Ann. I. H. Poincaré – PR 39, 2 (2003) 325–337

10.1016/S0246-0203(02)00011-0/FLA

CONTRE-EXEMPLE DANS LE THÉORÈME CENTRAL LIMITE FONCTIONNEL POUR LES CHAMPS ALÉATOIRES RÉELS

COUNTER-EXAMPLE TO THE FUNCTIONAL CENTRAL LIMIT THEOREM FOR REAL RANDOM FIELDS

Mohamed EL MACHKOURI *, Dalibor VOLNÝ

Laboratoire de mathématiques Raphaël Salem, UMR 6085, Université de Rouen, site Colbert, 76821 Mont-Saint-Aignan cedex, France

Reçu le 3 mai 2001

RÉSUMÉ. – Nous considérons un système dynamique ergodique d'entropie strictement positive $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ où Ω est un espace de Lebesgue, μ est une mesure de probabilité et T est une action de $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$. Nous montrons que, pour tout réel p positif, il existe une application réelle $f \in L^p(\Omega)$ et une famille $\mathcal{A}$ de boréliens réguliers de $[0, 1]^d$ vérifiant une condition d'*entropie métrique avec inclusion* telles que le champ aléatoire stationnaire $(f \circ T^k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ soit de type accroissement d'une martingale mais ne satisfasse pas le *théorème central limite fonctionnel* (ou *principe d'invariance*) relativement à la classe $\mathcal{A}$.

Mots Clés : Champs aléatoires de type accroissement d'une martingale ; Entropie métrique ; Théorème central limite fonctionnel ; Principe d'invariance

ABSTRACT. – We consider the ergodic dynamical system $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ with positive entropy where Ω is a Lebesgue space, μ is a probability measure and T is a measure preserving $\mathbb{Z}^d$-action, $d \in \mathbb{N}^*$. We show that, for any nonnegative real p, there is a real function $f \in L^p(\Omega)$ and a collection $\mathcal{A}$ of regular Borel sets of $[0, 1]^d$ satisfying an *entropy condition with inclusion* such that $(f \circ T^k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ is a stationary martingale-difference random field but does not satisfy the *functional central limit theorem* (or *invariance principle*) with regard to the family $\mathcal{A}$.

Keywords: Martingale-difference random fields; Metric entropy; Functional central limit theorem; Invariance principle

* Auteur correspondant.
E-mail addresses: mohamed.elmachkouri@univ-rouen.fr (M. El Machkouri), dalibor.volny@univ-rouen.fr (D. Volný).

1. Introduction

Considérons le système dynamique $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ où Ω est un espace de Lebesgue, μ est une mesure de probabilité et T est une action de $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$, préservant la mesure μ, i.e. : pour tous $i, j \in \mathbb{Z}^d$, T^i, T^j sont des transformations mesurables préservant la mesure, définies de Ω dans Ω telles que $T^i \circ T^j = T^{i+j}$. On appelle *champ aléatoire réel* toute famille $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et on dit que $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ est *stationnaire* si, pour tout $(k, n) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}^*$, les vecteurs $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_n})$ et $(X_{i_1+k}, \ldots, X_{i_n+k})$, $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{Z}^d$, ont même loi. Un élément A de la tribu $\mathcal{F}$ est dit *invariant* si, pour tout élément k de $\mathbb{Z}^d$, $T^k(A) = A$ presque sûrement (p.s.). On note $\mathcal{I}$ la tribu des éléments invariants de $\mathcal{F}$ et on dit que μ est ergodique si, pour tout $A \in \mathcal{I}$, $\mu(A)$ est égal à 0 ou 1.

Pour toute partie F de Ω ou de $\mathbb{Z}^d$, on note $\mathbb{I}_F$ la fonction indicatrice de F.

On dit qu'une sous-tribu $\mathcal{M}$ de $\mathcal{F}$ est une tribu *T-invariante* si, pour tout élément k de $\mathbb{Z}^d$, on a $T^k\mathcal{M} = \mathcal{M}$.

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}([0,1]^d)$ une collection de boréliens de $[0,1]^d$. Nous dirons qu'un élément A de $\mathcal{A}$ est *régulier* si $\lambda(\partial A) = 0$ où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. On munit $\mathcal{A}$ de la pseudo-métrique d définie, pour tous éléments A et B de $\mathcal{A}$, par $d(A, B) = \lambda(A\Delta B)$.

Soit $C(\mathcal{A})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $\mathcal{A}$ que l'on munit de la norme maximale définie, pour toute $f \in C(\mathcal{A})$, par

$$\|f\|_{\mathcal{A}} = \sup_{A\in\mathcal{A}} \bigl|f(A)\bigr|.$$

$(C(\mathcal{A}), \|.\|_{\mathcal{A}})$ est alors un espace de Banach.

Soit $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire réel stationnaire. Le processus de sommes partielles, associé à X, que l'on considère est défini, pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout entier $n \geqslant 1$, par

$$S_n(A) = \sum_{i\in\{1,\ldots,n\}^d} \lambda(nA \cap R_i)X_i$$

où, pour tout $i = (i_1, \ldots, i_d) \in \mathbb{Z}^d$, $R_i =]i_1 - 1, i_1] \times \cdots \times]i_d - 1, i_d]$.

Pour contrôler la taille de la classe $\mathcal{A}$, on utilise classiquement l' *entropie métrique* :

pour tout $\varepsilon > 0$, on appelle *entropie métrique* de $\mathcal{A}$ et on note $H(\mathcal{A}, d, \varepsilon)$, le logarithme népérien du plus petit nombre de boules ouvertes (pour la pseudo-métrique d), de rayon ε, nécessaires pour recouvrir $\mathcal{A}$.

Une notion plus stricte est celle d'*entropie métrique avec inclusion* :

pour tout $\varepsilon > 0$, on suppose qu'il existe une collection finie $\mathcal{A}(\varepsilon)$ de boréliens de $[0,1]^d$ telle que, pour tout $A \in \mathcal{A}$, il existe $A^-, A^+ \in \mathcal{A}(\varepsilon)$ tels que $A^- \subset A \subset A^+$ et $d(A^-, A^+) \leqslant \varepsilon$. On appelle *entropie métrique avec inclusion* et on note $\mathbb{H}(\mathcal{A}, d, \varepsilon)$, le logarithme népérien du plus petit cardinal d'une telle collection.

Notons que, pour tout $\varepsilon > 0$, $H(\mathcal{A}, d, \varepsilon) \leqslant \mathbb{H}(\mathcal{A}, d, \varepsilon)$. D'autre part, si ρ désigne la pseudo-métrique définie, pour tous éléments A et B de $\mathcal{A}$, par $\rho(A, B) = \sqrt{\lambda(A\Delta B)}$ alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{H}(\mathcal{A}, \rho, \varepsilon) = \mathbb{H}\bigl(\mathcal{A}, d, \varepsilon^2\bigr). \tag{1}$$

On appelle *mouvement Brownien standard* indexé par $\mathcal{A}$, le processus Gaussien W, de moyenne nulle, à trajectoires dans $C(\mathcal{A})$ tel que Cov (W(A),W(B)) $= \lambda(A \cap B)$, pour tous $A, B \in \mathcal{A}$.

On sait d'après Dudley ([10], 1973) qu'un tel processus est bien défini dès que

$$\int_0^1 \sqrt{H(\mathcal{A}, \rho, \varepsilon)}\, \mathrm{d}\varepsilon < +\infty. \tag{2}$$

A fortiori, si

$$\int_0^1 \left(\frac{\mathbb{H}(\mathcal{A}, d, \varepsilon)}{\varepsilon}\right)^{1/2} \mathrm{d}\varepsilon < +\infty, \tag{3}$$

alors le mouvement Brownien standard W indexé par $\mathcal{A}$ est bien défini.

D'après (1), la condition (3) est équivalente à la condition suivante

$$\int_0^1 \sqrt{\mathbb{H}(\mathcal{A}, \rho, \varepsilon)}\, \mathrm{d}\varepsilon < +\infty. \tag{4}$$

On dit que le *théorème central limite fonctionnel* (tclf) (ou *principe d'invariance*) a lieu relativement à la classe $\mathcal{A}$ si le processus $\{n^{-d/2} S_n(A);\ A \in \mathcal{A}\}$ converge en loi dans $(C(\mathcal{A}), \|.\|_{\mathcal{A}})$ vers un mouvement Brownien standard indexé par $\mathcal{A}$.

Les premiers résultats de type tclf pour de tels processus de sommes partielles ont été établis lorsque les champs aléatoires considérés sont indépendants et identiquement distribués (*iid*) et lorsque la classe $\mathcal{A}$ coïncide avec la classe $\mathcal{Q}_d$ des quadrants de $[0, 1]^d$, à savoir, la collection $\{[0, t_1] \times \cdots \times [0, t_d];\ t = (t_1, \ldots, t_d) \in [0, 1]^d\}$.

En effet, Wichura ([19], 1969) démontra ce résultat lorsque les champs aléatoires considérés sont seulement de carré intégrable, améliorant ainsi celui de Kuelbs ([13], 1968) dans lequel des conditions plus restrictives sont requises au niveau des moments.

Ces résultats se réduisent, en dimension 1, au principe d'invariance de Donsker ([9], 1951).

Pyke ([18], 1983) démontra un résultat similaire pour des classes d'ensembles plus larges vérifiant la condition (3). Cependant, les moments requis dépendent de la classe $\mathcal{A}$ considérée. Bass ([2], 1985) et simultanément Alexander et Pyke ([1], 1986) ont étendu le résultat de Pyke ([18], 1983) au cas où seuls les moments d'ordre 2 sont supposés finis.

Goldie et Greenwood ([11], 1986) ont étendu la méthode de Bass ([2], 1985) au cas des champs aléatoires ϕ-mélangeants et β-mélangeants pour des coefficients de mélange uniformes (c'est à dire que le supremum est pris sur une collection de couples de tribus $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ où chacune des tribus $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ peut être engendrée par une infinité de variables aléatoires).

Chen ([4], 1991) a démontré également un principe d'invariance lorsque le processus de sommes partielles est issu de champs aléatoires ϕ-mélangeants où les coefficients de ϕ-mélange considérés sont non uniformes (les coefficients de ϕ-mélange non uniformes ont été introduit par Dobrushin et Nahapetian ([8], 1974)).

Enfin, Dedecker ([7], [6], 1998) a donné un critère projectif sous lequel une version non ergodique du principe d'invariance a lieu lorsque le processus de sommes partielles est issu de champs aléatoires stationnaires bornés et indexé par une classe d'ensembles $\mathcal{A}$ dont la seule restriction est de vérifier la condition d'entropie métrique (2). En particulier, ce résultat est valable pour les champs aléatoires bornés de type accroissement d'une martingale. D'autre part, un article antérieur de Basu et Dorea ([3], 1979) montre que le principe d'invariance a lieu pour des champs aléatoires de carré intégrable de type accroissement d'une martingale, lorsque l'on considère la classe $\mathcal{Q}_d$ des quadrants de $[0,1]^d$.

Pour cette classe des quadrants, le critère projectif de Dedecker ([7], [6], 1998) entraîne le principe d'invariance pour les champs aléatoires réels stationnaires ayant des moments d'ordre $2+\varepsilon$, $\varepsilon>0$. De plus, ce critère projectif fournit de nouveaux critères pour les champs aléatoires ϕ-mélangeants bornés. Par ailleurs, sous l'hypothèse (4), en adaptant la méthode de Bass ([2], 1985) et en établissant des inégalités exponentielles de type Bernstein, Dedecker ([7], [6], 1998) donne des critères pour des champs aléatoires ϕ-mélangeants non bornés ayant des moments d'ordre strictement supérieur à 2.

Notre objectif dans ce travail est de construire, pour tout réel p positif, un champ aléatoire réel stationnaire $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ de type accroissement d'une martingale avec $X_0 \in L^p(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ et une classe $\mathcal{A}$ de boréliens réguliers de $[0,1]^d$ satisfaisant la condition (3) d'entropie métrique avec inclusion tels que le principe d'invariance n'ait pas lieu relativement à $\mathcal{A}$.

Autrement dit, nous mettons en évidence le fait que les hypothèses sur la classe $\mathcal{A}$ garantissant le tclf pour les champs aléatoires réels iid [1,2] ou de type accroissement d'une martingale bornés [7,6] ne suffisent plus si on considère des champs aléatoires réels non bornés de type accroissement d'une martingale.

Dorénavant, on suppose que μ est ergodique et que l'entropie du système dynamique $(\Omega,\mathcal{F},\mu,T)$ est strictement positive.

Sur $\mathbb{Z}^d$, on définit la relation d'ordre lexicographique $<_{lex}$ comme suit :

si $m=(m_1,\ldots,m_d)$ et $n=(n_1,\ldots,n_d)$ sont deux éléments de $\mathbb{Z}^d$ distincts, la notation $m <_{lex} n$ signifie que, ou bien $m_1<n_1$, ou bien il existe $i\in\{2,\ldots,d\}$ tel que $m_i<n_i$ et $m_j=n_j$ pour $1\leqslant j<i$.

On définit également une autre relation d'ordre $<$ sur $\mathbb{Z}^d$ de la façon suivante :

si $m=(m_1,\ldots,m_d)$ et $n=(n_1,\ldots,n_d)$ sont deux éléments de $\mathbb{Z}^d$ distincts, la notation $m<n$ signifie que, pour tout $i\in\{1,\ldots,d\}$, $m_i<n_i$.

Il existe plusieurs façons de définir un champ aléatoire de type accroissement d'une martingale (am). Soit $X=(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire réel. Nous dirons que X est un champ aléatoire de type *am* si et seulement si (ssi), pour tout $m\in\mathbb{Z}^d$,

$$E\big(X_m \mid \sigma(X_k;\, k <_{lex} m)\big)=0 \quad \text{p.s.}$$

Ce type de champ aléatoire vérifie le critère projectif de Dedecker ([7], [6], 1998).

Une définition plus stricte est celle utilisée par Basu et Dorea ([3], 1979) :

X est un champ aléatoire de type *am* ssi, pour tous éléments $m<n$ de $\mathbb{Z}^d$,

$$E\big(X_n \mid \sigma(X_{(i_1,\ldots,i_d)};\, \exists\, 1\leqslant s\leqslant d,\ i_s\leqslant m_s)\big)=0 \quad \text{p.s.}$$

En effet, Basu et Dorea ([3], 1979) ont démontré le principe d'invariance relativement à la classe des quadrants de $[0,1]^d$, $d \in \mathbb{N}^*$, pour ce type de champs aléatoires lorsque seuls les moments d'ordre 2 sont supposés finis.

Enfin, Nahapetian et Petrosian ([15], 1992) ont introduit une notion encore plus stricte :

X est un champ aléatoire de type *am* au sens fort (amf) ssi, pour tout $m \in \mathbb{Z}^d$,

$$E\big(X_m \mid \sigma(X_k; k \neq m)\big) = 0 \quad \text{p.s.}$$

2. Résultat principal

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{B}([0,1]^d)$ et $f \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, on adopte la notation suivante,

$$S_n(f, A) = \sum_{i \in \{1,\dots,n\}^d} \lambda(nA \cap R_i) f \circ T^i.$$

Le résultat principal de cet article est le suivant.

THÉORÈME. – *Pour tout réel p positif, il existe une application réelle $f \in L^p(\Omega)$ et une classe $\mathcal{A}$ de boréliens réguliers de $[0,1]^d$ vérifiant la condition* (3) *d'entropie métrique avec inclusion telles que le champ aléatoire stationnaire $(f \circ T^k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ soit de type amf et telles que le principe d'invariance n'ait pas lieu relativement à $\mathcal{A}$. Autrement dit, le processus de sommes partielles $\{n^{-d/2} S_n(f, A);\ A \in \mathcal{A}\}$ ne converge pas en loi dans $C(\mathcal{A})$.*

Ce résultat montre que, contrairement aux champs aléatoires iid de carré intégrable étudiés par Bass ([2], 1985) et simultanément Alexander et Pyke ([1], 1986), la condition (3) ne garantit pas le tclf pour les champs aléatoires (non bornés) de type *am*. Néanmoins, si $\mathcal{A}$ est la classe $\mathcal{Q}_d$ des quadrants de $[0,1]^d$ et si $p > 2$, le tclf a lieu aussi bien pour les champs aléatoires iid que pour les champs aléatoires de type *am* (voir Dedecker ([7], [6], 1998).

Rappelons que, sous la condition (4), le tclf de Dedecker ([7], [6], 1998) entraîne le principe d'invariance pour les champs aléatoires bornés de type *am*. Notons que récemment, El Machkouri ([14], 2002) a démontré que le tclf reste valide si on considère des champs de variables aléatoires ayant des moments exponentiels finis.

3. Démonstration

Démonstration du théorème. –

(1) Construction de l'application f.

On a besoin du lemme suivant.

LEMME 1. – *Il existe deux sous-tribus T-invariantes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de $\mathcal{F}$ et une fonction g définie sur Ω telles que*

(i) *les tribus $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ soient indépendantes,*

(ii) *la fonction g soit $\mathcal{B}$-mesurable, de moyenne nulle, à valeurs* -1, 0 *ou* 1 *et le champ aléatoire $(g \circ T^k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ soit iid,*

(iii) *le système dynamique* $(\Omega, \mathcal{C}, \mu, T)$ *soit apériodique* (*i.e.* : *pour tout* $k \in (\mathbb{Z}^d)^*$, $\mu(\{\omega \in \Omega \mid T^k\omega = \omega\}) = 0$).
De plus, il existe $0 < a \leqslant 1$ *tel que* $\mu(g = -1) = \mu(g = 1) = a/2$ *et* $\mu(g = 0) = 1 - a$. *Notons* $h(T)$ *l'entropie du système* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$. *Si* $h(T) > 1$, *on peut choisir* $a = 1$.

Preuve du lemme 1. – Notons h l'entropie du système $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$. Soit $a \in]0, 1]$ tel que

$$h_1 = -(1-a)\log_2(1-a) - a\log_2(a/2) < h.$$

Posons $\Omega_1 = \{-1, 0, 1\}$ et notons ν la mesure produit $(a/2, 1-a, a/2)^{\otimes\mathbb{Z}^d}$. Considérons le système dynamique $S_1 = (\Omega_1^{\mathbb{Z}^d}, \nu, (\theta_k)_{k\in\mathbb{Z}^d})$ où, pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$ et tout $\omega \in \Omega_1^{\mathbb{Z}^d}$, $(\theta_k(\omega))_i = \omega_{i+k}$, $i \in \mathbb{Z}^d$. S_1 est un champ aléatoire de Bernoulli d'entropie h_1 ([5], 1972, exemple 2, page 18). Considérons un autre Bernoulli S_2 d'entropie inférieure ou égale à $h - h_1$. $S_1 \times S_2$ est alors un Bernoulli d'entropie plus petite que h. D'après la version multidimensionnelle du théorème de Sinai ([16], 1987), $S_1 \times S_2$ est un facteur du système $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$. Nous avons donc dans ce système une copie $\widetilde{S_1}$ de S_1 et une copie $\widetilde{S_2}$ de S_2 qui sont indépendantes. Ce qui fournit les sous-tribus $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Soit $F : (\Omega, \mathcal{B}, \mu) \to S_1$ une bijection bimesurable et soit $p_0 : S_1 \to \{-1, 0, 1\}$, $(\omega_i)_{i\in\mathbb{Z}^d} \mapsto \omega_0$. On vérifie alors que $g = p_0 \circ F$ satisfait les propriétés voulues.

Ce qui achève la démonstration du lemme 1.

Dorénavant, pour simplifier la construction, nous supposerons que $h(T) > 1$. On peut donc choisir g de sorte que $\mu(g = -1) = \mu(g = 1) = 1/2$. Le cas $h(T) > 0$ se traite de façon similaire. Fixons $d \in \mathbb{N}^*$. Sans perte de généralité, on peut supposer que p est un entier naturel arbitrairement grand.

Pour tout réel $r \geqslant 1$, on pose

$$n_r = 4 \times 9^{8rp^2},$$

$$L_r = \frac{n_r^{d/2}}{9^{2(r-1)dp}} = 2^d \times 9^{2dp} \times 9^{2rdp(2p-1)},$$

$$k_r = \frac{n_r^d}{9^{4rdp^2}} = 4^d \times 9^{4rdp^2},$$

$$K_r = \frac{n_r}{k_r^{1/d}} = 9^{4rp^2},$$

$$\varepsilon_r = \frac{L_r \times K_r^d}{n_r^d} = \frac{L_r}{k_r} = \frac{9^{2dp}}{2^d \times 9^{2rdp}}.$$

Le lecteur pourra vérifier que, si on pose $\alpha = (2p+1)^{-1} \in]0, 1[$, on a, pour tout réel $r \geqslant 1$,

$$\varepsilon_r = \frac{L_{\alpha r}}{n_{\alpha r}^d}. \tag{5}$$

D'autre part, les suites $(n_r)_{r\geqslant 1}$, $(k_r)_{r\geqslant 1}$, $(L_r)_{r\geqslant 1}$, $(L_r/2)_{r\geqslant 1}$, $(L_r^{1/d})_{r\geqslant 1}$ et $(K_r)_{r\geqslant 1}$ sont des suites croissantes d'entiers positifs tandis que $(\varepsilon_r)_{r\geqslant 1}$ est une suite de réels strictement positifs qui décroît vers zéro.

De plus, on peut vérifier que, pour tout entier $r \geqslant 2$,

$$\frac{n_r^{d/2}}{L_r} \geqslant 2\sum_{s=1}^{r-1}\frac{n_s^{d/2}}{L_s}. \tag{6}$$

Soit $(\delta_r)_{r\geqslant 1}$ une suite de réels strictement positifs telle que

$$\lim_{r\to+\infty} L_r\delta_r = 0. \tag{7}$$

Puisque $(\Omega, \mathcal{C}, \mu, T)$ est apériodique, la version multidimensionnelle du lemme de Rokhlin ([12], [5], 1972) assure que, pour tout entier $r \geqslant 1$, il existe $F_r \in \mathcal{C}$ tel que les éléments de $\{T^{-u}F_r\}_{u\in\{0,\dots,K_r-1\}^d}$ soient deux à deux disjoints et

$$\mu\left(\bigcup_{u_1=0}^{K_r-1}\cdots\bigcup_{u_d=0}^{K_r-1} T^{-(u_1,\dots,u_d)}F_r\right) \geqslant 1-\delta_r. \tag{8}$$

Pour tout entier $r \geqslant 1$, posons

$$f_r = \frac{n_r^{d/2}}{L_r} g\mathbb{I}_{F_r}.$$

Notons

$$f = \sum_{r=1}^{+\infty} f_r.$$

Ainsi, f est une application réelle non bornée définie sur Ω.

De plus, pour tout entier $r \geqslant 1$,

$$\|f_r\|_p^p \leqslant \mu(F_r) \times \left(\frac{n_r^{d/2}}{L_r}\right)^p \leqslant \frac{1}{K_r^d} \times \left(\frac{n_r^{d/2}}{L_r}\right)^p = 9^{-2(r+1)dp^2}.$$

On en déduit,

$$\|f\|_p \leqslant \sum_{r=1}^{+\infty} 9^{-2(r+1)dp} < +\infty.$$

Par conséquent, $f \in L^p(\Omega)$.

Soit $k \in \mathbb{Z}^d$, on pose $\mathcal{F}_k = \sigma(g\circ T^i; i \neq k)\bigvee\mathcal{C} \supset \sigma(f\circ T^i; i\neq k)$. En utilisant l'indépendance des tribus $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, on montre que $E(f\circ T^k \mid \mathcal{F}_k) = 0$. Autrement dit, le champ aléatoire réel $(f\circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ est du type *amf*.

(2) Construction de la classe $\mathcal{A}$.

Pour tout entier $r \geqslant 1$, on note $\mathcal{A}_r$ l'ensemble des Boréliens A de $[0,1]^d$ satisfaisant la propriété suivante : il existe $(u_1,\dots,u_d) \in \{0,\dots,K_r-1\}^d$ tel que, pour tout $l \in \{1,\dots,L_r/2\}$, il existe un unique vecteur $(a_{l,s})_{s\in\{1,\dots,d\}} \in \{0,\dots,L_r^{1/d}-1\}^d$ tel que

$$i_{l,s} = u_s + a_{l,s}K_r,$$

et

$$A = \bigcup_{l=1}^{L_r/2} \left] \frac{i_{l,1}-1}{n_r}, \frac{i_{l,1}}{n_r} \right] \times \cdots \times \left] \frac{i_{l,d}-1}{n_r}, \frac{i_{l,d}}{n_r} \right].$$

Notons

$$\mathcal{A} = \bigcup_{r=1}^{+\infty} \mathcal{A}_r.$$

Pour montrer que la collection $\mathcal{A}$ satisfait la condition (3), on a besoin d'estimer, pour tout entier $r \geqslant 2$, les nombres d'entropie métrique $\mathbb{H}(\mathcal{A}, d, \varepsilon_r)$.

Soient $r \geqslant 2$ et $1 \leqslant j \leqslant r-1$ deux entiers. Puisque le cardinal $|\mathcal{A}_j|$ de $\mathcal{A}_j$ est égal à $K_j^d C_{L_j}^{L_j/2}$, on a la grossière majoration suivante :

$$\exp\bigl(\mathbb{H}(\mathcal{A}_j, d, \varepsilon_r)\bigr) \leqslant K_j^d C_{L_j}^{L_j/2}. \tag{9}$$

Cependant, si $L_j \leqslant \varepsilon_r n_j^d$, on peut obtenir une estimation meilleure, à savoir,

$$\exp\bigl(\mathbb{H}(\mathcal{A}_j, d, \varepsilon_r)\bigr) \leqslant K_j^d + 1. \tag{10}$$

De plus, puisque $\bigcup_{j \geqslant r} \mathcal{A}_j$ est inclus dans le cube $B_r = [0, \varepsilon_r^{1/d}]^d$ de mesure ε_r, on a

$$\exp\left(\mathbb{H}\left(\bigcup_{j \geqslant r} \mathcal{A}_j, d, \varepsilon_r\right)\right) \leqslant 2. \tag{11}$$

D'autre part, d'après la définition de l'entropie métrique avec inclusion, on a

$$\exp\bigl(\mathbb{H}(\mathcal{A}, d, \varepsilon_r)\bigr) \leqslant \sum_{j=1}^{r-1} \exp\bigl(\mathbb{H}(\mathcal{A}_j, d, \varepsilon_r)\bigr) + \exp\left(\mathbb{H}\left(\bigcup_{j \geqslant r} \mathcal{A}_j, d, \varepsilon_r\right)\right). \tag{12}$$

On déduit des inégalités (9), (10), (11) et (12), la majoration suivante :

$$\exp\bigl(\mathbb{H}(\mathcal{A}, d, \varepsilon_r)\bigr) \leqslant 2 + \sum_{j=1}^{r-1} (K_j^d + 1) \mathbb{I}_{\{L_j \leqslant \varepsilon_r n_j^d\}} + K_j^d C_{L_j}^{L_j/2} \mathbb{I}_{\{L_j > \varepsilon_r n_j^d\}}. \tag{13}$$

Finalement, d'après (5), (13) et le fait que la suite $(L_j/n_j^d)_{j \geqslant 1}$ soit décroissante, on obtient

$$\exp\bigl(\mathbb{H}(\mathcal{A}, d, \varepsilon_r)\bigr) \leqslant 2 + \sum_{j=1}^{[\alpha r]} K_j^d C_{L_j}^{L_j/2} + \sum_{j=[\alpha r]+1}^{r-1} \bigl(K_j^d + 1\bigr) \tag{14}$$

où $[\,.\,]$ symbolise la fonction *partie entière*.

Pour montrer la condition (3) d'entropie métrique avec inclusion, il suffit de s'assurer de la convergence de la série

$$\Sigma = \sum_{r=2}^{+\infty} \varepsilon_{r-1} \left(\frac{\mathbb{H}(\mathcal{A}, d, \varepsilon_r)}{\varepsilon_r} \right)^{1/2}.$$

Or

$$\Sigma \leqslant \sum_{r=2}^{+\infty} \frac{\varepsilon_{r-1}}{\sqrt{\varepsilon_r}} \left(\log\left(2 + \sum_{j=1}^{[\alpha r]} K_j^d C_{L_j}^{L_j/2} + \sum_{j=[\alpha r]+1}^{r-1} \left(K_j^d + 1\right) \right) \right)^{1/2} \quad \text{d'après (14)}$$

$$\leqslant \sum_{r=2}^{+\infty} \frac{\varepsilon_{r-1}}{\sqrt{\varepsilon_r}} \sqrt{\log\bigl(2 + L_{\alpha r}![\alpha r] K_r^d + (r-1-[\alpha r])(K_r^d+1)\bigr)}$$

$$\leqslant \sum_{r=2}^{+\infty} \frac{\varepsilon_{r-1}}{\sqrt{\varepsilon_r}} \sqrt{\log\bigl(3r K_r^d (L_{\alpha r}!)\bigr)}$$

$$\leqslant \underbrace{\sum_{r=2}^{+\infty} \frac{\varepsilon_{r-1}}{\sqrt{\varepsilon_r}} \sqrt{\log(3r)}}_{\Sigma_1} + \underbrace{\sum_{r=2}^{+\infty} \frac{\varepsilon_{r-1}}{\sqrt{\varepsilon_r}} \sqrt{\log\bigl(K_r^d\bigr)}}_{\Sigma_2} + \underbrace{\sum_{r=2}^{+\infty} \frac{\varepsilon_{r-1}}{\sqrt{\varepsilon_r}} \sqrt{L_{\alpha r} \log(L_{\alpha r})}}_{\Sigma_3}.$$

Le lecteur pourra vérifier que les séries Σ_1 et Σ_2 sont convergentes. Vérifions que Σ_3 converge également.

En effet,

$$\Sigma_3 \sim \sum_{r=2}^{+\infty} \varepsilon_r^{1/2} \sqrt{L_{\alpha r} \log(L_{\alpha r})} = \sum_{r=2}^{+\infty} \frac{L_{\alpha r}}{n_{\alpha r}^{d/2}} \sqrt{\log(L_{\alpha r})} \quad \text{d'après (5)}$$

$$\sim \sum_{r=2}^{+\infty} \frac{L_{\alpha r}}{n_{\alpha r}^{d/2}} \sqrt{r} = \sum_{r=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{r}}{9^{2(\alpha r - 1)dp}} < +\infty.$$

Finalement, la série Σ est convergente et, par suite, la classe $\mathcal{A}$ vérifie bien la condition (3). À présent, montrons que le processus de sommes partielles $\{n^{-d/2} S_n(f, A); A \in \mathcal{A}\}$ ne peut pas être tendu dans $C(\mathcal{A})$.

Pour cela, il suffit (voir par exemple, [17], 1990) de montrer qu'il existe $\beta > 0$ tel que

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to +\infty} \mu\Bigl(\sup_{d(A,B) < \delta} n^{-d/2} \bigl| S_n(f, A) - S_n(f, B) \bigr| > \beta \Bigr) > 0.$$

Soit $r \geqslant 1$ fixé. Notons W_r l'ensemble des $\omega \in \Omega$ satisfaisant la propriété suivante : il existe $u = u(\omega) = (u_1, \ldots, u_d) \in \{0, \ldots, K_r - 1\}^d$ tel que, pour tout $l = (l_1, \ldots, l_d) \in \{0, \ldots, L_r^{1/d} - 1\}^d$ et tout $s \geqslant r+1$, on ait $T^{u + lK_r}\omega \in F_r$ et $T^{u + l K_r}\omega \notin F_s$.

Remarquons que

$$\mu\Biggl(\bigcup_{s \geqslant r+1} \bigcup_{l \in \{0, \ldots, L_r^{1/d} - 1\}^d} T^{-(u + lK_r)} F_s \Biggr) \leqslant L_r \sum_{s \geqslant r+1} \frac{1}{K_s^d} \sim 9^{-2rdp}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{r \to +\infty} \mu\Biggl(\bigcap_{s \geqslant r+1} \bigcap_{l \in \{0, \ldots, L_r^{1/d} - 1\}^d} T^{-(u + lK_r)} F_s^c \Biggr) = 1. \tag{15}$$

De (7), (8) et (15), on déduit

$$\lim_{r \to +\infty} \mu(W_r) = 1. \tag{16}$$

Soient $\varepsilon > 0$, $u \in \{0, \dots, K_r - 1\}^d$ et $\omega \in \Omega$.

Notons

$$\Gamma_r^*(u) = \{u + lK_r \mid l \in \{0, \dots, L_r^{1/d} - 1\}^d\},$$
$$\Gamma_r^+(u,\omega) = \{k \in \Gamma_r^*(u) \mid g(T^k\omega) = 1\},$$

et

$$E_r^u = E_r^u(\varepsilon) = \left\{\omega \in \Omega \,\Big|\, \left|\frac{|\Gamma_r^+(u,\omega)|}{L_r} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon\right\}.$$

Comme $\Gamma_r^*(u) = u + \Gamma_r^*(0)$, on a

$$\begin{aligned}\left|\Gamma_r^+(u,\omega)\right| &= \left|u + \{k \in \Gamma_r^*(0) \mid g(T^{u+k}\omega) = 1\}\right| \\ &= \left|u + \Gamma_r^+(0, T^u\omega)\right| \\ &= \left|\Gamma_r^+(0, T^u\omega)\right|.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mu(E_r^u) = \mu(T^{-u}E_r^0) = \mu(E_r^0). \tag{17}$$

De plus, d'après la loi faible des grands nombres,

$$\lim_{r\to+\infty} \mu(E_r^0) = 1. \tag{18}$$

On définit également $\Gamma_r(u,\omega)$ comme étant le sous ensemble de $\Gamma_r^*(u)$ vérifiant

(a) $|\Gamma_r(u,\omega)| = L_r/2$,

(b) $\Gamma_r^+(u,\omega) \subset \Gamma_r(u,\omega)$ si $|\Gamma_r^+(u,\omega)| \leqslant L_r/2$,

(c) $\Gamma_r(u,\omega) \subset \Gamma_r^+(u,\omega)$ si $|\Gamma_r^+(u,\omega)| > L_r/2$.

Enfin, pour $\omega \in W_r$, on pose

$$\Gamma_r(\omega) = \Gamma_r(u(\omega),\omega) \quad \text{et} \quad \Gamma_r^+(\omega) = \Gamma_r^+(u(\omega),\omega).$$

LEMME 2. – *Soient $r \geqslant 1$ et $\varepsilon > 0$. Il existe un sous ensemble $V_r = V_r(\varepsilon)$ de W_r tel que, pour tout $\omega \in V_r$,*

$$\left|\frac{1}{L_r}\sum_{i\in\Gamma_r(\omega)} g(T^i\omega) - \frac{1}{2}\right| < 2\varepsilon, \tag{19}$$

et

$$\lim_{r\to+\infty} \mu(V_r) = 1. \tag{20}$$

Démonstration. – Il suffit de considérer l'ensemble

$$V_r = V_r(\varepsilon) = \left\{\omega \in W_r \,\Big|\, \left|\frac{|\Gamma_r^+(\omega)|}{L_r} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon\right\}.$$

Avec cette définition de V_r, on vérifie que l'inégalité (19) est satisfaite.

De plus, comme

$$V_r = \bigcup_{u\in\{0,\dots,K_r-1\}^d} W_r \cap T^{-u}F_r \cap E_r^u,$$

on a,

$$
\begin{aligned}
\mu(V_r) &= \sum_{u\in\{0,\dots,K_r-1\}^d} \mu\big(W_r \cap T^{-u}F_r \cap E_r^u\big)\\
&= \sum_{u\in\{0,\dots,K_r-1\}^d} \mu\big(W_r \cap T^{-u}F_r\big)\mu\big(E_r^u\big) \quad \text{(car $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont indépendantes)}\\
&= \mu\big(E_r^0\big)\mu\Bigg(W_r \cap \bigcup_{u\in\{0,\dots,K_r-1\}^d} T^{-u}F_r\Bigg) \quad \text{d'après (17)}\\
&= \mu\big(E_r^0\big)\mu(W_r).
\end{aligned}
$$

Par conséquent, (16) et (18) entraînent (20).

Ce qui achève la démonstration du lemme 2.

Pour tout $\omega \in W_r$, on pose

$$
A_r(\omega) = \bigcup_{(i_1,\dots,i_d)\in\Gamma_r(\omega)} \left]\frac{i_1-1}{n_r}, \frac{i_1}{n_r}\right] \times \cdots \times \left]\frac{i_d-1}{n_r}, \frac{i_d}{n_r}\right] \in \mathcal{A}_r \subset \mathcal{A}.
$$

Remarquons que, pour $i \in \mathbb{Z}^d$ et $\omega \in W_r$, $\lambda(n_r A_r(\omega) \cap R_i) = \mathbb{I}_{\Gamma_r(\omega)}(i)$. Dorénavant, on suppose $0 < \varepsilon < 1/16$ et $r \geqslant 2$. Si $\omega \in W_r$, on a

$$
\begin{aligned}
\left|n_r^{-d/2} S_{n_r}\Bigg(\sum_{s=1}^{r-1} f_s, A_r(\omega)\Bigg)\right| &= \left|n_r^{-d/2} \sum_{i\in\{1,\dots,n_r\}^d} \lambda\big(n_r A_r(\omega) \cap R_i\big) \sum_{s=1}^{r-1} f_s\big(T^i\omega\big)\right|\\
&\leqslant \left|n_r^{-d/2} \sum_{i\in\Gamma_r(\omega)} \sum_{s=1}^{r-1} \frac{n_s^{d/2}}{L_s} g\big(T^i\omega\big)\mathbb{I}_{F_s}\big(T^i\omega\big)\right|\\
&\leqslant n_r^{-d/2} \sum_{i\in\Gamma_r(\omega)} \sum_{s=1}^{r-1} \frac{n_s^{d/2}}{L_s}\\
&\leqslant n_r^{-d/2}\big|\Gamma_r(\omega)\big| \frac{n_r^{d/2}}{2L_r} \quad \text{d'après (6)}\\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

D'autre part, si $\omega \in V_r \subset W_r$, on a

$$
\begin{aligned}
\big|n_r^{-d/2} S_{n_r}\big(f_r, A_r(\omega)\big)\big| &= \left|n_r^{-d/2} \sum_{i\in\{1,\dots,n_r\}^d} \lambda\big(n_r A_r(\omega) \cap R_i\big) f_r\big(T^i\omega\big)\right|\\
&= \left|n_r^{-d/2} \sum_{i\in\Gamma_r(\omega)} \frac{n_r^{d/2}}{L_r} g\big(T^i\omega\big)\mathbb{I}_{F_r}\big(T^i\omega\big)\right|\\
&= \frac{1}{L_r}\left|\sum_{i\in\Gamma_r(\omega)} g\big(T^i\omega\big)\right|\\
&> \frac{1}{2} - 2\varepsilon \quad \text{d'après (19).}
\end{aligned}
$$

Ainsi, pour tout $\omega \in V_r \subset W_r$, on a

$$\begin{aligned}\left|n_r^{-d/2} S_{n_r}\big(f, A_r(\omega)\big)\right| &= \left|n_r^{-d/2} S_{n_r}\left(\sum_{s=1}^{r-1} f_s, A_r(\omega)\right) + n_r^{-d/2} S_{n_r}\big(f_r, A_r(\omega)\big)\right| \\ &> \left(\frac{1}{2} - 2\varepsilon\right) - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} - 2\,\varepsilon > 0.\end{aligned}$$

Où on a utilisé le fait que, pour tous $s \geqslant r+1$, $\omega \in W_r$ et $i \in \Gamma_r(\omega)$, $f_s(T^i\omega) = 0$.

Notons $\beta = \frac{1}{4} - 2\varepsilon > 0$. Pour tout $r \geqslant 1$ et tout $\omega \in V_r$, on a $\lambda(A_r(\omega)) = \frac{L_r}{2 n_r^d}$.

Soit $\delta > 0$ fixé. Il existe $r_\delta \geqslant 1$ tel que, pour tout $r \geqslant r_\delta$, $\frac{L_r}{2 n_r^d} < \delta$.

Par conséquent, pour tout $r \geqslant r_\delta$, on a

$$\begin{aligned}&\mu\Big(\sup_{d(A,B)<\delta} \left|n_r^{-d/2} S_{n_r}(f, A) - n_r^{-d/2} S_{n_r}(f, B)\right| > \beta\Big) \\ &\quad\geqslant \mu\Big(\sup_{\lambda(A)<\delta} \left|n_r^{-d/2} S_{n_r}(f, A)\right| > \beta\Big) \\ &\quad\geqslant \mu\Big(\big\{\omega \in V_r \mid \left|n_r^{-d/2} S_{n_r}\big(f, A_r(\omega)\big)\right| > \beta\big\}\Big) \\ &\quad= \mu(V_r) \to 1 \quad \text{quand } r \to +\infty.\end{aligned}$$

On a donc montré que, pour tout $\delta > 0$,

$$\limsup_{n\to+\infty} \mu\Big(\sup_{d(A,B)<\delta} \left|n^{-d/2} S_n(f, A) - n^{-d/2} S_n(f, B)\right| > \beta\Big) = 1.$$

Ce qui achève la démonstration du théorème.

RÉFÉRENCES

[1] K.S. Alexander, R. Pyke, A uniform central limit theorem for set-indexed partial-sum processes with finite variance, Ann. Probab. 14 (1986) 582–597.

[2] R.F. Bass, Law of the iterated logarithm for set-indexed partial sum processes with finite variance, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 70 (1985) 591–608.

[3] A.K. Basu, C.C.Y. Dorea, On functional central limit theorem for stationary martingale random fields, Acta. Math. Hung. 33 (1979) 307–316.

[4] D. Chen, A uniform central limit theorem for nonuniform ϕ-mixing random fields, Ann. Probab. 19 (1991) 636–649.

[5] J.P. Conze, Entropie d'un groupe abélien de transformations, Z. Wahrsch. Verw. Geb. 25 (1972) 11–30.

[6] J. Dedecker, Principes d'invariances pour les champs aléatoires stationnaires, PhD thesis, Université Paris XI Orsay, 1998.

[7] J. Dedecker, Exponential inequalities and functional central limit theorems for random fields, ESAIM, 2001, to appear.

[8] R.L. Dobrushin, B.S. Nahapetian, Strong convexity of pressure for lattice systems of classical statistical physics, Teoret. Mat. Fiz. 20 (1974) 223–234.

[9] M.D. Donsker, An invariance principle for certain probability limit theorems, Mem. Amer. Math. Soc. 6 (1951) 1–12.
[10] R.M. Dudley, Sample functions of the Gaussian process, Ann. Probab. 1 (1973) 66–103.
[11] C.M. Goldie, P.E. Greenwood, Variance of set-indexed sums of mixing random variables and weak convergence of set-indexed processes, Ann. Probab. 14 (1986) 817–839.
[12] Y. Katznelson, B. Weiss, Commuting measure-preserving transformations, Israel J. Math. 12 (1972) 161–173.
[13] J. Kuelbs, The invariance principle for a lattice of random variables, Ann. Math. Statist. 39 (1968) 382–389.
[14] M. El Machkouri, Kahane–Khintchine inequalities and functional central limit theorem for stationary random fields, Stoch. Proc. Appl. 120 (2002) 285–299.
[15] B. Nahapetian, A.N. Petrosian, Martingale-difference Gibbs random fields and central limit theorem, Ann. Acad. Sci. Fenn., Series A-I Math. 17 (1992) 105–110.
[16] D.S. Ornstein, B. Weiss, Entropy and isomorphism theorems for actions of amenable groups, Journal d'Analyse Mathématique 48 (1987) 1–141.
[17] D. Pollard, Empirical Processes: Theory and Applications, in: NSF-CBMS Regional Conference Series in Probability and Statistics, IMS-ASA, Hayward-Alexandria, 1990.
[18] R. Pyke, A uniform central limit theorem for partial-sum processes indexed by sets, London Math. Soc. Lect. Notes Series 79 (1983) 219–240.
[19] M.J. Wichura, Inequalities with applications to the weak convergence of random processes with multi-dimensional time parameters, Ann. Math. Statist. 40 (1969) 681–687.