Annales de l'I. H. P., section A

André Jolivet

# La séparation des variables angulaires et radiales dans les équations d'ondes des particules de spin quelconque en interaction

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 14, nº 4 (1971), p. 335-351

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1971__14_4_335_0>

*Ann. Inst. Henri Poincaré,*
Vol. XIV, n° 4, 1971, p. 335-351.

Section A :
*Physique théorique.*

# La séparation des variables angulaires et radiales dans les équations d'ondes des particules de spin quelconque en interaction

par

**André JOLIVET**

Collège Scientifique Universitaire, 49-Angers.

RÉSUMÉ. — Nous traitons dans cet article des applications d'une étude précédente [*1*] où nous avons étudié les systèmes linéaires du premier ordre et de rang fini, d'équations aux dérivées partielles et de forme invariante par rapport au groupe de Lorentz orthochrone. Ces systèmes décrivent une particule de spin quelconque en interaction avec un champ extérieur.

Nous appliquons ici, les résultats que nous avons obtenus dans le cas général, au cas particulier important où le champ d'interaction est à symétrie sphérique. Nous obtenons très facilement les équations radiales. Ceci nous montre l'un des avantages de la représentation que nous avions choisi, représentation particulièrement bien adaptée aux problèmes à symétrie sphérique.

Plusieurs auteurs ont utilisé pour décrire les particules une théorie particulière appelée « Théorie de la Fusion ». Pour cette théorie nous avons introduit d'autres représentations, il se trouve que pour certains types d'interactions ces représentations conduisent à une écriture plus simple. Notamment l'une de ces représentations que nous avons appelée « représentation $\Gamma_4$ diagonale » est particulièrement intéressante.

Avec cette représentation et dans le cas d'une interaction de type potentiel, nous sommes conduits à un système d'équations radiales qui est formé par deux systèmes indépendants. Un cas particulier connu est donné par le cas de la particule de spin $\frac{1}{2}$, les deux systèmes indépendants sont alors irréductibles. Un autre cas particulier est donné par la particule de spin 1,

les équations radiales ont été obtenues par Bartlett [2] en utilisant une méthode nécessitant de longs calculs. Ces équations sont un cas particulier des équations radiales que nous avons obtenues par une méthode générale pour une particule de spin quelconque.

---

## I. INTRODUCTION

Soit $g \to T(g)$ une certaine représentation finie du groupe $\mathscr{L}_+^\uparrow$. R l'espace de cette représentation.

Soit le système linéaire, de rang fini d'équations aux dérivées partielles du premier ordre et de forme invariante par rapport à $\mathscr{L}_+^\uparrow$.

$$(\Sigma B^{\gamma}_{\alpha\rho} T^{\alpha\rho}_{\gamma} - iM_0 c)\psi = 0 \tag{1}$$

où $\psi$ appartient à un espace de Hilbert, c'est une fonction vectorielle inconnue des $x^\mu$ à valeur dans R ($\mu = 1, 2, 3, 4$ ; $x^4 = i$ ct).

Les $T^{\alpha\rho}_{\beta}$ sont des opérateurs linéaires dans R.

Les $B^{\gamma}_{\alpha\rho}(x^\mu)$ sont des opérateurs différentiels du premier ordre ou des opérateurs multiplicatifs dépendant des $x^\mu$ et sont tels que ; ce champ d'opérateurs est à symétrie sphérique c'est-à-dire vérifié :

$$B'^{\gamma}_{\alpha\rho}(x^p) = B^{\gamma}_{\alpha\rho}(x^p) \qquad (p = 1, 2, 3)$$

(B′ est le transformé de B par rotation d'espace).

$M_0$ et $c$ sont des nombres réels positifs.

Nous montrons que la solution de l'équation s'écrit sous la forme :

$$\psi^{\alpha}_{k\nu}(r\theta\varphi t) = \Sigma \langle k\nu l\sigma \mid kljm \rangle Y^{\sigma}_{l}(\theta\varphi) F^{\alpha}_{kl}(r, t)$$

où les $\langle k\nu l\sigma \mid kljm \rangle$ sont les coefficients de Clebsh-Gordon relatifs aux fonctions sphériques normées, et où les $Y^{\sigma}_{l}(\theta, \varphi)$ sont les fonctions sphériques normées.

Les $F^{\alpha}_{kl}(r, t)$ sont solutions de :

$$\Sigma(-1)^{k'+l+j}\begin{Bmatrix} k & l & j \\ l' & k' & a \end{Bmatrix} g(\alpha\alpha'\gamma kk'a)(\alpha \mid T_\gamma \mid \alpha')(l \mid B^{a}_{\gamma} \mid l')F^{\alpha}_{k'l'} - iM_0 c F^{\alpha}_{kl}(r, t) = 0$$

où les $\begin{Bmatrix} k & l & j \\ l' & k' & a \end{Bmatrix}$ sont les symboles à six $j$ de Wigner et ont été tabulés.

Les $(l \mid B^{a}_{\gamma} \mid l')$ sont des éléments de matrices réduits.

Les $(\alpha \mid T_\gamma \mid \alpha')$ sont des éléments de matrices « réduits » provenant d'une double réduction.

Les $g(\alpha\alpha'\gamma kk'a)$ sont des coefficients que j'ai calculés pour certaines valeurs de $\gamma$.

Dans le cas de la théorie de la Fusion et pour une interaction de type potentiel, nous montrons que pour la représentation « $\Gamma_4$ diagonale » la solution de l'équation (1) s'écrit :

$$\psi^{k_0}_{k\nu} = \Sigma(k\nu l\sigma \mid kljm) Y'^{\sigma}_l(\theta\varphi) F'^{k_0}_{kl}(r, t)$$

où les $(k\nu l\sigma \mid kljm)$ sont les coefficients de Clebsch-Gordon, relatifs aux fonctions sphériques non normées.

Les $Y'^{\sigma}_l(\theta\varphi)$ sont les fonctions sphériques non normées.

Les $F'^{k_0}_{kl}(r, t)$ sont solutions de :

$$\left\{ [p_4 + U(r, t)]k_0 + T' - \frac{inm_0c}{2} \right\} F'(r, t)^{k_0}_{kl} = 0$$

où $p_4 = -\dfrac{h}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}$; $U(r, t)$ est une fonction connue.

Les éléments de matrice de $T'$ sont donnés par les formules (2).

Dans la suite de cet article nous écrirons indifféremment les équations (1) sous la forme :

$$\{ \Sigma B^{\gamma}_{a\rho} T^{a\rho}_{\gamma} - iM_0c \} \psi = 0$$

ou

$$\{ \Sigma p_\mu \Gamma_\mu + \Sigma B^{\gamma}_{a\rho} T^{a\rho}_{\gamma} - iM_0c \} \psi = 0$$

car $\Sigma p_\mu \Gamma_\mu$ est de la forme $\Sigma B^{\gamma}_{a\rho} T^{a\rho}_{\gamma}$.

## II. INTÉGRALES PREMIÈRES

Considérons le système d'équations (1) que nous écrivons :

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_4\psi = -\frac{ic}{\hbar}H\psi$$

Soit un opérateur A ne dépendant pas explicitement du temps.

Si $[A, H]$ et $[A, \Gamma_4]$ sont nuls $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int(\xi, A\Gamma_4 n)dv$ est nul et l'élément de matrice $\displaystyle\int(\xi, A\Gamma_4 n)dv$ est constant au cours du temps.

Nous prendrons la définition suivante pour les intégrales premières: un opérateur hermitien est intégrale première s'il commute avec $\Gamma_4$ et H.

Soit $\mathscr{D}_1(g)$ et $\mathscr{D}_2(g)$ deux représentations $g \to \mathscr{D}(g)$ du groupe des rotations d'espaces tel que:

$$\psi'(gx^p)^\alpha_{k\nu} = \mathscr{D}_1(g)^\alpha_{k\nu,\nu'}\psi(x^p)^\alpha_{k\nu'} \quad \text{et} \quad \psi(g^{-1}x^p)^\alpha_{k\nu} = \mathscr{D}_2(g)\psi(x^p)^\alpha_{k\nu}$$

où $\mathscr{D}_1(g)$ et $\mathscr{D}_2(g)$ sont somme directe de représentations irréductibles.

$\mathscr{D}_{n1}$ et $\mathscr{D}_{n2}$ sont les matrices infinitésimales ($n = 1, 2, 3$); posons:

$$S_n = i\hbar\mathscr{D}_{n1} \quad ; \quad L_n = i\hbar\mathscr{D}_{n2} \quad ; \quad J_n = i\hbar(\mathscr{D}_{n1} + \mathscr{D}_{n2})$$

L'interaction étant à symétrie sphérique, $B^\gamma_a$ est un opérateur tensoriel irréductible par rapport au groupe des rotations d'espace. Par suite $\mathscr{D}_{n1} + \mathscr{D}_{n2}$ commute avec $\Sigma T^{a\rho}_\gamma B^\gamma_{a\rho}$; en effet:

$$\sum_\rho [\mathscr{D}_{n1} + \mathscr{D}_{n2}, T^{a\rho}_\gamma B^\gamma_{a\rho}] = \sum_\rho [\mathscr{D}_{n1}, T^{a\rho}_\gamma] B^\gamma_{a\rho} + \sum_\rho T^{a\rho}_\gamma [\mathscr{D}_{n1}, B^\gamma_{a\rho}]$$

$$= \sum_{\rho\rho'} T^{a\rho'}_\gamma (\mathscr{D}_n)_{a\rho\rho'} B^\gamma_{a\rho} - T^{a\rho}_\gamma (\mathscr{D}_n)_{a\rho\rho'} B^\gamma_{a\rho}$$

expression qui est identiquement nulle.

Par suite $\Sigma T^{a\rho}_\gamma B^\gamma_{a\rho}$ commute avec les $J_n$.

Les opérateurs hermitiens $J_3$ et $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ qui commutent entre eux et avec $\Gamma_4$ sont donc intégrales premières. Les $J_n$ sont les composantes du moment cinétique.

## III. FORME DE LA SOLUTION DANS LE CAS D'UNE INTERACTION A SYMÉTRIE SPHÉRIQUE

La solution de l'équation d'ondes est vecteur propre de $J_3$ et $J^2$ pour les valeurs propres $\hbar m$ et $\hbar^2 j(j+1)$.

$|jm\rangle$ est une combinaison linéaire des $|lkjm\rangle$ car $L^2$ et $S^2$ ne commutent pas avec l'hamiltonien.

On a:

$$\psi^{(jm)} = |jm\rangle = \sum_{k.l} F^\alpha_{kl}(r, t)\,|\alpha kljm\rangle$$

et en tenant compte de

$$|\alpha kljm\rangle = \sum_{\nu,\sigma} \langle k\nu l\sigma \,|\, kljm\rangle\,|\alpha k\nu l\sigma\rangle$$

où les $\langle kv l\sigma \mid kljm \rangle$ sont les coefficients de Clebsch-Gordan et où les $\mid \alpha kv l\sigma \rangle$ sont les $\mid l\sigma \rangle \mid \alpha kv \rangle = Y_1^\sigma(\theta\varphi) \mid kv \rangle$ ; nous notons respectivement $\mid kv \rangle$, $\mid l\sigma \rangle$, $\mid kljm \rangle$ les vecteurs de base des représentations $\mathscr{D}_{n1}$, $\mathscr{D}_{n2}$, $\mathscr{D}_{n1} + \mathscr{D}_{n2}$.

Notons que les $\mid l\sigma \rangle$ sont les fonctions sphériques normées. Nous avons :

$$
\begin{array}{l}
L_3 \mid l\sigma \rangle = \hbar\sigma \mid l\sigma \rangle \quad ; \quad L^2 \mid l\sigma \rangle = \hbar^2 l(l+1) \mid l\sigma \rangle \\
S_3 \mid kv \rangle = \hbar v \mid kv \rangle \quad ; \quad S^2 \mid kv \rangle = \hbar^2 k(k+1) \mid kv \rangle \\
L^2 \mid kljm \rangle = \hbar^2 l(l+1) \mid kljm \rangle \\
S^2 \mid kljm \rangle = \hbar^2 k(k+1) \mid kljm \rangle \\
J_3 \mid kljm \rangle = \hbar m \mid kljm \rangle \quad ; \quad J^2 \mid kljm \rangle = \hbar^2 j(j+1) \mid kljm \rangle .
\end{array}
$$

Nous pouvons écrire la solution sous les formes suivantes

$$\mid jm \rangle = \sum_{\alpha kvl} F^\alpha_{kl}(r, t) \langle kvl\sigma \mid kljm \rangle \mid \alpha kvl\sigma \rangle$$

$$\mid jm \rangle = \sum_{\alpha kvl} F^\alpha_{kl}(r, t) \langle kvl\sigma \mid kljm \rangle Y_l^\sigma(\theta\varphi) \mid \alpha kv \rangle$$

$$\mid jm \rangle = \sum_{\alpha kv} \psi^\alpha_{kv} \mid \alpha kv \rangle$$

en posant

$$\psi^\alpha_{kv} = \sum_{l} F^\alpha_{kl}(r, t) \langle kvl\sigma \mid kljm \rangle Y_l^\sigma(\theta\varphi)$$

Les $\psi^\alpha_{kv}$ sont les composantes de la fonction d'onde. Par la suite nous prendrons indifféremment $l$ ou $\mu$ avec $l = j + \mu$.

## IV. ÉQUATIONS RADIALES

Nous avons :

$$\{ \Sigma T_\gamma^{a\rho} B^\gamma_{a\rho} - iM_0 c \} \mid jm \rangle$$

ce qui nous donne en multipliant à gauche par $\langle \alpha kljm \mid$

$$\sum_{\alpha' k' l'} \langle \alpha kljm \mid T_\gamma^{a\rho} B^\gamma_{a\rho} \mid \alpha' k' l' jm \rangle F^{\alpha'}_{k'l'}(r, t) - iM_0 c F^\alpha_{kl}(r, t) = 0$$

Racah [3] a montré que les éléments de matrices $\langle \alpha kljm \mid T_\gamma^{a\rho} B^\gamma_{a\rho} \mid \alpha' k' l' jm \rangle$ sont indépendants de $m$ et de $\rho$.

Les équations écrites sous la forme précédente sont donc les équations radiales.

Racah a calculé la valeur des éléments de matrice, il trouve

$$\langle \alpha kljm \mid T^{a\rho}_{\gamma} B^{\gamma}_{a\rho} \mid \alpha' k' l' jm \rangle = (-1)^{k+l'-j} W(klk'l'; ja)(\alpha k \mid T^{a}_{\gamma} \mid \alpha' k')(l \mid B^{a}_{\gamma} \mid l')$$

Les $W(klk'l'; ja)$ sont les coefficients de Racah, les $(\alpha k \mid T^{a}_{\gamma} \mid \alpha' k')$ et $(l \mid B^{a}_{\gamma} \mid l')$ sont les éléments de matrices réduits des opérateurs tensoriels $T^{a}_{\gamma}$ et $B^{a}_{\gamma}$.

Nous pouvons donc écrire les équations radiales

$$\sum_{\alpha' k' l'} (-1)^{k+l'-j} W(klk'l'; ja)(\alpha k \mid T^{a}_{\gamma} \mid \alpha' k')(l \mid B^{a}_{\gamma} \mid l') F^{\alpha'}_{k'l'}(r, t) - i M_0 c F^{\alpha}_{kl}(r, t) = 0$$

On peut au lieu des coefficients de Racah utiliser les symboles à « six $j$ » de Wigner [4] définis par

$$\begin{Bmatrix} k & l & j \\ l' & k' & a \end{Bmatrix} = (-1)^{k+l+k'+l'} W(klk'l'; ja)$$

qui obéissent à des relations de symétrie.

Avec les symboles à « six $j$ » les équations radiales s'écrivent :

$$\sum_{\alpha' k' l'} (-1)^{k'+l+j} \begin{Bmatrix} k & l & j \\ l' & k' & a \end{Bmatrix} (\alpha k \mid T^{a}_{\gamma} \mid \alpha' k')(l \mid B^{a}_{\gamma} \mid l') F^{\alpha'}_{k'l'}(r, t) - i M_0 c F^{\alpha}_{kl}(r, t) = 0$$

ou encore en séparant le terme interaction du terme différentiel qui caractérise la particule libre :

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha'} (\alpha k \mid \Gamma^{0}_{(0,2)} \mid \alpha' k)(l \mid p^{0}_{(0,2)} \mid l) F^{\alpha}_{kl}(r, t) \\ &+ \sum_{\alpha' k' l'} (-1)^{k'+l+j} \begin{Bmatrix} k & l & j \\ l' & k' & 1 \end{Bmatrix} (\alpha k \mid \Gamma^{1}_{(0,2)} \mid \alpha' k')(l \mid p^{1}_{(0,2)} \mid l') F^{\alpha'}_{k'l'}(r, t) \\ &+ \Sigma (-1)^{k'+l+j} \begin{Bmatrix} k & l & j \\ l' & k' & a \end{Bmatrix} (\alpha k \mid T^{a}_{\gamma} \mid \alpha' k')(l \mid B^{a}_{\gamma} \mid l') F^{\alpha'}_{k'l'}(r, t) - i M_0 c F^{\alpha}_{kl}(r, t) = 0 \end{aligned}$$

avec

$$(\alpha k \mid \Gamma^{0}_{(0,2)} \mid \alpha' k) = (\alpha k v \mid \Gamma_4 \mid \alpha' k v) \quad ; \quad P^{0}_{(0,2)} = p_4 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^4}$$

$$\Gamma^{11}_{(0,2)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_1 + i\Gamma_2) \quad ; \quad \Gamma^{10}_{(0,2)} = \Gamma_3 \quad ; \quad \Gamma^{1-1}_{(0,2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_1 - i\Gamma_2)$$

$$p^{11}_{(0,2)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 + ip_2) \quad ; \quad p^{10}_{(0,2)} = p_3 \quad ; \quad p^{1-1}_{(0,2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 - ip_2)$$

Les symboles à « six $j$ » de Wigner où les coefficients W ont été calculés et donnés sous forme de tables dans les cas où l'un des nombres composants a la valeur :

$$\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},\ 3,\ \frac{7}{2},\ 4,\ \frac{9}{2}$$

Jahn [5] et Biederman [6], ont donné les valeurs de ces coefficients dans les cas où l'un des nombres composants a la valeur :

$$\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2.$$

Le cas de $\frac{5}{2}$ est donné par Edmonds et Flowers [7].

Les coefficients ont été tabulés par Yato [8] pour :

$$3,\ \frac{7}{2},\ 4,\ \frac{9}{2}$$

Nous avons vu que les $(\alpha k \,|\, \mathrm{T}^a_\gamma \,|\, \alpha' k')$ s'écrivaient :

$$(\alpha k \,|\, \mathrm{T}^a_\gamma \,|\, \alpha' k') = g(\alpha\alpha'\gamma k k' a)(\alpha \,|\, \mathrm{T}_\gamma \,|\, \alpha')$$

Nous avons calculé les fonctions $g(\alpha\alpha'\gamma k k' a)$ pour $\gamma = (0, 2)$ ; $(1,2)$ ; $(-1,2)$ ; $(2,3)$ ; $(-2,3)$ ; $(0,3)$.

En particulier les $(\alpha k \,|\, \mathrm{T}^0_{(0,2)} \,|\, \alpha' k)$ et les $(\alpha k \,|\, \mathrm{T}^1_{(0,2)} \,|\, \alpha' k')$ s'expriment en fonction des $(\alpha \,|\, \mathrm{T}_{(0,2)} \,|\, \alpha')$.

Nous avons les valeurs suivantes pour les éléments de matrices réduits des opérateurs tensoriels $p^0_{(0,2)}$ et $p^1_{(0,2)}$

$$(l \,|\, p^0_{(0,2)} \,|\, l) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^4} \quad ; \quad (l+1 \,|\, p^1_{(0,2)} \,|\, l) = -i\hbar(l+1)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l}{r}\right)$$

$$(l-1 \,|\, p^1_{(0,2)} \,|\, l) = i\hbar l^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l+1}{r}\right)$$

Les équations radiales s'écrivent en définitive

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha'} - i\hbar g(\alpha\alpha'(0,2)kk0)(\alpha \,|\, \Gamma_{(0,2)} \,|\, \alpha')\frac{\partial}{\partial x^4}\mathrm{F}^{\alpha'}_{k'}(r, t) \\
&\quad + \sum_{\alpha' k' l'} (-1)^{k'+l+j}\begin{Bmatrix} k & l & j \\ l' & k' & 1 \end{Bmatrix} g(\alpha\alpha'(0,2)kk'1)(\alpha|\Gamma_{(0,2)}|\alpha')(l|p^1_{(0,2)}|l')\mathrm{F}^{\alpha'}_{k'l'}(r, t) \\
&\quad + \Sigma(-1)^{k'+l+j}\begin{Bmatrix} k & l & j \\ l' & k' & a \end{Bmatrix} g(\alpha\alpha'\gamma kk'a)(\alpha \,|\, \mathrm{T}_\gamma \,|\, \alpha')(l \,|\, \mathrm{B}^a_\gamma \,|\, l')\mathrm{F}^{\alpha'}_{k'l'}(r, t) \\
&\quad - i\mathrm{M}_0 c\mathrm{F}^\alpha_{kl}(r, t) = 0
\end{aligned}$$

En résumé nous avons écrit les équations radiales en fonction des $(\alpha \mid T_\gamma \mid \alpha')$ qui caractérisent les matrices de l'interaction et des éléments de matrices réduits $(l \mid B_\gamma^a \mid l')$ du champ d'interaction.

Si l'interaction ne dépend pas du temps on cherche une solution.

$$F(r, t)_{k,l}^\alpha = F(r)_{kl}^\alpha e^{-\frac{i}{\hbar}Wt}$$

Les $F(r)_{kl}^\alpha$ étant solution de l'équation:

$$\begin{aligned}
&\frac{W}{C}\sum_\alpha g(\alpha\alpha'(0,2)kk0)(\alpha \mid \Gamma_{(0,2)} \mid \alpha')F_{kl}^{\alpha'}(r) \\
&\quad + \sum_{\alpha'k'l'}(-1)^{k'+l+j}\begin{Bmatrix} k & l & j \\ l' & k' & 1 \end{Bmatrix} g(\alpha\alpha'(0,2)kk'1)(\alpha \mid \Gamma_{(0,2)} \mid \alpha')(l \mid p_{(0,2)}^1 \mid l')F_{k'l'}^{\alpha'}(r) \\
&\quad + \Sigma(-1)^{k'+l+j}\begin{Bmatrix} k & l & j \\ l' & k' & 1 \end{Bmatrix} g(\alpha\alpha'\gamma kk'a)(\alpha \mid T_\gamma \mid \alpha')(l \mid B_\gamma^a \mid l')F_{k'l'}^{\alpha'}(r) \\
&\quad - iM_0cF_{kl}^\alpha(r) = 0
\end{aligned}$$

Nous donnons maintenant les équations radiales sous une forme qui nous sera utile par la suite.

En tenant compte de la relation [1]: $\Gamma_p = -i[\Gamma_4, B_p]$, nous avons $\Gamma_{(0,2)}^{1q} = -i[\Gamma_{(0,2)}^0, B^{1q}]$ en posant:

$$B^{11} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(B_1 + iB_2) \quad ; \quad B^{10} = B_3 \quad ; \quad B^{1-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(B_1 - iB_2)$$

(les $B_k$ sont les opérateurs infinitésimaux fondamentaux de $\mathscr{L}_+^\uparrow$). $B^1$ est un opérateur tensoriel par rapport au groupe des rotations d'espace.

Les équations radiales s'écrivent:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha'}(\alpha k \mid \Gamma_{(0,2)}^0 \mid \alpha' k)(l \mid p_{(0,2)}^0 \mid l)F_{kl}^{\alpha'}(r, t) \\
&\qquad - i\sum_{\alpha'k'l'}\langle \alpha kljm \mid [\Gamma_{(0,2)}^0, B^1]p_1^{(0,2)} \mid \alpha'k'l'jm \rangle F_{k'l'}^{\alpha'}(r, t) \\
&\qquad + \sum_{\alpha'k'l'}(-1)^{k'+l+j}\begin{Bmatrix} k & l & j \\ l' & k' & a \end{Bmatrix}(\alpha k \mid T_\gamma^a \mid \alpha'k')(l \mid B_\gamma^a \mid l')F_{k'l'}^{\alpha'}(r, t) \\
&\qquad - iM_0cF_{kl}^\alpha(r, t) = 0
\end{aligned}$$

Nous avons:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha kljm \mid [\Gamma_{(0,2)}^0, B^1]p_{(0,2)}^1 \mid \alpha'k'l'jm \rangle &= \langle \alpha kljm \mid [\Gamma_{(0,2)}^0, B^1 p_{(0,2)}^1] \mid \alpha'k'l'jm \rangle \\
&= (\alpha k \mid \Gamma_{(0,2)}^0 \mid \alpha'k) \langle \alpha'kljm \mid B^1 p_{(0,2)}^1 \mid \alpha'k'l'jm \rangle \\
&\quad - \langle \alpha kljm \mid B^1 p_{(0,2)}^1 \mid \alpha k'l'jm \rangle \langle \alpha k' \mid \Gamma_{(0,2)} \mid \alpha'k')
\end{aligned}$$

Nous allons calculer les éléments de matrices $\langle \alpha kljm | B^1 p^1_{(0,2)} | \alpha k'l'jm \rangle$ de l'invariant $B^1 p^1_{(0,2)}$.

Nous avons :

$$\hbar\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ k\mu\end{smallmatrix}\right| T \left|\begin{smallmatrix}\alpha\\ k'\mu'\end{smallmatrix}\right) = \langle \alpha kj + \mu jm | B^1 p^1_{(0,2)} | \alpha k'j + \mu' jm \rangle$$
$$= (-1)^{k'+2j+\mu} \begin{Bmatrix} k & j+\mu & j \\ j+\mu' & k' & 1 \end{Bmatrix} (\alpha k | B^1 | \alpha k')(j+\mu | p^1_{(0,2)} | j+\mu')$$

ce qui donne :

$$\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ k\mu\end{smallmatrix}\right| T \left|\begin{smallmatrix}\alpha\\ k+1,\mu-1\end{smallmatrix}\right)$$
$$= -\left[\frac{(k-\mu+1)(k-\mu+2)(2j+\mu-k-1)(2j+\mu-k)}{[2(j+\mu)-1][2(j+\mu)+1]}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{C_{k+1}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j+\mu-1}{r}\right)$$

$$\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ k\mu\end{smallmatrix}\right| T \left|\begin{smallmatrix}\alpha\\ k+1,\mu+1\end{smallmatrix}\right)$$
$$= +\left[\frac{(k+\mu+1)(k+\mu+2)(2j+\mu+k+3)(2j+\mu+k+2)}{[2(j+\mu)+3][2(j+\mu)+1]}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{C_{k+1}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j+\mu+2}{r}\right)$$

$$\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ k\mu\end{smallmatrix}\right| T \left|\begin{smallmatrix}\alpha\\ k,\mu-1\end{smallmatrix}\right)$$
$$= \left[\frac{(k+\mu)(k-\mu+1)(2j+\mu-k)(2j+\mu+k+1)}{[2(j+\mu)-1][2(j+\mu)+1]}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{A_k}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j+\mu-1}{r}\right)$$

$$\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ k\mu\end{smallmatrix}\right| T \left|\begin{smallmatrix}\alpha\\ k,\mu+1\end{smallmatrix}\right)$$
$$= \left[\frac{(k-\mu)(k+\mu+1)(2j+\mu-k+1)(2j+\mu+k+2)}{[2(j+\mu)+3][2(j+\mu)+1]}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{A_k}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j+\mu+2}{r}\right)$$

$$\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ k\mu\end{smallmatrix}\right| T \left|\begin{smallmatrix}\alpha\\ k-1,\mu-1\end{smallmatrix}\right)$$
$$= -\left[\frac{(k+\mu)(k+\mu-1)(2j+\mu+k+1)(2j+\mu-k+1)}{[2(j+\mu)+3][2(j+\mu)+1]}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{C_k}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j+\mu-1}{r}\right)$$

$$\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ k\mu\end{smallmatrix}\right| T \left|\begin{smallmatrix}\alpha\\ k-1,\mu+1\end{smallmatrix}\right)$$
$$= +\left[\frac{(k-\mu)(k-\mu-1)(2j+\mu-k+1)(2j+\mu-k+2)}{[2(j+\mu)+3][2(j+\mu)+1]}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{C_k}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j+\mu+2}{r}\right)$$

Nous avons écrit les équations radiales sous la forme :

$$\{ p_4\Gamma^0_{(0,2)} - i\hbar[\Gamma^0_{(0,2)}, T] + T^a_\gamma B^\gamma_a - iM_0c \} F^\alpha_{k\mu}(r, t) = 0$$

avec

$$\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ k\mu\end{smallmatrix}\right| T^a_\gamma B^\gamma_a \left|\begin{smallmatrix}\alpha'\\ k'\mu'\end{smallmatrix}\right) = (-1)^{k'+2j+\mu} \begin{Bmatrix} k & j+\mu & j \\ j+\mu' & k' & a \end{Bmatrix} (\alpha k | T^a_\gamma | \alpha' k')(l | B^a_\gamma | l')$$

Effectuons le changement de fonction

$$F'^\alpha_{k\mu}(r, t) = \frac{\langle k, -k, j+\mu, m+k | k, j+\mu; j, m \rangle}{[N(j+\mu, m+k)]^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{(j-m)!}{(j+m)!}\right]^{\frac{1}{2}} F^\alpha_{k\mu}(r, t)$$

où l'on a posé :

$$\mathrm{N}(l, \sigma) = \frac{4\pi(l+\sigma)!}{(2l+1)(l-\sigma)!}$$

Avec ce changement de fonction nous trouvons des expressions plus simples pour les éléments de matrices.

Nous obtenons les équations

$$[p_4\Gamma^0_{(0,2)} - i\hbar[\Gamma^0_{(0,2)}, \mathrm{T}'] + (\mathrm{T}^a_\gamma \mathrm{B}^\gamma_a)' - i\mathrm{M}_0 c]\mathrm{F}'^\alpha_{k\mu}(r, t) = 0$$

avec :

$$\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ k\mu\end{smallmatrix}\right| \mathrm{T}^a_\gamma \mathrm{B}^\gamma_a \left|\begin{smallmatrix}\alpha'\\ k'\mu'\end{smallmatrix}\right) = \frac{\langle k', -k', j+\mu', m+k' | k', j+\mu', j, m\rangle [\mathrm{N}(j+\mu, m+k)]^{\frac{1}{2}}}{\langle k, -k, j+\mu, m+k | k, j+\mu, j, m\rangle [\mathrm{N}(j+\mu', m+k')]^{\frac{1}{2}}} \left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ k\mu\end{smallmatrix}\right| \mathrm{T}^a_\gamma \mathrm{B}^\gamma_a \left|\begin{smallmatrix}\alpha'\\ k'\mu'\end{smallmatrix}\right)$$

et pour T′ les expressions plus simples :

$$\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ k\mu\end{smallmatrix}\right| \mathrm{T}' \left|\begin{smallmatrix}\alpha\\ k+1,\mu-1\end{smallmatrix}\right) = -\frac{(k-\mu+1)(k-\mu+2)(2j+\mu-k-1)(2j+\mu-k)}{[2(j+\mu)-1][2(k+1)(2k+1)]^{\frac{1}{2}}} \frac{\mathrm{C}_{k+1}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j+\mu-1}{r}\right)$$

$$\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ k\mu\end{smallmatrix}\right| \mathrm{T}' \left|\begin{smallmatrix}\alpha\\ k+1,\mu+1\end{smallmatrix}\right) = +\frac{(k+\mu+1)(k+\mu+2)(2j+\mu+k+3)(2j+\mu+k+2)}{[2(j+\mu)+3][2(k+1)(2k+1)]^{\frac{1}{2}}} \frac{\mathrm{C}_{k+1}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j+\mu+2}{r}\right) \tag{2}$$

$$\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ k\mu\end{smallmatrix}\right| \mathrm{T}' \left|\begin{smallmatrix}\alpha\\ k,\mu-1\end{smallmatrix}\right) = +[2(j+\mu)-1]^{-1}(k-\mu+1)(2j+\mu-k)\frac{\mathrm{A}_k}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j+\mu-1}{r}\right)$$

$$\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ k\mu\end{smallmatrix}\right| \mathrm{T}' \left|\begin{smallmatrix}\alpha\\ k,\mu+1\end{smallmatrix}\right) = +[2(j+\mu)+3]^{-1}(k+\mu+1)(2j+\mu+k+2)\frac{\mathrm{A}_k}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j+\mu+2}{r}\right)$$

$$\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ k\mu\end{smallmatrix}\right| \mathrm{T}' \left|\begin{smallmatrix}\alpha\\ k-1,\mu-1\end{smallmatrix}\right) = -[2(j+\mu)-1]^{-1}[2k(2k-1)]^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{C}_k}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j+\mu-1}{r}\right)$$

$$\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ k\mu\end{smallmatrix}\right| \mathrm{T}' \left|\begin{smallmatrix}\alpha\\ k-1,\mu+1\end{smallmatrix}\right) = +[2(j+\mu)+3]^{-1}[2k(2k-1)]^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{C}_k}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j+\mu+2}{r}\right)$$

## V. THÉORIE DE LA FUSION

Dans la représentation [1] que nous avions appelée représentation 2 les équations radiales s'écrivent :

$$\left(p_4\mathrm{L}_4 + \hbar\mathrm{T}' + (\mathrm{T}^a_\gamma \mathrm{B}^\gamma_a)' - in\frac{m_0 c}{2}\right)\mathrm{F}(r, t)^\alpha_{k\mu} = 0$$

avec :

$$\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ k\mu\end{smallmatrix}\right| \mathrm{L}_4 \left|\begin{smallmatrix}\alpha'\\ k\mu\end{smallmatrix}\right) = (\Gamma_4)^{\alpha\alpha'}_{kk;\nu\nu}$$

$$\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ k\mu\end{smallmatrix}\right| (\mathrm{T}^a_\gamma \mathrm{B}^\gamma_a)' \left|\begin{smallmatrix}\alpha'\\ k'\mu'\end{smallmatrix}\right)$$

$$= (-1)^{k'+2j+\mu} \begin{Bmatrix} k & j+\mu & j \\ j+\mu' & k' & a \end{Bmatrix} (\alpha k \,|\, \mathrm{T}^a_\gamma \,|\, \alpha' k')(j+\mu \,|\, \mathrm{B}^a_\gamma \,|\, j'+\mu')$$

T′ étant donné par les formules (2).

## VI. REPRÉSENTATION $\Gamma_4$ DIAGONAL

Si nous comparons les valeurs des éléments de matrice des $\Gamma_p$ de la « représentation 2 » et les valeurs des éléments de matrices des $\Gamma_p$ que nous avons calculées dans la représentation « $\Gamma_4$ diagonale » ; nous déduisons à partir des valeurs des éléments de matrices de l'opérateur T′ dans la représentation 2, les valeurs des éléments de matrices de T′ dans la représentation $\Gamma_4$ diagonale qui s'écrivent :

$$\left(\begin{smallmatrix}k_0\\ k\mu\end{smallmatrix}\right| \mathrm{T}' \left|\begin{smallmatrix}k_0\pm 1\\ k+1,\mu+1\end{smallmatrix}\right)$$

$$= + \frac{(k+\mu+1)(k+\mu+2)(2j+\mu+k+3)(2j+\mu+k+2)}{2[2(j+\mu)+3][2(k+1)(2k+1)]^{\frac{1}{2}}} \mathrm{C}^{k_0,k_0\pm 1}_{k,k+1}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j+\mu+2}{r}\right)$$

$$\left(\begin{smallmatrix}k_0\\ k\mu\end{smallmatrix}\right| \mathrm{T}' \left|\begin{smallmatrix}k_0\pm 1\\ k+1,\mu-1\end{smallmatrix}\right)$$

$$= - \frac{(k-\mu+1)(k-\mu+2)(2j+\mu-k-1)(2j+\mu-k)}{2[2(j+\mu)-1][2(k+1)(2k+1)]^{\frac{1}{2}}} \mathrm{C}^{k_0,k_0\pm 1}_{k,k+1}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j+\mu-1}{r}\right)$$

$$\left(\begin{smallmatrix}k_0\\ k\mu\end{smallmatrix}\right| \mathrm{T}' \left|\begin{smallmatrix}k_0\pm 1\\ k,\mu+1\end{smallmatrix}\right) = \pm \frac{(k+\mu+1)(2j+\mu+k+2)}{2[2(j+\mu)+3]} \mathrm{C}^{k_0,k_0\pm 1}_{k,k}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j+\mu+2}{r}\right)$$

$$\left(\begin{smallmatrix}k_0\\ k\mu\end{smallmatrix}\right| \mathrm{T}' \left|\begin{smallmatrix}k_0\pm 1\\ k,\mu-1\end{smallmatrix}\right) = \pm \frac{(k-\mu+1)(2j+\mu-k)}{2[2(j+\mu)-1]} \mathrm{C}^{k_0,k_0\pm 1}_{k,k}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j+\mu-1}{r}\right)$$

$$\left(\begin{smallmatrix}k_0\\ k\mu\end{smallmatrix}\right| \mathrm{T}' \left|\begin{smallmatrix}k_0\pm 1\\ k-\mu,\mu+1\end{smallmatrix}\right) = \frac{+[2k(2k-1)]^{\frac{1}{2}}}{2[2(j+\mu)+3]} \mathrm{C}^{k_0,k_0\pm 1}_{k,k-1}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j+\mu+2}{r}\right)$$

$$\left(\begin{smallmatrix}k_0\\ k\mu\end{smallmatrix}\right| \mathrm{T}' \left|\begin{smallmatrix}k_0\pm 1\\ k+1,\mu-1\end{smallmatrix}\right) = - \frac{[2k(2k-1)]^{\frac{1}{2}}}{2[2(j+\mu)-1]} \mathrm{C}^{k_0,k_0\pm 1}_{k,k-1}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j+\mu-1}{r}\right)$$

Les équations radiales s'écrivent :

$$\left\{ p_4 \mathrm{L}_4 + \mathrm{T}' + (\mathrm{T}^a_\gamma \mathrm{B}^\gamma_a)' - \frac{inm_0 c}{2} \right\} \mathrm{F}(r, t)^{k_0}_{k\mu} = 0$$

avec

$$\left(\begin{smallmatrix}k_0\\ k\mu\end{smallmatrix}\right| \mathrm{L}_4 \left|\begin{smallmatrix}k_0\\ k\mu\end{smallmatrix}\right) = (\Gamma_4)^{k_0,k_0'}_{k,k;\nu,\nu} = k_0 \delta_{k_0 k_0'}$$

Si le champ d'interaction à symétrie sphérique se réduit à la composante $B_{00}^{0,2}$ les équations deviennent : $B_{00}^{0,2} = U(r, t)$

$$\left\{ [p_4 + U(r, t)]k_0 + T' - \frac{inm_0c}{2} \right\} F(r, t)_{k\mu}^{k_0} = 0$$

si B ne dépend pas de $t$ nous pouvons écrire

$$F(r, t)_{k\mu}^{k_0} = e^{\frac{i}{\hbar}Wt} F(r)_{k\mu}^{k_0}$$

$F(r)_{k\mu}^{k_0}$ étant solution de l'équation :

$$\left(K_1 k_0 - \frac{n}{2} X_0\right) F(r)_{k\mu}^{k_0} - i\left(\begin{smallmatrix}k_0\\ k\mu\end{smallmatrix}\right| T' \left|\begin{smallmatrix}k'_0\\ k'\mu'\end{smallmatrix}\right) F(r)_{k',\mu'}^{k'_0} = 0$$

ou $\quad K_1 = \dfrac{W}{\hbar c} + \dfrac{e}{\hbar c} A_0(r) \quad ; \quad \dfrac{ie}{c} A_0(r) = U(r) \quad ; \quad X_0 = \dfrac{m_0 c}{\hbar}$

En considérant la forme de la matrice T′ et en tenant compte du fait que $L_4$ est diagonal, nous voyons que le système d'équations radiales se sépare en deux systèmes indépendants.

1) Système 1

$$\left[ [p_4 + B(r, t)]k_0 - \frac{inm_0c}{2} \right] F(r, t)_{k\mu_1}^{k_0} + \hbar\left(\begin{smallmatrix}k_0\\ k\mu_1\end{smallmatrix}\right| T' \left|\begin{smallmatrix}k'_0\\ k',\mu'_1\end{smallmatrix}\right) F(r, t)_{k',\mu'_1}^{k'_0}$$

où les $\mu_1$ associés aux $k$, $k_0$ prennent les valeurs $-k + 2n \leqslant k$ ($n$ entier $> 0$) si $(s - k_0)$ est impair et prennent les valeurs $-k + 1 + 2n \leqslant k - 1$ si $(s - k_0)$ est pair.

2) Système 2

$$\left[ (p_4 + U(r, t))k_0 - \frac{inm_0c}{2} \right] F(r, t)_{k,\mu_2}^{k_0} + \hbar\left(\begin{smallmatrix}k_0\\ k\mu_2\end{smallmatrix}\right| T' \left|\begin{smallmatrix}k'_0\\ k'\mu'_2\end{smallmatrix}\right) F(r, t)_{k'\mu'_2}^{k'_0} = 0$$

où les $\mu_2$ associés aux $k$, $k_0$ prennent les valeurs $-k + 2n \leqslant k$ ($n$ entier positif) si $(s - k_0)$ est pair et prennent les valeurs $-k + 1 + 2n \leqslant k - 1$ si $(s - k_0)$ est impair.

Nous voyons donc que l'un des avantages de cette représentation est de séparer la solution en deux types de solutions indépendantes.

Si U ne dépend pas de $t$ on est dans le cas d'un potentiel de type électrostatique et les équations radiales s'écrivent :

$$\left\{ \left(\frac{W}{c} + \frac{e}{c} A_0(r)\right) k_0 - i\hbar T' - \frac{nm_0c}{2} \right\} F(r)_{k,\mu}^{k_0} = 0$$

ou encore $$\left(K_1 k_0 - \frac{n}{2} X_0\right) F(r)^{k_0}_{k\mu} - i\left({}^{k_0}_{k\mu}\right| T' \left|{}^{k'_0}_{k'\mu'}\right) F(r)^{k'_0}_{k'\mu'} = 0$$

*Particule* $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *de spin* $\frac{1}{2}$

Considérons le cas de l'électron à spin de Dirac qui correspond dans la présente classification à la particule $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Nous avons les équations radiales :

1) Système 1

$$\begin{cases} \frac{1}{2}[K_1 - X_0] F(r)^{\frac12}_{\frac12\ \frac12} - i\left({}^{\frac12}_{\frac12\ \frac12}\right| T' \left|{}^{-\frac12}_{\frac12\ -\frac12}\right) F(r)^{-\frac12}_{\frac12\ -\frac12} = 0 \\ \frac{1}{2}[- K - X_0] F(r)^{-\frac12}_{\frac12\ -\frac12} - i\left({}^{-\frac12}_{\frac12\ -\frac12}\right| T' \left|{}^{\frac12}_{\frac12\ \frac12}\right) F(r)^{\frac12}_{\frac12\ \frac12} = 0 \end{cases}$$

qui s'écrit :

$$\begin{cases} (K_1 - X_0) F(r)^{\frac12}_{\frac12\ \frac12} + i\left(\frac{d}{dr} - \frac{j - \frac{1}{2}}{r}\right) F(r)^{-\frac12}_{\frac12\ -\frac12} = 0 \\ (K_1 + X_0) F(r)^{-\frac12}_{\frac12\ \frac12} + i\left(\frac{d}{dr} + \frac{j + \frac{3}{2}}{r}\right) F(r)^{\frac12}_{\frac12\ \frac12} = 0 \end{cases}$$

2) Système 2

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(K_1 - X_0) F(r)^{\frac12}_{\frac12\ -\frac12} - i\left({}^{\frac12}_{\frac12\ -\frac12}\right| T' \left|{}^{-\frac12}_{\frac12\ \frac12}\right) F(r)^{-\frac12}_{\frac12\ \frac12} = 0 \\ \frac{1}{2}(- K_1 - X_0) F(r)^{-\frac12}_{\frac12\ \frac12} - i\left({}^{-\frac12}_{\frac12\ \frac12}\right| T' \left|{}^{\frac12}_{\frac12\ -\frac12}\right) F(r)^{\frac12}_{\frac12\ -\frac12} = 0 \end{cases}$$

s'écrit :

$$\begin{cases} (K_1 - X_0) F(r)^{\frac12}_{\frac12\ -\frac12} + i\left(\frac{d}{dr} + \frac{j + \frac{3}{2}}{r}\right) F(r)^{-\frac12}_{\frac12\ -\frac12} = 0 \\ (K_1 + X_0) F(r)^{-\frac12}_{\frac12\ \frac12} + i\left(\frac{d}{dr} - \frac{j - \frac{1}{2}}{r}\right) F(r)^{\frac12}_{\frac12\ -\frac12} = 0 \end{cases}$$

*Particule* (2,1) *de spin* 1.

A) Résolution du système 1 : ce système s'écrit :

$$\begin{cases} -(K_1 - X_0)F^1_{10} - \dfrac{i}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{d}{dr} + \dfrac{j+2}{r}\right)F^0_{11} - \dfrac{i}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{d}{dr} - \dfrac{j-1}{r}\right)F^0_{1-1} = 0 \\ + X_0F^0_{11} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}\dfrac{j}{2j+1}\left(\dfrac{d}{dr} - \dfrac{j}{r}\right)(F^1_{10} - F^{-1}_{10}) = 0 \\ + X_0F^0_{1-1} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}\dfrac{j+1}{2j+1}\left(\dfrac{d}{dr} + \dfrac{j+1}{r}\right)(F^1_{10} - F^{-1}_{10}) = 0 \\ + (K_1 + X_0)F^{-1}_{10} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{d}{dr} + \dfrac{j+2}{r}\right)F^0_{11} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{d}{dr} - \dfrac{j-1}{r}\right)F^0_{1-1} = 0 \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} F^1_{10} + F^{-10}_{10} = \dfrac{K_1}{X_0}(F^1_{10} - F^{-1}_{10}) = 0 \\ F^0_{11} = \dfrac{i}{\sqrt{2}X_0}\dfrac{j}{2j+1}\left(\dfrac{d}{dr} - \dfrac{j}{r}\right)(F^1_{10} - F^{-1}_{10}) = 0 \\ F^0_{1-1} = \dfrac{i}{\sqrt{2}X_0}\dfrac{j+1}{2j+1}\left(\dfrac{d}{dr} + \dfrac{j+1}{r}\right)(F^1_{10} - F^{-1}_{10}) = 0 \\ \left\{\dfrac{d^2}{dr^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{d}{dr} - \dfrac{j(j+1)}{r^2} + (K_1^2 - X_0^2)\right\}(F^1_{10} - F^{-1}_{10}) = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système se ramène à la résolution d'une équation différentielle du second ordre, dont les solutions sont bien connues.

B) Résolution du système 2 : ce système s'écrit

$$\begin{cases} -(K_1 - X_0)F^1_{11} - \dfrac{i}{\sqrt{2}}\dfrac{j}{2j+1}\left(\dfrac{d}{dr} - \dfrac{j}{r}\right)F^0_{10} - \dfrac{i}{2}\dfrac{1}{2j+1}\left(\dfrac{d}{dr} - \dfrac{j}{r}\right)F^0_{00} = 0 \\ -(K_1 - X_0)F^1_{1-1} - \dfrac{i}{\sqrt{2}}\dfrac{j+1}{2j+1}\left(\dfrac{d}{dr} + \dfrac{j+1}{r}\right)F^0_{10} + \dfrac{i}{2}\dfrac{1}{2j+1}\left(\dfrac{d}{dr} + \dfrac{j+1}{r}\right)F^0_{00} = 0 \\ + X_0F^0_{10} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{d}{dr} + \dfrac{j+2}{r}\right)(F^1_{11} - F^{-1}_{11}) + \dfrac{i}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{d}{dr} - \dfrac{j-1}{r}\right)(F^1_{1-1} - F^{-1}_{1-1}) = 0 \\ + X_0F^0_{00} + i(j+1)\left(\dfrac{d}{dr} + \dfrac{j+2}{r}\right)(F^1_{11} + F^{-1}_{11}) - ij\left(\dfrac{d}{dr} - \dfrac{j-1}{r}\right)(F^1_{1-1} + F^{-1}_{1-1}) = 0 \\ + (K_1 + X_0)F^{-1}_{1-1} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}\dfrac{j+1}{2j+1}\left(\dfrac{d}{dr} + \dfrac{j+1}{r}\right)F^0_{10} + \dfrac{i}{2}\dfrac{1}{2j+1}\left(\dfrac{d}{dr} + \dfrac{j+1}{r}\right)F^0_{00} = 0 \\ + (K_1 + X_0)F^{-1}_{11} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}\dfrac{j}{2j+1}\left(\dfrac{d}{dr} - \dfrac{j}{r}\right)F^0_{10} - \dfrac{i}{2}\dfrac{1}{2j+1}\left(\dfrac{d}{dr} - \dfrac{j}{r}\right)F^0_{00} = 0 \end{cases}$$

En posant : $F^1_{1-1} + F^{-1}_{1-1} = f_1$ ; $F^1_{11} + F^{-1}_{11} = f_2$ ; $F^0_{10} = -f_3$ ; $F^0_{00} = -f_4$ ; $F^1_{1-1} - F^{-1}_{1-1} = f_5$, $F^1_{11} - F^{-1}_{11} = f_6$.

Le système devient :

$$\left\{\begin{aligned}
& K_1 f_5 - X_0 f_1 + \frac{i}{2j+1}\left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r}\right) f_4 = 0 \\
& K_1 f_6 - X_0 f_2 - \frac{i}{2j+1}\left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r}\right) f_4 = 0 \\
& K_1 f_1 - X_0 f_5 - \frac{i\sqrt{2}(j+1)}{2j+1}\left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r}\right) f_3 = 0 \\
& K_1 f_2 - X_0 f_6 - \frac{i\sqrt{2}j}{2j+1}\left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r}\right) f_3 = 0 \\
& - X_0 f_3 + \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r}\right) f_5 + \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r}\right) f_6 = 0 \\
& - X_0 f_4 - ij\left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r}\right) f_1 + i(j+1)\left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r}\right) f_2 = 0
\end{aligned}\right.$$

Nous exprimons $f_1$, $f_2$, $f_5$, $f_6$ en fonction de $f_3$ et $f_4$.

$$f_1 = \frac{1}{K_1^2 - X_0^2}\left[\frac{-iX_0}{2j+1}\left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r}\right) f_4 + \frac{i\sqrt{2}K_1(j+1)}{2j+1}\left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r}\right) f_3\right]$$

$$f_5 = \frac{1}{K_1^2 - X_0^2}\left[\frac{-iK_1}{2j+1}\left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r}\right) f_4 + \frac{i\sqrt{2}X_0(j+1)}{2j+1}\left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r}\right) f_3\right]$$

$$f_2 = \frac{1}{K_1^2 - X_0^2}\left[\frac{-iK_1}{2j+1}\left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r}\right) f_4 + \frac{i\sqrt{2}K_1 j}{2j+1}\left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r}\right) f_3\right]$$

$$f_6 = \frac{1}{K_1^2 - X_0^2}\left[\frac{iK_1}{2j+1}\left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r}\right) f_4 + \frac{i\sqrt{2}X_0 j}{2j+1}\left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r}\right) f_3\right]$$

Si nous portons ces expressions de $f_1$, $f_2$, $f_5$, $f_6$ dans les deux dernières équations du système précédent, nous obtenons un système de deux équations différentielles du second ordre.

$$(K_1^2 - X_0^2)\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + \frac{j(j+1)}{r^2} + (K_1^2 - X_0^2)\right] f_3 - 2K_1K_1'\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{2}\right) f_3 + \frac{(K_1^2 + X_0^2)}{\sqrt{2}X_0 r} K_1' f_4 = 0$$

$$(K_1^2 - X_0^2)\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{j(j+1)}{r^2} + (K_1^2 - X_0^2)\right] f_4 - 2K_1K_1'\frac{d}{dr} f_4 + \frac{2j(j+1)(K_1^2 + X_1^2)}{X_0 r} K_1' f_3 = 0$$

où

$$K_1' = \frac{d}{dr}(K_1)$$

En posant

$$\Lambda = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{j(j+1)}{r^2} + (K_1^2 - X_0^2)$$

et en faisant le changement de fonctions: $f_3 = g_1$, $f_4 = [2j(j+1)]^{\frac{1}{2}} g_2$ nous obtenons:

$$\left\{\begin{array}{l} (K_1^2 - X_0^2)\Lambda g_1 - 2K_1K_1'\left(\dfrac{d}{dr} + \dfrac{1}{r}\right)g_1 + [j(j+1)]^{\frac{1}{2}} \dfrac{(K_1^2 + X_0^2)}{X_0 r} K_1' g_2 = 0 \\ K_1^2 - X_0^2 \Lambda g_2 - 2K_1K_1' \dfrac{d}{dr} g_2 + [j(j+1)]^{\frac{1}{2}} \dfrac{K_1^2 - X_0^2}{X_0 r} K_1' g_1 = 0 \end{array}\right.$$

Cette dernière forme des équations radiales nous semble plus symétrique que celle donnée par Bartlett.

Remarquons que pour un potentiel constant ces équations se réduisent à $\Lambda g_1 = 0, \Lambda g_2 = 0$ dont les solutions sont les fonctions de Bessel sphériques $j_1(kr)$. Si nous éliminons $f_3$, $f_4$ dans le système linéaire précédent nous retrouvons les équations de Gunn [9].

## CONCLUSION

La méthode que nous avons utilisée pour la séparation des variables angulaires et radiales peut se généraliser sans difficultés à un système linéaire de rang fini d'équations aux dérivées partielles du $n^{\text{ième}}$ ordre de forme invariante par rapport au groupe de Lorentz.

## RÉFÉRENCES


[1] A. Jolivet, Sur les interactions dans les équations d'ondes des particules à spin. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. XIII, n° 4, 1970, p. 345-362.

[2] J. H. Bartlett, *The vector Mesotron*, t. **72**, 1947, p. 219.

[3] G. Racah, Theory of complex Spectra II. *Phys. Rev.*, t. **62**, 1942, p. 438.

[4] E. P. Wigner, *On the matrices wich reduce the Kronecker products of simply reducible groups*. Princeton, 1951.

[5] H. A. Jahn, Theorical studies in nuclear structure. *Proc. Roy. Soc.*, t. **205**, 1951 A, p. 192.

[6] L. C. Biedenharn, *Tables of the Racah Coefficients*. OAK Ridge National Laboratory, physics Division, ORNL 1501, suppl. 1, February 1954.

L. C. BIEDENHARN et A. SIMON, *Revised Z tables of the Racah coefficients*. OAK Ridge National Laboratory, Physics Division.

[7] A. R. EDMONDS et B. D. FLOWERS, Studies in *jj*-coupling. *Proc. Roy. Soc.*, t. **214**, 1952 A, p. 515.

[8] M. SATO, *Prog. Theor. Phys.*, t. **13**, 1955, p. 405.

[9] J. C. GUNN, Interaction of mesons with a potentiel field. *Proc. Roy. Soc.*, t. **A 193**, 1948, p. 559.

*Manuscrit reçu le 11 janvier 1971.*