Ann. I. H. Poincaré – PR 39, 1 (2003) 121–134

S0246-0203(02)00012-2/FLA

UNE TRANSFORMATION GÉNÉRIQUE PEUT ÊTRE INSÉRÉE DANS UN FLOT

THE GENERIC TRANSFORMATION CAN BE EMBEDDED IN A FLOW

Thierry DE LA RUE *, **José DE SAM LAZARO**

Laboratoire de mathématiques Raphaël Salem, UMR 6085 CNRS–Université de Rouen, site Colbert, 76821 Mont-Saint-Aignan cedex, France

Reçu le 17 septembre 2001

RÉSUMÉ. – On prouve dans ce travail qu'un automorphisme générique d'un espace de Lebesgue peut être inséré dans un flot. On montre aussi qu'une action du groupe dyadique n'est, au contraire, génériquement pas plongeable dans un flot. Enfin, ce travail s'achève par une discussion technique qui établit l'équivalence entre les notions de flot d'*automorphismes* (dont chaque temps n'est défini qu'à un ensemble négligeable près) et de flot de *transformations ponctuelles.*

MSC : 37A05 ; 37A10

Mots Clés : Automorphisme générique ; Flot

ABSTRACT. – We prove in this work that the generic automorphism of a Lebesgue space can be embedded in a flow. We also show that a dyadic group action is, on the contrary, generically not embeddable in a flow. Finally, this work ends with a technical discussion establishing the equivalence between the notions of flow of *automorphisms* (each time being defined up to a set of measure zero), and flow of *point transformations*

Keywords: Generic automorphism; Flow

* Auteur correspondance.

E-mail addresses: thierry.delarue@univ-rouen.fr (T. de la Rue), jose.lazaro@univ-rouen.fr (J. de Sam Lazaro).

1. Introduction et annonce du résultat

1.1. Automorphismes génériques de [0, 1]

On se place dans ce travail sur l'espace probabilisé formé de l'intervalle $[0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue μ. Une transformation inversible préservant la mesure de cet espace est une bijection $\tau:[0,1]\to[0,1]$, telle que τ et τ^{-1} soient mesurables, et qui vérifie pour toute partie mesurable A de $[0,1]$ $\mu(\tau A)=\mu(A)$. On convient habituellement d'identifier deux telles transformations qui coïncident en dehors d'un ensemble négligeable, et on appelle *automorphismes de* $[0,1]$ les classes d'équivalence ainsi constituées.

Le groupe Ω des automorphismes de $[0,1]$ est classiquement muni d'une topologie dite *faible*, qui en fait un groupe polonais. Une distance d engendrant cette topologie, et pour laquelle Ω est complet, peut être définie comme suit : pour tout $n\geqslant 1$, notons $\mathcal{P}_n$ la partition de $[0,1]$ formée par les 2^n intervalles $[j/2^n,(j+1)/2^n[$, $j\in\{0,\dots,2^n-1\}$, et posons pour S et T dans Ω

$$d_n(S,T)\stackrel{\text{déf}}{=}\sum_{A\in\mathcal{P}_n}\big(\mu\big(T^{-1}A\setminus S^{-1}A\big)+\mu(TA\setminus SA)\big),$$

puis

$$d(S,T)\stackrel{\text{déf}}{=}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{2^n}d_n(S,T).$$

Cette topologie faible fut introduite dans le célèbre livre de Halmos [2], où apparaît aussi la notion de *généricité* pour les propriétés des automorphismes.

Rappelons qu'un sous-ensemble d'un espace topologique E est dit *générique* si il contient une intersection dénombrable d'ouverts denses dans E. Lorsque E est polonais, tout sous-ensemble générique est dense.

Soit **P** une propriété susceptible d'être vérifiée par un automorphisme de $[0,1]$, et désignons par le même symbole **P** l'ensemble des T dans Ω qui vérifient cette propriété. On dit qu'un automorphisme *générique* de Ω vérifie **P** si l'ensemble **P** est générique dans Ω. Halmos a ainsi établi qu'un automorphisme générique de $[0,1]$ est faiblement mélangeant, mais non mélangeant. Du travail de Katok et Stepin [3], on déduit aussi qu'un automorphisme générique est de rang 1 et rigide, ce qui implique en particulier que son commutant est non dénombrable (voir par exemple [5]).

1.2. Le problème de l'insertion dans un flot

Récemment, King a montré dans [6] qu'un automorphisme générique possède des racines de tout ordre $k\geqslant 1$ (pour tout entier $k\geqslant 1$, une racine d'ordre k de T est un automorphisme S tel que $S^k=T$). De ce résultat découle naturellement la question suivante, que King pose dans ce même article : est-ce qu'un automorphisme générique peut être inséré dans un flot (une action de $\mathbb{R}$) ?

Avant de poursuivre, il convient de définir plus précisément ce que l'on entend par *flot*. Dans le cas de l'étude d'une action de $\mathbb{Z}$, il n'est en général pas gênant de confondre transformation ponctuelle et automorphisme (classe d'équivalence de transformations ponctuelles qui coïncident hors d'un ensemble négligeable). Mais lorsque l'on considère une famille d'automorphismes indexée par $\mathbb{R}$ non dénombrable, il n'est pas évident de passer de l'une à l'autre de ces notions sans se heurter aux problèmes posés par les réunions non dénombrables de négligeables. Les flots considérés ici seront des familles d'éléments de Ω ; pour dissiper toute ambiguïté, on les nommera d'ailleurs des Ω-*flots*. Une discussion plus approfondie sur le rapport entre ces Ω-flots et les flots de transformations ponctuelles se trouve à la fin de ce travail.

DÉFINITION 1.1. – *On appelle Ω-flot une famille $(T^t)_{t\in\mathbb{R}}$ d'éléments de Ω, telle que l'application $t \mapsto T^t$ soit un morphisme continu du groupe $(\mathbb{R},+)$ dans le groupe Ω.*

On peut maintenant énoncer le principal résulat du présent travail.

THÉORÈME 1.2. – *Pour un automorphisme générique T de $[0,1]$, il existe un Ω-flot $(T^t)_{t\in\mathbb{R}}$ tel que $T^1 = T$.*

2. La méthode développée par King

Pour montrer qu'un automorphisme générique possède une racine carrée, King a développé dans [6] une méthode utilisant un certain nombre d'arguments topologiques. Ces mêmes arguments seront utilisés dans la suite pour la preuve du Théorème 1.2.

Explicitons ici la technique de King, dans le contexte abstrait d'une propriété **P** dont on veut montrer qu'elle est génériquement vérifiée dans Ω.

2.1. La loi 0–1 pour les propriétés dynamiques

Glasner et King ont établi dans [1] une loi 0–1 pour les propriétés *dynamiques* des automorphismes dans Ω, qui constitue le premier ingrédient de la preuve de la généricité.

Rappelons qu'un sous-ensemble M d'un espace topologique est dit *maigre* si son complémentaire est générique. On dit que A est *presque ouvert* [1] si A peut s'écrire $U \Delta M$ où U est ouvert et M est maigre.

DÉFINITION 2.1. – *La propriété* **P** *est dite dynamique si*
- **P** *est stable par conjugaison : si $T \in \Omega$ vérifie* **P**, *$\varphi^{-1}T\varphi$ vérifie aussi* **P** *pour tout $\varphi \in \Omega$,*
- *l'ensemble* **P** *est presque ouvert dans Ω.*

THÉORÈME 2.2 (Loi 0–1 pour les propriétés dynamiques). – *Pour toute propriété dynamique* **P**, *l'ensemble* **P** *est soit maigre, soit générique.*

Pour montrer la généricité de **P**, il suffit donc de vérifier que **P** est bien une propriété dynamique, puis de prouver que **P** ne peut pas être maigre.

[1] Traduction de l'expression "almost open" utilisée dans [6]. La même propriété est nommée "Property of Baire" dans [8], et abrégée en "BP" dans [4].

2.2. Image continue d'un polonais

La première condition donnée dans la définition de propriété dynamique (stabilité par conjugaison) est en général immédiate à vérifier (lorsqu'elle est vraie !). Pour vérifier la seconde, on peut utiliser le théorème suivant (voir par exemple le théorème 21.6 dans [4]).

THÉORÈME 2.3 (Lusin–Sierpiński). – *Dans un espace polonais, tous les sous-ensembles analytiques sont presque-ouverts.*

Il suffit donc de vérifier que **P** est *analytique*, c'est-à-dire qu'il existe un espace polonais Y et une application continue $f : Y \to \Omega$ telle que $\mathbf{P} = f(Y)$.

2.3. La locale-densité et le lemme de Dougherty

Dans le contexte d'un sous-ensemble **P** de Ω qui s'écrit comme l'image d'un polonais Y par une application continue f, King donne dans [6] un critère permettant de montrer que **P** n'est pas maigre. Ce critère utilise la notion de locale-densité, dont on rappelle ici la définition.

DÉFINITION 2.4. – *Soit $f : F \to E$ une application continue entre espaces topologiques. Un point x de F est dit localement dense (pour f) si pour tout voisinage V de x, $\overline{f(V)}$ est un voisinage de $f(x)$.*

Rappelons aussi qu'un *espace de Baire* est un espace topologique dans lequel un ensemble générique est toujours dense (en particulier, tout polonais est un espace de Baire).

PROPOSITION 2.5 (Lemme de Dougherty). – *Si F est un espace de Baire, et si l'ensemble des points localement denses pour l'application continue $f : F \to E$ est dense dans F, alors $f(E)$ n'est pas maigre dans E.*

Ainsi, lorsque l'on a pu écrire l'ensemble **P** comme image d'un polonais Y par une application continue f, il suffit de trouver une partie dense de Y dont tout élément est localement dense pour f pour pouvoir conclure que **P** n'est pas maigre. Si par ailleurs on sait que la propriété **P** est dynamique, on en déduit que **P** est générique.

3. Application aux flots

On se propose maintenant d'appliquer cette technique pour prouver le Théorème 1.2. **P** est dorénavant l'ensemble des $T \in \Omega$ qui sont le temps 1 d'un Ω-flot. Comme **P** est clairement stable par conjugaison, il suffit pour vérifier que **P** est une propriété dynamique de montrer que **P** est l'image d'un espace polonais par une application continue. Pour cela, on va simplement munir l'ensemble F des Ω-flots d'une topologie polonaise telle que l'application $f : F \to \Omega$ qui à un Ω-flot (T^t) fait correspondre son temps 1 T^1 soit continue. Puis on vérifiera que l'ensemble des points de F localement denses pour f est dense, ce qui achèvera la preuve du résultat annoncé.

3.1. Une topologie polonaise sur l'ensemble des flots

Commençons par remarquer que la continuité en 0 d'un morphisme $t \mapsto T^t$ de $(\mathbb{R}, +)$ dans Ω entraîne évidemment la continuité sur $\mathbb{R}$ tout entier. En fait, on a dans le cas de la distance d définie précédemment sur Ω une propriété plus précise, qui sera utilisée plusieurs fois dans la suite : si $t \mapsto T^t$ est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans Ω, on a pour tous réels t et h

$$d\big(T^{t+h}, T^t\big) = d\big(T^h, \mathrm{Id}\big). \tag{1}$$

(Cela vient de la propriété plus générale, aisément vérifiée, selon laquelle si S commute avec T et T' dans Ω, alors $d(T, T') = d(ST, ST')$.)

Définissons maintenant une distance d_F sur l'ensemble F des Ω-flots par

$$d_F\big(\big(S^t\big), \big(T^t\big)\big) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{t\in[0,1]} d\big(S^t, T^t\big).$$

Il est facile de voir que toute suite de Cauchy $((S_n^t)_{t\in\mathbb{R}})_{n\in\mathbb{N}}$ pour d_F converge dans F. En effet, pour tout $t \in [0, 1]$ puis pour tout t réel on vérifie que $(S_n^t)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans Ω, donc converge vers une limite T^t. Il est clair que pour tous réels s et t, $T^sT^t = T^{s+t}$, et puisque pour tout n, $S_n^t \xrightarrow[t\to 0]{} \mathrm{Id}$, on a aussi $T^t \xrightarrow[t\to 0]{} \mathrm{Id}$. Ainsi (T^t) est un Ω-flot, limite de la suite $((S_n^t))_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour montrer que d_F fait de F un espace polonais, il reste à vérifier la séparabilité. Suivant Halmos, appelons *permutation cyclique de rang n* un automorphisme qui envoie chaque intervalle de la partition $\mathcal{P}_n$ sur un autre intervalle de $\mathcal{P}_n$ par une translation, et qui agit sur les intervalles de $\mathcal{P}_n$ comme une permutation cyclique. Rappelons que pour tout entier N, l'ensemble des permutations cycliques de rang $n \geqslant N$ est dense dans Ω ([2], p. 65). Le lemme qui suit permettra d'utiliser ces permutations cycliques pour construire un ensemble dénombrable dense dans F.

LEMME 3.1. – *Soit S une permutation cyclique de rang n. Il existe un Ω-flot $(S^t)_{t\in\mathbb{R}}$ avec $S^1 = S$, et tel que*

$$\forall t \in [0, 1], \quad d\big(S^t, \mathrm{Id}\big) \leqslant d(S, \mathrm{Id}). \tag{2}$$

Démonstration. – Pour tout réel α, on appelle *rotation d'angle α* l'automorphisme

$$R_\alpha : x \mapsto x + \alpha \pmod 1.$$

Une telle rotation s'insère de façon naturelle dans un Ω-flot : celui défini par $T^t \stackrel{\text{déf}}{=} R_{t\alpha}$ $(t \in \mathbb{R})$. Or, toute permutation cyclique S d'ordre n est conjuguée à la rotation d'angle $1/2^n$. En effet, numérotons $I_1, I_2, \ldots, I_{2^n}$ les intervalles de $\mathcal{P}_n$ dans l'ordre usuel, et soit $(I_{k_1}, I_{k_2}, \ldots, I_{k_{2^n}})$ le cycle défini par S (avec $k_1 \stackrel{\text{déf}}{=} 1$). Si φ est l'automorphisme envoyant chaque intervalle I_j sur I_{k_j} par une translation, on vérifie immédiatement que $S = \varphi R_{1/2^n} \varphi^{-1}$. Ainsi, S s'insère dans le Ω-flot $(S^t)_{t\in\mathbb{R}}$, où $S^t \stackrel{\text{déf}}{=} \varphi R_{t/2^n} \varphi^{-1}$. Pour achever la preuve du lemme 3.1, il suffit de vérifier que pour tout $m \geqslant 1$, si A est un atome de la partition $\mathcal{P}_m$, on a pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\mu\big(S^t A \cap A\big) \geqslant \mu(SA \cap A).$$

Or, si $m \geqslant n$, on a toujours $\mu(SA \cap A) = 0$ et l'inégalité ci-dessus est triviale. Si $m < n$, on a

$$\mu(SA \cap A) = \frac{1}{2^n}\big|\{B \in \mathcal{P}_n \mid B \subset A \text{ et } SB \subset A\}\big|.$$

Mais pour tout atome B de $\mathcal{P}_n$ et tout $t \in [0, 1]$, on a $S^t B \subset B \cup SB$. Ainsi, si B est tel que B et SB soient contenus dans A, on a aussi $S^t B \subset A$, d'où l'inégalité annoncée. □

Pour tout entier $n \geqslant 1$, toute permutation cyclique S d'ordre n et tout entier $k \geqslant 1$, considérons le Ω-flot $(T^t_{S,k})_{t\in\mathbb{R}}$ défini par

$$T^t_{S,k} \stackrel{\text{déf}}{=} S^{2^k t},$$

où (S^t) est le Ω-flot construit à partir de S comme dans le lemme 3.1. Notons **FPC** l'ensemble de tous les Ω-flots $(T^t_{S,k})$ quand S parcourt l'ensemble des permutations cycliques et k décrit $\mathbb{N}^*$. **FPC** est évidemment dénombrable, et la séparabilité de F pour d_F se déduit de la proposition suivante.

PROPOSITION 3.2. – **FPC** *est dense dans* F.

Démonstration. – Soit $(T^t) \in F$ et $\varepsilon > 0$. On choisit d'abord k assez grand pour que

$$\forall r \in \big[0, 1/2^k\big], \quad d\big(T^r, \mathrm{Id}\big) < \varepsilon.$$

Puis on choisit $\delta \in \,]0, \varepsilon]$ assez petit pour que

$$d\big(S, T^{1/2^k}\big) < \delta \quad \Rightarrow \quad \forall m \in \{1, \ldots, 2^k\}, \quad d\big(S^m, T^{m/2^k}\big) < \varepsilon.$$

On trouve alors une permutation cyclique S telle que $d(S, T^{1/2^k}) < \delta$. Si $t \in [0, 1]$ est dyadique de la forme $m/2^k$, on a donc $d(T^t_{S,k}, T^t) < \varepsilon$. Puis, si $0 \leqslant r < 1/2^k$, on vérifie grâce à (2) que

$$d\big(T^r_{S,k}, \mathrm{Id}\big) \leqslant d\big(T^{1/2^k}_{S,k}, \mathrm{Id}\big) \leqslant d\big(T^{1/2^k}_{S,k}, T^{1/2^k}\big) + d\big(T^{1/2^k}, \mathrm{Id}\big) \leqslant 2\varepsilon.$$

Enfin, pour tout $t \in [0, 1]$, on écrit $t = m/2^k + r$ où $0 \leqslant r < 1/2^k$, et on a en utilisant (1)

$$d\big(T^t_{S,k}, T^t\big) \leqslant d\big(T^t_{S,k}, T^{m/2^k}_{S,k}\big) + d\big(T^{m/2^k}_{S,k}, T^{m/2^k}\big) + d\big(T^{m/2^k}, T^t\big) \leqslant 4\varepsilon. \qquad \square$$

Ainsi, d_F fait bien de F un espace polonais. De plus, il est clair que l'application $f : F \to \Omega$, définie par $f((S^t)) \stackrel{\text{déf}}{=} S^1$ est continue de F dans Ω.

3.2. Les flots de rotations irrationnelles

Il reste maintenant à établir la densité dans F de l'ensemble des points localement denses pour f. Considérons

$$\mathbf{FRI} \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ \left(S^t\right) \in F \mid \exists \varphi \in \Omega, \exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, S^1 = \varphi R_\alpha \varphi^{-1} \right\}.$$

FRI est constitué des Ω-flots dont le temps 1 est conjugué à une rotation irrationnelle. La démonstration du Théorème 1.2 sera terminée dès que l'on aura prouvé les deux propositions qui suivent.

PROPOSITION 3.3. – **FRI** *est dense dans* F.

PROPOSITION 3.4. – *Tout Ω-flot (T^t) dans* **FRI** *est localement dense pour* f.

Preuve de la Proposition 3.3. – Soit S une permutation cyclique de rang n, qui s'écrit $S = \varphi R_{1/2^n} \varphi^{-1}$ où φ est donné dans la preuve du Lemme 3.1. On a vu dans ce même lemme que pour tout $t \in [0, 1/2^n]$, $d(\varphi R_t \varphi^{-1}, \mathrm{Id}) \leqslant d(S, \mathrm{Id})$. En particulier, si $\alpha \in]0, 1/2^n[$ est un irrationnel, le Ω-flot (S^t_α) défini par $S^t_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \varphi R_{t\alpha} \varphi^{-1}$ est un élément de **FRI** qui vérifie $\forall t \in [0, 1]$, $d(S^t_\alpha, \mathrm{Id}) \leqslant d(S, \mathrm{Id})$. De plus, si α est assez proche de $1/2^n$, S^1_α peut être rendu arbitrairement proche de S. On peut alors conclure comme dans la preuve de la Proposition 3.2. $\square$

Pour la preuve de 3.4, on admet provisoirement le lemme suivant, qui dit essentiellement que les automorphismes conjugués à des rotations irrationnelles sont localement denses pour l'application $T \mapsto T^2$.

LEMME 3.5. – *Soit $T \in \Omega$ conjugué à une rotation irrationnelle, et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ et un entier N tels que, si S est une permutation cyclique de rang $n \geqslant N$ vérifiant $d(T^2, S) < \delta$, alors il existe une permutation cyclique $\widetilde{S}$ de rang $n+1$ avec*
- *$d(\widetilde{S}, T) < \varepsilon$,*
- *$\widetilde{S}^2 = S$.*

Preuve de la Proposition 3.4. – Soit (T^t) un Ω-flot dans **FRI**, et $\varepsilon > 0$. On va montrer que l'image par f de la boule de centre (T^t) et de rayon ε est dense dans une boule de centre T^1 et de rayon $\delta > 0$, en établissant que si δ est assez petit, toute permutation cyclique S de rang assez grand et telle que $d(S, T^1) < \delta$ est le temps 1 d'un Ω-flot (S^t) vérifiant $d_F((S^t), (T^t)) < \varepsilon$.

Choisissons tout d'abord un entier k assez grand pour que

$$\forall t \in \left[0, 1/2^k\right], \quad d\left(T^t, \mathrm{Id}\right) < \varepsilon/4.$$

Comme $(T^t) \in$ **FRI**, T^r est conjugué à une rotation irrationnelle pour tout rationnel r. Appliquant récursivement k fois le Lemme 3.5, on obtient que si $\delta > 0$ est assez petit et si N est assez grand, pour toute permutation cyclique S de rang $n \geqslant N$ telle que $d(T^1, S) < \delta$, il existe une permutation cyclique $\widetilde{S}$ de rang $n + k$ vérifiant
- $\forall m \in \{1, \ldots, 2^k\}$, $d(\widetilde{S}^m, T^{m/2^k}) < \varepsilon/4$,
- $\widetilde{S}^{2^k} = S$.

Comme dans la preuve de la densité de **FPC**, on en déduit que si $(S^t) \overset{\text{déf}}{=} (T^t_{\widetilde{S},k})$, alors $d_F((S^t),(T^t)) < \varepsilon$. $\square$

Preuve du Lemme 3.5. – Soit $T \in \Omega$ conjugué à une rotation irrationnelle, et $\varepsilon > 0$ donné. Alors T^2 est également conjugué à une rotation irrationnelle, et il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que

$$d\big(T, \big(T^2\big)^k\big) < \varepsilon. \tag{3}$$

Soit N assez grand pour que $\sum_{n>N} 2^{-n} < \varepsilon$, de sorte que dans le calcul de la distance d, la contribution des $n > N$ soit inférieure à 2ε. Soit $\delta > 0$ assez petit pour que

$$d\big(S, T^2\big) < \delta \quad \Rightarrow \quad \forall j \in \{-k, \dots, k\}, \quad d\big(S^j, T^{2j}\big) < \varepsilon. \tag{4}$$

Soit maintenant S une permutation cyclique de rang $n \geqslant N$, avec $d(S, T^2) < \delta$. Pour chaque atome I de la partition $\mathcal{P}_n$, appelons I_G (respectivement I_D) la moitié gauche (respectivement droite) de I : I_G et I_D sont donc des atomes de la partition $\mathcal{P}_{n+1}$. On définit la permutation cyclique $\widetilde{S}$ de rang $n+1$ en posant, pour tout $I \in \mathcal{P}_n$

$$\widetilde{S} I_G \overset{\text{déf}}{=} S^k I_D \quad \text{et} \quad \widetilde{S} I_D \overset{\text{déf}}{=} S^{-k+1} I_G.$$

(Cette permutation cyclique $\widetilde{S}$ n'est autre que le résultat de l'opération Weave(k), définie dans [6], appliquée à la permutation cyclique S.) On vérifie immédiatement que $\widetilde{S}^2 = S$, et il reste à majorer $d(\widetilde{S}, T)$. Pour cela, étudions $d_m(\widetilde{S}, T)$ lorsque $m \leqslant n$. Pour tout atome A de $\mathcal{P}_m$, écrivons $A = A_G \cup A_D$, où

$$A_G \overset{\text{déf}}{=} A \cap \bigcup_{I \in \mathcal{P}_n} I_G, \quad \text{et} \quad A_D \overset{\text{déf}}{=} A \cap \bigcup_{I \in \mathcal{P}_n} I_D.$$

On a alors

$$\widetilde{S} A \setminus TA = (\widetilde{S} A_G \setminus TA) \cup (\widetilde{S} A_D \setminus TA).$$

Remarquons que par construction de $\widetilde{S}$, et puisque $\mathcal{P}_m$ est moins fine que $\mathcal{P}_n$,

$$\widetilde{S} A_G \subset S^k A \quad \text{et} \quad \widetilde{S} A_D \subset S^{-k+1} A,$$

d'où

$$\mu(\widetilde{S} A \setminus TA) \leqslant \mu\big(S^k A \setminus TA\big) + \mu\big(S^{-k+1} A \setminus TA\big).$$

De même,

$$\mu\big(\widetilde{S}^{-1} A \setminus T^{-1} A\big) \leqslant \mu\big(S^{-k} A \setminus T^{-1} A\big) + \mu\big(S^{k-1} A \setminus T^{-1} A\big).$$

On en déduit que pour tout $m \leqslant n$

$$d_m(\widetilde{S}, T) \leqslant d_m\big(S^k, T\big) + d_m\big(S^{-k+1}, T\big),$$

et donc

$$d(\widetilde{S}, T) \leqslant 2\varepsilon + d\big(S^k, T\big) + d\big(S^{-k+1}, T\big).$$

Puis, grâce à (4) et (3)

$$d\big(S^k, T\big) \leqslant d\big(S^k, T^{2k}\big) + d\big(T^{2k}, T\big) \leqslant 2\varepsilon,$$

et en utilisant de plus (1),

$$d\big(S^{-k+1}, T\big) \leqslant d\big(S^{-k+1}, \big(T^2\big)^{-k+1}\big) + d\big(T^{-2k+2}, T\big) \leqslant \varepsilon + d\big(T, T^{2k}\big) \leqslant 2\varepsilon.$$

Ce qui donne finalement

$$d(\widetilde{S}, T) \leqslant 6\varepsilon. \qquad \square$$

4. Une action dyadique ne peut pas en général être insérée dans un flot

On s'intéresse maintenant aux *flots dyadiques*, c'est-à-dire les familles $(T^d)_{d\in\mathbb{D}}$ d'automorphismes indexées par l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres dyadiques, et telles que $d \mapsto T^d$ soit un morphisme du groupe $(\mathbb{D}, +)$ dans Ω. Contrairement à ce que l'on vient de voir dans le cas d'une action engendrée par un seul automorphisme, on va montrer que, dans un sens qui va être précisé maintenant, un flot dyadique générique ne peut pas être inséré dans un Ω-flot.

$\mathbb{D}$ étant dénombrable, l'espace produit $\Omega^{\mathbb{D}}$ muni de la topologie produit reste un espace polonais. Le sous-ensemble fermé

$$Y \stackrel{\text{déf}}{=} \big\{\big(T^d\big) \in \Omega^{\mathbb{D}} \mid \forall d, d' \in \mathbb{D}, T^d T^{d'} = T^{d+d'}\big\},$$

qui est exactement l'ensemble de tous les flots dyadiques, est donc lui aussi pour la topologie induite un espace polonais. Il est facile de vérifier que la topologie de Y est compatible avec la distance d_Y définie par

$$d_Y\big(\big(S^d\big), \big(T^d\big)\big) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2^n} d\big(S^{1/2^n}, T^{1/2^n}\big).$$

4.1. Une famille de flots dyadiques

Pour $m \geqslant 1$, notons $\mathcal{Q}_m$ la partition de $[0, 1]$ en 3^m intervalles de même longueur. Considérons un automorphisme T qui permute cycliquement les atomes de $\mathcal{Q}_m$, et étudions la suite de ses carrés successifs $(T^{2^j})_{j\geqslant 0}$. On vérifie facilement par récurrence sur m que dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/3^m\mathbb{Z})^*$, 2 est d'ordre 2.3^{m-1}. Ainsi, la suite $(T^{2^j})_{j\geqslant 0}$ est elle-même périodique de période 2.3^{m-1}, tous ses les termes étant des permutations cycliques des atomes de $\mathcal{Q}_m$.

On peut alors étendre cette suite par périodicité en une famille indexée par $\mathbb{Z}$: $(T^{2^j})_{j\in\mathbb{Z}}$, puis de façon naturelle en un flot dyadique $(T^d)_{d\in\mathbb{D}}$.

Désignons par $\mathcal{C}$ l'ensemble des flots dyadiques que l'on peut ainsi obtenir, lorsque m parcourt $\mathbb{N}^*$ et pour tout choix de la permutation cyclique des atomes de $\mathcal{Q}_m$.

PROPOSITION 4.1. – *$\mathcal{C}$ est dense dans Y.*

Démonstration. – Soit $(S^d) \in Y$ et $\varepsilon > 0$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n>n_0} 2^{-n} < \varepsilon/2$, puis $\delta > 0$ tel que

$$d\left(S^{1/2^{n_0}}, T\right) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{n_0-1} d\left(S^{1/2^{n_0-i}}, T^{2^i}\right) < \varepsilon/2.$$

Choisissons alors $\widetilde{T}$, permutation cyclique des atomes de $\mathcal{Q}_m$ (pour un m assez grand), tel que $d(S^{1/2^{n_0}}, \widetilde{T}) < \delta$. (Un tel $\widetilde{T}$ existe, toujours grâce au théorème d'approximation de Halmos, [2], p. 65.) On peut insérer $\widetilde{T}$ dans un flot dyadique $(T^d)_{d\in\mathbb{D}} \in \mathcal{C}$ tel que $\widetilde{T} = T^{1/2^{n_0}}$, et on a alors $d_Y((T^d), (S^d)) < \varepsilon$. □

4.2. Non-insérabilité dans un Ω-flot

THÉORÈME 4.2. – *L'ensemble des flots dyadiques qui peuvent être insérés dans un Ω-flot est maigre dans Y.*

Démonstration. – La preuve de ce théorème s'inspire de celle de Halmos montrant que l'ensemble des transformations mélangeantes est maigre. Il est clair qu'une condition nécessaire pour que $(T^d) \in Y$ puisse être inséré dans un Ω-flot est

$$\lim_{d\to 0} T^d = \mathrm{Id}. \tag{5}$$

Il suffit donc de prouver que l'ensemble des flots dyadiques qui ne vérifient pas (5) est générique. Pour cela, remarquons que cet ensemble contient

$$A \overset{\text{déf}}{=} \bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{j>n} \left\{ \left(S^d\right) \in Y \mid \mu\left(S^{1/2^j} E \cap E\right) < 1/4 \right\},$$

où $E \overset{\text{déf}}{=} [0, 1/3]$. A est l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts, et il suffit donc de vérifier que A est dense. Pour cela, on va montrer que A contient $\mathcal{C}$.

Soit (T^d) un flot dyadique dans $\mathcal{C}$, où T^1 est une permutation cyclique des atomes de $\mathcal{Q}_m$ ($m \geqslant 1$). Rappelons que la suite $(T^{2^j})_{j\in\mathbb{Z}}$ est périodique de période 2.3^{m-1}. Notons de plus que si I est un atome de $\mathcal{Q}_m$, les images $T^{2^j} I$, $j \in \{1, \ldots, 2.3^{m-1}\}$ sont deux à deux disjointes. On en déduit

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{2.3^{m-1}} \mu\left(T^{2^j} E \cap E\right) &= \sum_{\substack{I\subset E\\ I\in\mathcal{Q}_m}} \sum_{j=1}^{2.3^{m-1}} \mu\left(T^{2^j} I \cap E\right) \\ &\leqslant \sum_{\substack{I\subset E\\ I\in\mathcal{Q}_m}} \mu(E) = 3^{m-2}.\end{aligned}$$

Il existe donc un entier $j \in \{1, \ldots, 2.3^{m-1}\}$ tel que $\mu(T^{2^j} E \cap E) \leqslant 1/6$, puis par périodicité une infinité d'entiers $j \in \mathbb{N}$ tels que $\mu(T^{1/2^j} E \cap E) \leqslant 1/6$. Ainsi, $(T^d) \in A$. □

5. Questions

Commençons par la remarque suivante : si (T^t) est un Ω-flot tel qu'il existe t_0 pour lequel T^{t_0} est faiblement mélangeant, alors pour tout t non nul, T^t est lui aussi faiblement mélangeant. (On le vérifie facilement en considérant les mesures spectrales des processus $(f \circ T^t)_{t\in\mathbb{R}}$ pour f dans L^2.) Mais puisqu'un automorphisme générique est faiblement mélangeant, tout Ω-flot (T^t) dans lequel il peut s'insérer vérifie $T^t \neq \mathrm{Id}$ pour tout $t \neq 0$. Ainsi, un automorphisme générique peut être inséré dans un Ω-flot tel que $t \mapsto T^t$ soit un morphisme *injectif* du groupe $(\mathbb{R},+)$ dans Ω. Un résultat similaire subsiste-t-il si l'on remplace $(\mathbb{R},+)$ par un groupe abélien plus gros (par exemple $(\mathbb{R}^d,+)$ pour un $d > 1$) ? Existe-t-il un groupe abélien maximal dans une action duquel on peut insérer un automorphisme générique ?

Considérons maintenant l'ensemble des actions de $\mathbb{Z}^2$, qui peut être identifié à la partie fermée de $\Omega \times \Omega$ constituée des couples (S,T) vérifiant $ST = TS$. Cet ensemble est lui aussi muni d'une structure topologique qui en fait un espace polonais, ce qui donne un sens à l'expression "action de $\mathbb{Z}^2$ générique". Disons qu'une action de $\mathbb{Z}^2$ engendrée par le couple (S,T) peut être insérée dans un Ω-flots'il existe un Ω-flot (T^t) et deux réels s et t tels que $T^s = S$ et $T^t = T$. Cette propriété est-elle vérifiée par une action de $\mathbb{Z}^2$ générique ?

6. Annexe : Ω-flots et flots ponctuels

La définition classique d'un flot en théorie ergodique se réfère habituellement à de vraies transformations ponctuelles. On utilisera ici le terme *flot ponctuel* pour bien distinguer cette notion des Ω-flots présentés auparavant.

DÉFINITION 6.1. – *Un flot ponctuel sur* $[0,1]$ *est une famille* $(\tau^t)_{t\in\mathbb{R}}$ *de transformations inversibles, préservant la mesure, telles que*
– *pour tous réels* s *et* t, $\tau^s \circ \tau^t = \tau^{s+t}$,
– $(t,x) \mapsto \tau^t(x)$ *est mesurable de* $\mathbb{R} \times [0,1]$ *dans* $[0,1]$.

Comme on l'a déjà dit, la non-dénombrabilité de $\mathbb{R}$ entraîne quelques difficultés techniques à passer de l'une à l'autre de ces deux définitions de flots. Dans cette section, indépendante du reste de ce travail, on se propose de montrer que ces deux notions sont bien similaires, au sens précisé dans le théorème qui suit.

THÉORÈME 6.2. – *Soit* $(\tau^t)_{t\in\mathbb{R}}$ *un flot ponctuel, et pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *soit* T^t *l'automorphisme de* $[0,1]$ *correspondant à* τ^t. *Alors* $(T^t)_{t\in\mathbb{R}}$ *est un* Ω*-flot.*

Réciproquement, si $(T^t)_{t\in\mathbb{R}}$ *est un* Ω*-flot, on peut trouver un flot ponctuel* $(\tau^t)_{t\in\mathbb{R}}$ *tel que pour tout* $t \in \mathbb{R}$, τ^t *soit un représentant de la classe* T^t.

Démonstration. – Pour la première partie du théorème, rappelons tout d'abord qu'un morphisme φ de $(\mathbb{R},+)$ dans Ω est continu si et seulement si il est mesurable (voir par exemple le Théorème 9.10 dans [4]). Soit (τ^t) un flot ponctuel. Si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, T^t est l'automorphisme correspondant à τ^t, il est clair que $t \mapsto T^t$ est un morphisme de $(\mathbb{R},+)$ dans Ω, et il ne reste plus qu'à prouver sa mesurabilité. Pour cela, il suffit de vérifier que pour tout $S \in \Omega$, tout intervalle I dans $[0,1]$ et tout $\varepsilon > 0$, $\{t \in \mathbb{R} \mid \mu(T^{-t}I \setminus S^{-1}I) < \varepsilon\}$

est mesurable dans $\mathbb{R}$. Or, par la mesurabilité de $(t,x) \mapsto \tau^t x$, l'ensemble $M \stackrel{\text{déf}}{=} \{(t,x) \mid \tau^t x \in I\}$ est mesurable dans $\mathbb{R} \times [0,1]$, et il en va de même pour $D \stackrel{\text{déf}}{=} M \setminus (\mathbb{R} \times S^{-1} I)$. Alors l'application $t \mapsto \mu(\{x \in [0,1] \mid (t,x) \in D\})$ est elle-même mesurable, et cela suffit pour conclure.

Pour prouver la seconde partie du théorème, on part d'un Ω-flot (T^t), et on va montrer successivement les étapes suivantes.

– *Étape* 1. Il existe un processus stationnaire $(\xi_t)_{t \in \mathbb{R}}$, défini sur l'espace probabilisé $([0,1], \mu)$, tel que $(t,x) \mapsto \xi_t(x)$ soit mesurable de $\mathbb{R} \times [0,1]$ dans $[0,1]$, et vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mu\big(\xi_t(x) \neq T^t(x)\big) = 0. \tag{6}$$

– *Étape* 2. Il existe X_0 borélien de $[0,1]$, avec $\mu(X_0) = 1$, un espace probabilisé (L, ρ) contenant X_0, et tel que $\mu_{|X_0} = \rho_{|X_0}$, et un flot ponctuel $(\sigma^t)_{t \in \mathbb{R}}$ défini sur L, tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \rho\big(\sigma^t(x) \neq \xi_t(x)\big) = 0. \tag{7}$$

– *Étape* 3. Il existe un flot ponctuel $(\tau^t)_{t \in \mathbb{R}}$ défini sur X_0, tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mu\big(\tau^t(x) \neq \sigma^t(x)\big) = 0. \tag{8}$$

Il suffira ensuite d'étendre la définition du flot ponctuel (τ^t) à $[0,1]$ tout entier, en posant

$$\forall x \in [0,1] \setminus X_0, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \tau^t(x) \stackrel{\text{déf}}{=} x.$$

Par (6), (7) et (8), (τ^t) sera alors un flot ponctuel sur $[0,1]$ répondant aux conditions voulues.

Étape 1. Pour chaque réel t, choisissons une transformation ponctuelle χ_t représentant la classe T^t. Le processus $(t,x) \mapsto \chi_t(x)$ n'a pas de raison d'être mesurable, mais grâce à la continuité de $t \mapsto T^t$, on vérifie immédiatement que ce processus est continu en probabilité, c'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \quad \mu\big(\big|\chi_t(x) - \chi_s(x)\big| > \varepsilon\big) \xrightarrow[s \to t]{} 0.$$

Mais cela entraîne (voir par exemple [7], p. 87), que (χ_t) admet une modification mesurable, qui est le processus (ξ_t) annoncé.

Étape 2. Soit ν la mesure de probabilité équivalente à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, donnée par

$$\frac{d\nu}{d\lambda}(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} \exp\big(-|t|\big).$$

Puis, soit

$$L \stackrel{\text{déf}}{=} \big\{f \in L^1(\nu) \mid 0 \leqslant f \leqslant 1\big\}.$$

L hérite de la topologie de $L^1(\nu)$ qui en fait un espace polonais. Considérons ensuite $\varphi : [0,1] \to L$, qui à x associe l'élément de $L^1(\nu)$ correspondant à l'application $t \mapsto$

$\xi_t(x)$. De la mesurabilité du processus (ξ_t) on déduit aisément celle de φ. Montrons maintenant que φ est presque sûrement injective. Par la continuité en probabilité de (ξ_t), on peut pour tout n trouver un réel $t_n > 0$ tel que

$$\forall t \in [0, t_n], \quad \mu\bigl(\bigl|\xi_t(x) - x\bigr| > 1/n\bigr) < 1/2^{2n}.$$

On a alors $\mu(M_n) < 1/2^n$, où

$$M_n \overset{\text{déf}}{=} \biggl\{x \in [0,1] \biggm| \int_{[0,t_n]} \mathbb{1}_{|\xi_t(x)-x|>1/n}\, dt \geqslant t_n/2^n\biggr\}.$$

Par Borel–Cantelli, l'ensemble X_0 des x dans $\in [0,1]$ qui n'appartiennent qu'à un nombre fini de M_n est de mesure 1, et il est immédiat que $\varphi_{|X_0}$ est injective. Par φ, X_0 s'identifie donc à une partie de L, et si on appelle ρ la mesure image de μ par φ, on a bien $\mu_{|X_0} = \rho_{|X_0}$.

Définissons maintenant un flot ponctuel $(\sigma^t)_{t\in\mathbb{R}}$ sur L, en posant

$$\forall f \in L, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \sigma^t(f) \overset{\text{déf}}{=} f_t,$$

où f_t est l'élément de $L^1(\nu)$ correspondant à l'application $s \mapsto f(s+t)$. On vérifie facilement que $(t, f) \mapsto \sigma^t(f)$ est continue, donc mesurable, de $\mathbb{R} \times L$ dans L. Par ailleurs, on a évidemment $\sigma^s \circ \sigma^t = \sigma^{s+t}$. Il reste à vérifier que pour tout réel t,

- σ^t préserve la mesure de probabilité ρ,
- pour presque tout $x \in X_0$, $\sigma^t(\varphi(x)) = \varphi(\xi_t(x))$.

Remarquons que la première de ces propriétés est une conséquence immédiate de la seconde. Puis, t étant fixé, l'ensemble

$$\bigl\{(s,x) \in \mathbb{R} \times [0,1] \mid \xi_s\bigl(\xi_t(x)\bigr) \neq \xi_{s+t}(x)\bigr\}$$

est $\nu \times \mu$-négligeable. En effet, si on fixe aussi s, l'ensemble

$$\bigl\{x \in [0,1] \mid \xi_s\bigl(\xi_t(x)\bigr) \neq \xi_{s+t}(x)\bigr\}$$

est μ-négligeable grâce à (6). Cela entraîne que pour μ-presque tout x, les deux applications

$$s \mapsto \xi_s\bigl(\xi_t(x)\bigr) \quad \text{et} \quad s \mapsto \xi_{s+t}(x)$$

coïncident ν-presque sûrement. Autrement dit : $\varphi(\xi_t(x)) = \sigma^t(\varphi(x))$.

Étape 3. Prouvons qu'il existe $\psi : L \to X_0$ bijective, bimesurable, avec $\psi(x) = x$ pour ρ-presque tout x. En effet, puisque L est polonais, la mesure ρ vérifie, pour tout A mesurable dans L,

$$\mu(A) = \sup_{\substack{K\subset A\\ K \text{ compact}}} \mu(K).$$

(Voir Théorème 17.11 dans [4].) En s'inspirant de la construction de l'ensemble de Cantor dans $[0,1]$, on peut alors facilement construire un compact $K \subset X_0$ qui soit négligeable et ayant la puissance du continu.

Comme X_0 est borélien dans [0, 1], il l'est aussi dans L (voir Théorème 15.1 dans [4]), tout comme son complémentaire $C \overset{\text{déf}}{=} L \setminus X_0$. Alors K et $K \cup C$ sont deux boréliens de L qui ont même cardinal. Le Théorème 15.6 de [4] assure alors qu'il existe une bijection bimesurable $\psi^* : K \cup C \to K$. Il suffit ensuite de poser $\psi(x) \overset{\text{déf}}{=} \psi^*(x)$ si $x \in K \cup C$, $\psi(x) \overset{\text{déf}}{=} x$ sinon.

Le flot cherché (τ^t) sur X_0 peut alors être défini en posant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \tau^t \overset{\text{déf}}{=} \psi \circ \sigma^t \circ \psi^{-1}. \qquad \square$$

RÉFÉRENCES

[1] E. Glasner, J.L. King, A zero-one law for dynamical properties, in: Topological Dynamics and Applications (Minneapolis, MN, 1995), American Mathematical Society, Providence, RI, 1998, pp. 231–242.
[2] P.R. Halmos, Lectures on Ergodic Theory, Chelsea, New York, 1956.
[3] A.B. Katok, A.M. Stepin, Approximations in ergodic theory, Russian Math. Surveys 22 (1967) 77–102.
[4] A.S. Kechris, Classical Descriptive Set Theory, Springer-Verlag, 1995.
[5] J.L. King, The commutant is the weak closure of the powers, for rank-1 transformations, Ergodic Theory Dynamical Systems 6 (1986) 363–384.
[6] J.L. King, The generic transformation has roots of all orders, Colloquium Math. 84/85 (2000) 521–547.
[7] J. Neveu, Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités, Masson, 1964.
[8] J.C. Oxtoby, Measure and Category, Springer-Verlag, 1971.