Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

Ann. I. H. Poincaré – AN 23 (2006) 127–133

ANNALES DE L'INSTITUT HENRI POINCARÉ ANALYSE NON LINÉAIRE

www.elsevier.com/locate/anihpc

Sur une question de H. Brezis, M. Marcus et A.C. Ponce

On a question of H. Brezis, M. Marcus and A.C. Ponce

Alano Ancona

Université Paris Sud, Centre d'Orsay, Mathématiques, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex, France

Reçu le 12 octobre 2004 ; accepté le 3 février 2005

Disponible sur Internet le 15 avril 2005

Résumé

À la suite d'une question soulevée dans un travail de Brezis–Marcus–Ponce [5] on montre que si μ est une mesure de Radon diffuse et singulière sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^d$, il n'existe pas d'application linéaire continue $f \mapsto (u_f, g_f)$ de $L^1(\mu)$ dans $H^1(U) \times L^1(U)$ telle que $f \cdot \mu = \Delta u_f + g_f$ au sens de $\mathcal{D}'(U)$. On indique ensuite une généralisation.

Abstract

Investigating a question raised in a recent paper of Brezis–Marcus–Ponce [5] we show that if μ is a singular continuous Radon measure in the open subset U of $\mathbb{R}^d$, there is no continuous linear map $f \mapsto (u_f, g_f)$ from $L^1(\mu)$ to $H^1(U) \times L^1(U)$ such that $f \cdot \mu = \Delta u_f + g_f$ in the sense of distributions. A generalization is also described.

MSC : 31C15 ; 31C25 ; 35J05 ; 46E35

Mots-clés : Capacité ; Ensemble polaire ; Espaces de Sobolev ; Mesures d'énergie finie

1. Introduction

On considère dans cette note une des questions posées dans un travail récent (ref. [5]) de H. Brezis, M. Marcus et A.C. Ponce sur les équations non linéaires du type $-\Delta u + g(u) = \mu$ où μ est une mesure sur un domaine de $\mathbb{R}^d$. Cette question concerne une décomposition connue de certaines mesures et se rattache à l'étude des espaces de Sobolev du type $H^1(U)$, U ouvert de $\mathbb{R}^d$.

Adresse e-mail : alano.ancona@math.u-psud.fr (A. Ancona).

0294-1449/$ – see front matter
doi:10.1016/j.anihpc.2005.02.004

Pour U ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ (d entier $\geqslant 2$), considérons l'espace $M(U)$ des mesures de Radon sur U de masse totale finie et ne chargeant pas les ensembles polaires de la théorie classique du Potentiel (ref. [6,11]). Rappelons qu'une mesure de Radon sur U qui est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue ne charge pas les ensembles polaires de U – on a donc $L^1(U) \subset M(U)$ –, et que toute mesure de Radon de masse totale finie sur U et de la forme $\nu = \Delta u$ avec $u \in H_0^1(U)$ (c'est à dire telle que $\nu \in H^{-1}(U)$) est aussi élément de $M(U)$ (cf. [10]). Inversement, Boccardo, Gallouët et Orsina ont montré que toute mesure ν dans $M(U)$ admet une décomposition $\nu = f + \Delta u$ avec $f \in L^1(U)$ et $u \in H_0^1(U)$ [2]. Le Théorème 3 de [5] établit, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, une telle décomposition avec u continue sur $\overline{U}$, nulle sur ∂U, et $\|f\|_{L^1(U)} \leqslant \|\nu\|_1$, $\|u\|_{H^1} + \|u\|_\infty \leqslant \varepsilon \|\nu\|_1$. Ici $\|\cdot\|_1$ désigne la norme de variation totale, soit $\|\sigma\|_1 = |\sigma|(U)$ si σ est une mesure de Radon sur U.

La question (Open Problem 3 de [5]) de Brezis, Marcus et Ponce est alors de savoir s'il existe un opérateur linéaire $\nu \mapsto (f_\nu, u_\nu)$ de $M(U)$ dans $L^1(U) \times H_0^1(U)$ tel que pour toute $\nu \in M(U)$ on ait $\nu = f_\nu + \Delta u_\nu$, cette décomposition de ν étant du type ci-dessus. On va voir qu'il n'en est rien – même si on n'impose pas à la décomposition les raffinements du Theorem 3 de [5] –, en établissant l'énoncé qui suit. Dans toute la suite λ_d désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ et $H^1(U)$ l'espace de Sobolev des fonctions (*réelles*) $f \in L^2(U)$ dont le gradient ∇f (au sens des distributions) appartient à $L^2(U; \mathbb{R}^d)$, muni du produit scalaire usuel $\langle f, g\rangle_{H^1(U)} = \int_U fg \, \mathrm{d}\lambda_d + \int_U \nabla f \cdot \nabla g \, \mathrm{d}\lambda_d$.

Théorème 1. *Soit μ une mesure de Radon positive sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^d$ et soit*

$$K : L^1(\mu) \to H^1(U)$$

un opérateur linéaire continu. Si pour chaque $f \in L^1(\mu)$ la distribution $\nu_f = \Delta(K(f))$ est une mesure de Radon sur U telle que $\nu_f - f \cdot \mu$ soit absolument continue (*par rapport à λ_d*), *alors μ est nécessairement absolument continue.*

Si U est non vide il existe des mesures $\mu \in M(U)$ positives et singulières par rapport à λ_d, par exemple la mesure de $(d-1)$-volume d'une sphère (ou d'une portion d'hyperplan) contenue dans U. En considérant une telle mesure μ, et en identifiant l'espace de Banach $L^1(\mu)$ à un sous-espace de $M(U)$, on voit que le théorème 1 résout négativement le problème de [5] considéré ici.

Remarque 1.1. On notera dans la partie 4 un énoncé plus général (Théorème 1bis et Corollaire 6).

Remarque 1.2. Signalons deux autres exemples connus d'opérateurs naturels, bornés et surjectifs, mais sans inverse à droite. J. Peetre [13] a montré que c'est le cas pour l'opérateur de trace $W^{1,1}(\mathbb{R}^{d+1}) \ni f \xrightarrow{T} f(\cdot, 0) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ de Gagliardo [9]. Si $L^p_\# := \{f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d);\ f\, 2\pi\mathbb{Z}^d\text{-périodique et } \int_{[0,2\pi]^d} f = 0\}$ et si $\mathcal{E} := \{Y \in L^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d);\ Y\ 2\pi\mathbb{Z}^d\text{-périodique et } \operatorname{div}(Y) \in L^d_\#\}$, Bourgain et Brezis montrent dans [4] que $\mathcal{E} \ni Y \overset{\delta}{\mapsto} \operatorname{div}(Y) \in L^d_\#$ est surjectif mais également sans inverse à droite borné.

2. Opérateurs linéaires $K : L^1(\mu) \to H^1(U)$ et noyaux

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et μ une mesure positive σ-finie sur un espace mesurable $(Y, \mathcal{F})$. On notera $\mathcal{B}or(V)$ la tribu borélienne d'une partie V de $\mathbb{R}^d$ et, comme plus haut, λ_d la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. La preuve du Théorème 1 s'appuiera sur une description (Lemmes 2 et 3) des opérateurs linéaires continus $K : L^1(\mu) \to H^1(U)$, description essentiellement contenue dans un résultat classique et bien plus général de Dunford–Pettis [7] 1940 (cf. [3] p. 46, [8] p. 503). Pour des raisons de commodité de lecture, on a développé une preuve du Lemme 2 et dans une certaine mesure celle du Lemme 3.

Lemme 2. *Soit $k : U \times Y \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{B}or(U) \otimes \mathcal{F}$-mesurable telle que, pour chaque $y \in Y$, $k_y := k(\cdot, y) \in H^1(U)$ et $\|k_y\|_{H^1(U)} \leqslant C$ où $C \in \mathbb{R}_+$ est indépendant de y. Alors pour toute $f \in L^1(\mu)$, la formule*

$$K_f(x) = \int_Y k(x, y) f(y)\,\mathrm{d}\mu(y)$$

définit un élément $K_f \in H^1(U)$, l'intégrale définissant $K_f(x)$ étant convergente au sens de Lebesgue pour λ_d presque tout $x \in U$. De plus $\|K_f\|_{H^1(U)} \leqslant C\|f\|_{L^1(\mu)}$.

Preuve. Observons d'abord que l'application $y \mapsto k_y$ de $(Y, \mathcal{F})$ dans $H^1(U)$ est scalairement mesurable, i.e. que $y \mapsto \langle k_y, \varphi\rangle_{H^1(U)} = \int_U k_y(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{1\leqslant j\leqslant d} \int_U \partial_j k_y(x)\partial_j\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ est $\mathcal{F}$-mesurable pour toute $\varphi \in H^1(U)$. En approchant, dans $L^2(U)$, φ et les $\partial_j\varphi$ par des fonctions de classe $C_0^\infty(U)$, on est ramené à montrer que $y \mapsto \int k(x, y)\psi(x)\,\mathrm{d}x$ est $\mathcal{F}$-mesurable sur Y pour $\psi \in C_0^\infty(U)$. Ce qui découle du théorème de Fubini puisque la fonction $(x, y) \mapsto k(x, y)\psi(x)$ est $\mathcal{B}or(U) \otimes \mathcal{F}$-mesurable (et λ_d intégrable en x).

Comme $H^1(U)$ est séparable, l'application $y \mapsto k_y$ est donc fortement mesurable de $(Y, \mathcal{F})$ dans $H^1(U)$. Et comme $\|k_y\|_{H^1(U)} \leqslant C$, on voit que pour toute $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, l'intégrale vectorielle (ref. [8] III.2)

$$\widetilde{K}_f := \int_Y f(y) k_y\,\mathrm{d}\mu(y)$$

existe au sens de Bochner (c.à.d. au sens de [8] III.2) dans $H^1(U)$ – l'intégrante étant vue comme fonction mesurable à valeurs dans $H^1(U)$ –, et définit un élément $\widetilde{K}_f$ de $H^1(U)$ tel que $\|\widetilde{K}_f\|_{H^1(U)} \leqslant C\|f\|_{L^1(\mu)}$.

Pour $\varphi \in \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{R}}(U)$ à support compact, on a d'après la continuité de $u \mapsto \int_U u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ sur $H^1(U)$, les propriétés de linéarité de l'intégrale vectorielle et le théorème de Fubini,

$$\int_U \widetilde{K}_f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_Y f(y)\left[\int_U k_y(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \int_U \varphi(x) K_f(x)\,\mathrm{d}x,$$

où φK_f est définie presque partout et intégrable dans U. L'arbitraire sur φ donne $K_f = \widetilde{K}_f$ p.p. dans U et le lemme est établi. □

Remarques 2.1. (a) On peut vérifier plus directement le lemme sans passer par la notion d'intégrale de Bochner. Mais celle-ci est utile pour la suite. (b) (*Unicité de k*) Deux noyaux $k^{(1)}, k^{(2)} : U \times Y \to \mathbb{R}$ comme dans le lemme définissent la même application linéaire de $L^1(\mu)$ dans $H^1(U)$ si, et seulement si, on a $k^{(1)} = k^{(2)}$ $\lambda_d \otimes \mu$-p.p.

Passons à la réciproque du lemme, donnée par le théorème de Dunford–Pettis [7,3] ou [8].

Lemme 3. *Soit $K : L^1(\mu) \to H^1(U)$ une application linéaire continue. Il existe une fonction $k : U \times Y \to \mathbb{R}$ qui est $\mathcal{B}or(U) \otimes \mathcal{F}$-mesurable et telle que* :

(i) *pour chaque $y \in Y$, $k_y = k(\cdot, y)$ est un élément de $H^1(U)$ et on a $\|k_y\|_{H^1(U)} \leqslant \|K\|_{L(L^1(\mu), H^1(U))}$,*
(ii) *pour chaque $f \in L^1(\mu)$, on a $Kf(x) = \int k(x, y) f(y)\,\mathrm{d}\mu(y)$ pour λ_d presque tout $x \in U$.*

Preuve. Supposons d'abord U borné. Par le théorème de Dunford–Pettis (cf. [8] p. 503 ou [3] p. 46) il existe une application $\theta : y \mapsto \theta_y$ de Y dans $H^1(U)$ scalairement mesurable (et donc mesurable) telle que $\|\theta_y\|_{H^1(U)} \leqslant \|K\|$ pour $y \in Y$ et $K(f) = \int_Y f(y)\theta_y\,\mathrm{d}\mu(y)$ pour $f \in L^1(\mu)$ (intégrale de Bochner dans $H^1(U)$). Alors $\theta \in$

$L^1((\mu,\mathcal{F});L^1(U))$[1] et $L^1((\mu,\mathcal{F});L^1(U))$ s'identifie à $L^1_{\mathbb{R}}(\mathcal{B}or(U)\otimes\mathcal{F};\lambda_{d|U}\otimes\mu)$, l'élément associé à $f\in L^1_{\mathbb{R}}(\mathcal{B}or(U)\otimes\mathcal{F};\lambda_{d|U}\otimes\mu)$ étant égal μ p.p. à $g: y\mapsto \tilde f(\cdot,y)$ si $\tilde f$ est un représentant de f dans $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathcal{B}or(U)\otimes\mathcal{F};\lambda_{d|U}\otimes\mu)$ ([8], p. 196). En modifiant sur un ensemble μ négligeable convenable un élément $k\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathcal{B}or(U)\otimes\mathcal{F};\lambda_{d|U}\otimes\mu)$ associé à θ, on a, pour tout $y\in Y$, $\theta_y=k(\cdot,y)$ p.p. dans U. Et le noyau k a bien les propriétés voulues.

Si U n'est pas borné, considérons les $U_n=U\cap\{x\in U;\,|x|<n\}$, $n\geqslant 0$, les $K_n: L^1(\mathcal{F},\mu)\to H^1(U_n)$ déduits de K par restriction (i.e. $K_n(f)=K(f)_{|U_n}$) et des noyaux $k_n: U_n\times Y\to\mathbb{R}$ correspondants. En choisissant k égal à k_n sur $(U_n\setminus U_{n-1})\times Y$ on obtient évidemment un noyau vérifiant (i) et (ii). □

Pour la suite on utilisera aussi l'observation suivante.

Lemme 4. *Reprenons les hypothèses et notations du Lemme* 2 *et supposons de plus que pour toute $f\in L^1(\mu)$ le Laplacien* (*au sens des distributions*) *$\Delta K(f)$ de $K(f)$ soit une mesure de Radon dans U. Alors pour μ presque tout $y\in Y$, $\Delta k_y=\Delta k(\cdot,y)$ est une mesure de Radon dans U et pour tout compact $L\subset U$, il existe une constante $C_L>0$ telle que $|\Delta k_y|(L)\leqslant C_L$ pour μ-p.t. $y\in Y$. De plus si $f\in L^1(\mu)$ et si A est un borélien relativement compact de U, on a*

$$\int_A \mathrm{d}\big[\Delta K(f)\big]=\int_Y [\Delta k_y](A)\,f(y)\,\mathrm{d}\mu(y). \tag{1}$$

Remarque. On verra aussi que $y\mapsto[\Delta k_y](A)$ est mesurable et que la dernière intégrale a bien un sens.

Preuve. (a) Soit U' un ouvert relativement compact de U. Pour $\varphi\in C_0^\infty(U)$, $\lambda_\varphi: f\mapsto\int\varphi\,\mathrm{d}\Delta(K(f))=\int\Delta\varphi(x)K(f)(x)\,\mathrm{d}x$ est une forme linéaire continue sur $L^1(\mu)$ et $\{\lambda_\varphi(f);\,\varphi\in C_0^\infty(U),\,|\varphi|\leqslant 1_{U'}\}$ est borné pour chaque $f\in L^1(\mu)$. Le théorème de Banach–Steinhaus dit alors que

$$C(U'):=\sup\big\{\big|\lambda_\varphi(f)\big|;\,\|f\|_{L^1(\mu)}\leqslant 1,\,\varphi\in C_0^\infty(U),\,|\varphi|\leqslant 1_{U'}\big\}<\infty.$$

On va dans la suite vérifier l'énoncé avec les constantes $C_L=\inf\{C(U');\,U'\supset L\}$. Notons que $|\Delta K(f)|(U')\leqslant C(U')\|f\|_{L^1(\mu)}$ pour toute $f\in L^1(\mu)$.

(b) Pour $\varphi\in C_0^\infty(U)$, on a par la définition du Laplacien au sens de $\mathcal{D}'(U)$, et par l'expression de K à l'aide du noyau k,

$$\int_U\varphi\,\mathrm{d}\Delta\big(K(f)\big)=\int_Y\int_U\Delta\varphi(x)k_y(x)f(y)\,\mathrm{d}\mu(y)\,\mathrm{d}\lambda_d(x)=\int_Y\langle\Delta k_y,\varphi\rangle f(y)\,\mathrm{d}\mu(y), \tag{2}$$

où par composition $y\mapsto\langle\Delta k_y,\varphi\rangle$ est mesurable bornée sur Y. Donc pour V ouvert relativement compact de U et $\varphi\in C_0^\infty(V)$, $|\int_Y\langle\Delta k_y,\varphi\rangle f(y)\,\mathrm{d}\mu(y)|\leqslant C_V\|\varphi\|_\infty\|f\|_{L^1(\mu)}$. Par conséquent $|\langle\Delta k_y,\varphi\rangle|\leqslant C_V\|\varphi\|_\infty$ pour μ p.t. $y\in Y$. Comme $C_0^\infty(V)$ est séparable, il existe $N_V\in\mathcal{F}$ μ négligeable et tel que pour tout $y\notin N_V$ et toute $\varphi\in C_0^\infty(V)$ on a $|\langle\Delta k_y,\varphi\rangle|\leqslant C_V\|\varphi\|_\infty$. Mais alors $(\Delta k_y)_{|V}$ est une mesure de Radon sur V de masse totale majorée par C_V et les premières assertions du lemme sont établies.

(c) Si V est un ouvert relativement compact de U, une approximation de 1_V par une suite croissante d'éléments positifs de $C_0^\infty(V)$ permet d'étendre (grâce au (a)) la mesurabilité de $y\mapsto\Delta[k_y(\varphi)]$ et l'égalité des membres extrêmes de (2) au cas $\varphi=1_V$. Les parties ouvertes de tout ouvert relativement compact U' de U formant un π-système de parties de U', l'identité (1) résulte alors du théorème de classe monotone, ref. [1] p. 41 (l'ensemble des boréliens $A\subset U'$ tels que $y\mapsto\nu_y(A)$ est mesurable et vérifie $\Delta(K(f))(A)=\int\Delta k_y(A)f(y)\,\mathrm{d}\mu(y)$ est stable par différence propre et réunion croissante dénombrable). □

[1] Sans supposer U borné, on a $\theta\in L^1(\mathcal{F},\mu;L^2(U))$ et on aurait pu conclure plus directement avec [8] p. 198.

3. Preuve du Théorème 1

Remarquons d'abord que les hypothèses entraînent que la mesure μ ne charge pas les parties polaires de U puisque pour A compact dans U, la mesure $1_A \cdot \mu$ est somme d'une mesure de la forme Δv où $v \in H^1(U)$ et d'une mesure absolument continue sur U (cf. la partie **1**).

Soit A une partie borélienne relativement compacte de U telle que $\lambda_d(A) = 0$. Alors si B et A' sont des boréliens contenus dans A, on a $0 = \Delta(K(1_B))(A') - (1_B \cdot \mu)(A')$ et, par la formule du Lemme 4, $0 = \int_B \Delta(k_y)(A')\,\mathrm{d}\mu(y) - \mu(B \cap A')$ où k est donné par le Lemme 3 – on a vu aussi que Δk_y est une mesure pour μ presque tout $y \in U$ et que $y \mapsto \Delta k_y(A')$ est de classe $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ –. Ce qu'on peut écrire sous la forme :

$$0 = \int_B \left\{\Delta(k_y)(A') - \delta_y(A')\right\} \mathrm{d}\mu(y)$$

où δ_y désigne la mesure de Dirac au point y. L'arbitraire sur B signifie qu'en fait $\Delta k_y(A') = \delta_y(A')$ pour μ presque tout $y \in A$.

Comme $\mathcal{B}or(\mathbb{R}^d)$ est séparable, on peut choisir une famille dénombrable $\{A_j\}_{j\in J}$ de parties de A qui engendre la tribu des boréliens de A et qui est stable par intersection finie (les A_j forment un π-système de parties de A). L'ensemble J étant dénombrable il existe un borélien A_0 de A, μ négligeable et tel que, pour tout $y \in A \setminus A_0$ et tout $j \in J$, Δk_y est une mesure et $\Delta k_y(A_j) = \delta_y(A_j)$. Le théorème de classe monotone ([1] p. 41) permet alors de dire plus : si $y \in A \setminus A_0$, on a $\Delta k_y(B) = \delta_y(B)$ pour tout borélien B contenu dans A.

Autrement dit, si $y \in A' = A \setminus A_0$, les mesures Δk_y et δ_y coïncident sur A. Or $k_y \in H^1(U)$ pour tout $y \in A'$ et, pour ces y, $|\Delta k_y|$ ne peut charger les polaires ni a fortiori les points. Par conséquent, $A = A_0$ et A est μ-négligeable.

Ainsi μ ne charge pas les parties λ_d-négligeables de U et μ est donc absolument continue par rapport à $\lambda_{d|U}$. Ce qui achève la démonstration. □

4. Extensions

Il est clair que le théorème 1 s'étend à des situations bien plus générales. On énoncera ici une généralisation naturelle. Soient E un espace de Banach qu'on suppose reflexif séparable ou, plus généralement, dual d'un espace de Banach séparable[2]. Soit aussi $L : E \to \mathcal{D}'(U)$ une application linéaire continue (où U est un ouvert de $\mathbb{R}^d$) telle que toute mesure de Radon ν sur U appartenant à $L(E)$ soit diffuse, c'est à dire telle que $\nu(\{a\}) = 0$ pour tout $a \in U$.

Théorème 1 bis. *Soient μ et m deux mesures de Radon positives sur U. S'il existe un opérateur linéaire continu*

$$K : L^1(\mu) \to E$$

tel que pour chaque $f \in L^1(\mu)$ la distribution $\nu_f = L[K(f)]$ est une mesure de Radon sur U de la forme $f \cdot \mu + g_f \cdot m$, $g_f \in L^1(m)$, alors μ est absolument continue par rapport à m.

Preuve. Puisque toute mesure appartenant à $L(E)$ est diffuse, tout point chargé par μ est chargé par m. Donc, quitte à remplacer m et μ par leurs « parties » continues (les plus grandes mesures positives diffuses m_c et μ_c majorées par m et μ respectivement), on peut supposer que m et μ sont diffuses. Le reste de la preuve s'obtiendra en adaptant assez directement les arguments déjà utilisés pour le Théorème 1.

---

[2] Il suffit même pour la suite que E soit le dual F' -muni de la topologie faible- d'un espace localement convexe séparable F à condition de supposer dans le Théorème 1bis que $\{K(f);\ \|f\|_{L^1(\mu)} \leqslant 1\}$ est une partie équicontinue de $E = F'$.

Par le théorème de Dunford–Pettis, on a $K(f) = \int_U f(y)k_y \, \mathrm{d}\mu(y)$ (intégrale de Bochner dans E) où $y \mapsto k_y$ est mesurable bornée de U dans E. On en déduit que $\langle L(K(f)), \varphi\rangle = \int \langle L(k_y), \varphi\rangle f(y)\,\mathrm{d}\mu(y)$ pour $f \in L^1(\mu)$, $\varphi \in C_0^\infty(U)$. Or, comme dans le Lemme 4, pour tout ouvert relativement compact V de U on a $C_V := \sup\{|\nu_f(\varphi)|; \|f\|_{L^1(\mu)} \leqslant 1, \varphi \in C_0^\infty(V), |\varphi| \leqslant 1\} < \infty$ d'après le théorème de Banach–Steinhaus. Il s'ensuit qu'il existe un borélien μ-négligeable A_0 de U tel que pour $y \in U \setminus A_0$, $\nu_y = L(k_y)$ est une mesure de Radon sur U vérifiant $|\nu_y|(V) \leqslant C_V$. On vérifie aussi que pour chaque borélien relativement compact A de U, $y \mapsto \nu_y(A)$ est mesurable (bornée) sur $U \setminus A_0$ et que $\nu_f(A) = \int \nu_y(A) f(y)\,\mathrm{d}\mu(y)$ si $f \in L^1(\mu)$ -en considérant (par exemple) d'abord le cas de A ouvert et en utilisant ensuite le théorème de classe monotone-.

Soit alors A un borélien relativement compact et m négligeable de U, disjoint de A_0. Pour B, A' boréliens de A, on a $0 = \nu_{1_B}(A') - (1_B\mu)(A')$ et donc $0 = \int_B \nu_y(A')\,\mathrm{d}\mu(y) - \mu(A' \cap B)$ ou $0 = \int_B \{\nu_y(A') - \delta_y(A')\}\,\mathrm{d}\mu(y)$. Faisant varier B, on obtient que $\nu_y(A') = \delta_y(A')$ pour μ presque tout $y \in A$.

Fixant un π-système $\{A_j\}_{j\in J}$ dénombrable et générateur de $\mathcal{B}or(A)$, on obtient un borélien μ-négligeable $N_0 \subset A$ tel que $\nu_y(A_j) = \delta_y(A_j)$ pour $y \in A \setminus N_0$ et $j \in J$. Le théorème de classe monotone donne ensuite l'égalité des mesures ν_y et δ_y sur A, pour $y \in A \setminus N_0$. Mais $\nu_y \in L(E)$ et $|\nu_y|$ ne peut charger les points. Par conséquent, $A = N_0$ et A est μ-négligeable.

En conclusion, μ ne charge pas les parties m-négligeables de U et μ est bien absolument continue par rapport à m. □

Corollaire 5. *Si μ est une mesure de Radon positive sur U et s'il existe $K : L^1(\mu) \to E$ linéaire continue telle que $L(K(f)) = f\mu$ pour toute $f \in L^1(\mu)$ alors $\mu = 0$.*

Remarquons enfin une amélioration « automatique » du Théorème 1 bis.

Corollaire 6. *Si μ est une mesure de Radon positive et non nulle sur U, il n'existe pas d'application linéaire continue $K : L^1(\mu) \to E$ telle que pour toute $f \in L^1(\mu)$ la distribution $\nu_f = L(K(f))$ est une mesure de Radon sur U dont la partie absolument continue relativement à μ est $f \cdot \mu$.*

Preuve. Supposons K comme dans l'énoncé. Comme ci-dessus, le théorème de Banach–Steinhaus montre que si on munit l'espace $\mathcal{M}(U)$ des mesures de Radon sur U de la famille de semi-normes $p_V : \mu \mapsto |\mu|(V)$, V variant parmi les ouverts relativement compact de U, l'application $L \circ K : L^1(\mu) \to \mathcal{M}(U)$ est continue. En particulier si $\{f_n\}$ est une suite dense dans $L^1(\mu)$, si $\theta_n = L(K(f_n))$ et si $\{c_n\}$ est une suite de réels > 0 décroissant assez vite vers zéro, $\theta = \sum_{n\geqslant 1} c_n|\theta_n|$ est une mesure de Radon positive et diffuse. De plus chaque ν_f, $f \in L^1(\mu)$, est absolument continue par rapport à θ.

Si maintenant g désigne la plus grand élément de $L^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$ tel que $g \cdot \mu \leqslant \theta$, la mesure $m = \theta - g \cdot \mu$ est singulière par rapport à μ et telle que $\nu_f - f\mu$ est absolument continue par rapport à m pour toute $f \in L^1(\mu)$. Le Théorème 1bis assure alors que μ est aussi absolument continue par rapport à m. Et μ serait nulle contrairement à l'hypothèse. □

Exemple 4.1. Prenons $E = W^{1,p}(U)$ avec $p \geqslant \frac{d}{d-1}$ et $A = \Delta$. Une mesure de Radon sur U du type $\nu = \Delta(v)$, $v \in E$, est diffuse. Car si $B(a,r) \subset U$, $\varphi \in C_0^\infty(B(a,r))$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ et $\varphi(a) = 1$, on a

$$\nu\big(\{a\}\big) - \nu_-\big(B(a,r) \setminus \{a\}\big) \leqslant \int \varphi \,\mathrm{d}\nu = -\int \nabla\varphi \cdot \nabla v \,\mathrm{d}\lambda_d.$$

D'où, $\nu(\{a\}) - \nu_-(B(a,r) \setminus \{a\}) \leqslant \|\nabla\varphi\|_{L^{p^*}} \|v\|_{W^{1,p}(B(a,r))} \leqslant C^{ste} r^{d/p^*-1} \|v\|_{W^{1,p}(B(a,r))}$ pour un choix convenable de φ. Faisant tendre r vers 0, on obtient $\nu(\{a\}) \leqslant 0$ et donc en fait $\nu(\{a\}) = 0$. Donc le théorème 1bis s'applique et dans le Théorème 1, on peut remplacer $H^1(U)$ par $W^{1,d/(d-1)}_{\mathrm{loc}}(U)$ et λ_d par une mesure de Radon diffuse m sur U.

Remarque 4.2. Pour $E = W^{1,p}(U)$ avec $p < \frac{d}{d-1}$ et $L = \Delta$, la conclusion du Théorème 1bis peut tomber en défaut. Si μ et m sont deux mesures de Radon positives, à support compact dans U et étrangères entre elles et si on prend $K : L^1(\mu) \ni f \mapsto cG(f\mu)$ où G est le noyau Newtonien, $G(x,y) = |x-y|^{2-d}$, on a $\Delta K(f) = f\mu$, $\forall f \in L^1(\mu)$, pour $c \in \mathbb{R}$ bien choisi. (Observer que $G(\nu) \in E$ pour toute mesure de Radon ν de masse totale finie dans U.) Ici, la condition de « continuité » sur les Δu, $u \in E$, n'est pas vérifiée.

Remarque 4.3. On ne peut en général remplacer dans le Théorème 1bis l'espace $L^1(\mu)$ par $L^p(\mu)$ avec un $p > 1$, même si $E = H_0^1(U)$ et $A = \Delta$. Si $K \subset U$ est un Cantor auto-similaire (du type 2^d-coins par exemple) de dimension α, $0 < \alpha < d$, la mesure de probabilité auto-similaire naturelle μ sur K est telle que $\mu(B(x,r)) \leqslant C^{ste} r^\alpha$ pour $x \in \mathbb{R}^d$, $0 < r \leqslant 1$. D'après [12] p. 59, on a donc $\|\varphi\|_{L^q(\mu)} \leqslant C^{ste} \|\varphi\|_{H^1(U)}$, $\forall \varphi \in C_0^\infty(U)$, si $(d-2)\frac{q}{2} \leqslant \alpha$. Mais alors $L^{q^*}(\mu) \subset H^{-1}(U)$ (l'injection correspondante étant continue) et l'opérateur (isomorphisme) de Green $G : H^{-1}(U) \to H_0^1(U)$ induit, pour $p > \frac{2d}{d+2}$, une application linéaire $K : L^p(\mu) \to H_0^1(U)$ continue telle que $\Delta[K(f)] = f \cdot \mu$.

Remerciements

L'auteur remercie très cordialement Haïm Brezis dont les questions et l'intérêt sont à l'origine du présent travail.

Références

[1] P. Billingsley, Probability and Measure, third ed., Wiley Ser. Probab. Math. Statist., Wiley, New York, 1995.
[2] L. Boccardo, T. Gallouët, L. Orsina, Existence and uniqueness of entropy for nonlinear elliptic equations with measure data, Ann. Inst. Poincaré Anal. Non Linéaire 13 (5) (1996) 539–551.
[3] N. Bourbaki, Éléments de mathématique. XXV. Première partie. Livre VI : Intégration, Actualités Sci. Ind., vol. 1281, Hermann, Paris, 1959.
[4] J. Bourgain, H. Brezis, On the equation div $Y = f$ and application to control of phases, J. Amer. Math. Soc. 16 (2) (2003) 393–426.
[5] H. Brezis, M. Marcus, A.C. Ponce, Nonlinear elliptic equations with measures revisited, Preprint, June 2004, in press.
[6] L. Carleson, Selected Problems on Exceptional Sets, Van Nostrand Math. Stud., vol. 13, Van Nostrand, Princeton, NJ, 1967.
[7] N. Dunford, B. Pettis, Linear operations on summable functions, Trans. Amer. Math. Soc. 47 (1940) 323–392.
[8] N. Dunford, J.T. Schwartz, Linear Operators. I. General Theory, Pure Appl. Math., vol. 7, Interscience, New York, 1958.
[9] E. Gagliardo, Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 27 (1957) 284–305.
[10] M. Grun-Rehomme, Caractérisations du sous-différentiel d'intégrandes convexes dans les espaces de Sobolev, J. Math. Pures Appl. 56 (1977) 149–156.
[11] L.L. Helms, Introduction to Potential Theory, Pure Appl. Math., vol. XXII, Wiley, New York, 1969.
[12] V. Maz'ya, Sobolev Spaces, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
[13] J. Peetre, A counterexample connected with Gagliardo's trace theorem, Comment. Math. 2 (1979) 277–282, special issue.