Ann. I. H. Poincaré – PR 39, 2 (2003) 193–216

10.1016/S0246-0203(02)00014-6/FLA

SUR UNE INÉGALITÉ DE LITTLEWOOD–SALEM

ON A LITTLEWOOD–SALEM INEQUALITY

Aihua FAN, Dominique SCHNEIDER *

Faculté de mathématiques et d'informatique, laboratoire C.N.R.S., U.M.R. 6140, Université de Picardie Jules Verne, 33, rue Saint Leu, 80039 Amiens cedex 1, France

Reçu le 5 mai 2000, revisé le 21 janvier 2002

RÉSUMÉ. – Nous étudions l'ordre de grandeur uniforme de fonctions aléatoires du type $\sum_{k=1}^{N} X_k f(n_k x)$ où $f \in A(\mathbb{T})$, $\{X_k\}_{k\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes complexes centrées telles que $\mathbb{E}|X_k|^2 < \infty$ et $\{n_k\}_{k\geqslant 1}$ est une suite strictement croissante d'entiers positifs (le cas n_k réel étant aussi traité). Posons $\sigma_N^2 = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}|X_k|^2$. Sous une certaine condition sur $\{X_k\}$, nous montrons que

$$\int_\Omega \sup_{N\geqslant 1} \sup_{x\in\mathbb{T}} \left| \frac{\sum_{k=1}^{N} X_k f(n_k x)}{\sqrt{\sigma_N^2 \log n_N}} \right| d\mathbb{P} < \infty.$$

Ce résultat généralise dans un certain sens l'inégalité de Salem–Zygmund. Une des applications de cette inégalité est l'étude de propriétés locales des séries aléatoires du type Rademacher $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varepsilon_k f(n_k x)$ et gaussienne non-stationnaire $\sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k f(n_k x)$.

ABSTRACT. – We study uniform estimates for random functions of the form $\sum_{k=1}^{N} X_k f(n_k x)$ where $f \in A(\mathbb{T})$, $\{X_k\}_{k\geqslant 1}$ is a sequence of independent complex random variables such that $\mathbb{E}X_k = 0$ and $\mathbb{E}|X_k|^2 < \infty$, and $\{n_k\}_{k\geqslant 1}$ is a strictly increasing sequence of positive integers. (the case of real sequence n_k is also studied). Let $\sigma_N^2 = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}|X_k|^2$. Under some condition on $\{X_k\}$, we prove that

$$\int_\Omega \sup_{N\geqslant 1} \sup_{x\in\mathbb{T}} \left| \frac{\sum_{k=1}^{N} X_k f(n_k x)}{\sqrt{\sigma_N^2 \log n_N}} \right| d\mathbb{P} < \infty.$$

This result generalizes to some extent Salem–Zygmund inequality. We apply this inequality to study the local regularities of random series of Rademacher type $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varepsilon_k f(n_k x)$ and of non-stationnary gaussian type $\sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k f(n_k x)$.

* Corresponding author.

E-mail addresses: Ai-hua.fan@mathinfo.u-picardie.fr (A. Fan), dominique.schneider@u-picardie.fr (D. Schneider).

MSC: 42A61; 60G15

Keywords: Littlewood–Salem inequality; Random polynomial; Uniform norm; Spectral measure; Gaussian process

1. Introduction

Considérons une série de fonctions aléatoires de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k f(n_k x)$$

où $\{X_k\}_{k\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires complexes centrées et indépendantes définies sur un espace probabilisé complet (Ω, B, P) telles que

$$\mathbb{E}|X_k|^2 < \infty, \quad \forall k \geqslant 1,$$

f une fonction de la classe $A(\mathbb{T})$, i.e.

$$\|f\|_{A(\mathbb{T})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big|\hat{f}(n)\big| < \infty,$$

et $\{n_k\}_{k\geqslant 1}$ une suite strictement croissante d'entiers positifs. Plus précisement, nous étudions la grandeur de ses sommes tronquées dans le sens suivant, lesquelles s'avéreront d'une grande commodité dans les applications : prenons deux suites d'entiers $\{\lambda_N\}_{N\geqslant 1}$ et $\{\Lambda_N\}_{N\geqslant 1}$ telles que $0 \leqslant \lambda_N \leqslant \Lambda_N$. Chaque couple (λ_N, Λ_N) décrira une somme tronquée. Dans le théorème suivant, nous aurons besoin de la condition suivante sur les deux suites $\{n_k\}_{k\geqslant 1}$ et $\{\Lambda_N\}_{N\geqslant 1}$:

$$n_{\Lambda_N} \geqslant c_1 N^{c_2} \quad (\forall N \geqslant 1) \tag{$\mathcal{L}$}$$

où $c_1 > 0, c_2 > 0$ sont deux constantes. Signalons que les Λ_N peuvent se répéter, mais cette répétition est limitée par la condition $(\mathcal{L})$. Il est clair que si Λ_N est strictement croissante (i.e. sans répétition), la condition $(\mathcal{L})$ est satisfaite avec $c_1 = c_2 = 1$.

Posons

$$\sigma_N^2 = \sum_{k=\lambda_N}^{\Lambda_N} \mathbb{E}|X_k|^2.$$

Pour tout entier $a \geqslant 1$, posons

$$Z_a = \sup_{N\geqslant a} \sqrt{\frac{1}{\sigma_N^2} \sum_{k=\lambda_N}^{\Lambda_N} |X_k|^2}.$$

Notre premier résultat est le suivant.

THÉORÈME 1. – *Supposons que $f \in A(\mathbb{T})$ et que $\{n_k\}_{k\geqslant 1}$ et $\{\Lambda_N\}_{N\geqslant 1}$ satisfont à la condition $(\mathcal{L})$. Supposons de plus que la suite de variables aléatoires centrées et indépendantes $\{X_k\}_{k\geqslant 1}$ satisfait à la condition*

$$\mathbb{E}\sup_{N\geqslant 1}\sqrt{\frac{1}{\sigma_N^2}\sum_{k=\lambda_N}^{\Lambda_N}|X_k|^2}<\infty. \tag{$\mathcal{V}$}$$

Alors pour toute suite de nombres réels $\{\Phi_k\}_{k\geqslant 1}$ et pour tout $a\geqslant 1$, nous avons

$$\int_\Omega \sup_{N\geqslant a}\sup_{x\in\mathbb{T}}\left|\frac{\sum_{k=\lambda_N}^{\Lambda_N} X_k f(n_k x+\Phi_k)}{\sqrt{\sigma_N^2\log n_{\Lambda_N}}}\right| d\mathbb{P}\leqslant C\|f\|_{A(\mathbb{T})}\mathbb{E}Z_a$$

où C est une constante indépendante de f, $\{X_k\}_{k\geqslant 1}$ et $\{\Phi_k\}_{k\geqslant 1}$.

Dans la section 4, nous discuterons de la condition $(\mathcal{V})$.

Le cas particulier où $f(x)=\mathrm{e}^{2\pi i x}$ correspond au cas étudié par Salem–Zygmund [13]. Signalons qu'il y a une différence entre le théorème 1 sous forme intégrale et l'inégalité de Salem–Zygmund que Kahane a présentée dans [7] (p. 68) sous forme de probabilité. D'abord, Salem–Zygmund [13] ont traité le cas des variables de Rademacher et de Steinhaus, puis Kahane [5] a donné une généralisation aux variables sous-gaussiennes. La condition sous-gaussienne est ici remplacée par la condition $(\mathcal{V})$ dans le théorème 1. Remarquons que sans la condition $(\mathcal{V})$, il y a une inégalité faible :

$$\int_\Omega \sup_{x\in\mathbb{T}}\left|\sum_{k=\lambda_N}^{\Lambda_N} X_k f(n_k x+\Phi_k)\right| d\mathbb{P}\leqslant C\|f\|_{A(\mathbb{T})}\sqrt{\sigma_N^2\log(n_{\Lambda_N})}$$

dont la preuve est une simplification de celle du théorème 1. De plus, nous signalons le travail récent de Weber [15] qui étudie et généralise cette inégalité faible à des normes d'Orlicz au lieu de la norme $L^1(\Omega)$, dans le cas où $f(x)=\mathrm{e}^{2\pi i x}$.

Si $\{X_k\}_{k\geqslant 1}=\{\varepsilon_k\}_{k\geqslant 1}$ est la suite de Rademacher (suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement réparties prenant les valeurs $+1$ ou -1 avec probabilité $\frac{1}{2}$), la condition $(\mathcal{V})$ est clairement satisfaite. Soit S_N la somme partielle de

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k a_k f(n_k x).$$

Le théorème 1, appliqué à ce cas, donne l'intégrabilité de la fonction maximale

$$M=\sup_{N\geqslant 1}\sup_{x\in\mathbb{T}}\frac{|S_N(x)|}{\sqrt{\sigma_N^2\log n_N}}$$

où $\sigma_N^2=\sum_{n=1}^N|a_n|^2$. En fait, Hoffmann–Jorgensen a montré que M possède des moments de tous ordres [4] (voir aussi [9], p. 159). Rappelons que Salem–Zygmund avait montré que $M<\infty$ presque sûrement.

Le théorème se démontre par une méthode de randomisation gaussienne qui permet de se ramener aux estimations de Fernique. Les calculs sont d'abord faits avec la fonction exponentielle $f(x) = \mathrm{e}^{2\pi ix}$ et le cas général s'obtient par convexification. Le lecteur est invité à consulter [14] pour trouver une description détaillée de cette technique de randomisation gaussienne. Notre démarche est différente de celle de Salem–Zygmund : celle-ci étant basée sur l'inégalité de Bernstein pour des polynômes trigonométriques.

Tel est le cas pour les fonctions périodiques $f(n_k x)$. Si les n_k ne sont pas entiers, les fonctions $f(n_k x)$ ne sont que presque périodiques. Notre méthode s'adapte encore à cette situation. Nous nous contentons d'énoncer le résultat suivant, une estimation locale pour des sommes de Dirichlet aléatoires.

THÉORÈME 2. – *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $M > 0$ et tout $N \geqslant 1$ on a*

$$\mathbb{E} \sup_{t\in[-M,M]} \left| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n n^{it} \right| \leqslant C\sqrt{N \log(M \log N)}.$$

C'est une estimation du type loi du logarithme itéré, mais uniforme pour tout $t \in [-M, M]$. Il mérite d'être signalé que la norme uniforme sur $\mathbb{R}$ a connu une estimation précise que Queffelec [11] a attribuée à G. Halasz :

$$C_1 \frac{N}{\log N} \leqslant \mathbb{E} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n n^{it} \right| \leqslant C_2 \frac{N}{\log N}$$

($C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ étant deux constantes). Queffelec [12] a obtenu une généralisation de cette dernière estimation en considérant $n^{-\sigma+it}$ au lieu de n^{it} ($0 \leqslant \sigma < \frac{1}{2}$).

Comme application, nous étudierons les séries de fonctions aléatoires de la forme Rademacher

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k a_k f(n_k x) \tag{S_R}$$

et gaussienne non-stationnaire

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k a_k f(n_k x). \tag{S_G}$$

Nous cherchons des conditions pour que les séries (S_R) et (S_G) représentent presque-sûrement une fonction continue sur le cercle. Nous donnerons également des estimations de leur module de continuité et verrons à quelle condition ces séries aléatoires représentent une fonction Lipschtzienne d'ordre α ($0 < \alpha \leqslant 1$). Ce faisant nous montrerons que sous certaines conditions la convergence des séries aléatoires (S_R) et (S_G) est uniforme en x.

Dans la section 2, nous rappelons deux inégalités dûes à Fernique sur les processus Gaussiens. Nous démontrons le théorème 1 dans la section 3. Des conditions plus parlantes que ($\mathcal{V}$) sont discutées dans la section 4. La section 5 est consacrée à l'étude de séries aléatoires comme une application du théorème 1. Puis dans la section 6, nous donnons une généralisation du théorème 1 au cas où n_k n'est pas entier, et ce pour une famille de fenêtres $\{\lambda_N^{(K)}, \Lambda_N^{(K)}, N \geqslant 1\}_{K\geqslant 1}$. Enfin, le théorème 2 est démontré dans la section 7.

2. Préliminaires

Les preuves des théorèmes 1 et 2 reposent sur deux inégalités fondamentales, dûes à Fernique, concernant la régularité des trajectoires de fonctions aléatoires gaussiennes. Par souci de clarté, nous convenons de citer dans leur ordre d'apparition les outils Gaussiens utilés dans ce travail.

INÉGALITÉ 1′. – *Soit* $\{G_N,\ N \geqslant 1\}$ *une suite de processus Gaussiens réels définis sur* $[0,1]$ *dont les trajectoires sont p.s. des fonctions continues. Alors*

$$\mathbb{E}\sup_{N\geqslant 1}\sup_{x\in[0,1]}\left|G_N(x)\right| \leqslant K\left\{\sup_{N\in\mathbb{N}}\mathbb{E}\sup_{x\in[0,1]}\left|G_N(x)\right| + \mathbb{E}\sup_{N\in\mathbb{N}}|\xi_N\sigma_N|\right\},$$

où K *une constante absolue,* $\{\xi_k,\ k\geqslant 1\}$ *est une suite isonormale et pour tout* $N\in\mathbb{N}$

$$\sigma_N = \sup_{x\in[0,1]}\left\|G_N(x)\right\|_{L^2(\Omega)}.$$

INÉGALITÉ 2 (Fernique [2]). – *Soit* g *une fonction aléatoire gaussienne à valeurs réelles, stationnaire, séparable et continue en moyenne quadratique. De plus, notons* m *sa mesure spectrale associée sur* $\mathbb{R}^+$ *définie par*

$$\mathbb{E}\left[\left|g(s)-g(t)\right|^2\right] = 2\int_0^\infty \left[1-\cos 2\pi u(s-t)\right]m(du).$$

Alors on a

$$\mathbb{E}\sup_{\alpha\in[0,1]} g(\alpha) \leqslant K\left\{\sqrt{\int_{\mathbb{R}^+}\min\left(u^2,1\right)m(du)} + \int_{\mathbb{R}^+}\sqrt{m\left(\left]\mathrm{e}^{x^2},\infty\right[\right)}\,dx\right\},$$

où K *est une constante absolue.*

INÉGALITÉ 1 (Fernique [1]). – *Soit* $X=\{X(t)\colon\ t\in T\}$ *une fonction aléatoire gaussienne définie sur un ensemble* T *fini ou dénombrable. Soit de plus* $\{T_k,\ k\in[1,n]\}$ *un recouvrement de* T. *Notons* $S = T_1\times\cdots\times T_n$. *Alors on a l'inégalité suivante*

$$\mathbb{E}\left\{\sup_{k\in[1,n]}\left[\sup_{t\in T_k}X(t) - \mathbb{E}\sup_{t\in T_k}X(t)\right]\right\} \leqslant \frac{\pi}{2}\cdot\sup_{s\in S}\left\{\mathbb{E}\left[\sup_{k\in[1,n]}X(s_k)\right]\right\}.$$

3. Démonstrations du théorème 1

Nous allons mettre en oeuvre dans cette section une technique de preuve qui repose sur le jumelage de la randomisation gaussienne (étape 1) et de l'inégalité 1' de Fernique (étape 2) qui nous conduira naturellement à la condition d'équiintégrabilité $(\mathcal{V})$. Nous désignerons par C toute constante positives pouvant se modifier au cours de la preuve. Nous commençons par le cas particulier mais essentiel où $f(x) = \mathrm{e}^{2\pi i x}$.

Etape 1. Nous allons démontrer que

$$\mathbb{E} \sup_{N \geqslant a} \left\| \frac{\sum_{k=\lambda_N}^{\Lambda_N} X_k \exp 2\pi i n_k x}{\sqrt{\sigma_N^2 \log n_{\Lambda_N}}} \right\|_\infty \leqslant C \mathbb{E} Z_a.$$

Comme $\mathbb{E} X_k = 0$, il nous suffit de montrer que

$$\mathbb{E}_{X,X'} \sup_{N \geqslant a} \left\| \frac{\sum_{k=\lambda_N}^{\Lambda_N} (X_k - X'_k) \exp 2\pi i n_k x}{\sqrt{\sigma_N^2 \log n_{\Lambda_N}}} \right\|_\infty \leqslant C \mathbb{E} Z_a$$

où (X'_k) est une copie indépendante de (X'_k) et $\mathbb{E}_{X,X'}$ désigne l'espérance sur l'espace où les deux suites (X_k) et (X'_k) sont définies. Comme $X_k - X'_k$ est symétrique, on peut supposer dès le départ que X_k est symétrique (signalons que $X_k - X'_k$ satisfait à la condition $(\mathcal{V})$). Soit maintenant (ε_k) une suite de Rademacher indépendante de (X_k). Comme (X_k) et $(\varepsilon_k X_k)$ ont la même répartition, la dernière inégalité équivaut à

$$\mathbb{E}_{X,\varepsilon} \sup_{N \geqslant a} \left\| \frac{\sum_{k=\lambda_N}^{\Lambda_N} \varepsilon_k X_k \exp 2\pi i n_k x}{\sqrt{\sigma_N^2 \log n_{\Lambda_N}}} \right\|_\infty \leqslant C \mathbb{E} Z_a.$$

Alors, en vertu du principe de contraction [3], il nous suffit de montrer que

$$\mathbb{E}_X \mathbb{E}_{g,g'} \sup_{N \geqslant a} \left\| \frac{\sum_{k=\lambda_N}^{\Lambda_N} X_k [g_k \cos 2\pi n_k x + g'_k \sin \pi n_k x]}{\sqrt{\sigma_N^2 \log n_{\Lambda_N}}} \right\|_\infty \leqslant C \mathbb{E} Z_a$$

où (g_n) et (g'_n) sont deux suites normales centrées reduites et indépendantes l'une de l'autre.

Etape 2. Conditionnellement au processus (X_k), nous appliquons l'inégalité 1' à la suite de vecteurs Gaussiens

$$G_N = \frac{\sum_{k=\lambda_N}^{\Lambda_N} X_k [g_k \cos 2\pi n_k x + g'_k \sin 2\pi n_k x]}{\sqrt{\sigma_N^2 \log n_{\Lambda_N}}},$$

à valeurs dans l'espace de Banach $C(\mathbb{T})$. Alors

$$\mathbb{E}_{g,g'} \sup_{N \geqslant a} \sup_{x \in \mathbb{T}} \left| G_N(x) \right| \leqslant C \Big[\sup_{N \geqslant a} \mathbb{E}_{g,g'} \sup_{x \in \mathbb{T}} \left| G_N(x) \right| + \mathbb{E}_\xi \sup_{N \geqslant a} |\xi_N q_N| \Big]$$

où (ξ_k) est une suite isonormale et

$$q_N \leqslant \sup_{x \in [0,1]} \left\| \frac{\sum_{k=\lambda_N}^{\Lambda_N} X_k [g_k \cos 2\pi n_k x + g'_k \sin \pi n_k x]}{\sqrt{\sigma_N^2 \log n_N}} \right\|_2$$

où $\|\cdot\|_2$ désigne la L^2-norme sur l'espace de probabilité où (g_n) et (g'_n) sont définies. Un calcul simple nous montre que

$$q_N \leqslant \sqrt{\frac{1}{\sigma_N^2}\sum_{k=\lambda_N}^{\Lambda_N}|X_k|^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\log n_{\Lambda_N}}}.$$

D'après $(\mathcal{L})$, $\log n_{\Lambda_N} \geqslant c \log N$, donc

$$\mathbb{E}_X\mathbb{E}_\xi \sup_{N\geqslant a}|\xi_N q_N| \leqslant C'\mathbb{E}Z_a \cdot \mathbb{E}_\xi \sup_{N\geqslant a}\left|\frac{\xi_N}{\sqrt{\log N}}\right| \leqslant C''\mathbb{E}Z_a.$$

Ainsi il nous suffit de montrer

$$\mathbb{E}_X \sup_{N\geqslant a} \mathbb{E}_{g,g'} \sup_{x\in\mathbb{T}}\left|G_N(x)\right| \leqslant C\mathbb{E}Z_a.$$

Dans la suite, $G_N = G_N(x)$ sera considéré comme une fonction aléatoire au lieu d'un vecteur aléatoire.

Etape 3. Remarquons d'abord que si X_t $(t \in T)$ est une fonction aléatoire gaussienne définie sur l'ensemble T, alors pour tout $t_0 \in T$, on a [3]

$$\mathbb{E}\sup_{t\in T}|X_t| \leqslant \mathbb{E}|X_{t_0}| + \mathbb{E}\sup_{t\in T} X_t.$$

Cela nous permet d'éliminer la valeur absolue. Appliquons cette remarque à $G_N(x)$ pour $t_0 = x = 0$. Nous contrôlons l'intégrale $\mathbb{E}_{g,g'}\sup_{x\in\mathbb{T}}|G_N(x)|$ par la somme

$$A_N + B_N := \mathbb{E}_g\left|\frac{\sum_{k=\lambda_N}^{\Lambda_N} X_k g_k}{\sqrt{\sigma_N^2 \log n_{\Lambda_N}}}\right| + 2\mathbb{E}_{g,g'}\sup_{x\in\mathbb{T}} G_N(x).$$

Il est évident que

$$A_N \leqslant \sqrt{\mathbb{E}_g\left|\frac{\sum_{k=\lambda_N}^{\Lambda_N} X_k g_k}{\sqrt{\sigma_N^2 \log n_{\Lambda_N}}}\right|^2} \leqslant \sqrt{\frac{\sum_{k=\lambda_N}^{\Lambda_N}|X_k|^2}{\sigma_N^2}\frac{1}{\sqrt{\log n_{\Lambda_N}}}} \leqslant C Z_a.$$

D'autre part, la majoration de B_N découle immédiatement des estimations de Salem–Zygmund [13] où elle y figure explicitement en les termes suivants : il existe une constante C telle que $B_N \leqslant C Z_a$.

Ainsi nous avons démontré l'existence une constante absolue telle que

$$\mathbb{E}_X \sup_{N\geqslant a}(A_N + B_N) \leqslant C\mathbb{E}Z_a.$$

Etape 4. Maintenant envisageons le cas général, qui peut se ramener au cas particulier que nous venons de considérer. Soit $j \neq 0$. Observons que l'application $x \to jx$ (mod 1) est surjective. Donc

$$\sup_{x\in\mathbb{T}}\left|\sum_{k=\lambda_N}^{\Lambda_N} X_k \exp(2i\pi n_k jx)\right| = \sup_{x\in\mathbb{T}}\left|\sum_{k=\lambda_N}^{\Lambda_N} X_k \exp(2i\pi n_k x)\right|.$$

Ce qui donne une même borne supérieure dans le cas $e^{2\pi ijx}$ que dans le cas $e^{2\pi ix}$. En examinant les trois étapes précédentes, on voit que la même borne supérieure est aussi valable quand $j = 0$.

En développant f en série de Fourier, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{N\geqslant a}\sup_{x\in\mathbb{T}}\left|\frac{\sum_{k=\lambda_N}^{\Lambda_N} X_k f(xn_k)}{\sqrt{\sigma_N^2 \log n_{\Lambda_N}}}\right| &\leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(j)|\mathbb{E}\sup_{N\geqslant 1}\sup_{x\in\mathbb{T}}\left|\frac{\sum_{k=\lambda_N}^{\Lambda_N} X_k \exp(2\pi ijn_k x)}{\sqrt{\sigma_N^2 \log n_{\Lambda_N}}}\right| \\ &\leqslant \|f\|_{A(\mathbb{T})}\cdot C\mathbb{E}Z_a < +\infty. \qquad \square\end{aligned}$$

Nous pouvons affaiblir la condition stipulant que la suite $\{n_k\}_{k\geqslant 1}$ est à valeurs entières, en lui permettant de prendre des valeurs réelles. Dans ce cas, les méthodes de Salem–Zygmund ne s'appliquent plus. Dans cette nouvelle situation nous utiliserons l'inégalité 2 de Fernique. Nous examinerons cette situation dans la section 6.

Nous pouvons encore nous passer de la condition $(\mathcal{V})$ si nous nous contentons de l'inégalité faible suivante

$$\mathbb{E}\sup_{x\in\mathbb{T}}\left|\sum_{k=\lambda_N}^{\Lambda_N} X_k f(n_k x + \Phi_k)\right| \leqslant C\sqrt{\sum_{k=\lambda_N}^{\Lambda_N}\mathbb{E}|X_k|^2 \log n_{\Lambda_N}}.$$

En effet, la preuve est plus simple que celle du théorème 1, car on ne prend pas $\sup_{N\geqslant a}$ et donc l'étape 2 peut être supprimée. Nous invitons le lecteur à voir l'article de Weber [15] pour une autre approche.

Remarquons qu'étant donnée une suite d'entiers $\{n_k\}_{k\geqslant 1}$ strictement croissante, nous avons

$$C_1\sqrt{N\log N} \leqslant \mathbb{E}\sup_{x\in[0,1]}\left|\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k e^{2\pi i n_k x}\right| \leqslant C_2\sqrt{N\log n_N}$$

($C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ étant deux constantes). La première inégalité, nécessitant la croissance stricte de la suite d'entiers $\{n_k\}_{k\geqslant 1}$, est due à Marcus et Pisier [10] (p. 118) et la deuxième est une conséquence de l'inégalité faible citée ci-dessus. Ces estimations sont à comparer avec celle du théorème 2.

4. La condition $(\mathcal{V})$

La condition $(\mathcal{V})$ est vérifiée par toute suite $\{X_k\}_{k\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (I.I.D.) telles que $\mathbb{E}|X_k|^2 < \infty$. En effet, comme $\sigma_N^2 = N\mathbb{E}(X_1)^2$, la condition revient à $\mathbb{E}\sqrt{X^*} < \infty$ où

$$X^* = \sup_{N\geqslant 1}\frac{1}{N}\sum_{1\leqslant k\leqslant N}|X_k|^2.$$

Or, selon le théorème ergodique maximal de Hopf [8], X^* est faiblement L^1-intégrable. Donc $\mathbb{E}X^{*r} < \infty$ pour tout $0 < r < 1$.

Notons que l'argument du théorème ergodique maximal de Hopf peut être remplacé par le fait que

$$\frac{1}{N}\sum_{1\leqslant k\leqslant N}|X_k|^2$$

est une martingale à l'envers et que l'on peut appliquer l'inégalité maximale de Doob.

La condition I.I.D. ci-dessus étant trop forte en générale, nous discutons maintenant une condition qui assure $(\mathcal{V})$ dans le cadre suivant.

THÉORÈME 3. – *Considérons* $X_k = a_k Y_k$ *où* $\{Y_k\}_{k\geqslant 1}$ *est une suite de variables aléatoires I.I.D. telle que pour un* $1 < p \leqslant 2$,

$$\mathbb{E}|Y_1|^{2p} < \infty$$

et $\{a_k\}_{k\geqslant 1}$ *une suite de nombres réels. Pour tout* $N \geqslant 1$, *notons* $\sigma_N^2 = \sum_{k=1}^N a_k^2$. *Supposons de plus que*

$$a_k = \mathrm{O}(1), \qquad \sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N\sigma_N^{2(p-1)}} < \infty, \qquad \sigma_{2N} = \mathrm{O}(\sigma_N). \tag{$*$}$$

Alors nous avons

$$\mathbb{E}\sup_{N\geqslant 1}\sqrt{\frac{1}{\sigma_N^2}\sum_{k=1}^N a_k^2 Y_k^2} < \infty\,.$$

Ce résultat nous conduit à faire deux remarques importantes.

Remarque 1. – Lorsque $\{Y_k\}_{k\geqslant 1}$ est une suite de Rademacher, la conclusion du théorème 1 est vérifiée sans l'hypothèse $(\mathcal{V})$; cette dernière étant triviale dans ce cas.

Remarque 2. – Lorsque $\{Y_k\}_{k\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires gaussiennes centrées et réduites, la conclusion du théorème 1 est encore vérifiée sans l'hypothèse $(\mathcal{V})$; cette dernière étant ici non-triviale. En effet, dans le cas Gaussien, nous pouvons supprimer l'étape de symétrisation dans la preuve du théorème 1 ; et ainsi éviter la condition $(\mathcal{V})$.

Démonstration du théorème 3. – Nous remarquons d'abord qu'il suffit d'établir l'inégalité sur l'index géométrique $I_1 = \{2^j\}_{j\geqslant 1}$. Cette remarque et la concavité de la fonction racine carrée entrainent qu'il suffit de prouver

$$\mathbb{E}\sup_{N\in I_1}\frac{1}{\sigma_N^2}\sum_{k=1}^N a_k^2 Y_k^2 < \infty.$$

Nous symétrisons maintenant le problème. Posons $U_k = Y_k^2 - Y_k^{'2}$ où (Y_k') est une copie indépendante de la suite (Y_k). Il n'est pas difficile de voir que la dernière inégalité résultera de

$$\mathbb{E}\sup_{N\in I_1}\left|\frac{1}{\sigma_N^2}\sum_{k=1}^{N}a_k^2U_k\right|<\infty.$$

Or,

$$\left(\mathbb{E}\sup_{N\in I_1}\left|\frac{1}{\sigma_N^2}\sum_{k=1}^{N}a_k^2U_k\right|\right)^p\leqslant\sum_{N\in I_1}\mathbb{E}\left|\frac{1}{\sigma_N^2}\sum_{k=1}^{N}a_k^2U_k\right|^p\leqslant C\sum_{N\in I_1}\mathbb{E}_{U,\varepsilon}\left|\frac{1}{\sigma_N^2}\sum_{k=1}^{N}a_k^2U_k\varepsilon_k\right|^p$$

où (ε_k) est une suite indépendante de Rademacher (choix de signes) et C une constante universelle. Cette majoration provient de la symétrie des variables U_k et de propriétés usuelles de convexité. Conditionnellement à la suite de variables aléatoires (U_k) nous avons

$$\mathbb{E}_\varepsilon\left|\sum_{k=1}^{N}a_k^2U_k\varepsilon_k\right|^p\leqslant\left[\sum_{k=1}^{N}a_k^4U_k^2\right]^{p/2}\leqslant C_p\sum_{k=1}^{N}a_k^{2p}|U_k|^p$$

où C_p est une constante ne dépendant que de p. Finalement, en intégrant par rapport à la suite (U_k) nous obtenons

$$\left(\mathbb{E}\sup_{N\in I_1}\left|\frac{1}{\sigma_N^2}\sum_{k=1}^{N}a_k^2U_k\right|\right)^p\leqslant C_p\mathbb{E}|Y_1|^{2p}\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N\sigma_N^{2(p-1)}}<\infty. \qquad \square$$

Les conditions $(*)$ sont satisfaites si $|a_k|$ est décroissante, mais pas trop vite de sorte que σ_N^{2p-2} est au moins de l'ordre de $\log^{1+\eta}N$, avec $\eta>0$ lorsque $N\to\infty$.

5. Séries aléatoires

Nous allons étudier les séries (S_R) et (S_G), définies dans l'introduction, en suivant le schéma présenté dans [5]. Grâce à l'inégalité de Salem–Zygmund sous la forme intégrale que nous avons obtenue, la preuve est plus simple bien que les séries soient plus générales. Notons

$$s_j=\sqrt{\sum_{2^j\leqslant k<2^{j+1}}|a_k|^2}\quad(j=0,1,2,\ldots)$$

et supposons que la suite d'entiers $\{n_k\}_{k\geqslant}$ soit strictement croissante, à croissance polynomiale :

$$n_k=\mathrm{O}\big(k^d\big)\quad(0<d<+\infty). \tag{$\mathcal{P}$}$$

THÉORÈME 4. – *Supposons que* $(\mathcal{P})$ *est satisfaite et que* $f\in A(\mathbb{T})$. *Alors* (S_R) *et* (S_G) *représentent presque-sûrement une fonction continue si*

$$s_j\downarrow 0,\quad \sum s_j<+\infty.$$

De plus, sous cette condition la convergence des séries de fonctions (S_R) *et* (S_G) *est uniforme, presque-sûrement.*

Dans le cas où la suite $\{s_j\}_{j\geqslant 1}$ n'est pas décroissante, nous obtenons encore la même conclusion si

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k/2} \sqrt{\sum_{m=2^k}^{2^{k+1}} s_m^2} < \infty.$$

Supposons de plus que

$$s_j = \mathrm{O}\big(j^\gamma 2^{-\beta j}\big)$$

où $\beta > 0$ ou bien $\beta = 0$ mais $\gamma < -1$. Alors, d'après le théorème précédent, chacune des séries aléatoires (S_R) et (S_G) représente presque-sûrement une fonction continue que l'on désigne indifferamment dans la suite par F. Le théorème suivant donne des estimations du module de continuité de F défini par

$$\omega_F(h) = \sup_{|t-t'|\leqslant h} \big|F(t) - F(t')\big| \quad (\forall h > 0).$$

THÉORÈME 5. – *Supposons que la dérivée* $f' \in A(\mathbb{T})$, $s_j \downarrow 0$ *et* $s_j = \mathrm{O}(j^\gamma 2^{-\beta j})$. *Alors*

(a) *Lorsque* $0 < d \leqslant 1,\ \beta = 0,\ \gamma < -1$

$$\omega_F(h) = \mathrm{O}\left(\log^{1+\gamma} \frac{1}{h}\right).$$

(b) *Lorsque* $d \geqslant 1, d > \beta > d - 1$

$$\omega_F(h) = \mathrm{O}\left(h^{1+\beta-d} \log^{1+\gamma} \frac{1}{h}\right).$$

(c) *Lorsque* $d \geqslant 1,\ \beta = d,\ \gamma > -\frac{1}{2}$

$$\omega_F(h) = \mathrm{O}\left(h \log^{1+\gamma} \frac{1}{h}\right).$$

(d) *Lorsque* $d \geqslant 1,\ \beta = d,\ -1 < \gamma < -\frac{1}{2}$

$$\omega_F(h) = \mathrm{O}\left(h \log^{\frac{1}{2}} \frac{1}{h}\right).$$

Voici un corollaire du Théorème 5 qui donne des conditions pour que la somme F de la série (S_R) ou bien de (S_G) soit une fonction lipschtzienne.

COROLLAIRE. – *Supposons que* $f' \in A(\mathbb{T})$ *et que* $s_j = \mathrm{O}(2^{-\beta j})$ *pour un certain* $\beta > d - 1$. *Alors* $F \in \mathrm{Lip}_\nu$ *presque-sûrement, avec* $\nu < \beta$.

Démonstration du théorème 4. – Nous suivons [5]. L'argument que l'on présente ici est un peu plus simple, car on se passe du lemme de Borel–Cantelli grâce à l'inégalité de Salem–Zygmund sous la forme intégrale (théorème 1). Nous commençons par traiter le cas des séries du type (S_R). Soit $(N_k)_{k\geqslant 1}$ une suite d'entiers positifs strictement croissante, tendant vers l'infini. Posons

$$\forall k \geqslant 1, \quad P_k(x) = \sum_{m=N_k}^{N_{k+1}-1} \varepsilon_m a_m f(n_m x).$$

Nous préciserons le choix de (N_k) plus tard.

Il nous suffit de montrer que presque sûrement,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sup_{x\in\mathbb{T}} \left| P_k(x) \right| < \infty.$$

En vertu du théorème 1, nous savons qu'il existe une variable aléatoire positive intégrable ξ, donc presque sûrement finie, telle que

$$\sup_{x\in\mathbb{T}} \left| P_k(x) \right| \leqslant \xi \sqrt{\log n_{N_{k+1}} \left(\sum_{m=N_k}^{N_{k+1}-1} |a_m|^2 \right)} =: b_k.$$

Il nous reste donc de choisir (N_k) telle que $\sum b_k < \infty$. Choisissant $N_k = 2^{2^k}$, nous avons la majoration (quitte à modifier ξ d'une constante multiplicative)

$$b_k \leqslant \xi 2^{k/2} \sqrt{\left(\sum_{m=2^k}^{2^{k+1}-1} s_m^2 \right)} := \xi c_k.$$

Grâce à la décroissance de s_j, la série de terme général c_k est convergente si et seulement si $\sum_{k\geqslant 0} s_k < \infty$. Ceci prouve le théorème 4 dans le cas (S_R).

Dans le cas des séries aléatoires du type (S_G) nous obtenons le même résultat en posant

$$\forall k \geqslant 1, \quad P_k(x) = \sum_{m=N_k}^{N_{k+1}-1} g_m a_m f(n_m x).$$

En effet, d'après la remarque 2 (voir §4) et le théorème 1, on conclue de manière analogue pour (S_G). □

Démonstration du théorème 5. – Reprenons les notations introduites dans la preuve du théorème 4. Comme précédement, il suffit de considérer le cas des séries du type (S_R) car notre démonstration reposera uniquement sur l'estimation type Salem–Zygmund provenant du théorème 1.

D'abord, nous avons la majoration triviale suivante

$$\omega_F(h) \leqslant \omega_{P_0}(h) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{x\in\mathbb{T}} \left| P_k(x) \right|$$

où $P_0(x)=\sum_{k=0}^{N_1-1} a_k\varepsilon_k f(n_k x)$. Comme

$$\omega_{P_0}(h)\leqslant h\sup_{x\in\mathbb{T}}\left|P_0'(x)\right|,$$

où $P_0'(x)=\sum_{k=1}^{N_1-1} a_k n_k\varepsilon_k f'(xn_k)$, nous avons

$$\omega_F(h)\leqslant h\sup_{x\in\mathbb{T}}\left|P_0'(x)\right|+2\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{x\in\mathbb{T}}\left|P_k(x)\right|.$$

Pour tout $0<h<1$, nous noterons τ la partie entière de $\log_2\frac{1}{h}$. L'entier $\tau\geqslant 1$ étant fixé, choisissons $N_k=N_{\tau,k}=2^{\tau 2^{k-1}}$ pour $k\geqslant 1$. Réarrangeons les entiers $N_{\tau,k}$ ($\tau\geqslant 1, k\geqslant 1$) dans l'ordre croissant. Notons Λ_N la suite croissante obtenue. Remarquons que pour tout $m\geqslant 1$,

$$\operatorname{Card}\left\{(\tau,k)\colon\ N_{\tau,k}\leqslant m\right\}\leqslant\log_2 m\cdot\log_2\log_2 m\leqslant(\log_2 m)^2.$$

Ceci implique que $\Lambda_m\geqslant\Lambda_{(\log_2 m)^2}\geqslant m$, et donc que la condition $(\mathcal{L})$ est satisfaite par (Λ_N) et (n_k). Appliquons le théorème 1 (la condition $(\mathcal{V})$ est trivialement satisfaite) : il existe une variable aléatoire intégrable $\xi\geqslant 0$ *indépendante* de τ et de k telle que

$$\sup_{x\in\mathbb{T}}\left|P_0'(x)\right|\leqslant\xi\sqrt{\log n_{N_1}\left(\sum_{m=1}^{N_1-1}|n_m a_m|^2\right)}=:b$$

et

$$\sup_{x\in\mathbb{T}}\left|P_k(x)\right|\leqslant\xi\sqrt{\log n_{N_{k+1}}\left(\sum_{m=N_k}^{N_{k+1}-1}|a_m|^2\right)}=:b_k.$$

Rappelons que b et b_k dépendent de τ, cette dernière dépendant de h. Ainsi, nous obtenons

$$\omega_F(h)\leqslant hb+2\sum_{k=1}^{\infty}b_k.$$

Dans la suite, ξ pourra être modifiée d'une étape à l'autre, mais restera intégrable. Rappelons que $n_m=\mathrm{O}(m^d)$. Donc nous avons

$$b\leqslant\xi\sqrt{\tau\sum_{j=1}^{\tau}2^{2j(d-\beta)}j^{2\gamma}}$$

et

$$b_k\leqslant\xi\sqrt{\left(\tau 2^k\right)^{1+2\gamma}\sum_{j=\tau 2^{k-1}}^{\tau 2^k-1}2^{-2\beta j}}.$$

Distinguons les trois cas suivants pour contrôler b :

(i) Si $0 \leqslant \beta < d$, alors $b \leqslant \xi\tau^{\frac{1}{2}+\gamma}2^{-\tau(\beta-d)}$.
(ii) Si $\beta = d$ et $\gamma > -\frac{1}{2}$, alors $b \leqslant \xi\tau^{1+\gamma}$.
(iii) Si $\beta = d$ et $\gamma < -\frac{1}{2}$, alors $b \leqslant \xi\tau^{\frac{1}{2}}$.

Distinguons aussi les deux cas suivants pour contrôler b_k :

(1) Si $\beta > 0$, alors

$$\sum_{k\geqslant 1} b_k \leqslant \xi \sum_{k\geqslant 1} \left(\tau 2^k\right)^{\frac{1}{2}+\gamma} 2^{-\beta\tau 2^k} \leqslant \xi\tau^{\frac{1}{2}+\gamma}2^{-\beta\tau}.$$

(2) Si $\beta = 0$ et $\gamma < -1$, alors

$$\sum_{k\geqslant 1} b_k \leqslant \xi \sum_{k\geqslant 1} \left(\tau 2^k\right)^{1+\gamma} \leqslant \xi\tau^{1+\gamma}.$$

Alors (i) et (2) donne (a), (i) et (1) donne (b), (ii) et (1) donne (c), (iii) et (1) donne (d). La preuve du théorème 5 est ainsi terminée. □

Nous terminons en signalant que les études précédentes s'étendent aux séries de fonctions aléatoires :

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k f(n_k x + \Phi_k) \qquad (S')$$

où $\{X_k\}_{k\geqslant 1}$ est une suite aléatoire indépendante et centrée et $\{\Phi_k\}_{k\geqslant 1}$ est une suite de nombres réels. Le rôle de s_j sera joué par

$$s_j = \left(\sum_{2^j \leqslant k < 2^{j+1}} \mathbb{E}|X_k|^2\right)^{1/2}.$$

Mais une condition de type $(\mathcal{V})$ sur les variables aléatoires X_k doit être satisfaite.

6. Cas presque périodique

Nous présentons un résultat qui généralise le théorème 1 en vue d'autres applications, comme par exemple, l'étude de théorèmes ergodiques pondérés et l'étude de la régularité locale des fonctions représentées par des séries aléatoires. Cette généralisation a pour objet l'étude du comportement asymptotique de séries aléatoires vues sous l'angle d'une famille de fenêtres. De plus, nous ne supposons pas à priori que la série aléatoire est périodique comme précédemment : la suite $\{n_k\}_{k\geqslant 1}$ sera supposée à valeurs réelles et croissante au sens large. Dans ce cas nous sommes en présence de séries aléatoires presque-périodiques, c'est la raison pour laquelle notre étude sera éffectuée sur un intervalle du type $[-M, M]$ où M est un nombre positif fixé. Dans cette situation où les choses sont vraiment nouvelles et où les méthodes de Salem–Zygmund ne s'appliquent plus, nous voyons que l'emploi des inégalités 1, 2 et 3 de Fernique (cette dernière étant citée dans cette section) est crusial.

Supposons que

$$|||f||| := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \big|\hat{f}(k)\big| \sqrt{\log(|k|+3)} < \infty,$$

(cette hypothèse étant plus forte que $f \in A(\mathbb{T})$). Considérons une famille de fenêtres $\{(\lambda_N^{(K)}, \Lambda_N^{(K)})\colon \lambda_N^{(K)} \leqslant \Lambda_N^{(K)}\}$ indexées par $K \geqslant 1$ et $N \geqslant 1$, et une suite de variables aléatoires centrées et indépendantes possédant un moment d'ordre deux.

Supposons que la condition suivante soit vérifiée :

$$\mathbb{E} \sup_{N\geqslant 1, K\geqslant 1} \sqrt{\frac{1}{\sigma_{N,K}^2} \sum_{j=\lambda_N^{(K)}}^{\Lambda_N^{(K)}} |X_j|^2} < \infty \tag{$\mathcal{V}$}$$

où

$$\sigma_{N,K}^2 = \sum_{j=\lambda_N^{(K)}}^{\Lambda_N^{(K)}} \mathbb{E}|X_j|^2.$$

Enfin, considérons une suite croissante de réels positifs $\{n_k\}_{k\geqslant 1}$ telle qu'il existe deux constantes C_1 et C_2 avec :

$$\forall K \geqslant 1,\ \ \forall N \geqslant 1, \quad n_{\Lambda_N^{(K)}} \geqslant C_1 N^{C_2}. \tag{$\mathcal{L}$}$$

THÉORÈME 6. – *Dans le cadre décrit ci-dessus, pour tout réel positif $M > 0$ et tout entier $a \geqslant 1$, nous avons* :

$$\int_\Omega \sup_{K\geqslant 1} \sup_{N\geqslant a} \sup_{x\in[-M,+M]} \left| \frac{\sum_{j=\lambda_N^{(K)}}^{\Lambda_N^{(K)}} X_j f(n_j x)}{\sqrt{\sigma_{N,K}^2 \log(M n_{\Lambda_N^{(K)}})}} \right| d\mathbb{P} \leqslant C |||f|||\, \mathbb{E} \sup_{K\geqslant 1} Z_a^K$$

où C est une constante indépendante de f, $\{X_k\}_{k\geqslant 1}$, K et M, et

$$Z_a^K = \sup_{N\geqslant a} \sqrt{\frac{1}{\sigma_{N,K}^2} \sum_{j=\lambda_N^{(K)}}^{\Lambda_N^{(K)}} |X_j|^2}.$$

Remarques. – Si nous supposons que la suite $\{n_k\}_{k\geqslant 1}$ est à valeurs entières et que $f \in A(\mathbb{T})$ alors nous avons l'extension suivante du théorème 1 pour une famille de fenêtres :

$$\int_\Omega \sup_{K\geqslant 1} \sup_{N\geqslant a} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\sum_{j=\lambda_N^{(K)}}^{\Lambda_N^{(K)}} X_j f(n_j x)}{\sqrt{\sigma_{N,K}^2 \log(n_{\Lambda_N^{(K)}})}} \right| d\mathbb{P} \leqslant C \|f\|_{A(\mathbb{T})} \mathbb{E} \sup_{K\geqslant 1} Z_a^K.$$

Dans le cas où $X_k = a_k \varepsilon_k$, l'hypothèse ($\mathcal{V}$) est vérifiée. Dans le cas où $X_k = a_k g_k$ ($\{g_k\}_{k\geqslant 1}$ étant une suite isonormale), le théorème 6 est vrai sans la condition ($\mathcal{V}$)

(voir section 4 à ce propos). De plus il nous semble important en vue des applications d'insister sur le fait que la constante C ne dépend pas de la famille de fenêtres.

Un exemple d'application est l'extension des résultats du Théorème 4 aux séries aléatoires du type (S_R) et (S_G) au cas presque-périodique. Soit

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k a_k f(n_k x). \tag{S_G}$$

Notons

$$s_j = \sqrt{\sum_{2^j \leqslant k < 2^{j+1}} |a_k|^2} \quad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

et supposons que la suite de réels positifs $\{n_k\}_{k\geqslant}$ soit croissante et telle qu'il existe un nombre $0 < d < +\infty$ et une constante $C > 0$ avec

$$n_k \geqslant C \log\log k \quad \text{et} \quad n_k = \mathrm{O}\big(k^d\big). \tag{$\mathcal{P}$}$$

Enfin considérons un élément f de $A(\mathbb{T})$ tel que

$$|\!|\!| f |\!|\!| := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \big|\hat{f}(k)\big| \sqrt{\log(|k|+3)} < \infty.$$

Alors (S_G) représente presque-sûrement une fonction continue sur $\mathbb{R}$ si

$$s_j \downarrow 0, \quad \sum s_j < +\infty.$$

Il en est demême pour (S_R). De plus, sous ces conditions la convergence des séries de fonctions (S_R) et (S_G) est uniforme sur tout compact, presque-sûrement.

De la même manière nous pourrions étudier leurs modules de continuités. Pour ce faire il suffirait de considérer la famille de fenêtres $\{(\lambda_N^{(K)}, \Lambda_N^{(K)})\colon 5\lambda_N^{(K)} \leqslant \Lambda_N^{(K)}\}$ définie par : $\lambda_N^{(K)} = 2^{K\,2^{N-1}}$ et $\Lambda_N^{(K)} = 2^{K\,2^N}$ avec l'entier $K \geqslant 1$ (cf. preuve du théorème 5 avec $K := \tau$). D'où l'étude de séries aléatoires du type suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k a_k f\big(x\sqrt{k\log k}\big).$$

Démonstration du théorème 6. – Nous présentons ici uniquement les points qui different de la preuve du théorème 1. Nous appliquons l'estimation gaussienne suivante, qui généralise l'inégalité 2.

INÉGALITÉ 3. – *Soit g une fonction aléatoire gaussienne à valeurs réelles, stationnaire, séparable et continue en moyenne quadratique. Notons par m sa mesure spectrale associée sur $\mathbb{R}^+$ définie par*

$$\mathbb{E}\big[\big|g(s) - g(t)\big|^2\big] = 2\int_0^{\infty} \big(1 - \cos 2\pi u(s-t)\big)\, m(du).$$

Alors l'espérance $\mathbb{E}\sup_{\alpha\in[-M,M]} g(\alpha)$ *est majorée, à une constante universelle près, par*

$$\sqrt{\int_0^\infty \min(2Mu^2,1)\, m(du)} + \int_0^\infty \sqrt{m\left(\left]\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2M},\infty\right[\right)}\, dx.$$

Nous appliquons l'inégalité 3 à la fonction $g(M\alpha)$ dont la mesure spectrale associée sur $\mathbb{R}^+$ est

$$\mathbb{E}\left[\left|g(Ms)-g(Mt)\right|^2\right] = 2\int_0^\infty \left(1-\cos 2\pi uM(s-t)\right) m(du)$$

d'où l'inégalité 3. Observons que si g est une fonction aléatoire stationnaire, les mesures spectrales de g et d'une quelconque translatée $g_t(\alpha) = g(t+\alpha)$ de g sont les mêmes. Cela nous permet d'obtenir des majorations de $\mathbb{E}\sup_\alpha g(\alpha)$ où α est restreint sur un intervalle arbitraire de longueur $2M$.

Etape 1. Notons $I_M = [-M, M]$ Nous commençons par la preuve du cas particulier mais essentiel : $f(x) = \mathrm{e}^{2\pi ix}$. La procédure de randomisation gaussienne (cf. étape 1 de la preuve du théorème 1) nous conduit à étudier

$$\mathbb{E}_{X,g,g'} \sup_{K\geqslant 1}\sup_{N\geqslant a}\sup_{x\in I_M}\left|\frac{\sum_{j=\lambda_N^{(K)}}^{\Lambda_N^{(K)}} X_j[g_j\cos 2\pi n_j x + g'_j \sin 2\pi n_j x]}{\sqrt{\sigma_{N,K}^2 \log(M n_{\Lambda_N^{(K)}})}}\right|.$$

Nouvelle étape. Fixons X et le réel positif M. Conditionnellement au processus X, notons

$$G(K,N,x) = \frac{\sum_{j=\lambda_N^{(K)}}^{\Lambda_N^{(K)}} X_j[g_j\cos 2\pi n_j x + g'_j \sin 2\pi n_j x]}{\sqrt{\sigma_{N,K}^2 \log(M n_{\Lambda_N^{(K)}})}}.$$

Pour K et N fixés, $G(x)$ représente (à une modification de trajectoire près) une fonction aléatoire à trajectoires presque-sûrement continues. C'est la raison pour laquelle nous pouvons nous restreindre à $I_M\cap\mathbb{Q}$ pour montrer que G est bornée. Ainsi nous majorons

$$\mathbb{E}\sup_{K\geqslant 1}\sup_{N\geqslant a}\sup_{x\in I_M\cap\mathbb{Q}}\left|G(K,N,x)\right|. \tag{1}$$

Nous pouvons supprimer les valeurs absolues, sans modifier la nature de la majoration de (1) car le coût à payer est du même ordre que le majorant annoncé

Pour appliquer l'inégalité 1, fixons un entier n assez grand et notons

$$T = \{1,\dots,n\}\times\mathbb{N}\times(I_M\cap\mathbb{Q}).$$

L'ensemble T ainsi formé est au plus dénombrable et nous proposons de majorer $\mathbb{E}\sup_T G$ indépendamment de n et ainsi conclure par croissance. Notons

$$T_k = \{k\}\times\mathbb{N}\times(I_M\cap\mathbb{Q}).$$

Il est clair que $\{T_k\}$ est un recouvrement de T. Posons enfin

$$S = T_1 \times \cdots \times T_n.$$

En vertu de l'inégalité 1, nous avons

$$\mathbb{E} \sup_{t \in T} G(t) \leqslant \frac{\pi}{2} \sup_{s \in S} \mathbb{E} \sup_{K=1,\dots,n} G(s_K) + \sup_{K=1,\dots,n} \mathbb{E} \sup_{t \in T_K} G(t).$$

Concernant la partie

$$\sup_{1 \leqslant K \leqslant n} \mathbb{E} \sup_{N \geqslant a} \sup_{x \in I_M \cap \mathbb{Q}} G(K, N, x),$$

il suffit d'appliquer le théorème 1 pour K fixé. Nous obtenons la majoration suivante, indépendante de l'entier n :

$$\sup_{1 \leqslant K \leqslant n} \mathbb{E} \sup_{N \geqslant a} \sup_{x \in I_M \cap \mathbb{Q}} G(K, N, x) \leqslant C \sup_{K \geqslant 1} Z_a^K.$$

Il ne reste plus qu'à étudier :

$$\sup_{s \in S} \mathbb{E} \sup_{K=1,\dots,n} G(s_K).$$

De façon explicite, l'expression ci-dessus s'écrit aussi

$$\sup \mathbb{E} \sup_{1 \leqslant K \leqslant n} \left[\frac{\sum_{j=\lambda_{N_K}^{(K)}}^{\Lambda_{N_K}^{(K)}} X_j [g_j \cos 2\pi n_j x_K + g_j' \sin 2\pi n_j x_K]}{\sqrt{\sigma_{N_K,K}^2 \log(M n_{\Lambda_{N_K}^{(K)}})}} \right] \tag{2}$$

où le premier sup est pris sur $\{(x_1, \dots, x_n) \in (I_M \cap \mathbb{Q})^n$ et $(N_1, \dots, N_n) \in \mathbb{N}^n\}$. Posons

$$A_{N_K} = \sqrt{\sigma_{N_K,K}^2 \log(M n_{\Lambda_{N_K}^{(K)}})}.$$

Fixons $(x_1, \dots, x_n) \in (I_M \cap \mathbb{Q})^n$ et $(N_1, \dots, N_n) \in \mathbb{N}^n$. Notons enfin le processus Gaussien

$$G_{N_K} = \frac{1}{A_{N_K}} \sum_{j=\lambda_{N_K}^{(K)}}^{\Lambda_{N_K}^{(K)}} X_j [g_j \cos 2\pi n_j x_K + g_j' \sin 2\pi n_j x_K].$$

Afin de majorer (2), nous remarquons que

$$\sup \mathbb{E} \sup_{1 \leqslant K \leqslant n} |G_{N_K}| \leqslant \sup_{(N_1,\dots,N_n) \in (\mathbb{N})^n} \mathbb{E} \sup_{1 \leqslant K \leqslant n} \sup_{x \in I_M} |G_{N_K}(x)|. \tag{3}$$

Nons allons majorer le membre à droite de (3) de façon indépendante de l'entier n, ce qui nous permet d'obtenir une majoration de (2) par croissance sur n.

Appliquant l'inégalité $1'$ à la suite finie de fonctions aléatoires gaussiennes $\{G_{N_K}\}_{1\leqslant K\leqslant n}$, $\mathbb{E}\sup_{1\leqslant K\leqslant n}\sup_{x\in I_M}|G_{N_K}(x)|$ est majoré par

$$C\mathbb{E}_X\Big\{\sup_{1\leqslant K\leqslant n}\mathbb{E}_{g,g'}\sup_{x\in I_M}\big|G_{N_K}(x)\big| + \mathbb{E}_g\sup_{1\leqslant K\leqslant n}|g_{N_K}q_{N_K}|\Big\} \tag{4}$$

où C est une constante universelle, $\{g_{N_K}\}_{1\leqslant K\leqslant n}$ une suite isonormale et

$$q_{N_K}\leqslant \sup_{x\in I_M}\big\|G_{N_K}(x)\big\|_{2,g,g'}.$$

En vertu de l'hypothèse $(\mathcal{L})$, nous obtenons sans peine

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_g\sup_{1\leqslant K\leqslant n}|g_{N_K}q_{N_K}| &\leqslant \mathbb{E}_g\sup_{1\leqslant K\leqslant n}\left|\sqrt{\frac{\sum_{j=\lambda_{N_K}^{(K)}}^{\Lambda_{N_K}^{(K)}}|X_j|^2}{\sum_{j=\lambda_{N_K}^{(K)}}^{\Lambda_{N_K}^{(K)}}\mathbb{E}|X_j|^2}}\frac{g_{N_K}}{\sqrt{\log n_{\Lambda_{N_K}^{(K)}}}}\right| \\ &\leqslant \sup_{1\leqslant K\leqslant n}\sqrt{\frac{\sum_{j=\lambda_{N_K}^{(K)}}^{\Lambda_{N_K}^{(K)}}|X_j|^2}{\sum_{j=\lambda_{N_K}^{(K)}}^{\Lambda_{N_K}^{(K)}}\mathbb{E}|X_j|^2}}\,\mathbb{E}_g\sup_{1\leqslant K\leqslant n}\left|\frac{g_{N_K}}{\sqrt{\log N_K}}\right|.\end{aligned} \tag{5}$$

L'intégrabilité exponentielle des vecteurs Gaussiens assure que

$$\sup_{(N_1,\ldots,N_n)\in\mathbb{N}^n}\mathbb{E}_g\sup_{1\leqslant K\leqslant n}\left[\frac{g_{N_K}}{\sqrt{\log N_K}}\right]<\infty,$$

indépendamment de n et de la suite d'entier $\{N_K\}_{K\geqslant 1}$.

On obtient ainsi

$$\mathbb{E}_{X,g}\sup_{1\leqslant K\leqslant n}|g_{N_K}q_{N_K}|\leqslant \mathbb{E}_X\sup_{(N_1,\ldots,N_n)\in\mathbb{N}^n}\sup_{1\leqslant K\leqslant n}\sqrt{\frac{\sum_{j=\lambda_{N_K}^{(K)}}^{\Lambda_{N_K}^{(K)}}|X_j|^2}{\sum_{j=\lambda_{N_K}^{(K)}}^{\Lambda_{N_K}^{(K)}}\mathbb{E}|X_j|^2}}. \tag{6}$$

La condition $(\mathcal{V})$ assure que (6) est majorée par :

$$\mathbb{E}\sup_{N\geqslant a,K\geqslant 1}\sqrt{\frac{1}{\sigma_{N,K}^2}\sum_{j=\lambda_N^{(K)}}^{\Lambda_N^{(K)}}|X_j|^2}$$

indépendamment de n.

Enfin, il reste à majorer

$$\mathbb{E}_X\sup_{(N_1,\ldots,N_n)\in\mathbb{N}^n}\sup_{1\leqslant K\leqslant n}\mathbb{E}_{g,g'}\sup_{x\in I_M}\big|G_{N_K}(x)\big| \tag{7}$$

indépendamment de n. Nous remarquons que cette estimation est l'analogue de celle traitée dans l'étape 3 de la preuve du théorème 1 pour K fixé. Ne pouvant plus appliquer les estimations de Salem–Zygmund car la suite $\{n_k\}_{k\geqslant 1}$ n'est pas supposée à valeurs entières, nous employons dans cette situation l'inégalité 2, plus précisément son extension : l'inégalité 3. La mesure spectrale définie sur $\mathbb{R}^+$ associée à la fonction aléatoire gaussienne stationnaire G_{N_K} est

$$m_{N_K} = \frac{1}{\sigma^2_{N_K,K} \log n_{\Lambda_N^{(K)}}} \sum_{j=\lambda_{N_K}^{(K)}}^{\Lambda_{N_K}^{(K)}} |X_j|^2 \delta_{n_j},$$

où δ_u désigne la mesure de Dirac concentrée au point u. Nous obtenons alors

$$\mathbb{E}_{g,g'} \sup_{x\in I_M} \left|G_{N_K}(x)\right| \leqslant C\left\{\sqrt{\int_0^\infty \min\left(u^2,1\right) m_{N_K}(du)} + \int_0^\infty \sqrt{m_{N_K}\left(\left]\exp x^2, \infty\right[\right)}\, dx\right\}.$$

Il est trivial que le premier terme entre accolades est majoré par

$$\sqrt{m_{N_K}(\mathbb{R}^+)} \leqslant C\sqrt{\frac{1}{\sigma^2_{N_K,K}} \sum_{j=\lambda_N^{(K)}}^{\Lambda_N^{(K)}} |X_j|^2}$$

où C est une constante universelle.

Pour le deuxième terme, procédons à un découpage de $\mathbb{R}^+$ suivant la subdivision croissante $\{0\}\cup\{\sqrt{\log n_j}, \lambda_N^{(K)} \leqslant j \leqslant \Lambda_N^{(K)}\}$. Nous pouvons majorer le deuxième terme par

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{\sigma^2_{N_K,K}\log n_{\Lambda_N^{(K)}}}} \sum_{j=\lambda_N^{(K)}}^{\Lambda_N^{(K)}} \left[\sqrt{\log n_j} - \sqrt{\log n_{j-1}}\right]\left(\sqrt{\sum_{k=j}^{\Lambda_N^{(K)}} |X_k|^2}\right)\\
&\quad \leqslant \sqrt{\frac{\sum_{k=\lambda_N^{(K)}}^{\Lambda_N^{(K)}} |X_k|^2}{\sigma^2_{N_K,K}\log n_{\Lambda_N^{(K)}}}} \cdot \sum_{j=\lambda_N^{(K)}}^{\Lambda_N^{(K)}} \left[\sqrt{\log n_j} - \sqrt{\log n_{j-1}}\right] \leqslant \sqrt{\frac{\sum_{k=\lambda_N^{(K)}}^{\Lambda_N^{(K)}} |X_k|^2}{\sigma^2_{N_K,K}}}
\end{aligned}$$

avec la convention $\sqrt{\log n_0} = 0$.

On en déduit que

$$\mathbb{E}_X \sup_{(N_1,\ldots,N_n)\in(\mathbb{N})^n} \sup_{1\leqslant K\leqslant n} \mathbb{E}_{g,g'} \sup_{x\in I_M} \left|G_{N_K}(x)\right| \leqslant C\mathbb{E}\sup_{K\geqslant 1} Z_a^K < \infty.$$

Ceci termine la première étape.

Etape 2. Nous envisageons maintenant le cas général, en considérant une fonction f telle que

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k) \exp(2i\pi kx), \qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|\sqrt{\log(|k|+3)} < \infty.$$

LEMME. – *Sous les hypothèses du thèorème* 6*, pour toute suite croissante au sens large*$\{n_j\}_{j\geqslant 1}$ *deréels positifs, et pour tout* $k \in \mathbb{Z}$*, nous avons* :

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \int_\Omega \sup_{K\geqslant 1} \sup_{N\geqslant a} \sup_{x\in I_M} \left| \frac{\sum_{j=\lambda_N^{(K)}}^{\Lambda_N^{(K)}} X_j \exp(2\pi i|k|n_j x)}{\sqrt{\log(|k|+3)\sigma_{N_K,K}^2 \log(M n_{\Lambda_N^{(K)}})}} \right| d\mathbb{P} \leqslant C\mathbb{E} \sup_{K\geqslant 1} Z_a^K$$

où C est universelle.

Démonstration du lemme. – Il suffit d'adapter l'étape 1 à la suite croissante$\{|k|n_j\}_{j\geqslant 1}$ pour k fixé non nul,en remarquant que

(a) $\sqrt{x+y} \leqslant 2\sqrt{xy} \quad (\forall x \geqslant 1, \forall y \geqslant 1)$.

(b) La mesure spectrale définie sur $\mathbb{R}^+$ associée à la fonctionaléatoire gaussienne stationnaire G_{N_K} pour la suite $\{|k|n_j,\ j \geqslant 1\}$ dépendant du paramètre $k$est la suivante :

$$m_{N_K,k} = \frac{1}{\sigma_{N_K,K}^2 \log(|k|+3) \log n_{\Lambda_N^{(K)}}} \sum_{j=\lambda_{N_K}^{(K)}}^{\Lambda_{N_K}^{(K)}} |X_j|^2 \delta_{|k|n_j}.$$

Lorsque $k = 0$, le lemme est vérifié. Ceci termine la preuve du lemme. □

Appliquant le lemme respectivement pour les k positifs et pour les k négatifs et en utilisant le fait que $|z| = |\bar{z}|$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \sup_{K\geqslant 1} \sup_{N\geqslant a} \sup_{x\in I_M} \left| \frac{\sum_{j=\lambda_N^{(K)}}^{\Lambda_N^{(K)}} X_j f(n_j x)}{\sigma_{N_K,K}^2 \log(M n_{\Lambda_N^{(K)}})} \right| d\mathbb{P} \\
&\quad \leqslant |||f||| \sup_{k\in\mathbb{Z}} \int_\Omega \sup_{K\geqslant 1} \sup_{N\geqslant a} \sup_{x\in I_M} \left| \frac{\sum_{j=\lambda_N^{(K)}}^{\Lambda_N^{(K)}} X_j \exp(2i\pi kn_j x)}{\sqrt{\log(|k|+3)\sigma_{N_K,K}^2 \log(M n_{\Lambda_N^{(K)}})}} \right| d\mathbb{P} \\
&\quad \leqslant |||f||| C\mathbb{E} \sup_{K\geqslant 1} Z_a^K < \infty.
\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du théorème 6. □

7. Estimation de sommes de Dirichlet

Voici un résultat qui découle en partie de la démonstration du théorème 6 ; c'est pourquoi nous proposons de le présenter de façon autonome. Nous en déduirons une estimation locale pour les sommes de Dirichlet (théorème 2). Dans cette situation l'inégalité 1' de Fernique semble remplacer avantageusement les méthodes d'entropie métrique comme par exemple le théorème de majoration de Dudley, carici on ne sait pas estimer la métrique hilbertienne associée

$$d(s,t)=\left(\sum_{k=1}^{N}\left|k^{is}-k^{it}\right|^2\right)^{1/2}$$

contrairement au cas des séries de Fourier, qui conduisent à

$$d(s,t)=\left(\sum_{k=1}^{N}\left|\mathrm{e}^{iks}-\mathrm{e}^{ikt}\right|^2\right)^{1/2}$$

que l'on sait parfaitement estimer.

THÉORÈME 7. – *Soient* $\{\varepsilon_k\}_{k\geqslant 1}$ *la suite de Rademacher,* $\{a_k\}_{k\geqslant 1}$ *une suite de nombres complexes et* $\{n_k\}_{k\geqslant 1}$ *une suite croissante de réels positifs . Soit un réel* $M\geqslant 1$ *et* f *une fonction dans* $A(\mathbb{T})$ *telle que* $|||f|||<\infty$. *Alors*

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[-M,M]}\left|\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k a_k f(n_k t)\right|\leqslant C|||f|||\sqrt{\sum_{k=1}^{N}|a_k|^2\log(Mn_N)}\,,$$

où $C>0$ *est une constante indépendante de* f, N *et*M.

On obtient le même résultat si l'on remplace $\{\varepsilon_k\}_{k\geqslant 1}$ par une suite isonormale $\{g_k\}_{k\geqslant 1}$.

Démonstration du théorème 7. –

Etape 1. Fixons N et commençons par supposer que $f(t)=\mathrm{e}^{(2i\pi t)}$. En vertu des procédés de symérisation, il n'est pas difficile de constater que

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_\varepsilon\sup_{t\in[-M,M]}\left|\frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N}|a_k|^2\log(2Mn_N)}}\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k a_k\exp(2i\pi t n_k)\right|\\ &\quad\leqslant C\mathbb{E}_{g,g'}\sup_{t\in[-M,M]}\left|\frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N}|a_k|^2\log(2Mn_N)}}\right.\\ &\qquad\left.\times\sum_{k=1}^{N}a_k\big(g_k\cos(2\pi t n_k)+g'_k\sin(2\pi t n_k)\big)\right|,\end{aligned}$$

où (g_k) et (g'_k) sont deux suites isomormales indépendantes. En vertu de la première relation de l'étape 3 de la preuve du théorème 1, appliquée au processus Gaussien

$$X_t=\frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N}|a_k|^2\log(2Mn_N)}}\sum_{k=1}^{N}a_k\big(g_k\cos(2\pi t n_k)+g'_k\sin(2\pi t n_k)\big),$$

on a

$$\mathbb{E}_{g,g'} \sup_{t\in[-M,M]} |X_t| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\log(2Mn_N)}} + \mathbb{E}_{g,g'} \sup_{t\in[-M,M]} X_t.$$

Nous appliquons ensuite l'inégalité 3 à X_t.Sa mesure spectrale associée sur $\mathbb{R}^+$ est donnée par larelation :

$$m = \frac{1}{\sum_{k=1}^{N} |a_k|^2 \log(2Mn_N)} \sum_{k=1}^{N} \delta_{n_k}.$$

Nous obtenons ainsi

$$\mathbb{E}_{g,g'} \sup_{t\in[-M,M]} X_t \leqslant C\left\{\sqrt{\int_0^{+\infty} \min(2Mu^2,1)\, m(du)} + \int_0^{+\infty} \sqrt{m\left(\left]\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2M},\infty\right[\right)}\,dx\right\},$$

où C est une constanteuniverselle.

D'une part

$$\sqrt{\int_0^{+\infty} \min(2Mu^2,1)\, m(du)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\log(2Mn_N)}}.$$

D'autre part, la croissance de la suite $\{n_k\}_{k\geqslant 1}$ nouspermet de montrer que

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{m\left(\left]\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2M},\infty\right[\right)}\,dx \leqslant 1.$$

Pour ce faire,il suffit de considérer la subdivision croissante suivante de $\mathbb{R}^+$: $\{\{0\} \cup \{\sqrt{\log(2Mn_k)},\ k \leqslant N\}\}$.

Etape 2. Considérons maintenant le cas de f telle que $|||f||| < \infty$. L'idée consiste à appliquer l'estimation de l'étape 1 à la suite $\{|j|n_k, k \geqslant 1\}$ pour j entier relatif fixé. Formellement nous obtiendrons $\sqrt{\sum_{k=1}^{N} |a_k|^2 \log(2M|j|n_N)}$ comme normalisation pour tout $j \neq 0$. C'est la raison pourlaquelle il peut-être plus commode de considérer la normalisation suivante $\sqrt{\sum_{k=1}^{N} |a_k|^2 \log(2Mn_N)\log(|j|+3)}$. Dans cette situation nous obtenons de façon analogue à l'étape 1 (voir aussi le lemme dans la preuve du théorème 6).

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}_{\varepsilon} \sup_{t\in[-M,M]} \left| \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N} |a_k|^2 \log(2Mn_N)\log(|j|+3)}} \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k a_k \exp(2i\pi t|j|n_k) \right| < \infty.$$

Ce qui termine la démonstration. □

En appliquant le théorème 7 à la suite croissante de réels $n_k = \log k$, avec $a_k = 1$ et $f(t) = \mathrm{e}^{2\pi i t}$, nous obtenonsle théorème 2, énoncé dans l'introduction.

Remerciement

Les auteurs remercient très chaleureusement le référé.

RÉFÉRENCES

[1] X. Fernique, Régularité de fonctions aléatoires gaussiennes stationnaires, Probab. Theory Related Fields 88 (1991) 521–536.
[2] X. Fernique, Fonctions aléatoires gaussiennes, vecteurs Gaussiens, Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, 1997.
[3] X. Fernique, Régularité des trajectoires de fonctions aléatoires gaussiennes, LNM 480 (1974) 1–87.
[4] J. Hoffmann-Jorgensen, Sums of independent Banach space valued random variables, Studia Math. 52 (1974) 159–186.
[5] J.-P. Kahane, Propriétés locales des fonctions à séries de Fourier aléatoires, Studia Math. 19 (1960) 1–25.
[6] J.-P. Kahane, Séries trigonométriques absolument convergentes, Springer, 1970.
[7] J.-P. Kahane, Some Random Series of Functions, Camb. Univ. Press, 1985.
[8] U. Krengel, Ergodic Theorems, W. de Gruyter, 1985.
[9] M. Ledoux, M. Talagrand, Probability in Banach Spaces, Springer-Verlag, 1990.
[10] M.B. Marcus, G. Pisier, Random Fourier Series with Applications to Harmonic Analysis, in: Annals of Mathematics Studies, Princeton Univ. Press, 1981.
[11] H. Queffelec, Quelques remarques autour de l'inégalité de Bohr $\sum_{p\leqslant N,\, p \text{ premier}} |c_p| \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} |\sum_1^N c_n n^{it}|$, C. R. Acad. Sc. Paris Série I 299 (12) (1984) 547–550.
[12] H. Queffelec, H. Bohr's vision of ordinary Dirichlet series; old and new results, J. Anal. 3 (1995) 43–60.
[13] R. Salem, A. Zygmund, Some properties of trigonometric series whose terms have random signs, Acta Math. 91 (1954) 245–301.
[14] D. Schneider, Théorèmes ergodiques perturbés, Israel J. Math. 101 (1997) 157–178.
[15] M. Weber, Estimating random polynomials by means of metric entropy methods, Math. Ineq. Appl. 3 (3) (2000) 443–457.