONCÉ DE LA CONJECTURE

La conjecture de Green est une vaste généralisation de deux résultats classiques de la théorie des courbes algébriques. Soit C une courbe complexe[(1)] projective et lisse (connexe), de genre $g \geqslant 2$. Soit K_C le fibré canonique (= fibré cotangent) de C. On associe à C son *anneau canonique*

$$R := \bigoplus_{n \geqslant 0} H^0(C, K_C^n).$$

Notons S l'algèbre symétrique $\mathrm{S}^\bullet H^0(C, K_C)$; c'est un anneau de polynômes en g indéterminées.

Théorème 1 (M. Noether [N]). — *L'homomorphisme naturel $S \to R$ est surjectif, sauf si C est hyperelliptique.*

Supposons désormais que C n'est pas hyperelliptique. À l'homomorphisme $S \to R$ correspond un plongement de C dans l'espace projectif $\mathbb{P}^{g-1} := \mathbb{P}(H^0(C, K_C)^*)$, dit *plongement canonique*, qui joue un rôle fondamental dans l'étude de la géométrie de C. L'étape suivante est d'essayer de comprendre les équations de C dans $\mathbb{P}^{g-1}$, c'est-à-dire les éléments de S qui s'annulent sur l'image de C ; ils forment un idéal gradué I_C de S, qui est le noyau de l'homomorphisme $S \to R$.

Théorème 2 (Petri [P]). — *L'idéal gradué I_C est engendré par ses éléments de degré 2, sauf si C est trigonale[(2)] ou isomorphe à une courbe plane de degré 5.*

---

(1) Les théorèmes 1 et 2 ci-dessous sont vrais en toute caractéristique [S-D]. Ce n'est pas le cas de la conjecture de Green d'après [S1].
(2) La courbe C est dite trigonale si elle admet un morphisme $C \to \mathbb{P}^1$ de degré 3.

Chacun de ces deux théorèmes décrit la structure du S-module R en termes de l'existence de certains systèmes linéaires sur la courbe C. Par exemple, le théorème de Petri se traduit (sauf pour les exceptions mentionnées dans l'énoncé) par une suite exacte

$$S(-2)^{b_1} \longrightarrow S \longrightarrow R \longrightarrow 0,$$

où l'on note comme d'habitude $S(-p)$ le S-module S muni de la graduation décalée de p crans vers la droite : $S(-p)_i = S_{i-p}$.

Cette présentation est un (petit) bout de la *résolution minimale* $P_\bullet$ du S-module R, dont on sait depuis Hilbert qu'elle est de la forme

$$0 \longrightarrow P_{g-2} \longrightarrow P_{g-3} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow R \longrightarrow 0,$$

où chaque P_i est une somme directe de modules $S(-p)$, et où les différentielles sont données par des matrices à coefficients homogènes de degré $\geqslant 1$. La résolution minimale est unique à isomorphisme (non unique) près[(3)].

La dualité de Serre entraîne que le complexe $\mathrm{Hom}_S(P_\bullet, S(-g-1))$, décalé de $(g-2)$ crans vers la gauche, définit encore une résolution minimale de R, donc est isomorphe à $P_\bullet$. Supposons C non hyperelliptique ; on a alors $P_0 = S$ (Th. 1), donc $P_{g-2} = S(-g-1)$, et on s'aperçoit qu'il reste très peu de degrés possibles pour les termes P_i intermédiaires. De manière précise, un argument élémentaire montre qu'il existe un entier $c \geqslant 1$ tel que $P_\bullet$ soit de la forme :

$$\begin{aligned} 0 \to S(-g-1) \to S(-g+1)^{b_1} \to S(-g+2)^{b_2} \to \ \cdots \ \to S(-g+c-1)^{b_{c-1}} \to \\ S(-g+c+1)^{b'_c} \oplus S(-g+c)^{b''_c} \to \quad \cdots \quad \to S(-c-2)^{b'_c} \oplus S(-c-1)^{b''_c} \to \\ S(-c)^{b_{c-1}} \to \quad \cdots \quad \to S(-3)^{b_2} \to S(-2)^{b_1} \to S, \end{aligned}$$

où les entiers b_i, b'_j, b''_k sont strictement positifs.

La structure de la résolution minimale est donc essentiellement[(4)] déterminée par l'entier c.

L'autre volet des théorèmes 1 et 2 porte sur la présence de systèmes linéaires spéciaux sur C. Si L est un fibré en droites sur C, de degré d, on note $h^i(L)$ la dimension de $H^i(C, L)$ $(i = 0, 1)$, et l'on pose $\mathrm{Cliff}(L) := g + 1 - (h^0(L) + h^1(L)) = d - 2h^0(L) + 2$; cet invariant vérifie la relation agréable $\mathrm{Cliff}(L) = \mathrm{Cliff}(K_C \otimes L^{-1})$. On définit alors l'*indice de Clifford* $\mathrm{Cliff}(C)$ de C comme le minimum des entiers $\mathrm{Cliff}(L)$ pour tous les fibrés en droites L sur C avec $h^0(L) \geqslant 2$ et $0 \leqslant d \leqslant g-1$. Un théorème classique de Clifford affirme que cet indice est toujours positif, et qu'il est nul si et seulement si C est hyperelliptique ; de plus les courbes d'indice 1 sont exactement

(3) Dans le langage des faisceaux, il revient au même de considérer une résolution $\mathcal{P}_\bullet$ du $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}$-module $\mathcal{O}_C$, où chaque $\mathcal{P}_i$ est une somme directe de faisceaux $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(-p)$, et où les différentielles sont données par des matrices à coefficients homogènes de degré $\geqslant 1$.

(4) Les entiers b_i $(i \leqslant c-1)$ ainsi que b''_c sont déterminés par c et g, mais pas b'_i ni b''_i pour $i > c$: le premier cas où l'on trouve deux valeurs distinctes est $g = 7, c = 3$ [S1].

celles qui apparaissent dans le théorème 2. Les théorèmes 1 et 2 admettent donc la reformulation suivante :

$$\mathrm{Cliff}(C) \geqslant 1 \iff c \geqslant 1, \quad \mathrm{Cliff}(C) \geqslant 2 \iff c \geqslant 2,$$

ce qui conduit naturellement à la

Conjecture de Green ([G]). — $c = \mathrm{Cliff}(C)$.

2. RÉSULTATS

Dans l'appendice de [G], Green et Lazarsfeld prouvent l'inégalité $c \leqslant \mathrm{Cliff}(C)$, à l'aide des propriétés de la cohomologie de Koszul établies par Green dans le même article (voir § 3). Il s'agit donc de démontrer l'inégalité opposée, c'est-à-dire, vu ce qui précède, que la composante $(P_p)_{p+1}$ de degré $p+1$ de P_p, avec $p = g-1-\mathrm{Cliff}(C)$, est nulle.

Cette conjecture remarquable a vite attiré l'attention des géomètres algébristes. Dans [S1] Schreyer la vérifie pour $g \leqslant 8$; il observe aussi qu'elle est fausse en caractéristique 2, déjà pour les courbes générales de genre 7. Le « cas suivant » de la conjecture, $\mathrm{Cliff}(C) \geqslant 3 \Leftrightarrow c \geqslant 3$, a été démontré (indépendamment) par Voisin [V1] (pour $g \geqslant 11$), puis Schreyer [S3] en général. Le cas des courbes planes est traité dans [Lo]. Divers cas particuliers ou reformulations de la conjecture apparaissent dans [E], [P-R], [S2], [T]...

Claire Voisin vient de résoudre le cas particulièrement intéressant des courbes *générales* de genre g. Elles vérifient $\mathrm{Cliff}(C) = [\frac{g-1}{2}]$ (voir l'Appendice), de sorte que l'énoncé prend une forme particulièrement simple (*conjecture de Green générique*) :

Théorème 3 ([V2], [V3]). — *Posons $c = [\frac{g-1}{2}]$. Pour une courbe de genre g générale, la résolution minimale de R est de la forme*

$$0 \to S(-g-1) \to S(-g+1)^{b_1} \to \cdots \to S(-c-2)^{b_c} \\ \to S(-c)^{b_{c-1}} \to \cdots \to S(-2)^{b_1} \to S$$

si g est impair, et

$$0 \to S(-g-1) \to S(-g+1)^{b_1} \to \cdots \to S(-c-3)^{b_c-1} \\ \to S(-c-2)^{b_c/2} \oplus S(-c-1)^{b_c/2} \to S(-c)^{b_c-1} \to \cdots \to S(-2)^{b_1} \to S$$

si g est pair.

En fait la méthode de démonstration donne un résultat plus fort. Pour des entiers g et p fixés, considérons l'ensemble des courbes de genre g *p-gonales*, c'est-à-dire admettant un morphisme de degré p sur $\mathbb{P}^1$. Elles sont paramétrées par un schéma irréductible, le schéma de Hurwitz. Nous verrons au § 6 qu'une variante de la démonstration du théorème 3 dans le cas g pair entraîne la conjecture de Green pour les courbes p-gonales assez générales, pour $p \geqslant \frac{g}{3}+1$. Or il se trouve que M. Teixidor a obtenu (par une méthode très différente) le résultat correspondant pour $p \leqslant \frac{g}{3}+2$ [T]. Ainsi :

Théorème 4 ([V2], [T]). — *Une courbe p-gonale générale vérifie la conjecture de Green.*

Plus précisément, on a $c = \mathrm{Cliff}(C) = p-2$ pour $p \leqslant [\frac{g+3}{2}]$. L'intérêt de cet énoncé vient de ce que pour presque toutes[(5)] les courbes C, l'indice de Clifford est égal à $\gamma-2$, où γ (la « gonalité ») est le plus petit entier tel que C soit γ-gonale.

Signalons que le Th. 3 pour g impair a la conséquence suivante, qui avait été observée par Hirschowitz et Ramanan avant la démonstration de [V3], et qui apporte un peu plus d'eau au moulin de la conjecture de Green :

Corollaire ([H-R]). — *Supposons $g = 2k-1$. Dans l'espace des modules des courbes de genre g, le lieu des courbes qui n'ont pas la résolution minimale générique coïncide avec celui des courbes k-gonales.*

3. COHOMOLOGIE DE KOSZUL

Considérons plus généralement une variété projective X, munie d'un faisceau ample L. Notons

$$V = H^0(X,L) \qquad S = \mathrm{S}^\bullet V \qquad R = \bigoplus_n H^0(X,L^n);$$

on s'intéresse à la résolution graduée libre minimale $P_\bullet$ du S-module gradué R. Considérons $\mathbb{C}$ comme un S-module via l'homomorphisme d'augmentation $S \to \mathbb{C}$. Le S-module gradué $\mathrm{Tor}_i^S(\mathbb{C},R)$ se calcule en substituant à R la résolution $P_\bullet$; comme celle-ci est minimale, le complexe $\mathbb{C}\otimes_S P_\bullet$ est à différentielle nulle, et l'on trouve donc des isomorphismes de S-modules gradués $\mathrm{Tor}_i^S(\mathbb{C},R) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\otimes_S P_i$. Mais on peut aussi calculer ce module en utilisant une résolution libre graduée de $\mathbb{C}$. Il en existe une bien connue, le complexe de Koszul

$$0 \longrightarrow \Lambda^n V \otimes_{\mathbb{C}} S(-n) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \Lambda^2 V \otimes_{\mathbb{C}} S(-2) \longrightarrow V \otimes_{\mathbb{C}} S(-1) \longrightarrow S$$

(avec $n = \dim V$). La différentielle $d_p : \Lambda^p V \otimes_{\mathbb{C}} S(-p) \to \Lambda^{p-1} V \otimes_{\mathbb{C}} S(-p+1)$ applique $(v_1\wedge\cdots\wedge v_p)\otimes P$ sur $\sum_i (-1)^{i+1}(v_1\wedge\cdots\wedge v_{i-1}\wedge v_{i+1}\wedge\cdots\wedge v_p)\otimes P.v_i$.

Ainsi la composante de degré $p+q$ du S-module gradué $\mathrm{Tor}_p^S(\mathbb{C},R)$ s'identifie à l'espace d'homologie $\mathcal{K}_{p,q}(X,L)$ du complexe

$$\Lambda^{p+1} V \otimes R_{q-1} \xrightarrow{d_{p+1}} \Lambda^p V \otimes R_q \xrightarrow{d_p} \Lambda^{p-1} V \otimes R_{q+1}.$$

(5) Au moins conjecturalement – voir l'Appendice pour une formulation précise.

Les espaces $\mathcal{K}_{p,q}(X,L)$ (« cohomologie de Koszul ») possèdent un grand nombre de propriétés intéressantes, étudiées notamment dans [G]. L'une d'elles sera fondamentale pour ce qui suit : supposons pour simplifier L très ample, de sorte que X est plongée dans un espace projectif de façon que $L = \mathcal{O}_X(1)$. Soit Y une section hyperplane[(6)] de X, définie par une équation $\ell = 0$ (avec $\ell \in H^0(X,L)$). Considérons les anneaux $S_Y = \mathrm{S}^\bullet H^0(Y, L_{|Y})$ et $R_Y = \oplus_n H^0(Y, L^n_{|Y})$. Faisons en outre l'hypothèse $H^1(X, L^i) = 0$ pour tout $i \geqslant 0$; elle garantit que S_Y s'identifie à $S/(\ell)$ et R_Y à $R/(\ell)$. Si $P_\bullet$ est une résolution minimale du S-module R, alors $P_\bullet/\ell P_\bullet$ est une résolution minimale du S_Y-module R_Y. On en déduit un *isomorphisme canonique* $\mathcal{K}_{p,q}(X,L) \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}_{p,q}(Y, L_{|Y})$ (« théorème de Lefschetz »).

Revenons à notre courbe C. D'après le début du § 2, la conjecture de Green se traduit par l'annulation de $\mathcal{K}_{p,1}(C, K_C)$ pour $p = g - 1 - \mathrm{Cliff}(C)$, ou encore par l'exactitude de la suite

$$\Lambda^{p+1} H^0(C, K_C) \xrightarrow{d_{p+1}} \Lambda^p H^0(C, K_C) \otimes H^0(C, K_C) \xrightarrow{d_p} \Lambda^{p-1} H^0(C, K_C) \otimes H^0(C, K_C^2).$$

Pour une courbe C générale de genre g, l'indice de Clifford vaut $[\frac{g-1}{2}]$, et il s'agit donc de prouver l'annulation de $\mathcal{K}_{k,1}(C, K_C)$ avec $k = [\frac{g}{2}]$. Il suffit de l'obtenir pour *une* courbe de genre g ; C. Voisin utilise des courbes situées sur des surfaces très particulières, les surfaces K3.

Rappelons que les surfaces K3 sont, par définition, les surfaces (lisses, compactes) simplement connexes à fibré canonique trivial. Celles qui nous intéressent ici sont les surfaces K3 X polarisées de genre g, c'est-à-dire munies d'un fibré en droites très ample L de carré $2g - 2$; on supposera de plus que la classe de L dans le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(X)$ n'est divisible par aucun entier $\geqslant 2$. Les sections globales de L définissent un plongement de X dans $\mathbb{P}^g$, dans lequel les sections hyperplanes lisses de X sont des courbes de genre g, plongées dans $\mathbb{P}^{g-1}$ par le plongement canonique. Pour chaque entier $g \geqslant 3$, les surfaces K3 polarisées de genre g forment une famille irréductible ; une surface assez générale[(7)] dans cette famille vérifie $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}[L]$.

Les sections hyperplanes d'une telle surface X ne sont pas génériques pour $g \geqslant 12$, mais elles tendent à se comporter comme la courbe générique, en particulier du point de vue de la théorie de Brill-Noether [L] : par exemple leur indice de Clifford est l'indice générique $[\frac{g-1}{2}]$. Il est donc tout à fait naturel d'essayer de prouver l'annulation de $\mathcal{K}_{k,1}(C, K_C)$, avec $k = [\frac{g}{2}]$, pour ces courbes. D'après le « théorème de Lefschetz » pour la cohomologie de Koszul, elle est équivalente à l'annulation de $\mathcal{K}_{k,1}(X,L)$. La courbe C va désormais disparaître au profit de la surface K3 X.

(6) Cela signifiera ici qu'aucune composante de X n'est contenue dans l'hyperplan $\ell = 0$.

(7) C'est-à-dire située en dehors d'une réunion dénombrable d'hypersurfaces dans l'espace des paramètres.

4. LE CAS DE GENRE PAIR : STRATÉGIE DE LA PREUVE

La première idée force de la démonstration est l'interprétation de $\mathcal{K}_{p,1}(X,L)$ en termes du *schéma de Hilbert* de X. Si X est une variété projective et d un entier, le schéma de Hilbert X_d (noté plutôt d'habitude $X^{[d]}$ ou $\mathrm{Hilb}^d(X)$) paramètre les sous-schémas finis de longueur d de X. Rappelons qu'un tel sous-schéma Z consiste en la donnée de points $x_1,\ldots,x_m$ de X et en chacun de ces points d'un idéal $\mathcal{I}_{x_i}$ de l'anneau local $\mathcal{O}_{x_i}$, de façon que $\sum_i \dim_{\mathbf{C}}(\mathcal{O}_{x_i}/\mathcal{I}_{x_i}) = d$. En associant à Z l'ensemble $\{x_1,\ldots,x_m\}$, chaque x_i étant compté avec sa multiplicité $\dim(\mathcal{O}_{x_i}/\mathcal{I}_{x_i})$, on obtient un morphisme birationnel ε de X_d sur la puissance symétrique d-ième S^dX. Lorsque X est une *surface*, X_d est lisse et irréductible, de sorte que ε fournit une résolution des singularités de S^dX. Nous nous bornerons à ce cas dans la suite[(8)].

Soit I_d la sous-variété de $X\times X_d$ formée des couples (x,Z) tels que x soit un point de Z. C'est une variété normale, munie de projections :

$$\begin{tikzcd} & I_d \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ X & & X_d\,; \end{tikzcd}$$

la fibre de q en un point Z de X_d s'identifie au sous-schéma Z de X.

On associe à tout fibré en droites L sur X le fibré vectoriel $\mathcal{E}_L := q_*(p^*L)$ sur X_d, de rang d ; sa fibre en un point Z de X_d s'identifie à $H^0(Z, L_{|Z})$. On pose $L_d := \det \mathcal{E}_L$. Une analyse précise du fibré en droites q^*L_d conduit alors au résultat suivant :

Proposition 1. — *L'espace $\mathcal{K}_{d-1,1}(X,L)$ s'identifie au conoyau de l'homomorphisme $q^* : H^0(X_d,L_d)\to H^0(I_d,q^*L_d)$.*

La démonstration sera esquissée au § 5. Comme expliqué au § 3, le théorème 3 pour g pair résultera de :

Proposition 2. — *Soit X une surface K3 dont le groupe de Picard est engendré par un fibré ample L, avec $L^2 = 2g-2$ et $g = 2d-2$. L'homomorphisme $q^* : H^0(X_d,L_d)\to H^0(I_d,q^*L_d)$ est surjectif.*

Comme le morphisme q est fini et plat, on dispose d'un homomorphisme dans l'autre sens $q_* : H^0(I_d,q^*L_d)\to H^0(X_d,L_d)$, qui vérifie $q_*\circ q^* = d$. La surjectivité de q^* est donc équivalente à l'injectivité de q_*.

---

(8) La Prop. 1 ci-dessous s'étend en toute dimension à condition de se limiter aux sous-schémas finis *curvilignes*, c'est-à-dire contenus dans une courbe lisse.

Le cœur de la démonstration consiste alors à construire une variété Z, munie d'un morphisme $j : Z \to X_d$, telle que le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \widetilde{Z} \arrow[r, "\widetilde{j}"] \arrow[d, "q_Z"'] & I_d \arrow[d, "q"] \\ Z \arrow[r, "j"] & X_d \end{tikzcd}$$

possède les deux propriétés suivantes :

(i) l'homomorphisme $\widetilde{j}^* : H^0(I_d, q^*L_d) \to H^0(\widetilde{Z}, \widetilde{j}^* q^* L_d)$ est injectif ;
(ii) l'homomorphisme $(q_Z)_* : H^0(\widetilde{Z}, q_Z^*(j^*L_d)) \to H^0(Z, j^*L_d)$ est injectif.

Au vu du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H^0(\widetilde{Z}, \widetilde{j}^* q^* L_d) \arrow[d, "(q_Z)_*"'] & H^0(I_d, q^*L_d) \arrow[l, "\widetilde{j}^*"'] \arrow[d, "q_*"] \\ H^0(Z, j^*L_d) & H^0(X_d, L_d) \arrow[l, "j^*"'] \end{tikzcd}$$

on en déduit aussitôt l'injectivité de q_*, et donc la proposition 2.

La construction de Z repose sur l'existence d'un fibré vectoriel E de rang 2 remarquable sur X, introduit par Lazarsfeld dans [L]. C'est l'unique fibré de rang 2 stable sur X de déterminant L et seconde classe de Chern $c_2(E) = d$; il vérifie $\dim H^0(X, E) = d + 1$. En associant à une section s de E son schéma des zéros $Z(s)$, on définit un morphisme $\mathbb{P}(H^0(X, E)) \to X_d$ (qui est d'ailleurs un plongement). Notons W l'image réciproque de $\mathbb{P}(H^0(X, E))$ dans I_d. Elle est formée des couples (s, x) dans $\mathbb{P}(H^0(X, E)) \times X$ tels que $s(x) = 0$. Pour (s, x) dans un ouvert convenable W^{o} de W, le schéma résiduel $Z(s) - x$ est bien défini. Considérons l'application rationnelle $j_0 : X \times W^{\mathrm{o}} \dashrightarrow X_d$ qui associe à $(y, (s, x))$ le schéma $(Z(s) - x) \cup y$. En éclatant dans $X \times W$ le lieu des $(y, (s, x))$ tels que $y \in Z(s) - x$ et en restreignant à un gros ouvert, on obtient le morphisme $j : Z \to X_d$ cherché.

Le cœur de la démonstration consiste alors à vérifier les propriétés (i) et (ii) cidessus. Cette vérification prend 30 pages très denses de l'article [V2], qu'il n'est pas question de reproduire ici. J'essaierai d'en indiquer quelques étapes au paragraphe suivant.

5. LE CAS DE GENRE PAIR : QUELQUES DÉTAILS

a) *Démonstration de la Proposition 1.* — Suivant [V2], nous dirons qu'un ouvert V^{o} d'une variété normale V est *gros* si le fermé complémentaire est de codimension $\geqslant 2$.

Si L est un fibré sur V, l'application de restriction $H^0(V,L) \to H^0(V^\circ, L)$ est alors un isomorphisme.

La première étape est le calcul de $H^0(X_d, L_d)$. Les homomorphismes de restriction $H^0(X,L) \to H^0(Z, L_{|Z})$, pour $Z \in X_d$, définissent une flèche $H^0(X,L) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X_d} \to \mathcal{E}_L$, d'où en passant aux Λ^d un homomorphisme $\Lambda^d H^0(X,L) \to H^0(X_d, L_d)$, qui est en fait un *isomorphisme* : on le voit en remplaçant X_d par le gros ouvert des sous-schémas ayant au plus un point double, et en écrivant ce dernier comme quotient d'un gros ouvert de X^d éclaté le long des diagonales $x_i = x_j$.

On va désormais remplacer X_d par le gros ouvert des sous-schémas *curvilignes*, c'est-à-dire contenus dans une courbe lisse – et I_d par l'ouvert des couples (x, Z) où Z est curviligne. Pour un tel couple le schéma résiduel $Z - x$ est bien défini ; on dispose donc d'un morphisme

$$\tau : I_d \longrightarrow X \times X_{d-1} \quad \text{défini par} \quad \tau(x, Z) = (x, Z - x).$$

C'est un isomorphisme sur l'ouvert U de I_d formé des couples (x, Z) pour lesquels x est un point simple de Z ; il contracte le diviseur $D := I_d - U$ sur la variété d'incidence $I_{d-1} \subset X \times X_{d-1}$.

On déduit facilement de la définition de L_d un isomorphisme

$$(*) \qquad q^* L_d \cong \tau^*(L \boxtimes L_{d-1})(-D),$$

d'où une suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^0(I_d, q^* L_d) \longrightarrow H^0(X \times X_{d-1}, L \boxtimes L_{d-1}) \longrightarrow H^0(I_{d-1}, (L \boxtimes L_{d-1})_{\,|\,I_{d-1}}).$$

Notons $\tau' : I_{d-1} \to X \times X_{d-2}$ l'application correspondant à τ, et D' le diviseur de I_{d-1} contracté par τ'. Appliquant de nouveau $(*)$ on trouve un isomorphisme

$$(L \boxtimes L_{d-1})_{|I_{d-1}} \cong \tau'^*(L^2 \boxtimes L_{d-2})(-D'),$$

d'où une injection de $H^0(I_{d-1}, (L \boxtimes L_{d-1})_{|I_{d-1}})$ dans $H^0(X, L^2) \otimes H^0(X_{d-2}, L_{d-2})$. On a finalement une suite exacte :

$$0 \to H^0(I_d, q^* L_d) \longrightarrow H^0(X,L) \otimes H^0(X_{d-1}, L_{d-1}) \xrightarrow{\beta} H^0(X, L^2) \otimes H^0(X_{d-2}, L_{d-2}),$$

de sorte que le conoyau de $q^* : H^0(X_d, L_d) \to H^0(I_d, q^* L_d)$ s'identifie à l'homologie d'un complexe

$$H^0(X_d, L_d) \xrightarrow{\alpha} H^0(X,L) \otimes H^0(X_{d-1}, L_{d-1}) \xrightarrow{\beta} H^0(X, L^2) \otimes H^0(X_{d-2}, L_{d-2});$$

on vérifie que ce complexe s'identifie via les isomorphismes $\Lambda^p H^0(X,L) \xrightarrow{\sim} H^0(X_p, L_p)$ au complexe de Koszul

$$\Lambda^d H^0(X,L) \xrightarrow{d_d} H^0(X,L) \otimes \Lambda^{d-1} H^0(X,L) \xrightarrow{d_{d-1}} H^0(X, L^2) \otimes \Lambda^{d-2} H^0(X,L),$$

d'où la Proposition 1.

b) *Démonstration de la Proposition 2 : propriété* (i). — Dans la suite de ce paragraphe il est commode de poser $k = d - 1$ (de sorte qu'on a $g = 2k$). Notons $\mathbb{P}$ le gros ouvert de $\mathbb{P}(H^0(X, E))$ formé des sections dont le schéma des zéros est curviligne. Reprenons le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & I_{k+1} \arrow[d] \\ \mathbb{P} \arrow[r] & X_{k+1}\,; \end{tikzcd}$$

soit $\psi : W \to X_k$ le morphisme $(\sigma, x) \mapsto Z(\sigma) - x$. En explicitant la définition de Z on se ramène facilement à prouver l'injectivité de l'application

$$\psi^* : H^0(X_k, L_k) \longrightarrow H^0(W, \psi^* L_k).$$

Le point clé pour cela est la construction, à partir d'une étude fine du fibré de Lazarsfeld E, d'un isomorphisme canonique $\Lambda^k H^0(X, L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}^k H^0(X, E)^*$. D'autre part on montre que le fibré $\psi^* L_k$ est isomorphe à $\pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k)$, d'où un homomorphisme injectif $\mathrm{S}^k H^0(X, E)^* \hookrightarrow H^0(W, \psi^* L_k)$. On conclut en vérifiant que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \Lambda^k H^0(X, L) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{S}^k H^0(X, E)^* \arrow[d] \\ H^0(X_k, L_k \arrow[r, "\psi^*"] & H^0(W, \psi^* L_k) \end{tikzcd}$$

est commutatif à un scalaire près.

c) *Démonstration de la propriété* (ii). — Notons $\widetilde{W}$ le produit fibré $W \times_{X_{k+1}} I_{k+1}$, de sorte qu'on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \widetilde{W} \arrow[r] \arrow[d, "q_W"'] & I_k \arrow[d, "q"] \\ W \arrow[r, "\psi"] & X_k\,. \end{tikzcd}$$

Après quelques péripéties, on se ramène à prouver la surjectivité de l'homomorphisme $q_W^* : H^0(W, \psi^* L_k) \to H^0(\widetilde{W}, q_W^* \psi^* L_k)$. Rappelons qu'on a $\psi^* L_k \cong \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k)$. Notons r l'application composée $\widetilde{W} \to W \to \mathbb{P}$. En fait Voisin prouve un résultat plus fort, à savoir :

- *L'homomorphisme* $r^* : H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k)) \to H^0(\widetilde{W}, r^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k)))$ *est surjectif.*

La démonstration de ce résultat occupe 16 pages de [V2] et je ne peux faire mieux qu'y renvoyer le lecteur. Disons simplement qu'on réalise $\widetilde{W}$ comme un sous-schéma de $B_\Delta(S \times S) \times \mathbb{P}$, où $B_\Delta(S \times S)$ est obtenu en éclatant $S \times S$ le long de la diagonale. La surjectivité cherchée est équivalente à l'annulation d'un H^1 convenable sur $B_\Delta(S \times S) \times \mathbb{P}$. Des calculs de cohomologie délicats sur cette variété ramènent cette annulation à des énoncés sur les sections globales du fibré de Lazarsfeld.

6. LA CONJECTURE DE GREEN POUR LES COURBES p-GONALES GÉNÉRALES

Soit toujours X notre surface K3, munie d'un fibré en droites L vérifiant $L^2 = 2g-2$, $g = 2d-2$ et $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}[L]$. Comme promis, nous allons voir que l'annulation de $\mathcal{K}_{d-1,1}(X, L)$ entraîne le théorème 4. Choisissons des points généraux $x_1, \ldots, x_\delta$ de X, avec $\delta \leqslant (d-1)/2$. Comme $\dim H^0(X, E) = d+1$, il existe deux sections linéairement indépendantes s, t de E s'annulant en ces points. Pour un choix générique des x_i et de s, t, la courbe C où s'annule la section $s \wedge t$ de $\Lambda^2 E = L$ est lisse sauf en $x_1, \ldots, x_\delta$, où elle a des points doubles ordinaires. Soit $n : N \to C$ sa normalisation.

Proposition 3. — *La courbe N est $(d-\delta)$-gonale, et vérifie $c = \mathrm{Cliff}(N) = d-\delta-2$.*

La courbe N est de genre $\gamma = 2d-2-\delta$; les inégalités $0 \leqslant \delta \leqslant (d-1)/2$ se traduisent par $\frac{\gamma}{3} + 1 \leqslant d - \delta \leqslant \frac{\gamma}{2} + 1$. Cela donne la conjecture de Green pour les courbes p-gonales générales de genre γ, avec $\frac{\gamma}{3} + 1 \leqslant p \leqslant \frac{\gamma}{2} + 1$, et donc, compte tenu de [T], le théorème 4.

Démonstration de la proposition 3. — Les sections s, t engendrent un sous-faisceau de rang 1 de $n^*(E_{|C})$; la partie mobile du système linéaire correspondant est un pinceau de degré $d-\delta$ (le nombre de zéros de s ou t en dehors des x_i). La courbe N est donc $(d-\delta)$-gonale, et il suffit de prouver qu'on a $\mathcal{K}_{p,1}(N, K_N) = 0$ pour $p = \gamma - 1 - (d-\delta-2) = d-1$. Or l'annulation de $\mathcal{K}_{d-1,1}(X, L)$ (Prop. 1 et 2) garantit celle de $\mathcal{K}_{d-1,1}(C, K_C) = 0$; il s'agit de comparer $\mathcal{K}_{d-1,1}(C, K_C)$ et $\mathcal{K}_{d-1,1}(N, K_N)$. L'application trace $n_* K_N \to K_C$ fournit des injections naturelles $H^0(N, K_N) \hookrightarrow H^0(C, K_C)$ et $H^0(N, K_N^2) \hookrightarrow H^0(C, K_C^2)$, d'où un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^d H^0(N, K_N) \arrow[r, "d_N"'] \arrow[d, "j'"] & \Lambda^{d-1} H^0(N, K_N) \otimes H^0(N, K_N) \arrow[r] \arrow[d, "j"] \arrow[l, bend right, "r_N"'] & \Lambda^{d-2} H^0(N, K_N) \otimes H^0(N, K_N^2) \arrow[d, "j''"] \\
\Lambda^d H^0(C, K_C) \arrow[r, "d_C"'] & \Lambda^{d-1} H^0(C, K_C) \otimes H^0(C, K_C) \arrow[r] \arrow[l, bend right, "r_C"'] & \Lambda^{d-2} H^0(C, K_C) \otimes H^0(C, K_C^2)
\end{tikzcd}$$

Les différentielles d_N et d_C admettent des rétractions canoniques r_N et r_C, définies par $r_\bullet(\tau \otimes \omega) = \frac{1}{d}\, \omega \wedge \tau$, qui commutent aux flèches verticales ; cela entraîne que *l'homomorphisme $\mathcal{K}_{d-1,1}(N, K_N) \to \mathcal{K}_{d-1,1}(C, K_C)$ induit par j est injectif.* En effet, si un élément v de $\Lambda^{d-1} H^0(N, K_N) \otimes H^0(N, K_N)$ est tel que $j(v)$ est un bord, on a

$$j(v) = d_C r_C j(v) = d_C j' r_N(v) = j d_N r_N(v),$$

d'où, puisque j est injectif, $v = d_N r_N(v)$. Ainsi $\mathcal{K}_{d-1,1}(C, K_C)$ est nul, d'où la proposition 3.

7. LE CAS DE GENRE IMPAIR

Ce qui précède repose de manière essentielle sur les propriétés du fibré de Lazarsfeld, qui n'existe qu'en genre pair. Pour traiter le cas g impair, C. Voisin considère une surface K3 X dont le groupe de Picard est engendré par un fibré en droites très ample L, de carré $2g-2$, et la classe d'une courbe rationnelle lisse Δ telle que $\deg(L_{|\Delta}) = 2$. Posons $L' = L(\Delta)$. On a $L'^2 = 2g$, $\deg(L'_{|\Delta}) = 0$; le morphisme $X \to \mathbb{P}^{g+1}$ associé à L' est un plongement en dehors de Δ et contracte Δ sur un point.

Posons $g = 2k+1$. La première étape de la démonstration est de vérifier que la proposition 2 s'étend à (X, L'), donnant $\mathcal{K}_{k+1,1}(X, L') = 0$. La démonstration de la propriété (i) s'adapte immédiatement, celle de (ii) demande nettement plus de travail.

Il s'agit maintenant d'en déduire l'annulation de $\mathcal{K}_{k,1}(X, L)$. Il est commode pour cela d'utiliser la dualité de Serre, qui fournit une dualité canonique entre $\mathcal{K}_{p,1}(X, L)$ et $\mathcal{K}_{g-2-p,2}(X, L)$. Ainsi $\mathcal{K}_{k-1,2}(X, L')$ est nul, et on veut en déduire l'annulation de l'espace $\mathcal{K}_{k-1,2}(X, L)$. Rappelons que celui-ci est l'homologie du complexe(9)

$$\Lambda^k H^0(L) \otimes H^0(L) \xrightarrow{d_L} \Lambda^{k-1} H^0(L) \otimes H^0(L^2) \xrightarrow{d_L} \Lambda^{k-2} H^0(L) \otimes H^0(L^3).$$

Au couple (X, L') est associé comme plus haut le fibré de Lazarsfeld E, de déterminant L' ; la preuve repose sur la construction d'un homomorphisme

$$\varphi : \mathrm{S}^k H^0(E) \longrightarrow \Lambda^{k-1} H^0(L) \otimes H^0(L(-\Delta))$$

qui s'inspire d'une construction analogue utilisée par Green et Lazarsfeld pour prouver l'inégalité $c \leqslant \mathrm{Cliff}(C)$ ([G], Appendice). Étant données deux sections globales v, w de E, on notera $v \wedge w$ leur produit extérieur dans $H^0(\Lambda^2 E) = H^0(L')$. On choisit une base $(w_1, \ldots, w_{k+1})$ de $H^0(E(-\Delta))$, et on pose(10), pour $v \in H^0(E)$,

$$\varphi(v^k) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j}\, (v \wedge w_1) \wedge \cdots \wedge \widehat{(v \wedge w_i)} \wedge \cdots \wedge \widehat{(v \wedge w_j)} \wedge \cdots \wedge (v \wedge w_{k+1}) \otimes (w_i \wedge w_j);$$

la condition $w_i \in H^0(E(-\Delta))$ entraîne bien $v \wedge w_i \in H^0(L)$ et $w_i \wedge w_j \in H^0(L(-\Delta))$.

Choisissons d'autre part une section σ de $H^0(L')$ dont la restriction à Δ n'est pas nulle ; elle fournit un scindage de la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(L) \longrightarrow H^0(L') \longrightarrow H^0(L'_{|\Delta}) \cong \mathbb{C} \longrightarrow 0,$$

d'où une décomposition $H^0(L') = H^0(L) \oplus \mathbb{C}\,\sigma$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda^{k-1} H^0(L) \otimes H^0(L(-\Delta)) & \xrightarrow{\delta} & \Lambda^{k-2} H^0(L) \otimes H^0(L^2(-\Delta)) \\
{\scriptstyle 1\otimes\sigma}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle 1\otimes\sigma} \\
\Lambda^{k-1} H^0(L) \otimes H^0(L^2) & \xrightarrow{d_L} & \Lambda^{k-2} H^0(L) \otimes H^0(L^3)\,.
\end{array}$$

(9) Dans ce paragraphe, pour tout faisceau F sur X on note simplement $H^0(F)$ l'espace $H^0(X, F)$.
(10) Le chapeau sur un terme signifie comme d'habitude qu'on l'omet.

L'annulation de $\mathcal{K}_{k-1,2}(X,L)$ va résulter des quatre points suivants :

(i) L'homomorphisme composé $\delta\circ\varphi$ est nul.

(ii) L'homomorphisme induit $\varphi : \mathrm{S}^k H^0(E) \to \operatorname{Ker}\delta$ est surjectif.

(iii) $\mathcal{K}_{k-1,2}(X,L)$ est engendré par les classes d'éléments $(1\otimes\sigma)\cdot\alpha$ pour $\alpha\in\operatorname{Ker}\delta$.

(iv) Pour $t\in \mathrm{S}^k H^0(E)$, la classe de $(1\otimes\sigma)\cdot\varphi(t)$ dans $\mathcal{K}_{k-1,2}(X,L)$ est nulle.

Les assertions (i) et (iv) résultent d'un calcul sans mystères, basé sur l'identité

$$(v_1\wedge v_2)\cdot(v_3\wedge v_4)-(v_1\wedge v_3)\cdot(v_2\wedge v_4)+(v_1\wedge v_4)\cdot(v_2\wedge v_3)=0 \quad \text{dans } H^0(L'^2)$$

quels que soient $v_1,\ldots,v_4$ dans $H^0(E)$.

Prouvons (iii). Soit $\beta\in\operatorname{Ker}d_L$. Puisque $\mathcal{K}_{k-1,2}(X,L')=0$, il existe un élément γ de $\Lambda^k H^0(L')\otimes H^0(L')$ tel que $\beta=d_{L'}\gamma$. La décomposition $H^0(L')=H^0(L)\oplus\mathbb{C}\,\sigma$ permet d'écrire

$$\gamma=\gamma_1+\sigma\wedge\gamma_2+\gamma_3\otimes\sigma+(\sigma\wedge\gamma_4)\otimes\sigma,\quad \text{avec}$$

$$\gamma_1\in\Lambda^k H^0(L)\otimes H^0(L),\ \gamma_2\in\Lambda^{k-1}H^0(L)\otimes H^0(L),\ \gamma_3\in\Lambda^k H^0(L),\ \gamma_4\in\Lambda^{k-1}H^0(L).$$

L'élément γ_4 s'identifie à l'image de $d_{L'}\gamma$ dans $\Lambda^{k-1}H^0(L')\otimes H^0(L'^2_{|\Delta})$; comme $d_{L'}\gamma=\beta$ appartient à $\Lambda^{k-1}H^0(L)\otimes H^0(L^2)$, on en déduit $\gamma_4=0$. Comme on peut modifier β par un bord on peut supposer $\gamma_1=0$. Enfin on a

$$\gamma_3\otimes\sigma=d_{L'}(\sigma\wedge\gamma_3)+\sigma\wedge d_{L'}\gamma_3,$$

de sorte qu'en modifiant γ par un bord on peut supposer $\gamma_3=0$.

On a alors $\gamma=\sigma\wedge\gamma_2$, et par suite $\beta=d_{L'}\gamma=\gamma_2\cdot(1\otimes\sigma)-\sigma\wedge d_L\gamma_2$. En utilisant de nouveau la décomposition $H^0(L')=H^0(L)\oplus\mathbb{C}\,\sigma$, le fait que β appartient à $\Lambda^{k-1}H^0(L)\otimes H^0(L^2)$ implique d'une part que $d_L\gamma_2$ est nul, d'autre part que γ_2 appartient au sous-espace $\Lambda^{k-1}H^0(L)\otimes H^0(L(-\Delta))$. Par suite γ_2 appartient à $\operatorname{Ker}\delta$, et $\mathcal{K}_{k-1,2}(X,L)$ est engendré par les classes des éléments $\gamma_2\cdot(1\otimes\sigma)$ avec $\gamma_2\in\operatorname{Ker}\delta$.

Le gros du travail est la démonstration de (ii), pour laquelle je ne peux que renvoyer à [V3], p. 12–26. Disons simplement qu'on se ramène à un énoncé sur la cohomologie d'un éclatement convenable de $\mathbb{P}(H^0(E))\times X$, énoncé dont la démonstration demande une ingéniosité technique considérable.

APPENDICE : L'INDICE DE CLIFFORD

Nous utiliserons dans cet appendice une abréviation très classique : un système linéaire[(11)] $|D|$ sur C de degré d et de dimension projective r est appelé un g^r_d. L'indice de Clifford $\operatorname{Cliff}(C)$ est alors le minimum des entiers $d-2r$ sur l'ensemble des g^r_d avec $d\leqslant g-1$ et $r\geqslant 1$. D'après le théorème de Clifford, on a $\operatorname{Cliff}(C)\geqslant 0$, et $\operatorname{Cliff}(C)=0$

[(11)] Étant donné un diviseur D, le système linéaire $|D|$ est l'ensemble des diviseurs effectifs linéairement équivalents à D ; il s'identifie à l'espace projectif $\mathbb{P}(H^0(C,\mathcal{O}_C(D)))$.

si et seulement si C est hyperelliptique. Cet invariant a été introduit par Martens dans [M], où il montre entre autres que les courbes d'indice 1 sont exactement celles qui apparaissent dans le théorème 2.

Considérons les courbes de genre g fixé. Les courbes d-gonales, c'est-à-dire admettant un g^1_d, ont un indice de Clifford $\leqslant d-2$; lorsqu'elles sont assez générales, leur indice de Clifford est exactement $d-2$ [B]. Il s'ensuit que l'indice de Clifford est $[\frac{g-1}{2}]$ pour une courbe générale, et prend toutes les valeurs entre 0 et $[\frac{g-1}{2}]$.

Les courbes dont l'indice de Clifford est fourni par un g^r_d avec $r > 1$ (et pas par un système linéaire de dimension plus petite) sont beaucoup plus rares. Pour $r = 2$, ce sont les courbes planes lisses de degré d, qui sont de genre $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$. Pour $3 \leqslant r \leqslant 9$, les auteurs de [ELMS] prouvent que cela impose $g = 4r-2$, avec un indice de Clifford $2r-3$ donné par un fibré en droites L tel que $L^2 \cong K_C$; ils conjecturent bien naturellement le même énoncé pour tout r (et construisent, pour tout r, une courbe ayant les propriétés indiquées). Si cette conjecture est correcte, et si C est une courbe de genre g et d'indice de Clifford c, alors :

a) C est $(c+2)$-gonale, ou
b) $g = \frac{1}{2}(c+2)(c+3)$, C est une courbe plane lisse de degré $c+4$, ou
c) c est impair $\geqslant 3$, $g = 2c+4$, et C admet un fibré en droites L tel que $L^2 \cong K_C$ et $\mathrm{Cliff}(L) = c$.

Pour g fixé il y a donc (moyennant la conjecture) au plus deux valeurs de c pour lesquelles il existe des courbes d'indice c qui ne soient pas $(c+2)$-gonales.

Remerciements. — Je remercie Olivier Debarre et Claire Voisin pour leurs commentaires pertinents sur une première version de ce texte.

RÉFÉRENCES

[B] E. Ballico – « On the Clifford index of algebraic curves », *Proc. Amer. Math. Soc.* **97** (1986), p. 217–218.

[E] L. Ein – « A remark on the syzygies of the generic canonical curves », *J. Differential Geom.* **26** (1987), p. 361–365.

[ELMS] D. Eisenbud, H. Lange, G. Martens & F.-O. Schreyer – « The Clifford dimension of a projective curve », *Compositio Math.* **72** (1989), p. 173–204.

[G] M. Green – « Koszul cohomology and the geometry of projective varieties », *J. Differential Geom.* **19** (1984), p. 125–171.

[H-R] A. Hirschowitz & S. Ramanan – « New evidence for Green's conjecture on syzygies of canonical curves », *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* 4e *série* **31** (1998), p. 145–152.

[L] R. Lazarsfeld – « Brill-Noether-Petri without degenerations », *J. Differential Geom.* **23** (1986), p. 299–307.

[Lo] F. Loose – « On the graded Betti numbers of plane algebraic curves », *Manuscripta Math.* **64** (1989), p. 503–514.

[M] H. Martens – « Varieties of special divisors on a curve, II », *J. reine angew. Math.* **233** (1968), p. 89–100.

[N] M. Noether – « Über die invariante Darstellung algebraischer Funktionen », *Math. Ann.* **17** (1880), p. 263–284.

[P-R] K. Paranjape & S. Ramanan – « On the canonical ring of a curve », in *Algebraic geometry and commutative algebra, Vol. II*, Kinokuniya, Tokyo, 1988, p. 503–516.

[P] K. Petri – « Über die invariante Darstellung algebraischer Funktionen einer Veränderlichen », *Math. Ann.* **88** (1923), p. 242–289.

[S-D] B. Saint-Donat – « On Petri's analysis of the linear system of quadrics through a canonical curve », *Math. Ann.* **206** (1973), p. 157–175.

[S1] F.-O. Schreyer – « Syzygies of canonical curves and special linear series », *Math. Ann.* **275** (1986), p. 105–137.

[S2] ———, « Green's conjecture for general p-gonal curves of large genus », in *Algebraic curves and projective geometry (Trento, 1988)*, Lect. Notes in Math., vol. 1389, Springer, Berlin, 1989, p. 254–260.

[S3] ———, « A standard basis approach to syzygies of canonical curves », *J. reine angew. Math.* **421** (1991), p. 83–123.

[T] M. Teixidor I Bigas – « Green's conjecture for the generic r-gonal curve of genus $g \geqslant 3r-7$ », *Duke Math. J.* **111** (2002), p. 195–222.

[V1] C. Voisin – « Courbes tétragonales et cohomologie de Koszul », *J. reine angew. Math.* **387** (1988), p. 111–121.

[V2] ———, « Green's generic syzygy conjecture for curves of even genus lying on a $K3$ surface », *J. Eur. Math. Soc.* **4** (2002), p. 363–404.

[V3] ———, « Green's canonical syzygy conjecture for generic curves of odd genus », *Compositio Math.* (à paraître), preprint arXiv : `math.AG/0301359`.

Arnaud BEAUVILLE

Laboratoire J.-A. Dieudonné
UMR 6621 du CNRS
Université de Nice
Parc Valrose
F-06108 Nice cedex 2
E-mail : `beauville@math.unice.fr`