

AGRÉGATION LIMITÉE PAR DIFFUSION INTERNE SUR \mathbb{Z}^d

Sébastien BLACHÈRE

Laboratoire de Statistique et Probabilités, Université Paul Sabatier, 31062 Toulouse Cedex, France

Reçu le 30 novembre 2000, révisé le 28 juin 2001

RÉSUMÉ. – L’Agrégation Limitée par Diffusion Interne est un modèle de croissance sur un ensemble infini \mathcal{G} associé à une chaîne de Markov sur \mathcal{G} . Il a été introduit par Diaconis et Fulton (Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino 49 (1991) 95–119). Lawler, Bramson, et Griffeath (Ann. Probab. 20 (4) (1992) 2117–2140) et Lawler (Ann. Probab. 23 (1995) 71–86) ont étudié ce modèle pour la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^d . Ils ont démontré que le nuage de points généré par ce modèle possède une forme limite qui est la trace, sur \mathbb{Z}^d , des boules euclidiennes de \mathbb{R}^d . Nous étendons ce résultat au cas des marches aléatoires centrées et irréductibles sur \mathbb{Z}^d , sous des conditions de moment. La forme limite devient alors la trace des boules de \mathbb{R}^d avec une norme associée à la matrice de covariance de la marche aléatoire. Nous étudions également le cas des marches aléatoires non-centrées et obtenons l’existence d’une forme limite en dimension 1. Dans le cas multi-dimensionnel, nous donnons une borne supérieure pour le nuage. © 2002 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

ABSTRACT. – Internal Diffusion Limited Aggregation is a growth model on an infinite set \mathcal{G} , associated to a Markov chain on \mathcal{G} . It has been introduced by Diaconis and Fulton in 1991 (Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino 49 (1991) 95–119). Lawler, Bramson, and Griffeath (Ann. Probab. 20 (4) (1992) 2117–2140) and Lawler (Ann. Probab. 23 (1995) 71–86) studied this model for the simple random walk on \mathbb{Z}^d . They proved that the limiting shape of the cloud of points generated by this model is the trace on \mathbb{Z}^d of the Euclidean balls of \mathbb{R}^d . We extend this result to the case of centered and irreducible random walks on \mathbb{Z}^d , under moment conditions. Thus, the limiting shape becomes the trace of the balls of \mathbb{R}^d with a norm associated to the covariance matrix of the random walk. We also study the case of non-centered random walks et get the existence of a limiting shape in dimension 1. In the multi-dimensional case, we give an upper bound for the cloud. © 2002 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

Soient \mathcal{G} un ensemble discret infini et $S(k)$ une chaîne de Markov sur les éléments de \mathcal{G} , avec $S(0) = O$ un élément fixé appelé l’origine. Le modèle appelé “Agrégation

Limitée par Diffusion Interne” (“ALD” interne) est un modèle de croissance sur \mathcal{G} , c’est-à-dire une chaîne de Markov $A(n)$ (n un entier positif) d’ensembles aléatoires croissants d’éléments de \mathcal{G} , associée à $S(k)$. La chaîne $A(n)$ est définie de la façon suivante :

- $A(1) = \{O\}$,
- $\mathbf{P}\{A(n + 1) = A(n) \cup \{y\} | A(n)\} = \mathbf{P}\{S(\tau(A(n)^c)) = y | \tau(A(n)^c) < \infty\}$,

où $\tau(A)$ est le *temps d’atteinte* de l’ensemble A .

Concrètement, à chaque temps entier n , nous lançons une particule en O qui progresse suivant la chaîne de Markov $S(k)$. Nous attendons que la particule quitte le nuage précédent $A(n - 1)$, puis nous la stoppons sur le premier élément visité hors de $A(n - 1)$. Nous disons alors que la particule (ou la chaîne de Markov) a augmenté le nuage. Remarquons que lorsque $S(k)$ est irréductible (tous les points sont accessibles), la relation de récurrence peut être remplacée par

$$\mathbf{P}\{A(n + 1) = A(n) \cup \{y\} | A(n)\} = \mathbf{P}\{S(\tau(A(n)^c)) = y\},$$

car, pour tout n , $A(n)$ est fini et donc, par irréductibilité, $\tau(A(n)^c)$ est fini presque sûrement.

Nous considérons ici, le cas d’une marche aléatoire irréductible sur \mathbb{Z}^d .

Le nom d’“ALD” interne vient de la similitude avec l’“ALD” (externe). Dans ce dernier modèle, les particules sont lancées “à l’infini”, conditionnées pour atteindre le nuage précédent, et elles sont stoppées juste avant de l’atteindre. Voir par exemple [12] pour une définition précise et des propriétés de l’“ALD”.

Diaconis et Fulton [4] ont défini l’“ALD” interne et ils ont étudié le cas unidimensionnel où $S(n)$ est la marche aléatoire simple (aux plus proches voisins et de probabilité de transition uniforme). Ils ont montré que le nuage au temps n “tend” vers l’intervalle $[-n/2, n/2]$ et que les fluctuations autour de cet intervalle étaient gaussiennes de paramètre d’ordre \sqrt{n} .

THÉORÈME 1.1 ([4, Prop. 3.2]). – *Nous notons $A^+(n)$ le nombre d’éléments positifs du nuage au temps n . Lorsque n tend vers l’infini,*

$$\mathbf{P}\left\{\frac{|A^+(n)| - n/2}{\sqrt{n/12}} \leq t\right\} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \exp(-x^2/2) dx.$$

Lawler, Bramson, et Griffeath [14] et plus tard Lawler [13] ont étudié le cas de \mathbb{Z}^d ($d \geq 2$) avec la marche aléatoire simple. Ils ont montré que la *forme limite* (voir ci-dessous) du nuage est la trace des boules euclidiennes de \mathbb{R}^d sur \mathbb{Z}^d . Cette propriété a longtemps été conjecturée pour le modèle d’Eden mais des travaux de Kesten ainsi que de puissantes simulations informatiques ont montré que cette conjecture était fautive. L’“ALD” interne est ainsi le premier modèle de croissance connu ayant cette propriété.

Définissons deux variables aléatoires, $\delta_I(n)$ l’*erreur interne*, et $\delta_E(n)$ l’*erreur externe* :

$$\begin{aligned} n - \delta_I(n) &\stackrel{\text{déf.}}{=} \inf\{|z| : z \notin A([\omega_d n^d])\}, \\ n + \delta_E(n) &\stackrel{\text{déf.}}{=} \sup\{|z| : z \in A([\omega_d n^d])\}, \end{aligned}$$

où $|\cdot|$ est la norme euclidienne de \mathbb{R}^d , ω_d le volume de la boule unité de \mathbb{R}^d et $[k]$ la partie entière de k . Ainsi $[\omega_d n^d]$ est le nombre approximatif de points de \mathbb{Z}^d dans la trace de la boule euclidienne de rayon n . Nous disons que la trace des boules euclidiennes est la forme limite du modèle, dès que

$$\delta_I(n) = o(n) \quad \text{et} \quad \delta_E(n) = o(n),$$

presque sûrement. Dans [13], Lawler a précisé ce résultat en étudiant les fluctuations de la forme du nuage autour des boules euclidiennes.

THÉORÈME 1.2 ([13, Th 1]). – *Si $d \geq 2$, alors, avec probabilité 1 :*

- $\delta_I(n) = o(n^{1/3}(\ln n)^2)$,
- $\delta_E(n) = o(n^{1/3}(\ln n)^4)$.

Des études ont été menées sur ce modèle lorsque l’injection de particules se fait de façon beaucoup plus rapide, indépendamment du chemin suivi par la particule précédente. Lawler, Bramson et Griffeath [14] ont obtenu des résultats en dimension $d \geq 3$ en utilisant les mêmes techniques que pour la définition initiale du modèle. Cette similarité vient du fait qu’ils ont injecté les particules grâce à une loi de Poisson. Ainsi, à un instant t , les particules n’ayant pas encore augmenté le nuage sont en nombre négligeable devant le nombre total de particules lancées. Gravner et Quastel [6] ont résolu le cas de la dimension 2 en utilisant des techniques de limite hydrodynamique. Enfin, Ben Arous, Quastel et Ramirez [1] étudient les cas où l’injection se fait plus rapidement. Notamment, à très fort taux d’injection, ils conjecturent une forme limite du modèle proche de la trace des boules de \mathbb{R}^d pour la norme l^1 .

Notre but est d’étendre/adapter les théorèmes 1.1 et 1.2 à des marches aléatoires plus générales sur \mathbb{Z}^d .

2. Cas d’une marche aléatoire centrée

Dans cette section, nous étudierons l’“ALD” interne sur \mathbb{Z}^d (par abus nous notons ainsi le graphe de Cayley de \mathbb{Z}^d muni du système standard de générateurs) associé à une marche aléatoire $S(n) \stackrel{\text{déf.}}{=} S(0) + X_1 + \dots + X_n$ ($X, X_1, \dots, X_n, \dots$ i.i.d.) définie par sa *matrice de transition* P dont les éléments sont $p(x, y) \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathbf{P}\{S(n) = y \mid S(n-1) = x\}$. Nous écrirons $p(x) = p(O, x)$. Les notations avec l’exposant y , telles que $\mathbf{P}^y, \mathbb{E}^y, S^y$, indiquent que $S(0) = y$, alors que l’absence d’exposant signifie $S(0) = O$. Nous commençons par quelques hypothèses sur $S(n)$:

- *Irréductible* : c’est nécessaire pour pouvoir parler de propriétés de recouvrement pour l’“ALD” interne. Sinon, le problème se ramène à celui d’une marche aléatoire irréductible sur le semi-groupe engendré par les éléments accessibles en un coup.
- *Centrée* (l’incrément de la marche aléatoire est une variable aléatoire centrée).
- Dans la suite nous aurons besoin de distinguer des familles de *conditions de moment* (la norme utilisée sera définie juste après, mais ces conditions sont indépendantes du choix de la norme) :

\mathcal{A} :

$$d \leq 4 \quad \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p(x) \|x\|^4 < \infty,$$

$$d \geq 5 \quad \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p(x) \|x\|^{d-1} < \infty.$$

\mathcal{B} :

$$d \leq 3 \quad \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p(x) \|x\|^4 < \infty,$$

$$d = 4 \quad \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p(x) \|x\|^4 \ln \|x\| < \infty,$$

$$d \geq 5 \quad \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p(x) \|x\|^d < \infty.$$

$\mathcal{C}(\psi)$:

$$d = 1 \quad \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p(x) \|x\|^{3+(2/\psi)} (\ln \|x\|)^6 < \infty,$$

$$d \geq 2 \quad \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p(x) \|x\|^{3+(d+2)/\psi} (\ln \|x\|)^4 < \infty.$$

$\mathcal{D}(\psi)$:

$$d \geq 2 \quad \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p(x) \|x\|^{3+(d+2/3)/\psi} (\ln \|x\|)^6 < \infty.$$

Remarque 2.1. – Dans la suite, nous supposons toujours la marche aléatoire *apériodique* (le p.g.c.d. des n tels que $\mathbf{P}\{S(n) = O\} > 0$ vaut 1). Néanmoins cette hypothèse peut toujours être respectée en changeant p en $(\delta_O + p)/2$ (où δ_O est la masse de Dirac en O). En effet, cette opération ne change pas la forme du nuage de l’“ALD” interne et rend la marche aléatoire apériodique.

La *fonction de Green* $G(x, y)$ associée à une marche aléatoire est le nombre moyen de visites en un point y , partant de x . Comme ce nombre est fini si et seulement si $d \geq 3$ pour une marche aléatoire centrée, il existe une notion similaire pour le cas $d \leq 2$: le *noyau potentiel* $a(x, y)$.

$$G(x, y) \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathbb{E}^x \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}(S(n) = y) \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}^x \{S(n) = y\},$$

$$a(x, y) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} [\mathbf{P}^x \{S(n) = x\} - \mathbf{P}^x \{S(n) = y\}].$$

Nous écrirons $a(x) = a(O, x)$ et $G(x) = G(O, x)$. Soit Q la *matrice de covariance* associée à P , c’est-à-dire la matrice de la forme quadratique des moments :

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} (\theta \cdot x)^2 p(x), \quad \text{pour } \theta \in \mathbb{R}^d.$$

La matrice Q est symétrique définie positive de déterminant $|Q|$. Nous définissons une nouvelle norme sur \mathbb{R}^d , associée à Q :

$$\|x\| \stackrel{\text{déf.}}{=} (d^{-1}x^t Q^{-1}x)^{1/2}.$$

Remarque 2.2. –

- Cette norme coïncide avec la norme euclidienne dans le cas de la marche aléatoire simple.
- Pour $d = 1$, $Q = \sigma^2$ (variance de X).

Le volume de la boule de \mathbb{R}^d pour cette norme, devient

$$\text{Vol}(B(O, n)) = d^{d/2}|Q|^{1/2}\omega_d n^d \stackrel{\text{déf.}}{=} \omega_d^Q n^d.$$

Nous définissons alors la boule et la sphère “discrètes” de rayon n :

$$B(n) \stackrel{\text{déf.}}{=} \{z \in \mathbb{Z}^d : \|z\| \leq n\},$$

$$\partial B(n) \stackrel{\text{déf.}}{=} B(n+1) \setminus B(n).$$

Les nouvelles définitions de l’*erreur interne* et de l’*erreur externe* sont

$$n - \delta_I^Q(n) \stackrel{\text{déf.}}{=} \inf\{\|z\| : z \notin A([\omega_d^Q n^d])\},$$

$$n + \delta_E^Q(n) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup\{\|z\| : z \in A([\omega_d^Q n^d])\}.$$

Le principal résultat de cette section est le suivant.

THÉORÈME 2.3. – *Pour une marche aléatoire centrée et irréductible,*

- *Erreur interne :*
 - I. *Pour $d = 1$, sous \mathcal{A} , avec probabilité 1, $\delta_I^Q(n) = o(n^{1/2} \ln n)$.*
 - II. *Pour $d \geq 2$, sous \mathcal{A} , avec probabilité 1, $\delta_I^Q(n) = O(n^{1/2})$.*
 - III. *Pour $d \geq 2$, sous \mathcal{B} et si la marche aléatoire est symétrique, alors avec probabilité 1, $\delta_I^Q(n) = o(n^{1/3} \ln n)$.*
- *Erreur externe :* (pour une marche aléatoire à portée finie, prendre $\psi = 0$, et pour une marche aléatoire avec des moments exponentiels, remplacer n^ψ par $\ln n$)
 - I. *Pour $d = 1$, sous $\mathcal{C}(\psi)$ ($0 < \psi < 1/2$), avec probabilité 1, $\delta_E^Q(n) = o(n^{\psi+1/2}(\ln n)^3)$.*
 - II. *Pour $d \geq 2$, sous $\mathcal{C}(\psi)$ ($0 < \psi < 1/4$), avec probabilité 1, $\delta_E^Q(n) = o(n^{2\psi+1/2}(\ln n)^2)$.*
 - III. *Pour $d \geq 2$, sous $\mathcal{D}(\psi)$ ($0 < \psi < 1/3$) et si la marche aléatoire est symétrique, alors avec probabilité 1, $\delta_E^Q(n) = o(n^{2\psi+1/3}(\ln n)^3)$.*

Le corps de la démonstration est adapté de celui de Lawler dans [13]. Nous noterons $c, c', c(\varepsilon)$ des constantes dont la valeur peut changer d’une ligne à l’autre.

2.1. Erreur interne

Dans cette partie, nous prouvons la partie interne de théorème 2.3. La méthode consiste à contrôler la probabilité qu’un point z , proche de la sphère $\partial B(n)$, n’appar-

tienne pas au nuage au temps $[\omega_d^Q n^d]$. Ce contrôle s’effectue par la comparaison de deux variables aléatoires M et \tilde{L} (voir les définitions ci-après) dont les espérances peuvent être calculées précisément grâce à des estimations de la fonction de Green et du noyau potentiel.

Nous commençons par quelques définitions. Nous dirons qu’une suite γ_n tend rapidement vers 0 si elle tend plus vite que toute puissance finie de $1/n$ (ou tout polynôme en $1/n$) :

$$\gamma_n \xrightarrow{r} 0 \iff \forall k < \infty, n^k \gamma_n \longrightarrow 0.$$

Pour tout ε positif, nous définissons des anneaux de \mathbb{Z}^d :

$$\begin{aligned} D_\varepsilon^1(n) &\stackrel{\text{déf.}}{=} \{z \in \mathbb{Z} : n - 2\varepsilon n^{1/2} \ln n < \|z\| \leq n - \varepsilon n^{1/2} \ln n\}, \\ D_\varepsilon^2(n) &\stackrel{\text{déf.}}{=} \{z \in \mathbb{Z}^d : n - (2/\varepsilon)n^{1/2} < \|z\| \leq n - (1/\varepsilon)n^{1/2}\}, \\ D_\varepsilon^3(n) &\stackrel{\text{déf.}}{=} \{z \in \mathbb{Z}^d : n - 2\varepsilon n^{1/3} \ln n < \|z\| \leq n - \varepsilon n^{1/3} \ln n\}. \end{aligned}$$

Soit ξ_n le temps de sortie de la boule $B(n)$, $\xi_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \min\{k \geq 1 : S(k) \notin B(n)\}$. Soit $G_n(x, y)$, avec $x, y \in B(n)$, la fonction de Green stoppée, c’est-à-dire le nombre moyen de visites en y , partant de x , avant de sortir de $B(n)$,

$$G_n(x, y) \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathbb{E}^x \left\{ \sum_{n=0}^{\xi_n-1} \mathbb{1}\{S(n) = y\} \right\}.$$

Pour $d \geq 3$, [12, Prop. 1.5.8] donne

$$G_n(x, y) = G(x, y) - \mathbb{E}^x \{G(S(\xi_n), y)\}. \tag{1}$$

Pour $d \leq 2$, [12, Prop. 1.6.3] donne

$$G_n(x, y) = \mathbb{E}^x \{a(S(\xi_n), y)\} - a(x, y). \tag{2}$$

Enfin, pour tout $x \in B(n)$ nous notons

$$b(x, n, q) \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathbb{E}^x \{(\|S(\xi_n)\| - n)^q\}.$$

Nous allons prouver qu’il existe trois suites $\gamma_n^i \xrightarrow{r} 0$ ($i = 1, 2, 3$) correspondant aux trois conditions (I, II, et III) de dimension et moment de la partie “erreur interne” du théorème 2.3, telles que

$$\mathbf{P}\{D_\varepsilon^i(n) \not\subset A([\omega_d^Q n^d])\} \leq \gamma_n^i. \tag{3}$$

Ainsi, par le lemme de Borel–Cantelli, cet événement arrivera finiment souvent presque sûrement. Alors, avec probabilité 1, pour n assez grand :

$$D_\varepsilon^i(n) \subset A([\omega_d^Q n^d]). \tag{4}$$

Mais pour tout N assez grand et $n > N$,

$$B(n - \varepsilon n^{1/2} \ln n) = \left(\bigcup_{k=N}^n D_\varepsilon^1(k) \right) \cup B(N),$$

$$B(n - (1/\varepsilon)n^{1/2}) = \left(\bigcup_{k=N}^n D_\varepsilon^2(k) \right) \cup B(N),$$

$$B(n - \varepsilon n^{1/3} \ln n) = \left(\bigcup_{k=N}^n D_\varepsilon^3(k) \right) \cup B(N).$$

Notons que pour tout $k \leq n$, $A([\omega_d^Q k^d]) \subset A([\omega_d^Q n^d])$, alors

$$\{D_\varepsilon^i(k) \subset A([\omega_d^Q k^d])\} \subset \{D_\varepsilon^i(k) \subset A([\omega_d^Q n^d])\}.$$

Et ainsi, pour $i = 3$,

$$\begin{aligned} & \{B(N) \subset A([\omega_d^Q n^d])\} \bigcup_{k=N}^n \{D_\varepsilon^3(k) \subset A([\omega_d^Q k^d])\} \\ & \subset \{B(n - \varepsilon n^{1/3} \ln n) \subset A([\omega_d^Q n^d])\}. \end{aligned}$$

De même, nous obtenons l’inclusion correspondante pour $i = 1, 2$. De plus, N étant fixé, $B(N)$ est inclus dans $A([\omega_d^Q n^d])$ pour n assez grand, avec probabilité 1, par irréductibilité. Ainsi, pour $i = 1, 2, 3, (4)$ implique la première partie du théorème 2.3.

Notre but est d’obtenir (3). Or,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{D_\varepsilon^i(n) \not\subset A([\omega_d^Q n^d])\} & \leq \sum_{z \in D_\varepsilon^i(n)} \mathbf{P}\{z \notin A([\omega_d^Q n^d])\} \\ & \leq cn^d \sup_{z \in D_\varepsilon^i(n)} \mathbf{P}\{z \notin A([\omega_d^Q n^d])\}. \end{aligned}$$

Il suffit donc de prouver qu’il existe trois suites $\gamma_n^i \xrightarrow{r} 0$ telles que $\mathbf{P}\{z \notin A([\omega_d^Q n^d])\} \leq \gamma_n^i$ pour tout $z \in D_\varepsilon^i(n)$.

Dans la suite nous aurons besoin d’avoir, à q fixé, $b(x, n, q)$ borné uniformément en x et n . Pour démontrer cela, nous avons besoin d’un premier lemme qui sera également utile plus loin.

LEMME 2.4. – *Il existe une constante c telle que, pour δ assez grand et pour tout $x \in B(n)$, en posant $r = n - \delta$,*

$$\sum_{y \in B(n) \setminus B(r)} G_n(x, y) \leq c\delta^2.$$

Démonstration. – Soit $y \in B(n) \setminus B(r)$. La distance de y à $B^c(n)$ dans \mathbb{R}^d est inférieure à δ . Nous appelons $\mathcal{E}(\delta)$, un demi-espace de \mathbb{R}^d dont le bord est un hyperplan $\mathcal{H}(\delta)$, tangent à $B(n)$ tel que $d(y, \mathcal{H}(\delta)) \leq \delta$. Alors,

$$\mathbf{P}^y \{\xi_n^y \leq \delta^2\} \geq \mathbf{P}^y \{S^y(\delta^2) \in \mathcal{E}(\delta)\} = \mathbf{P}^{\bar{y}} \{\bar{S}^{\bar{y}}(\delta^2) \geq \delta\},$$

où \bar{y} et \bar{S}^y sont les projetés de y et S^y sur l’orthogonal de $\mathcal{H}(\delta)$. Ainsi, \bar{S}^y étant une marche aléatoire réelle centrée, le théorème central limite donne

$$\mathbf{P}^y \{ \xi_n^y \leq \delta^2 \} \geq \theta > 0$$

où θ est indépendant de n et y .

Nous supposons tout d’abord $x \in B(n) \setminus B(r)$ et nous notons $V_n(A)$ le nombre de visites en un ensemble A , avant de quitter $B(n)$.

$$\begin{aligned} \sum_{y \in B(n) \setminus B(r)} G_n(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{y \in B(n) \setminus B(r)} k \mathbf{P}^x \{ V_n(\{y\}) = k \} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=\delta^2 j}^{\delta^2(j+1)-1} k \mathbf{P}^x \{ V_n(B(n) \setminus B(r)) = k \} \\ &\leq \delta^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=\delta^2 j}^{\infty} \mathbf{P}^x \{ V_n(B(n) \setminus B(r)) = k \} \\ &= \delta^2 \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}^x \{ V_n(B(n) \setminus B(r)) \geq \delta^2 j \}. \end{aligned}$$

En séparant suivant les points correspondant à la $(k\delta^2)^{\text{ème}}$ visite ($k \leq j$) en $B(n) \setminus B(r)$, il vient alors

$$\begin{aligned} \sum_{y \in B(n) \setminus B(r)} G_n(x, y) &\leq \delta^2 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sup_{y \in B(n) \setminus B(r)} \mathbf{P}^y \{ V_n(B(n) \setminus B(r)) \geq \delta^2 \} \right)^j \\ &\leq \delta^2 \sum_{j=0}^{\infty} (1 - \theta)^j = \frac{\delta^2}{\theta}. \end{aligned}$$

Et si $x \in B(r)$, alors $G_n(x, y) = \mathbb{E}^x \{ G_n(S^x(\tau_{B(n) \setminus B(r)}), y) \}$ nous permet de nous ramener au cas précédent. \square

LEMME 2.5. – Si la marche aléatoire $S(k)$ vérifie $\mathbb{E} \{ \|x\|^{q+2} \} < \infty$ pour $q > 0$, alors

$$\sup_n \sup_{x \in B(n)} b(x, n, q) < +\infty. \tag{5}$$

Démonstration. – Nous adaptons ici la démonstration de [7, Th. 1.2] qui traite le cas $x = O$. La proposition 3.1 de [7] est un calcul direct qui ne tient pas compte du point de départ de la marche aléatoire. Nous obtenons ainsi

$$\mathbf{P}^x \{ (\|S(\xi_n)\| - n)^q > \lambda \} = \sum_{y \in B(n)} \mathbf{P}^x \{ \|X + y\| > n + \lambda^{1/q} \} G_n(x, y). \tag{6}$$

Alors,

$$\mathbb{E}^x \{ (\|S(\xi_n)\| - n)^q \} = \sum_{y \in B(n)} G_n(x, y) \int_0^{\infty} \mathbf{P}^x \{ \|X + y\| > n + \lambda^{1/q} \} d\lambda.$$

Mais,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathbf{P}^x \{ \|X + y\| > n + \lambda^{1/q} \} d\lambda &\leq \int_0^\infty \mathbf{P}^x \{ \|X\| > n + \lambda^{1/q} - \|y\| \} d\lambda \\ &= \int_{n-\|y\|}^\infty \mathbf{P}\{\|X\| = u\} \int_0^{(u-n+\|y\|)^q} d\lambda du \\ &\leq \int_{n-\|y\|}^\infty u^q \mathbf{P}\{\|X\| = u\} du. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x \{ (\|S(\xi_n)\| - n)^q \} &\leq \int_0^n u^q \mathbf{P}\{\|X\| = u\} \sum_{y \in B(n) \setminus B(n-u)} G_n(x, y) du \\ &\quad + \int_n^\infty u^q \mathbf{P}\{\|X\| = u\} \sum_{y \in B(n)} G_n(x, y) du \\ &= \mathbb{E} \left\{ \|X\|^q \sum_{y \in B(n) \setminus B(n-\|X\|)} G_n(x, y) \mathbb{1}_{\{\|X\| \leq n\}} \right\} \\ &\quad + \mathbb{E} \left\{ \|X\|^q \sum_{y \in B(n)} G_n(x, y) \mathbb{1}_{\{\|X\| > n\}} \right\}. \end{aligned}$$

Enfin, par le lemme 2.4,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x \{ (\|S(\xi_n)\| - n)^q \} &\leq c \mathbb{E} \{ \|X\|^{q+2} \mathbb{1}_{\{\|X\| \leq n\}} + \|X\|^q n^2 \mathbb{1}_{\{\|X\| > n\}} \} \\ &\leq c \mathbb{E} \{ \|X\|^{q+2} \}. \end{aligned}$$

Cela donne le résultat. \square

Dans la suite, nous aurons essentiellement besoin de ce lemme pour $q = 1$. Aussi, nous noterons $b(x, n) = b(x, n, 1)$.

LEMME 2.6. – *Cas I, II. Pour $z \in D_\varepsilon^i(n)$ ($i = 1, 2$), nous notons $\delta = n - \|z\|$, alors*

$$\omega_d^Q n^d G_n(O, z) = 2n\delta + (d-1)\delta^2 + O(n).$$

Cas III. Pour $z \in D_\varepsilon^3(n)$, nous notons $\delta = n - \|z\|$, alors

$$\omega_d^Q n^d G_n(O, z) = 2n\delta + 2b(z, n)n + (d-1)\delta^2 + o(n^{1/2}).$$

Démonstration. – Uchiyama [17] donne des estimations précises de la fonction de Green et du noyau potentiel pour les marches aléatoires centrées sur \mathbb{Z}^d ($d \geq 2$). Pour $d = 1$, l'estimation suivante provient de [3, Th. 3.1]. Leurs résultats peuvent être résumés comme suit, sous les hypothèses du théorème 2.3,

$$\begin{aligned}
 d = 1, \quad a(O, x) &= \frac{2}{\omega_1^O} \|x\| + C + o(1), \\
 d = 2 \text{ et cas II}, \quad a(O, x) &= \frac{2}{\omega_2^O} \ln(\|x\|) + C + O(\|x\|^{-1}), \\
 d = 2 \text{ et cas III}, \quad a(O, x) &= \frac{2}{\omega_2^O} \ln(\|x\|) + C + O(\|x\|^{-2}), \\
 d \geq 3 \text{ et cas II}, \quad G(O, x) &= \frac{2}{(d-2)\omega_d^O} \|x\|^{2-d} + O(\|x\|^{1-d}), \\
 d \geq 3 \text{ et cas III}, \quad G(O, x) &= \frac{2}{(d-2)\omega_d^O} \|x\|^{2-d} + O(\|x\|^{-d}).
 \end{aligned}$$

Plaçons-nous d’abord dans le cas III. Si $d \geq 3$, par (1) et par symétrie de la marche aléatoire,

$$G_n(O, z) = G_n(z, O) = G(z, O) - \mathbb{E}^z \{ G(S(\xi_n), O) \} = G(z) - \mathbb{E}^z \{ G(S(\xi_n)) \}.$$

Nous pouvons alors estimer la partie droite de cette égalité.

$$\begin{aligned}
 \omega_d^O \mathbb{E}^z \{ G(S(\xi_n)) \} &= \frac{2}{d-2} \mathbb{E}^z \{ \|S(\xi_n)\|^{2-d} + O(\|S(\xi_n)\|^{-d}) \} \\
 &= \frac{2}{d-2} n^{2-d} \mathbb{E}^z \{ 1 + (2-d)n^{-1}(\|S(\xi_n)\| - n) \} + O(n^{-d}) \\
 &= \frac{2}{d-2} n^{2-d} - 2b(z, n)n^{1-d} + O(n^{-d}).
 \end{aligned}$$

La deuxième égalité vient du fait que sous les conditions de moments choisies, $b(z, n, 2)$ est fini (Lemme 2.5). De plus,

$$\begin{aligned}
 \omega_d^O G(z) &= \frac{2}{d-2} (n - \delta)^{2-d} + O(n^{-d}) \\
 &= \frac{2}{d-2} n^{2-d} + 2n^{1-d} \delta + (d-1)n^{-d} \delta^2 + o(n^{-d+1/2}).
 \end{aligned}$$

Si $d = 2$, par (2) et par symétrie,

$$\begin{aligned}
 G_n(O, z) = G_n(z, O) &= \mathbb{E}^z \{ a(S(\xi_n), O) \} - a(z, O) \\
 &= \mathbb{E}^z \{ a(S(\xi_n)) \} - a(z).
 \end{aligned} \tag{7}$$

Nous pouvons alors estimer la partie droite de cette égalité, car $b(z, n, 2)$ est de nouveau fini (Lemme 2.5).

$$\begin{aligned}
 \omega_2^O \mathbb{E}^z \{ a(S(\xi_n)) \} &= 2\mathbb{E}^z \{ \ln(\|S(\xi_n)\|) + C_0 + O(\|S(\xi_n)\|^{-2}) \} \\
 &= 2\mathbb{E}^z \{ \ln n + C_0 + n^{-1}(\|S(\xi_n)\| - n) \} + O(n^{-2}) \\
 &= 2 \ln n + 2C_0 + 2b(z, n)n^{-1} + O(n^{-2}), \\
 \omega_2^O a(z) &= 2 \ln(n - \delta) + 2C_0 + O(n^{-2}) \\
 &= 2 \ln n + 2C_0 - 2n^{-1} \delta - n^{-2} \delta^2 + o(n^{-3/2}).
 \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement le résultat correspondant au cas III. Considérons maintenant les cas I et II. Si la marche aléatoire est encore symétrique, pour $d \geq 2$, le calcul précédent reste le même avec une précision moindre, et pour $d = 1$,

$$\begin{aligned}\omega_1^0 \mathbb{E}^z \{a(S(\xi_n))\} &= 2\mathbb{E}^z \{\|S(\xi_n)\| + O(1)\} \\ &= 2n + 2\mathbb{E}^z \{(\|S(\xi_n)\| - n) + O(1)\} = 2n + O(1), \\ \omega_1^0 a(z) &= 2n - 2\delta + O(1).\end{aligned}$$

Alors, comme (7) reste vrai, nous retrouvons le résultat.

Si la marche aléatoire n'est pas symétrique, nous remarquons tout d'abord que la marche aléatoire renversée \tilde{S} , de matrice de transition tP , possède la même matrice de covariance que S . Ainsi, la norme et les boules $B(n)$ définies plus haut, sont les mêmes pour ces deux marches aléatoires. Nous avons alors

$$G_n(x, y) = \tilde{G}_n(y, x),$$

où \tilde{G} désigne la fonction de Green associée à la marche aléatoire renversée \tilde{S} . Dans les cas I et II, les estimations de la fonction de Green et du noyau potentiel ne supposent pas la symétrie de la marche aléatoire. Ainsi, pour $d \geq 3$,

$$\begin{aligned}G_n(O, z) = \tilde{G}_n(z, O) &= \tilde{G}(z, O) - \mathbb{E}^z \{ \tilde{G}(\tilde{S}(\xi_n), O) \} \\ &= G(z) - \mathbb{E}^z \{ G(\tilde{S}(\xi_n)) \}.\end{aligned}$$

De même, pour $d \leq 2$,

$$G_n(O, z) = \mathbb{E}^z \{ a(\tilde{S}(\xi_n)) \} - a(z).$$

Les calculs précédents restent alors vrais dans le cas centré non-symétrique. Seule la précision des développements asymptotiques change. \square

Remarque 2.7. – Dorénavant, nous nous placerons toujours dans le cas symétrique, pour simplifier les calculs. Le cas non-symétrique se traitera de la même façon par comparaison avec la marche aléatoire renversée.

LEMME 2.8. – *Cas I, II. Pour $z \in D_\varepsilon^i(n)$ ($i = 1, 2$), soit $\delta = n - \|z\|$, alors*

$$\mathbb{E}^z(\xi_n) = 2n\delta - \delta^2 + O(n).$$

Cas III. Pour $z \in D_\varepsilon^3(n)$, soit $\delta = n - \|z\|$, alors

$$\mathbb{E}^z(\xi_n) = 2n\delta + 2b(z, n)n - \delta^2 + O(1).$$

Démonstration. – En réalité, le résultat pour le cas III est vrai dans les cas I et II. Néanmoins, comme nous voulons comparer ce lemme au lemme 2.6, nous séparons son énoncé en deux parties.

Soient $M_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \|S(n)\|^2 - n$ une chaîne de Markov sur \mathbb{R} , et \mathcal{F}_n la filtration des informations jusqu'à l'instant n

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\{M_{n+1}|\mathcal{F}_n\} &= \mathbb{E}\{\|S(n+1)\|^2 - n - 1|S(n)\} \\
 &= \mathbb{E}\{\|S(n) + X_{n+1}\|^2|S(n)\} - n - 1 \\
 &= \|S(n)\|^2 + \mathbb{E}\{2d^{-1}S(n)^t Q^{-1}X_{n+1} + \|X_{n+1}\|^2|S(n)\} - n - 1 \\
 &= M_n + 2d^{-1}S(n)^t Q^{-1}\mathbb{E}\{X_{n+1}\} + \mathbb{E}\{\|X_{n+1}\|^2\} - 1 \\
 &= M_n + \mathbb{E}\{\|X_{n+1}\|^2\} - 1.
 \end{aligned}$$

Mais, X_{n+1} a la même distribution de probabilité que X . Donc, si nous notons Q_{ij} et $(Q^{-1})_{ij}$ les éléments des matrices Q et Q^{-1} ,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\{\|X\|^2\} &= d^{-1}\mathbb{E}\{X^t Q^{-1}X\} \\
 &= d^{-1} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} x^t Q^{-1}x p(x) = d^{-1} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \sum_{i,j} (Q^{-1})_{ij} x_i x_j p(x) \\
 &= d^{-1} \sum_{i,j} (Q^{-1})_{ij} Q_{ij} = d^{-1} \text{Tr}(Q^{-1}Q) = 1.
 \end{aligned}$$

Alors M_n est une martingale. Si nous considérons une marche aléatoire issue de z , alors, par le théorème d'arrêt [2, Th. 5.10],

$$\mathbb{E}^z\{M_{\xi_n}\} = \mathbb{E}^z\{M_0\}.$$

Donc $\mathbb{E}^z\{\xi_n\} = \mathbb{E}^z\{\|S(\xi_n)\|^2\} - \|z\|^2$, et nous estimons les deux termes de la partie droite, grâce au lemme 2.5 pour $q = 2$.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}^z\{\|S(\xi_n)\|^2\} &= \mathbb{E}^z\{n^2 + 2n(\|S(\xi_n)\| - n) + (\|S(\xi_n)\| - n)^2\} \\
 &= n^2 + 2b(z, n)n + O(1),
 \end{aligned}$$

et,

$$\|z\|^2 = (n - \delta)^2 = n^2 - 2n\delta + \delta^2. \quad \square$$

Maintenant, nous laissons les particules courir, même après avoir atteint le point où elles augmentent le nuage précédent. La $j^{\text{ème}}$ particule est associée à la marche aléatoire $S^j(k)$ issue de O , et nous définissons :

$$\begin{aligned}
 \xi_n^j &\stackrel{\text{déf.}}{=} \inf\{k > 0: S^j(k) \notin B(n)\} \quad \text{instant de sortie de } B(n), \\
 \sigma^j &\stackrel{\text{déf.}}{=} \inf\{k \geq 0: S^j(k) \notin A(j-1)\} \quad \text{instant d'augmentation du nuage,} \\
 \tau_z^j &\stackrel{\text{déf.}}{=} \inf\{k > 0: S^j(k) = z\} \quad \text{temps d'atteinte de } z.
 \end{aligned}$$

Sans l'exposant j , ces temps d'arrêt font référence à une marche aléatoire générique issue de O . De plus, $\xi_n^y, \sigma^y, \tau_z^y$ font référence à une marche aléatoire issue de y .

En écrivant $m = m(n) \stackrel{\text{déf.}}{=} [\omega_n^Q n^d]$, nous notons

$$N = N(n, z) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{j=1}^m \mathbb{1}\{\tau_z^j < (\sigma^j \wedge \xi_n^j)\}$$

= # parmi les m premières marches qui visitent z avant d'augmenter le nuage ou de quitter $B(n)$,

$$M = M(n, z) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{j=1}^m \mathbb{1}\{\tau_z^j < \xi_n^j\}$$

= # parmi les m premières marches qui visitent z avant de quitter $B(n)$,

$$L = L(n, z) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{j=1}^m \mathbb{1}\{\sigma^j \leq \tau_z^j < \xi_n^j\}$$

= # parmi les m premières marches qui visitent z après avoir augmenté le nuage et avant de quitter $B(n)$.

Notons que $N \geq M - L$ et $\{z \notin A(m)\} \subset \{N = 0\}$. Donc, pour tout $a > 0$,

$$\mathbf{P}\{z \notin A(m)\} \leq \mathbf{P}\{N = 0\} \leq \mathbf{P}\{M \leq a\} + \mathbf{P}\{L \geq a\}.$$

Pour estimer la partie droite, nous aurons besoin de calculer les espérances de M et L . Les termes de la somme de L ne sont pas i.i.d., mais seulement les particules telles que $\sigma^j < \xi_n^j$ contribuent à cette somme. De plus, pour chaque $y \in B(n)$, il y a, au plus, un j tel que $S^j(\sigma^j) = y$. Donc,

$$L \leq \sum_{y \in B(n)} \mathbb{1}^y\{\tau_z^y < \xi_n^y\} \stackrel{\text{déf.}}{=} \tilde{L},$$

et ainsi,

$$\mathbf{P}\{z \notin A(m)\} \leq \mathbf{P}\{M \leq a\} + \mathbf{P}\{\tilde{L} \geq a\}. \quad (8)$$

Maintenant, les termes de la somme de \tilde{L} sont i.i.d., donc

$$\mathbb{E}\{\tilde{L}\} = \sum_{y \in B(n)} \mathbf{P}^y\{\tau_z < \xi_n\}.$$

De même, les termes de la somme dans la définition de M sont i.i.d., donc, pour tout z dans $D_\varepsilon^i(n)$,

$$G_n(z, z)\mathbb{E}\{M\} = mG_n(z, z)\mathbf{P}\{\tau_z < \xi_n\} = mG_n(O, z).$$

Alors, par le lemme 2.6, dans tous les cas,

$$\mathbb{E}\{M\} = [G_n(z, z)]^{-1}(2n\delta + O(n)). \quad (9)$$

Et, pour tout z dans $D_\varepsilon^i(n)$,

$$G_n(z, z)\mathbb{E}\{\tilde{L}\} = \sum_{y \in B(n)} \mathbf{P}^y\{\tau_z < \xi_n\}G_n(z, z) = \sum_{y \in B(n)} G_n(y, z) = \sum_{y \in B(n)} G_n(z, y) = \mathbb{E}^z\{\xi_n\}.$$

Alors, par le lemme 2.8, dans tous les cas,

$$\mathbb{E}\{\tilde{L}\} = [G_n(z, z)]^{-1}(2n\delta + O(n)). \quad (10)$$

Si nous combinons les lemmes 2.6 et 2.8, nous obtenons pour ε suffisamment petit, puis n assez grand

Cas I :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{M\} - \mathbb{E}\{\tilde{L}\} &= [G_n(z, z)]^{-1}(\delta^2 + O(n)) \\
&\geq [G_n(z, z)]^{-1}(\delta^2/2 + (1/2)\varepsilon^2 n(\ln n)^2 + O(n)) \\
&\geq [G_n(z, z)]^{-1}\delta^2/2.
\end{aligned} \tag{11}$$

Cas II :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{M\} - \mathbb{E}\{\tilde{L}\} &= [G_n(z, z)]^{-1}(\delta^2 + (d-1)\delta^2 + O(n)) \\
&\geq [G_n(z, z)]^{-1}(\delta^2 + (d-1)(1/\varepsilon)^2 n + O(n)) \\
&\geq [G_n(z, z)]^{-1}\delta^2.
\end{aligned} \tag{12}$$

Cas III :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{M\} - \mathbb{E}\{\tilde{L}\} &= [G_n(z, z)]^{-1}(\delta^2 + (d-1)\delta^2 + o(n^{1/2})) \\
&\geq [G_n(z, z)]^{-1}(\delta^2 + (d-1)\varepsilon^2 n^{2/3} + o(n^{1/2})) \\
&\geq [G_n(z, z)]^{-1}\delta^2.
\end{aligned} \tag{13}$$

Pour $d \geq 3$, il existe une constante c telle que

$$G_n(z, z) \leq G(z, z) \leq c. \tag{14}$$

Pour $d = 2$, par définition de la fonction de Green stoppée, et par homogénéité,

$$G_n(z, z) \leq G_{2n}(O, O) = \mathbb{E}\{a(S(\xi_{2n}))\} \leq c \ln n. \tag{15}$$

Pour $d = 1$, nous avons le lemme suivant

LEMME 2.9. – Pour $d = 1$, soit z tel que $\|z\| = n - \delta$ avec $n^{1/2}/\delta = o(1)$. Alors

$$G_n(z, z) \leq c\delta(n). \tag{16}$$

Démonstration. – Nous pouvons supposer $z > 0$, alors $\|z\| = z/\sigma$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
G_n(z, z) &= \mathbb{E}^z\{a(S(\xi_n), z)\} \\
&= \mathbb{E}^z\{a(S(\xi_n), z)\mathbb{1}\{S(\xi_n) < -\sigma n\}\} + \mathbb{E}^z\{a(S(\xi_n), z)\mathbb{1}\{S(\xi_n) > \sigma n\}\} \\
&\leq c\mathbb{E}^z\{(z - S(\xi_n))/\sigma\mathbb{1}\{S(\xi_n) < -\sigma n\}\} \\
&\quad + c\mathbb{E}^z\{(S(\xi_n) - z)/\sigma\mathbb{1}\{S(\xi_n) > \sigma n\}\} + C \\
&\leq c\mathbb{E}^z\{(\|S(\xi_n)\| - n)\mathbb{1}\{S(\xi_n) < -\sigma n\}\} \\
&\quad + c\mathbb{E}^z\{(\|S(\xi_n)\| - n)\mathbb{1}\{S(\xi_n) > \sigma n\}\} + 2cn\mathbf{P}^z\{S(\xi_n) < -\sigma n\} + c\delta \\
&= 2cn\mathbf{P}^z\{S(\xi_n) < -\sigma n\} + c\delta + O(1).
\end{aligned}$$

La dernière égalité vient du lemme 2.5 pour $q = 1$.

Nous définissons alors, la suite $h_i(n) \stackrel{\text{déf.}}{=} (2 + n/\delta^2)^i \delta \sigma$ de $i = 0$ à I tel que

$$h_I(n) \leq 2n\sigma < h_{I+1}(n).$$

Nous remarquons que $\sigma n - h_0(n) = z$. Dans la suite, nous confondrons $h_i(n)$ et sa partie entière. Nous vérifions facilement qu'il existe une constante c telle que, pour n assez grand

$$c \ln(2n/\delta) \leq I \leq \frac{\ln(2n/\delta)}{\ln 2}.$$

D'après [7, Prop. 4.3], si la marche aléatoire possède trois moments, alors

$$\mathbf{P}\{S(\xi_k) < -\sigma k\} = 1/2 + O(1/k)$$

quand k tend vers l'infini. Notons σ_i le temps de sortie de l'intervalle $[n - 2h_i(n), n]$. Alors,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}^z\{S(\xi_n) < -\sigma n\} \\ &= \mathbf{P}^{\sigma n - h_0(n)}\{S(\sigma_0) < \sigma n - 2h_0(n), S(\xi_n) < -\sigma n\} \\ &= \mathbf{P}^{\sigma n - h_0(n)}\{\sigma n - h_1(n) \leq S(\sigma_0) < \sigma n - 2h_0(n), S(\xi_n) < -\sigma n\} \\ &\quad + \mathbf{P}^{\sigma n - h_0(n)}\{S(\sigma_0) < \sigma n - h_1(n), S(\xi_n) < -\sigma n\} \\ &\leq \mathbf{P}^{\sigma n - h_0(n)}\{S(\xi_n) < -\sigma n \mid \sigma n - h_1(n) \leq S(\sigma_0) < \sigma n - 2h_0(n)\} \\ &\quad \times \mathbf{P}^{\sigma n - h_0(n)}\{S(\sigma_0) < \sigma n - 2h_0(n)\} + \mathbf{P}^{\sigma n - h_0(n)}\{\sigma n - S(\sigma_0) > h_1(n)\} \\ &\leq \mathbf{P}^{\sigma n - h_1(n)}\{S(\xi_n) < -\sigma n\} \mathbf{P}^{\sigma n - h_0(n)}\{S(\sigma_0) < \sigma n - 2h_0(n)\} \\ &\quad + \mathbf{P}\{|S(\xi_{h_0(n)\sigma^{-1}})| > h_1(n) - h_0(n)\} \\ &\leq [1/2 + O(h_0^{-1}(n))] \mathbf{P}^{\sigma n - h_1(n)}\{S(\xi_n) < -\sigma n\} + c[h_1(n) - 2h_0(n)]^{-1}. \end{aligned}$$

En itérant ce calcul jusqu'à $I - 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^z\{S(\xi_n) < -\sigma n\} &\leq [1/2 + O(h_I^{-1}(n))]^I \mathbf{P}^{\sigma n - h_I(n)}\{S(\xi_n) < -\sigma n\} \\ &\quad + c \sum_{i=0}^{I-1} [1/2 + O(h_i^{-1}(n))]^i [h_{i+1}(n) - 2h_i(n)]^{-1} \\ &\leq \exp\left(\frac{\ln(2n/\delta)}{\ln 2} \ln[1/2 + O(h_I^{-1}(n))]\right) \\ &\quad + \frac{c\delta}{\sigma n} \sum_{i=0}^{I-1} [1/2 + O(h_i^{-1}(n))]^i [2 + o(1)]^{-i}. \end{aligned}$$

La somme se majore simplement par la somme partielle d'une série géométrique convergente. De plus, comme $O(h_I^{-1}(n)) \leq c/n$, nous avons

$$\exp\left(\frac{\ln(2n/\delta)}{\ln 2} \ln[1/2 + O(h_I^{-1}(n))]\right) \leq \frac{\delta}{2n} \exp\left(\frac{c \ln(2n/\delta)}{n}\right) \leq \frac{c\delta}{n}.$$

Finalement,

$$\mathbf{P}^z\{S(\xi_n) < -n\} \leq \frac{c\delta}{n}$$

donne le lemme. \square

En appliquant ce lemme pour $z \in D_\varepsilon^1(n)$, nous obtenons

$$G_n(z, z) \leq c(\varepsilon)n^{1/2} \ln n. \quad (17)$$

Nous utilisons enfin un résultat de grandes déviations :

THÉORÈME 2.10 ([14, Lemma 4]). – Soient \mathcal{S} une somme de k fonctions indicatrices indépendantes, et $\mu = \mathbb{E}\{\mathcal{S}\}$. Alors, pour tout k suffisamment grand, et tout $\lambda \in]0, 1/4[$,

$$\mathbf{P}\{|\mathcal{S} - \mu| \geq \mu^{1/2+\lambda}\} \leq 2 \exp\left(-\frac{1}{4}\mu^{2\lambda}\right).$$

Nous appliquons ce théorème à M et \tilde{L} , en choisissant λ tel que $\mathbb{E}\{M\}^\lambda = (\ln n)^{3/4}$, puis tel que $\mathbb{E}\{\tilde{L}\}^\lambda = (\ln n)^{3/4}$. La partie droite devient

$$\gamma_n \stackrel{\text{déf.}}{=} 2n^{(-1/4)(\ln n)^{1/2}} \xrightarrow{r} 0.$$

Pour le cas I, $\delta \in [\varepsilon n^{1/2} \ln n, 2\varepsilon n^{1/2} \ln n]$. Par (9) et (10),

$$(\ln n)^{3/4} [\mathbb{E}\{M\}^{1/2} + \mathbb{E}\{\tilde{L}\}^{1/2}] \leq c(\varepsilon)n^{3/4}(\ln n)^{5/4}[G_n(z, z)]^{-1/2},$$

et si nous combinons (11) avec (17) pour $d = 1$, nous obtenons

$$\mathbb{E}\{M\} - \mathbb{E}\{\tilde{L}\} \geq c(\varepsilon)n(\ln n)^2[G_n(z, z)]^{-1} \geq c'(\varepsilon)n^{3/4}(\ln n)^{3/2}[G_n(z, z)]^{-1/2}.$$

Pour le cas II, $\delta \in [(1/\varepsilon)n^{1/2}, (2/\varepsilon)n^{1/2}]$. Par (9) et (10),

$$(\ln n)^{3/4} [\mathbb{E}\{M\}^{1/2} + \mathbb{E}\{\tilde{L}\}^{1/2}] \leq c(\varepsilon)n^{3/4}(\ln n)^{3/4}[G_n(z, z)]^{-1/2},$$

et si nous combinons (12) avec (14) pour $d \geq 3$ et avec (15) pour $d = 2$, nous obtenons

$$\mathbb{E}\{M\} - \mathbb{E}\{\tilde{L}\} \geq c(\varepsilon)n[G_n(z, z)]^{-1} \geq c'(\varepsilon)n(\ln n)^{-1/2}[G_n(z, z)]^{-1/2}.$$

Pour le cas III, $\delta \in [\varepsilon n^{1/3} \ln n, 2\varepsilon n^{1/3} \ln n]$. Par (9) et (10),

$$(\ln n)^{3/4} [\mathbb{E}\{M\}^{1/2} + \mathbb{E}\{\tilde{L}\}^{1/2}] \leq c(\varepsilon)n^{2/3}(\ln n)^{5/4}[G_n(z, z)]^{-1/2},$$

et si nous combinons (13) avec (14) pour $d \geq 3$ et avec (15) pour $d = 2$, nous obtenons

$$\mathbb{E}\{M\} - \mathbb{E}\{\tilde{L}\} \geq c(\varepsilon)n^{2/3}(\ln n)^2[G_n(z, z)]^{-1} \geq c'(\varepsilon)n^{2/3}(\ln n)^{3/2}[G_n(z, z)]^{-1/2}.$$

Ainsi, dans tous les cas, pour n assez grand,

$$\mathbb{E}\{M\} - \mathbb{E}\{\tilde{L}\} \geq 2(\ln n)^{3/4} [\mathbb{E}\{M\}^{1/2} + \mathbb{E}\{\tilde{L}\}^{1/2}].$$

Si nous prenons $a = \mathbb{E}\{M\} - (\ln n)^{3/4} [\mathbb{E}\{M\}^{1/2} + \mathbb{E}\{\tilde{L}\}^{1/2}]$ dans (8), nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{M \leq a\} &= \mathbf{P}\{\mathbb{E}\{M\} - M \geq (\ln n)^{3/4}[\mathbb{E}\{M\}^{1/2} + \mathbb{E}\{\tilde{L}\}^{1/2}]\} \\ &\leq \mathbf{P}\{|M - \mathbb{E}\{M\}| \geq (\ln n)^{3/4}\mathbb{E}\{M\}^{1/2}\} \leq \gamma_n, \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\tilde{L} \geq a\} &= \mathbf{P}\{\tilde{L} - \mathbb{E}\{\tilde{L}\} \geq \mathbb{E}\{M\} - \mathbb{E}\{\tilde{L}\} - (\ln n)^{3/4}[\mathbb{E}\{M\}^{1/2} + \mathbb{E}\{\tilde{L}\}^{1/2}]\} \\ &\leq \mathbf{P}\{|\tilde{L} - \mathbb{E}\{\tilde{L}\}| \geq (\ln n)^{3/4}\mathbb{E}\{\tilde{L}\}^{1/2}\} \leq \gamma_n. \end{aligned}$$

Via (8), cela termine la démonstration de (3) et donc de la partie du théorème 2.3 concernant l’erreur interne.

2.2. Erreur externe

Dans cette partie, nous prouvons la partie externe du théorème 2.3. Grâce au résultat sur l’erreur interne, une forte proportion des $[\omega_d n^d]$ particules ne vont pas intervenir dans l’erreur externe car elles augmentent le nuage avant de sortir de $B(n)$ (via une modification du modèle définie ci-dessous). Ensuite, nous découpons $B^c(n)$ en couronnes concentriques dont la largeur dépend des moments de la marche aléatoire, de manière à pouvoir supposer qu’aucune particule ne saute par-dessus une couronne, pendant un temps assez long (voir l’événement $\mathcal{E}(n)$). Ainsi, on étudie la décroissance de la densité de particules sur ces couronnes grâce à un contrôle de la répartition spatiale sur celles-ci.

Nous commençons par des notations qui nous permettrons, dans la suite, de raisonner le plus possible sans tenir compte des cas I, II, et III. Soit $\phi \stackrel{\text{déf.}}{=} 1/2$ pour les cas I et II, et $\phi \stackrel{\text{déf.}}{=} 1/3$ pour le cas III, et soit $\delta \stackrel{\text{déf.}}{=} \varepsilon n^\phi \ln n$ dans les cas I et III et $\delta \stackrel{\text{déf.}}{=} (1/\varepsilon)n^\phi$ dans le cas II. Enfin, nous noterons $r \stackrel{\text{déf.}}{=} n - \delta$.

Pour $s \geq -1$ et $t \geq -n^{-\psi}\delta$, nous définissons des couronnes de largeur n^ϕ et n^ψ . Suivant le cas considéré, nous prenons ψ dans l’intervalle correspondant aux hypothèses du théorème 2.3.

$$\begin{aligned} \partial^\phi B(s) &\stackrel{\text{déf.}}{=} B(n + (s + 1)n^\phi) \setminus B(n + sn^\phi), \\ \partial^\psi B(t) &\stackrel{\text{déf.}}{=} B(n + (t + 1)n^\psi) \setminus B(n + tn^\psi). \end{aligned}$$

Soit T_i^j le premier instant où la $j^{\text{ème}}$ marche aléatoire quitte $B(n + tn^\psi)$. Si cette marche aléatoire augmente le nuage avant d’atteindre $B(n + tn^\psi)$, ce temps est dit infini. Rappelons que $m = [\omega_d^Q n^d]$. Nous supposons d’abord que l’événement suivant $\mathcal{E}(n)$ arrive, presque sûrement, pour tout n assez grand, et nous verrons à la fin de cette sous-section que les conditions de moment du théorème 2.3 sont suffisantes pour faire cette hypothèse.

$$\mathcal{E}(n) \stackrel{\text{déf.}}{=} \{\forall 1 \leq j \leq m \text{ et } -n^{-\psi}\delta \leq t \leq n^\psi\delta(\ln n)^2, S(T_i^j) \in \partial^\psi B(t)\}.$$

Cela signifie qu’aucune particule ne saute par dessus une couronne $\partial^\psi B(t)$ au premier instant où elle sort de $B(n + tn^\psi)$.

Nous considérons une construction différente de l’“ALD” interne. Nous laissons les j premières particules marcher jusqu’à ce qu’elles augmentent le nuage ou atteignent

$\partial^\phi B(0)$. Ensuite, nous redémarrons les particules qui n’ont pas augmenté le nuage, et nous les laissons marcher jusqu’à ce qu’elles l’augmentent ou atteignent $\partial^\phi B(1)$. Nous continuons ce processus avec les couronnes $\partial^\phi B(s)$ jusqu’à ce que toutes les particules aient augmenté le nuage.

Ce modèle peut paraître légèrement différent de l’“ALD” interne, car il peut arriver qu’une particule S^i stoppée sur $\partial^\phi B(0)$ ait, dans le modèle initial, augmenté le nuage à l’intérieur de $B(n)$ en un point z . Alors, cet “espace libre” peut être pris par une particule S^k ($k > i$). Si c’est le cas, quand S^i repart et finalement atteint z , nous arrêtons S^i et redémarrons S^k . Ainsi, comme tous les S^j sont indépendants, nous obtenons le même nuage. Voir [14, Sect. 6] pour plus de détails.

Nous notons $A_s(j)$ ($s \geq 0$) le nuage obtenu par ce nouveau modèle avec j particules, lorsque celles qui n’ont pas augmenté le nuage, sont stoppées sur $\partial^\phi B(s)$. Nous voyons facilement que

$$A_s(j) \subset A_s(j + 1), \quad A_s(j) \subset A_{s+1}(j), \quad \text{et} \quad A(m) = \lim_{s \rightarrow \infty} A_s(m).$$

Nous notons σ^j l’instant d’augmentation du nuage pour la $j^{\text{ème}}$ particule dans ce modèle avec m particules. Dorénavant, l’indice s fera toujours référence à $\partial^\phi B(s)$, sauf lorsque $s = 0$ où nous pourrons garder n par souci de clarté.

Soient $s \geq 0$ et $z \in \partial^\phi B(s)$. Nous définissons alors

$$M(s, n, z) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{j=1}^m \mathbb{1}\{S^j(\xi_s^j) = z\},$$

$$L(s, n, z) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{j=1}^m \mathbb{1}\{S^j(\xi_s^j) = z, \xi_s^j > \sigma^j\},$$

$$\tilde{L}(s, n, z) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{y \in B(r)} \mathbb{1}\{S^y(\xi_s^y) = z\},$$

$$W(s, n, z) \stackrel{\text{déf.}}{=} M(s, n, z) - L(s, n, z)$$

$$= \# \text{ de particules qui atteignent } \partial^\phi B(s) \text{ en } z \text{ avant d’augmenter le nuage.}$$

Pour $U \subset \mathbb{Z}^d$, nous écrivons

$$W(s, n, U) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{z \in U \cap \partial^\phi B(s)} W(s, n, z), \quad \text{et} \quad W(s, n) \stackrel{\text{déf.}}{=} W(s, n, \partial^\phi B(s)),$$

et de même pour M, L et \tilde{L} .

$$\begin{aligned} \{B(r) \subset A_0(m)\} &\subset \{\forall y \in B(r), \exists j(y) \text{ t.q. } S^{j(y)}(\sigma^{j(y)}) = y \text{ et } \xi_s^{j(y)} > \sigma^{j(y)}\} \\ &\subset \{\forall s \geq 0, \forall z \in \partial^\phi B(s), L(s, n, z) \geq (\# \text{ parmi les particules} \\ &\quad \text{d’indice } j(y)(y \in B(r)) \text{ t.q. } S^{j(y)}(\xi_s^{j(y)}) = z \text{ et} \\ &\quad \xi_s^{j(y)} > \sigma^{j(y)}) \geq \tilde{L}(s, n, z)\} \\ &= \{\forall s \geq 0, \forall z \in \partial^\phi B(s), L(s, n, z) \geq \tilde{L}(s, n, z)\}. \end{aligned}$$

Et, si nous réécrivons la démonstration de l'erreur interne, nous obtenons qu'avec probabilité 1, quand $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\exists s \geq 0 \text{ et } z \in \partial^\phi B(s), \text{ t.q. } \tilde{L}(s, n, z) > L(s, n, z)\} \\ & \leq \mathbf{P}\{B(r) \not\subset A_0(m)\} \xrightarrow{r} 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Nous remarquons que $W(s, n)$ est le nombre de particules qui atteignent la couronne $\partial^\phi B(s)$ avant d'augmenter le nuage. Alors,

$$|A(m) \cap B^c(n + sn^\phi)| \leq W(s, n). \quad (19)$$

Nous voulons démontrer qu'il existe une suite $\gamma_n \xrightarrow{r} 0$ telle que, pour tout s , pour $d \geq 2$

$$\text{Cas II, } \mathbb{E}\{W(s, n)\} \leq (1 - cn^{-2\psi})\mathbb{E}\{W(s-1, n)\} + \gamma_n, \quad (20)$$

$$\text{Cas III, } \mathbb{E}\{W(s, n)\} \leq (1 - cn^{-2\psi}(\ln n)^{-1})\mathbb{E}\{W(s-1, n)\} + \gamma_n, \quad (21)$$

et pour $d = 1$

$$\mathbb{E}\{W(s, n)\} \leq (1 - cn^{-\psi}(\ln n)^{-2})\mathbb{E}\{W(s-1, n)\} + \gamma_n. \quad (22)$$

Pour $d \geq 2$, dans le cas III, si nous itérons l'inégalité (21) de $s = 1$ jusqu'à $n^{2\psi}(\ln n)^3$, nous obtenons pour n assez grand

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\{W(n + \varepsilon n^{2\psi+1/3}(\ln n)^3, n)\} \\ & \leq (1 - cn^{-2\psi}(\ln n)^{-1})^{n^{2\psi}(\ln n)^3} \mathbb{E}\{W(n, n)\} + \gamma'_n \\ & \leq cn^{-\ln n} n^d + \gamma'_n = \gamma''_n, \end{aligned}$$

où γ'_n et γ''_n sont encore des suites qui tendent rapidement vers 0. En effet, γ'_n est construite en multipliant γ_n par rien de plus grand que des polynômes, et $n^{-\ln n}$ tend rapidement vers 0. Donc, comme pour l'erreur interne, (19) et le lemme de Borel–Cantelli donne le résultat. De même pour le cas II, (20) entraîne

$$\mathbb{E}\{W(n + \varepsilon n^{2\psi+1/2}(\ln n)^2, n)\} \leq \gamma''_n,$$

et pour $d = 1$, (22) entraîne

$$\mathbb{E}\{W(n + \varepsilon n^{\psi+1/2}(\ln n)^3, n)\} \leq \gamma''_n.$$

Maintenant, nous allons prouver (21) et (22). La démonstration de (20) est la même que celle de (21) avec une autre définition du δ et la remarque 2.7 lorsque la marche aléatoire n'est pas symétrique.

Comme dans [13], nous obtenons le lemme suivant.

LEMME 2.11 ([13, Lemma 7]). – Soit $x \in B(n - (\varepsilon/2)n^\phi \ln n) \setminus B(r)$. Pour tout $s \geq 0$,

$$\omega_d^Q n^d G_s(x, O) = \sum_{y \in B(r)} G_s(x, y) [1 + O(n^{\phi-1} \ln n)],$$

où la fonction $O(n^{\phi-1} \ln n)$ est bornée uniformément en x et s .

LEMME 2.12. – Pour tout $s \geq 0$, $\mathbb{E}\{M(s, n, z)\} = \mathbb{E}\{\tilde{L}(s, n, z)\}[1 + O(n^{\phi-1} \ln n)]$.

Démonstration. – Nous définissons $\tau_r \stackrel{\text{déf.}}{=} \inf\{k \geq 1: S(k) \in B(r)\}$ et $\tau_r \stackrel{\text{déf.}}{=} \infty$ si $B(r)$ n’est jamais atteint. Par $\mathcal{E}(n)$, une particule partant de $x \in B(r)$ doit passer par $B(n - (\varepsilon/2)n^\phi \ln n) \setminus B(r)$ avant d’atteindre $\partial^\phi B(s)$. Nous pouvons alors faire une décomposition de dernière sortie, voir [12, Lemma 2.1.1].

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^x\{S(\xi_s) = z\} &= \sum_{y \in B(n - (\varepsilon/2)n^\phi \ln n) \setminus B(r)} G_s(x, y) \mathbf{P}^y\{S(\xi_s \wedge \tau_r) = z\} \\ &= \sum_{y \in B(n - (\varepsilon/2)n^\phi \ln n) \setminus B(r)} G_s(x, y) \mathbf{P}^z\{S(\xi_s \wedge \tau_r) = y\} \\ &= \mathbf{P}^z\{\tau_r < \xi_s\} \mathbb{E}^z\{G_s(S(\tau_r), x) | \tau_r < \xi_s\}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{M(s, n, z)\} &= \mathbf{P}^z\{\tau_r < \xi_s\} (\omega_d^O n^d) \mathbb{E}^z\{G_s(S(\tau_r), O) | \tau_r < \xi_s\}, \\ \mathbb{E}\{\tilde{L}(s, n, z)\} &= \mathbf{P}^z\{\tau_r < \xi_s\} \mathbb{E}^z\left\{ \sum_{y \in B(r)} G_s(S(\tau_r), y) \middle| \tau_r < \xi_s \right\}, \end{aligned}$$

et le résultat se déduit du lemme 2.11. \square

LEMME 2.13. – Si $d \geq 2$, alors il existe une constante c telle que, pour tout $0 \leq s \leq n$ et tout $z \in \partial^\phi B(s)$,

$$\mathbf{P}\{S(\xi_s) = z\} \leq cn^{1+\psi-d}.$$

Démonstration. – Nous nous restreignons au cas où $\mathbf{P}\{S(\xi_s) = z\} > 0$. Par $\mathcal{E}(n)$ la marche aléatoire ne peut atteindre z qu’en passant par $\partial^\psi B(t - 1)$ avec t tel que $tn^\psi \leq sn^\phi < (t + 1)n^\psi$. Soit

$$\mu_s \stackrel{\text{déf.}}{=} \inf\{k \geq 1: S(k) \in \{O\} \cup \partial^\phi B(s)\}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S(\xi_s) = z\} &\leq \sup_{y \in \partial^\psi B(t-1)} \mathbf{P}^y\{S(\mu_s) = O\} \\ &= \sup_{y \in \partial^\psi B(t-1)} G_s(y, O)[G_s(O, O)]^{-1} \leq cn^{1+\psi-d}. \end{aligned}$$

La dernière inégalité vient du lemme 2.6 et de $n + sn^\phi - \|y\| \leq 2n^\psi$. \square

Par définition de $M(s, n, z)$ nous avons, pour $d = 1$,

$$\mathbb{E}\{M(s, n, z)\} = \omega_1^O n \mathbf{P}\{S(\xi_s) = z\} \leq \omega_1^O n, \tag{23}$$

et avec le lemme 2.12

$$\mathbb{E}\{M(s, n, z) - \tilde{L}(s, n, z)\} \leq cn^{1/2} \ln n. \tag{24}$$

Pour $d \geq 2$, par le lemme 2.13,

$$\mathbb{E}\{M(s, n, z)\} = \omega_d^O n^d \mathbf{P}\{S(\xi_s) = z\} \leq c \omega_d^O n^{1+\psi}, \tag{25}$$

et avec le lemme 2.12

$$\mathbb{E}\{M(s, n, z) - \tilde{L}(s, n, z)\} \leq cn^{1/3+\psi} \ln n. \tag{26}$$

LEMME 2.14. – Pour $d = 1$, il existe une constante c et une suite $\gamma_n \xrightarrow{r} 0$ telles que, si $s \geq 0$,

$$\mathbf{P}\{W(s, n) \geq cn^{\psi+1/2} \ln n\} \leq \gamma_n.$$

Démonstration. – Soit t tel que $tn^\psi \leq sn^\phi < (t+1)n^\psi$, les points de $\partial^\phi B(s)$ occupés par le nuage $A_s(m)$ sont à l’intérieur de $\partial^\psi B(t) \cup \partial^\psi B(t+1)$. Nous écrivons W pour $W(s, n, \partial^\psi B(t) \cup \partial^\psi B(t+1))$, et de même avec M, L et \tilde{L} . Pour tout a_1, a_2 positif

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{W \geq a_1 + a_2 + \mathbb{E}\{M - \tilde{L}\}\} \\ & \leq \mathbf{P}\{M \geq \mathbb{E}\{M\} + a_1\} + \mathbf{P}\{\tilde{L} \leq \mathbb{E}\{\tilde{L}\} - a_2\} + \mathbf{P}\{\tilde{L} > L\}. \end{aligned}$$

L’inégalité (18) donne $\mathbf{P}\{\tilde{L} > L\} \leq \gamma_n$ pour une suite $\gamma_n \xrightarrow{r} 0$. En prenant $a_1 = \mathbb{E}\{M\}^{1/2} \ln n$, et $a_2 = \mathbb{E}\{\tilde{L}\}^{1/2} \ln n$, le lemme 2.10 entraîne que la partie droite est bornée par une suite $\gamma'_n \xrightarrow{r} 0$. Or, $|\partial^\psi B(t) \cup \partial^\psi B(t+1)| \leq cn^\psi$, donc (23) donne $\mathbb{E}\{M\} \leq cn^{1+\psi}$, et grâce au lemme 2.12, $\mathbb{E}\{\tilde{L}\} \leq c\mathbb{E}\{M\} \leq c'n^{1+\psi}$. Ainsi,

$$a_1 + a_2 = (\ln n) [\mathbb{E}\{M\}^{1/2} + \mathbb{E}\{\tilde{L}\}^{1/2}] \leq cn^{(1+\psi)/2} \ln n,$$

et (24) donne $\mathbb{E}\{M - \tilde{L}\} \leq cn^{\psi+1/2} \ln n$. Donc, finalement

$$\mathbf{P}\{W \geq a_1 + a_2 + \mathbb{E}\{M - \tilde{L}\}\} \geq \mathbf{P}\{W(s, n) \geq c_1 n^{\psi+1/2} \ln n\}. \quad \square$$

De même pour $d \geq 2$, le lemme correspondant est

LEMME 2.15. – Soit $d \geq 2$. Pour toute constante positive C , il existe une constante c et une suite $\gamma_n \xrightarrow{r} 0$ telles que, si $s \geq 0$ et $V \subset \partial^\phi B(s)$ avec $|V| \leq Cn^{\psi+(d-1)/3}$,

$$\mathbf{P}\{W(s, n, V) \geq cn^{2\psi+d/3} \ln n\} \leq \gamma_n.$$

COROLLAIRE 2.16. – Pour $d \geq 2$, il existe une constante c et une suite $\gamma_n \xrightarrow{r} 0$ telles que

$$\mathbf{P}\{W(s, n, B(x, n^{1/3})) \leq cn^{2\psi+d/3} \ln n \text{ pour tout } s \geq 0, x \in \partial^\phi B(s)\} \geq 1 - \gamma_n.$$

Démonstration. – Par $\mathcal{E}(n)$,

$$W(s, n, B(x, n^{1/3})) = W(s, n, B(x, n^{1/3}) \cap [\partial^\psi B(t) \cup \partial^\psi B(t+1)]),$$

avec $tn^\psi \leq sn^\phi < (t+1)n^\psi$. Or $\psi < 1/3$, donc

$$|B(x, n^{1/3}) \cap [\partial^\psi B(t) \cup \partial^\psi B(t+1)]| \leq n^{\psi+(d-1)/3}.$$

Le lemme 2.15 permet alors de conclure. \square

LEMME 2.17. – *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha = \alpha(\varepsilon) > 0$ tel que, si $A \subset B(n)$ avec $|A| \geq \varepsilon n^d$, alors*

$$\mathbf{P}\{\tau_A < \xi_n\} \geq \alpha.$$

Démonstration. – Nous pouvons nous restreindre à n est assez grand. Prenons $u = u(\varepsilon) < 1$ tel que

$$|B(n) \setminus B(un)| \leq \frac{\varepsilon}{2} n^d.$$

Mais $|A| \geq \varepsilon n^d$, donc $|A \cap B(un)| \geq (\varepsilon/2)n^d$. Soit $V \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{k=0}^{\xi_n-1} \mathbb{1}\{S(k) \in A\}$ le nombre de visites en A avant de sortir de $B(n)$. Alors,

$$\mathbb{E}\{V\} = \sum_{y \in A} G_n(O, y) \geq \sum_{y \in A \cap B(un)} G_n(O, y) \geq \frac{\varepsilon}{2} n^d \inf_{y \in B(un)} G_n(O, y).$$

Si nous faisons le même calcul que pour le lemme 2.6, nous obtenons pour $d \geq 3$

$$\omega_d^0 G_n(O, y) = \frac{2}{d-2} (\|y\|^{2-d} - n^{2-d}) + O(\|y\|^{1-d}) \geq c\|y\|^{2-d} \geq c'n^{2-d}.$$

Pour $d = 2$,

$$\omega_2^0 G_n(O, y) = 2(\ln n - \ln \|y\|) + O(\|y\|^{-1}) \geq -2 \ln u + O(\|y\|^{-1}) \geq c.$$

Pour $d = 1$,

$$\omega_1^0 G_n(O, y) = n - \|y\| + O(1) \geq (1-u)n + O(1) \geq cn.$$

Nous prenons $\|y\| \geq M$, avec M assez grand. Nous pourrions faire en sorte que les constantes permettent d’avoir le résultat également pour le nombre fini de cas où $\|y\| < M$. Ainsi

$$\inf_{y \in B(n)} G_n(O, y) \geq cn^{2-d},$$

et donc, $\mathbb{E}\{V\} \geq cn^2$. De plus, par le lemme 2.4, $\mathbb{E}^x\{V\} \leq c'n^2$. Ainsi,

$$\mathbf{P}\{\tau_A < \xi_n\} = \mathbf{P}\{V \geq 1\} = \mathbb{E}\{V\} [\mathbb{E}\{V|V \geq 1\}]^{-1} = \mathbb{E}\{V\} [\mathbb{E}\{\mathbb{E}^{S(\tau_A)}\{V\}\}]^{-1} \geq \alpha. \quad \square$$

Nous avons besoin d’un dernier lemme géométrique.

LEMME 2.18. – *Il existe une constante K telle que pour tout $D > 0$ et $V \subset \mathbb{Z}^d$, il existe un sous-ensemble $\tilde{V} \subset V$ satisfaisant*

- (i) $V \subset \bigcup_{x \in \tilde{V}} B(x, D)$,
- (ii) *Pour tout $y \in \mathbb{Z}^d$, $|B(y, 2D) \cap \tilde{V}| \leq K$.*

Démonstration. – Soit l’anneau $\mathcal{A}(kD/2, (k+1)D/2) \stackrel{\text{déf.}}{=} B(O, (k+1)D/2) \setminus B(O, kD/2)$. Nous pouvons toujours le recouvrir par un nombre fini (b , indépendant de D)

de boules de rayon $D/2$. Nous constituons un ensemble de boules composé d'une part de $B(O, D/2)$ et d'autre part, pour chaque anneau $\mathcal{A}(kD/2, (k+1)D/2)$ ($k \geq 1$), de b boules de rayon $D/2$ permettant de le recouvrir. Nous notons V' l'ensemble des centres de toutes ces boules, et

$$V_1 \stackrel{\text{déf.}}{=} \{x \in V' : B(x, D/2) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Pour chaque $x \in V_1$, fixons un point dans $B(x, D/2) \cap V$ et appelons \tilde{V} l'ensemble de tous ces points. Pour tout $\tilde{y} \in \tilde{V}$, il existe $x \in V_1$ tel que $\tilde{y} \in B(x, D/2) \cap V$, alors $B(\tilde{y}, D) \supset B(x, D/2)$ et donc

$$\bigcup_{\tilde{y} \in \tilde{V}} B(\tilde{y}, D) \supset \bigcup_{x \in V_1} B(x, D/2) \supset V.$$

Comme $\tilde{V} \subset V$, la propriété (i) est vérifiée.

Pour tout $y \in \mathbb{Z}^d$, soit $k(y)$ un entier tel que $y \in \mathcal{A}(k(y)D/2, (k(y)+1)D/2)$, alors

$$B(y, 2D) \subset \mathcal{A}((k(y)-4)D/2, (k(y)+5)D/2).$$

Si $k(y) < 4$, remplacer $k(y) - 4$ par 0. Cet anneau est recouvert par au plus $9b$ boules $B(z, D/2)$ ($z \in V'$). Comme

$$B(z, D/2) \subset \mathcal{A}((k(z)-1)D/2, (k(z)+2)D/2),$$

chaque $B(z, D/2)$ intersecte au plus $3b$ boules $B(t, D/2)$ ($t \in V'$). Donc, $|B(z, D/2) \cap \tilde{V}| \leq 3b$, ce qui donne la propriété (ii) avec $K = 27b^2$. \square

Nous fixons $x \in \partial^\phi B(s)$ et écrivons $U \stackrel{\text{déf.}}{=} B(x, n^\phi)$ et $2U \stackrel{\text{déf.}}{=} B(x, 2n^\phi)$. Géométriquement, il est facile de voir qu'il existe une constante β telle que, pour tout $y \in \partial^\phi B(s) \cap U$, il existe $z \in \partial^\phi B(s)$ tel que $B(z, \beta n^\phi) \subset B(y, n^\phi) \cap U$. Donc,

$$|B(y, n^\phi) \cap U \cap \partial^\phi B(s)| \geq |B(z, \beta n^\phi) \cap \partial^\phi B(s)| \geq 2c_d n^{d\phi}.$$

Ici, c_d est une constante ne dépendant que de la dimension d . Donc, si $|U \cap \partial^\phi B(s) \cap A| < c_d n^{d\phi}$,

$$|B(y, n^\phi) \cap \partial^\phi B(s) \cap A^c| \geq |B(y, n^\phi) \cap U \cap \partial^\phi B(s)| - |U \cap \partial^\phi B(s) \cap A| \geq c_d n^{d\phi}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} |U \cap \partial^\phi B(s) \cap A| < c_d n^{d\phi} &\implies |B(y, n^\phi) \cap \partial^\phi B(s) \cap A^c| \geq c_d n^{d\phi} \\ &\text{pour tout } y \in \partial^\phi B(s) \cap U. \end{aligned} \tag{27}$$

Soit σ^j l'instant d'augmentation du nuage pour la $j^{\text{ème}}$ particule (avec la nouvelle définition du modèle). Soient $Y = Y(s, j, U)$ la fonction indicatrice de l'événement $\{S^j(\xi_s^j) \in U, \sigma^j > \xi_s^j\}$ et $H \stackrel{\text{déf.}}{=} A_{s+1}(j-1)^c \cap B(S^j(\xi_s^j), n^\phi) \cap \partial^\phi B(s)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}\{\xi_s^j < \sigma^j < \xi_{s+1}^j, S^j(\sigma^j) \in 2U\} \\
 & \geq \mathbf{P}\{\sigma^j < \xi_{s+1}^j, S^j(\sigma^j) \in 2U \mid S^j(\xi_s^j) \in U, \xi_s^j < \sigma^j, |H| \geq c_d n^{d\phi}\} \\
 & \quad \times \mathbf{P}\{S^j(\xi_s^j) \in U, \xi_s^j < \sigma^j, |H| \geq c_d n^{d\phi}\} \\
 & \geq \mathbb{E}\{\mathbf{P}^{S^j(\xi_s^j)}\{\tau_H^j < \tau_{(2U)^c}^j\} \mid S^j(\xi_s^j) \in U, \xi_s^j < \sigma^j, |H| \geq c_d n^{d\phi}\} \\
 & \quad \times \mathbb{E}\{Y \mathbb{1}\{|H| \geq c_d n^{d\phi}\}\} \\
 & \geq \alpha \mathbb{E}\{Y \mathbb{1}\{|A_{s+1}(m)^c \cap B(S^j(\xi_s^j), n^\phi) \cap \partial^\phi B(s)| \geq c_d n^{d\phi}\}\} \\
 & \geq \alpha \mathbb{E}\{Y \mathbb{1}\{|A_{s+1}(m) \cap U \cap \partial^\phi B(s)| \leq c_d n^{d\phi}\}\}.
 \end{aligned}$$

L'avant-dernière inégalité vient du lemme 2.17 pour des boules de rayon n^ϕ et du fait que

$$S^j(\xi_s^j) \in U \implies B(S^j(\xi_s^j), n^\phi) \subset 2U.$$

La dernière inégalité vient de (27) et du fait que, sur le support de Y , $S^j(\xi_s^j) \in U \cap \partial^\phi B(s)$. En sommant cette inégalité pour tous les j de 1 à m , nous obtenons

$$\mathbb{E}\{|(A_{(s+1)}(m) \setminus A_s(m)) \cap 2U \cap \partial^\phi B(s)|\} \geq \alpha \mathbb{E}\{W(s, n, U) \mathbb{1}\{Z\}\},$$

où nous notons Z l'événement $\{|A_{(s+1)}(m) \cap U \cap \partial^\phi B(s)| \leq c_d n^{d\phi}\}$. Sur Z^c ,

$$|(A_{(s+1)}(m) \setminus A_s(m)) \cap 2U \cap \partial^\phi B(s)| \geq |A_{(s+1)}(m) \cap \partial^\phi B(s) \cap U| \geq c_d n^{d\phi}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}\{|(A_{(s+1)}(m) \setminus A_s(m)) \cap 2U \cap \partial^\phi B(s)|\} \geq c_d n^{d\phi} \mathbb{E}\{\mathbb{1}\{Z^c\}\}.$$

Donc, pour $d \geq 2$

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}\{|(A_{(s+1)}(m) \setminus A_s(m)) \cap 2U \cap \partial^\phi B(s)|\} \\
 & \geq \frac{1}{2} \mathbb{E}\{\alpha W(s, n, U) \mathbb{1}\{Z\} + c_d n^{d/3} \mathbb{1}\{Z^c\}\} \\
 & \geq c \mathbb{E}\{\min\{W(s, n, U), n^{d/3}\}\} \\
 & \geq cn^{-2\psi} (\ln n)^{-1} \mathbb{E}\{W(s, n, U) \mathbb{1}\{W(s, n, U) \leq c' n^{2\psi+d/3} \ln n\}\} \\
 & \geq cn^{-2\psi} (\ln n)^{-1} \mathbb{E}\{W(s, n, U)\} - \gamma_n.
 \end{aligned}$$

La dernière inégalité vient du corollaire 2.16.

Grâce au lemme 2.18, pour tout $0 \leq s \leq n$, il existe $x_i, \dots, x_{u(n)} \in \partial^\phi B(s)$ tels que

$$\partial^\phi B(s) \subset \bigcup_{k=1}^{u(n)} B(x_k, n^\phi).$$

Or, chaque $y \in \partial^\phi B(s)$ est contenu dans au plus K (indépendant de n) boules $U_k \stackrel{\text{déf.}}{=} B(x_k, 2n^\phi)$. Ainsi,

$$K |\partial^\phi B(s)| \geq \sum_{k=1}^{u(n)} (2U_k \cap \partial^\phi B(s)),$$

et donc,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\{|(A_{(s+1)}(m) \setminus A_s(m)) \cap \partial^\phi B(s)|\} \\ & \geq K^{-1} \sum_{k=1}^{u(n)} \mathbb{E}\{|(A_{(s+1)}(m) \setminus A_s(m)) \cap 2U_k \cap \partial^\phi B(s)|\} \\ & \geq cn^{-2\psi} (\ln n)^{-1} \mathbb{E}\{W(s, n)\} - \gamma_n. \end{aligned}$$

Finalement, l'inégalité (21) se déduit de

$$W(s, n) - W(s + 1, n) \geq |(A_{(s+1)}(m) \setminus A_s(m)) \cap \partial^\phi B(s)|.$$

De même, pour $d = 1$, nous obtenons

$$\mathbb{E}\{|(A_{(s+1)}(m) \setminus A_s(m)) \cap \partial^\psi B(s)|\} \geq cn^{-\psi} (\ln n)^{-1} \mathbb{E}\{W(s, n)\} - \gamma_n,$$

puis (22). Cela achève la preuve du théorème 2.3, puisque le cas multi-dimensionnel non-symétrique se traite de façon identique (en passant par la marche aléatoire renversée si nécessaire) avec les valeurs correspondantes de ϕ et δ .

Il nous reste juste à étudier l'événement $\mathcal{E}(n)$

LEMME 2.19. – *Sous les conditions de moment $\mathcal{C}(\psi)$ ou $\mathcal{D}(\psi)$, l'événement $\mathcal{E}(n)$ correspondant est vrai pour tout n assez grand, avec probabilité 1.*

Démonstration. – Nous considérons d'abord le cas III. Soit $W(n)$ le nombre de particules, parmi m , qui sortent de $B(n)$ avant d'augmenter le nuage. Grâce à la partie relative à l'erreur interne dans le théorème 2.3, sur chaque couronne $\partial^\psi B(t)$ il y a, au plus, $cn^{d-2/3} \ln n$ particules. Ainsi $W(n) \leq cn^{d-2/3} \ln n$. Soient $J_n(t)$ le nombre de particules qui sautent par dessus $\partial^\psi B(t)$ en sortant de $B(n + tn^\psi)$, et

$$J_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{t=-n^{1/3-\psi} \ln n}^{n^{1/3+\psi} (\ln n)^3} J_n(t).$$

La condition $\mathcal{D}(\psi)$ entraîne $\mathbf{P}\{\|X\| \geq n^\psi\} \leq cn^{-3\psi-(d+2/3)} (\ln n)^{-6}$. De plus, par (6),

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\|S(T_t)\| \geq n + (t + 1)n^\psi\} \\ & = \sum_{y \in B(n+tn^\psi)} \mathbf{P}\{\|y + X\| \geq n + (t + 1)n^\psi\} G_{n+tn^\psi}(O, y) \\ & = \underbrace{\sum_{y \in B(n+(t-1)n^\psi)} \mathbf{P}\{\|X\| \geq n + (t + 1)n^\psi - \|y\|\} G_{n+tn^\psi}(O, y)}_{Z_1} \\ & \quad + \underbrace{\sum_{y \in \partial^\psi B(t-1)} \mathbf{P}\{\|X\| \geq n + (t + 1)n^\psi - \|y\|\} G_{n+tn^\psi}(O, y)}_{Z_2}. \end{aligned}$$

Or, grâce au lemme 2.6,

$$\begin{aligned} Z_1 &\leq \sum_{k=n^\psi}^{n+tn^\psi} \sum_{n+tn^\psi-k \leq \|y\| < n+tn^\psi-k+1} \mathbf{P}\{\|X\| \geq n + (t+1)n^\psi - \|y\|\} G_{n+tn^\psi}(O, y) \\ &\leq c \sum_{k=n^\psi}^{n+tn^\psi} (n + tn^\psi - k)^{d-1} \mathbf{P}\{\|X\| \geq k\} (n + tn^\psi)^{1-d} k \leq cn^{-\psi-(d+2/3)} (\ln n)^{-6}. \end{aligned}$$

De plus,

$$Z_2 \leq \mathbf{P}\{\|X\| \geq n^\psi\} \sum_{y \in \partial^\psi B(t-1)} G_{n+tn^\psi}(O, y) \leq cn^{-\psi-(d+2/3)} (\ln n)^{-6}.$$

La deuxième inégalité vient du lemme 2.4. Nous avons donc

$$\mathbf{P}\{\|S(T_t)\| \geq n + (t+1)n^\psi\} \leq cn^{-\psi-(d+2/3)} (\ln n)^{-6}.$$

Dans le calcul de J_n , n’interviennent que les particules qui sautent par dessus une couronne à l’instant de sortie de la boule intérieure de la couronne. Donc,

$$\mathbb{E}\{J_n\} \leq \sum_{t=-n^{1/3-\psi} \ln n}^{n^{1/3+\psi} (\ln n)^3} W(n) \mathbf{P}\{\|S(T_t)\| \geq n + (t+1)n^\psi\} \leq (\ln n)^{-2} n^{-1}.$$

Alors, pour n_0 assez grand, par l’inégalité de Markov,

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \mathbf{P}\{\mathcal{E}(n)^c\} \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \mathbb{E}\{J_n\} \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} (\ln n)^{-2} n^{-1} < \infty.$$

Donc, par le lemme de Borel–Cantelli, $\mathcal{E}(n)^c$ arrive finiment souvent presque sûrement.

Pour le cas II, par la condition $\mathcal{C}(\psi)$, les mêmes calculs mènent à

$$\mathbf{P}\{\|X\| \geq n^\psi\} \leq n^{-3\psi-(d+2)} (\ln n)^{-4},$$

$$\mathbb{E}\{J_n\} \leq \sum_{t=-Cn^{1/2-\psi}}^{n^{1/2+\psi} (\ln n)^2} cn^{d-1/2} n^{-\psi-(d+2)} (\ln n)^{-4} \leq (\ln n)^{-2} n^{-1}.$$

Enfin, pour $d = 1$, par la condition $\mathcal{C}(\psi)$, nous avons

$$\mathbf{P}\{\|X\| \geq n^\psi\} \leq n^{-2-3\psi} (\ln n)^{-6},$$

$$\mathbb{E}\{J_n\} \leq \sum_{t=-n^{1/2-\psi} \ln n}^{n^{1/2+\psi} (\ln n)^3} cn^{1/2} (\ln n) n^{-2-\psi} (\ln n)^{-6} \leq (\ln n)^{-2} n^{-1}. \quad \square$$

Même avec des moments infinis, nous ne pouvons pas prendre $\psi = 0$ car lorsque ψ tend vers 0, le n minimal que nous devons prendre, tend vers l’infini. Néanmoins, si la portée est finie, $\psi = 0$ est possible car la nécessité de ψ apparaît dans les

lemmes 2.13, 2.14, et 2.15 où le caractère fini de la portée nous permet d’omettre ψ . D’autre part, avec des moments exponentiels, nous pouvons remplacer n^ψ par $\alpha \ln n$ pour obtenir l’événement $\mathcal{E}(n)$ vrai pour tout n assez grand, presque sûrement, et le résultat correspondant (le choix de la constante α dépend du type d’exponentielle dans les moments de la marche aléatoire).

2.3. Condition nécessaire pour l’obtention d’une forme limite

Jusqu’à présent, nous n’avons établi que des conditions suffisantes pour dire que le modèle admettait une forme limite. Néanmoins, nous pouvons également obtenir une condition nécessaire. Soient $S(k)$ une marche aléatoire centrée irréductible sur \mathbb{Z}^d et $\|\cdot\|$ une norme euclidienne quelconque. Nous définissons $B(n)$, $\delta_I(n)$ et $\delta_E(n)$ comme précédemment. Rappelons que la trace, sur \mathbb{Z}^d , des boules $B(n)$ est la forme limite de l’“ALD” interne si et seulement si, avec probabilité 1, $\delta_I(n) = o(n)$ et $\delta_E(n) = o(n)$.

PROPOSITION 2.20. – *Si $\delta_I(n) = o(n)$ et $\delta_E(n) = o(n)$ presque sûrement, alors la marche aléatoire $S(k)$ possède $d + 1$ moments.*

Démonstration. – Soit ω_d le volume de la boule unité pour la norme $\|\cdot\|$. Supposons que l’erreur interne vérifie $\delta_I(n) = o(n)$ presque sûrement. Alors il existe α ($0 < \alpha < 1$) et N tels que, avec probabilité 1, pour tout $n \geq N$, $B(n/2) \subset A((1 - \alpha)\omega_d n^d)$. Donc, à n fixé, sur $[\omega_d n^d]$ particules, les $[(1 - \alpha)\omega_d n^d]$ premières couvrent $B(n/2)$. Ainsi, les $[\alpha\omega_d n^d]$ particules suivantes augmentent le nuage seulement après leur sortie de $B(n/2)$. Nous allons prouver, qu’avec une probabilité positive, il existe au moins une de ces particules qui sort de $B(2n)$ lorsque qu’elle sort de $B(n/2)$. D’après (6),

$$\begin{aligned} & P\{\exists i \leq \alpha\omega_d n^d t \cdot q \cdot \|S^i(\xi_{n/2})\| \geq 2n\} \\ &= 1 - [P\{\|S(\xi_{n/2})\| < 2n\}]^{\alpha\omega_d n^d} \\ &= 1 - \left[1 - \sum_{y \in B(n/2)} P\{\|X + y\| \geq 2n\} G_{n/2}(O, y)\right]^{\alpha\omega_d n^d} \\ &\geq 1 - [1 - P\{\|X\| \geq 3n\} E\{\xi_{n/2}\}]^{\alpha\omega_d n^d} \\ &\geq 1 - \exp(-cn^{d+2} P\{\|X\| \geq 3n\}). \end{aligned}$$

La dernière inégalité vient du lemme 2.8. Supposons qu’il existe un réel $\beta > 0$ et une suite infinie croissante d’entiers (n_i) tels que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $n_i^{d+2} \mathbf{P}\{\|X\| \geq 3n_i\} \geq \beta$. Alors les probabilités des événements $\{\delta(n_i) \geq n_i\}$ sont minorées par une constante strictement positive. Le lemme de Kochen–Stone [11] permet alors de conclure que l’événement $\{\delta(n_i) \geq n_i\}$ arrive infiniment souvent, avec probabilité strictement positive. Ainsi, $\delta_E(n)n^{-1}$ ne tend pas vers 0 avec probabilité 1. Alors, une condition nécessaire pour avoir $\delta_I(n) = o(n)$ et $\delta_E(n) = o(n)$ presque sûrement, est que, pour tout $\beta > 0$ et toute suite infinie croissante d’entiers (n_i) , il existe i tel que $n_i^{d+2} \mathbf{P}\{\|X\| \geq 3n_i\} \leq \beta$. Ceci implique $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{d+2} \mathbf{P}\{\|X\| \geq 3n\} = 0$. Cela rend le moment d’ordre $d + 1$ fini, car il peut s’écrire $\mathbb{E}\{\|X\|^{d+1}\} = \int_0^\infty t^d \cdot \mathbf{P}\{\|X\| \geq t\} dt$. \square

3. Cas d’une marche aléatoire non-centrée

Nous considérons une marche aléatoire *non-centrée* sur \mathbb{Z}^d , $S(n) \stackrel{\text{déf.}}{=} X_1 + \dots + X_n$ avec $X, X_1, \dots, X_n, \dots$ i.i.d. Nous supposons la *dérive* $\mu \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathbb{E}\{X\}$, non nulle, de longueur finie. Dans ce cadre, l’“ALD” interne est plus compliqué à étudier car nous disposons de peu d’informations sur le comportement asymptotique de cette marche aléatoire hors de l’axe de la dérive. De ce fait, nous ne pouvons faire une étude précise que dans le cas uni-dimensionnel. Dans le cas multi-dimensionnel, nos résultats sont moins satisfaisants. Nous gardons les notations de la section 2.

3.1. Cas uni-dimensionnel

Nous pouvons supposer μ positive, le cas où μ est négative se traitant par symétrie. Nous supposons également la marche aléatoire *irréductible*. Nous distinguons les hypothèses de moment sur la partie négative de l’incrément, $\mathcal{A}(\phi)$, et celles sur l’incrément tout entier, $\mathcal{B}(\psi)$.

$$\mathcal{A}(\phi): \sum_{x \in \mathbb{Z}^-} |x|^{\phi+1} p(x) < \infty, \quad \mathcal{B}(\psi): \sum_{x \in \mathbb{Z}} |x|^\psi p(x) < \infty.$$

Janson [10] montre que $\mathcal{A}(\phi)$, avec $\phi > 0$, est équivalent à

$$\mathbb{E}\{|S(\tau_{1-\infty, -x})|^\phi \mathbb{1}\{\tau_{1-\infty, -x} < \infty\}\} < \infty,$$

pour tout $x > 0$, où τ_I est le temps d’atteinte de l’intervalle I , infini si I n’est jamais atteint. Ainsi,

$$\mathbf{P}\{\tau_{1-\infty, -x} < \infty\} \leq x^{-\phi} \sum_{k=0}^{\infty} k^\phi \mathbf{P}\{|S(\tau_{1-\infty, -x})|^\phi = k^\phi, \tau_{1-\infty, -x} < \infty\} \leq cx^{-\phi}.$$

Nous obtenons alors un premier lemme sur la forme du nuage.

LEMME 3.1. – *Pour une marche aléatoire vérifiant $\mathcal{A}(\phi)$ avec $\phi > 2$, avec probabilité 1, pour n assez grand, $A(n) \subset [-n^{2/\phi}(\ln n)^{1/2}, +\infty[$.*

Démonstration. – Nous notons $S^i(k)$ ($i = 1$ à n) les n premières marches aléatoires non-stopées. L’exposant i fera toujours référence à la $i^{\text{ème}}$ marche aléatoire.

$$\mathbf{P}\{\exists i \leq n \text{ t.q. } \tau_{1-\infty, -n^{2/\phi}(\ln n)^{1/2}}^i < \infty\} \leq n\mathbf{P}\{\tau_{1-\infty, -n^{2/\phi}(\ln n)^{1/2}} < \infty\} \leq cn^{-1}(\ln n)^{-\phi/2}.$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\exists i \leq n \text{ t.q. } \tau_{1-\infty, -n^{2/\phi}(\ln n)^{1/2}}^i < \infty\} < \infty.$$

D’après le lemme de Borel–Cantelli, avec probabilité 1, pour n assez grand

$$\forall i \leq n, \quad \tau_{1-\infty, -n^{2/\phi}(\ln n)^{1/2}}^i = \infty. \quad \square \tag{28}$$

Remarque 3.2. – Supposons que la marche aléatoire vérifie les conditions suivantes, notées $\mathcal{E}(r)$:

(i) $\sum_{x \in \mathbb{Z}} |x| p(x) < \infty$.

(ii) Il existe $r \in \mathbb{R}^+$ tel que $\sum_{x \in \mathbb{Z}} r^{-x} p(x) = 1$.

(iii) Le réel r de (ii) vérifie $0 < \sum_{x \in \mathbb{Z}} x r^{-x} p(x) < +\infty$.

Alors, par la proposition 19.13 et l'exemple 19.14 de [15], $r > 1$ et $\mathbf{P}\{\tau_{]-\infty, -x]} < \infty\} = O(r^{-x})$. Ainsi, le même calcul que pour la preuve du lemme 3.1 donne qu'avec probabilité 1, pour n assez grand, $A(n) \subset [-a \ln n, +\infty[$, avec $a > 2/\ln r$.

Remarque 3.3. – Si la marche aléatoire est aux plus proches voisins, alors elle vérifie les conditions $\mathcal{E}(r)$. De plus, $A(n)$ est un intervalle de longueur n . Donc, grâce à la remarque 3.2, avec probabilité 1, pour n assez grand,

$$[0, n - a \ln n] \subset A(n) \subset [-a \ln n, n].$$

Dans le cas général, nous allons obtenir l'existence d'une forme limite. Sous $\mathcal{A}(\phi)$, elle s'écrit $B(n) \stackrel{\text{déf.}}{=} [-n^{2/\phi} (\ln n)^{1/2}, n]$, et sous $\mathcal{E}(r)$, elle s'écrit $B(n) \stackrel{\text{déf.}}{=} [-a \ln n, n]$ avec $a > 2/\ln r$. Pour démontrer la borne supérieure de ces intervalles ainsi que les fluctuations autour de celle-ci, nous définissons l'erreur interne $\delta_I(n)$ et l'erreur externe $\delta_E(n)$:

$$n - \delta_I(n) \stackrel{\text{déf.}}{=} \min\{z \notin A(n)\}, \quad n + \delta_E(n) \stackrel{\text{déf.}}{=} \max\{z \in A(n)\}.$$

La condition $\mathcal{E}(r)$ seule, ne permet pas d'obtenir un contrôle des fluctuations autour de la borne supérieure de $[-a \ln n, n]$. Ainsi, il faudra supposer une condition de type $\mathcal{A}(\phi)$ dans tous les cas.

THÉORÈME 3.4. – Soit une marche aléatoire vérifiant les conditions $\mathcal{A}(\phi)$ avec $\phi > 2$ et $\mathcal{B}(\psi)$ avec $\psi \geq 0$.

• *Erreur interne :*

– Si $1 \leq \psi < 3/2$, alors, avec probabilité 1, $\delta_I(n) = o(n^{2-\psi})$.

– Si $\psi \geq 3/2$, alors, avec probabilité 1, $\delta_I(n) = o(n^{1/2} \ln n)$.

• *Erreur externe :*

– Si $5/2 < \psi \leq 4$, alors, avec probabilité 1, $\delta_E(n) = o(n^{5/(2\psi)} (\ln n)^2)$.

– Si $4 < \psi \leq 6$, alors, avec probabilité 1, $\delta_E(n) = o(n^{1/4+3/(2\psi)} (\ln n)^2)$.

– Si $\psi > 6$, alors, avec probabilité 1, $\delta_E(n) = o(n^{1/2} (\ln n)^2)$.

Démonstration de l'erreur interne. – Le cas où $\psi = 1$ demande des calculs plus fins, donc nous le traitons ici. Pour $\psi > 1$, nous donnerons juste les résultats intermédiaires.

Soit $G(z) = G(O, z)$ la fonction de Green associée à la marche aléatoire S . Nous posons $b \stackrel{\text{déf.}}{=} \mu G(O)$. Alors, nous choisissons $\alpha \stackrel{\text{déf.}}{=} 1/3$ si $b \leq 1$ et $\alpha \stackrel{\text{déf.}}{=} 1/(4b)$ si $b > 1$. De même qu'à la section 2, par irréductibilité, nous pouvons nous restreindre à prouver qu'il existe une suite $\gamma_n \xrightarrow{r} 0$ telle que, pour tout $z \in [n - \varepsilon n, n - \varepsilon(1 - \alpha)n]$ (avec $\varepsilon > 0$ que l'on fera tendre vers 0), $\mathbf{P}\{z \notin A(n)\} \leq \gamma_n$. Comme $\mu > 0$, [15, Prop. 24.7] donne $\lim_{z \rightarrow +\infty} G(O, z) = \mu^{-1}$. Nous définissons alors $f(z) \stackrel{\text{déf.}}{=} G(O, z) - \mu^{-1} = o(1)$. En reprenant les notations de la section 2 page 624 avec $B(n) = [-n^{2/\phi} (\ln n)^{1/2}, n]$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 &G_n(z, z)\mathbb{E}\{M\} \\
 &= (n + n^{2/\phi}(\ln n)^{1/2})G(O, z) - (n + n^{2/\phi}(\ln n)^{1/2})[G(O, z) - G_n(O, z)] \\
 &\geq \mu^{-1}n + f(z)n + O(n^{2/\phi}(\ln n)^{1/2}) - (n + n^{2/\phi}(\ln n))\mathbb{E}\{\mathbf{P}^{S(\xi_n)}\{\tau_{1-\infty, z} < \infty\}\}.
 \end{aligned}$$

Or par (28), $\mathbf{P}\{S(\xi_n) < -n^{2/\phi}(\ln n)^{1/2}\} = 0$, pour n assez grand. Donc,

$$\mathbb{E}\{\mathbf{P}^{S(\xi_n)}\{\tau_{1-\infty, z} < \infty\}\} = O((\varepsilon n)^{-\phi}). \tag{29}$$

Cela implique, $G_n(z, z)\mathbb{E}\{M\} \geq \mu^{-1}n + f(z)n + O(n^{2/\phi}(\ln n)^{1/2})$. De plus, (29) donne

$$G_n(z, z) = G(z, z) + O((\varepsilon n)^{-\phi}) = G(O) + O((\varepsilon n)^{-\phi}). \tag{30}$$

Donc finalement,

$$\mathbb{E}\{M\} = \frac{n}{b} + \frac{f(z)n}{G(O)} + O(n^{2/\phi}(\ln n)^{1/2}). \tag{31}$$

Soit $\gamma \stackrel{\text{d\u00e9f.}}{=} 1 - 3\alpha/2$. De plus, si $b \leq 1$, nous notons $\beta \stackrel{\text{d\u00e9f.}}{=} 1/2$, et si $b > 1$, alors $\beta \stackrel{\text{d\u00e9f.}}{=} 1/(4(2b - 1))$. Ainsi, toujours avec les notations de la section 2 page 624,

$$\begin{aligned}
 &G_n(z, z)\mathbb{E}\{\tilde{L}\} \\
 &\leq \sum_{y=-n^{2/\phi}(\ln n)^{1/2}}^{n-(1+\beta)\varepsilon n} G_n(y, z) + G_n(z, z) \sum_{y=n-(1+\beta)\varepsilon n}^{n-\gamma\varepsilon n} \mathbf{P}^y\{\tau_z < \xi_n\} \\
 &\quad + G_n(z, z) \sum_{y=n-\gamma\varepsilon n}^n \mathbf{P}^y\{\tau_z < \xi_n\} \\
 &\leq \sum_{y=-n^{2/\phi}(\ln n)^{1/2}}^{n-(1+\beta)\varepsilon n} f(z - y) + (n - (1 + \beta)\varepsilon n)\mu^{-1} + G(O)(1 + \beta - \gamma)\varepsilon n \\
 &\quad + G(O) \sum_{y=n-\gamma\varepsilon n}^n \mathbf{P}^y\{\tau_z < \xi_n\} + O(n^{2/\phi}(\ln n)^{1/2}).
 \end{aligned}$$

Pour tout $y < n - (1 + \beta)\varepsilon n$, $z - y > \beta\varepsilon n$, donc

$$\sum_{y=-n^{2/\phi}(\ln n)^{1/2}}^{n-(1+\beta)\varepsilon n} f(z - y) = o(n).$$

Or, $1 - \alpha - \gamma = \alpha/2$, donc, pour $y \in [n - \gamma\varepsilon n, n]$, $y - z \geq (\alpha/2)\varepsilon n$ et ainsi $\mathbf{P}^y\{\tau_z < \xi_n\} \leq \mathbf{P}^y\{\tau_z < \infty\} < c(\varepsilon n)^{-\phi}$. Finalement, avec (30),

$$\mathbb{E}\{\tilde{L}\} \leq \frac{n}{b} - \left(\frac{1 + \beta}{b} - 1 - \beta - \gamma\right)\varepsilon n + o(n). \tag{32}$$

Et, par le choix des constantes, nous v\u00e9rifions facilement que $(1 + \beta)/b - 1 - \beta + \gamma > 0$. Ainsi, en regroupant (31) et (32), nous obtenons, pour n assez grand, $\mathbb{E}\{M\} - \mathbb{E}\{\tilde{L}\} \geq$

$c\varepsilon n$, et $\mathbb{E}\{M\}^{1/2} + \mathbb{E}\{\tilde{L}\}^{1/2} \leq Cn^{1/2}$. Alors, en appliquant la même méthode qu’à la section 2 pour l’erreur interne, nous obtenons le résultat pour $\delta_I(n)$.

Par [16, Théorème 1], la condition $\mathcal{B}(\psi)$ implique $f(z) = o(z^{1-\psi})$. Ainsi, pour $1 < \psi < 3/2$, nous pouvons prendre $z \in [n - 2\varepsilon n^{2-\psi}, n - \varepsilon n^{2-\psi}]$ et le même calcul donne $\mathbb{E}\{M\} - \mathbb{E}\{\tilde{L}\} \geq c\varepsilon n^{2-\psi}$. De même, pour $\psi \geq 3/2$, nous prenons $z \in [n - 2\varepsilon n^{1/2} \ln n, n - \varepsilon n^{1/2} \ln n]$ et ainsi $\mathbb{E}\{M\} - \mathbb{E}\{\tilde{L}\} \geq c\varepsilon n^{1/2} \ln n$. Or, dans tous les cas $\mathbb{E}\{M\}^{1/2} + \mathbb{E}\{\tilde{L}\}^{1/2} \leq Cn^{1/2}$ reste vrai. Donc, nous obtenons le résultat. \square

Démonstration de l’erreur externe. – Nous redéfinissons le modèle comme dans la sous-section 2.2. Comme $\psi > 5/2$, pour tout $\varepsilon > 0$, $\delta_I(n) \leq \varepsilon n^{1/2} \ln n$, presque sûrement, pour n assez grand. Alors, au plus $\varepsilon n^{1/2} \ln n$ particules interviennent dans le calcul de l’erreur externe.

Soient $T = T_1 \stackrel{\text{déf.}}{=} \min\{j > 0: S(j) > S(0)\}$ et $T_k \stackrel{\text{déf.}}{=} \min\{j > T_{k-1}: S(j) > S(T_{k-1})\}$ pour $k > 1$. Comme $0 < \mu < \infty$, $T, T_2 - T_1, \dots, T_k - T_{k-1}$, etc, sont des variables aléatoires i.i.d. (appelées “*échelons*”) et par [8, Th. 2.1], la condition $\mathcal{B}(\psi)$ est équivalente à $\mathbb{E}\{(S(T_k) - S(T_{k-1}))^\psi\} = \mathbb{E}\{(S(T))^\psi\} < \infty$. Nous construisons une nouvelle marche aléatoire $Z(k)$ par $Z(0) \stackrel{\text{déf.}}{=} S(0)$ et $Z(k) \stackrel{\text{déf.}}{=} S(T_k)$ pour $k \geq 1$. L’incrément de $Z(k)$ est toujours strictement positif, et il est de moyenne $\mu_z \stackrel{\text{déf.}}{=} \mu \mathbb{E}\{T\}$ positive et finie. Nous notons \mathbf{P}_z les probabilités relatives à cette nouvelle marche aléatoire. Enfin, nous notons $S([a, b]) \stackrel{\text{déf.}}{=} \{S(k): a \leq k \leq b\}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{S(\xi_n) \leq n + n^\alpha (\ln n)^2, |S([\xi_n, \tau_{|n+2n^\alpha (\ln n)^2, +\infty[}]) \cap [n, n + 2n^\alpha (\ln n)^2]| < \varepsilon n^{1/2} \ln n\} \\ &= \mathbb{E}\{\mathbf{P}_z^{\xi_n}\{\tau_{|n+2n^\alpha (\ln n)^2, +\infty[} < \varepsilon n^{1/2} \ln n\} | S(\xi_n) \leq n + n^\alpha (\ln n)^2\} \\ & \quad \times \mathbf{P}\{S(\xi_n) \leq n + n^\alpha (\ln n)^2\} \end{aligned} \tag{33}$$

avec $\alpha \stackrel{\text{déf.}}{=} 5/(2\psi)$ si $5/2 < \psi \leq 4$, $\alpha \stackrel{\text{déf.}}{=} 1/4 + 3/(2\psi)$ si $4 < \psi \leq 6$ et $\alpha \stackrel{\text{déf.}}{=} 1/2$ si $\psi > 6$.

Sous l’hypothèse $\mathcal{B}(\psi)$, [9, Th. 4.3] donne $\mathbb{E}\{|(Z(k) - k\mu_z)k^{-1/2}|^\psi\} < \infty$. Alors, lorsque $S(\xi_n) \leq n + n^\alpha (\ln n)^2$,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}_z^{\xi_n}\{\tau_{|n+2n^\alpha (\ln n)^2, +\infty[} < \varepsilon n^{1/2} \ln n\} \\ & \leq \mathbf{P}_z\{\tau_{|n^\alpha (\ln n)^2, +\infty[} < \varepsilon n^{1/2} \ln n\} \leq \mathbf{P}_z\{Z(\varepsilon n^{1/2} \ln n) > n^\alpha (\ln n)^2\} \\ & \leq \mathbf{P}_z\left\{\frac{Z(\varepsilon n^{1/2} \ln n) - \mu_z \varepsilon n^{1/2} \ln n}{\sqrt{\varepsilon n^{1/2} \ln n}} > \frac{1}{2} n^{\alpha-1/4} (\ln n)^{3/2}\right\} \leq c(\varepsilon) n^{\psi(\alpha-1/4)} (\ln n)^{-3\psi/2}. \end{aligned}$$

L’avant dernière étape vient du fait que $\alpha \geq 1/2$. D’autre part, en utilisant (6), nous obtenons

$$\mathbf{P}\{S(\xi_n) \geq n + n^\alpha (\ln n)^2\} \leq \mathbb{P}\{X > n^\alpha (\ln n)^2\} \mathbb{E}\{\xi_n\} \leq cn^{1-\alpha\psi} (\ln n)^{-2\psi}.$$

Enfin, par (33), nous obtenons pour les marches aléatoires S^i (non-stoppées) intervenant dans l’erreur externe,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\exists i \leq \varepsilon n^{1/2} \ln n \text{ t.q. } (S^i(\xi_n) \geq n + n^\alpha (\ln n)^2) \text{ ou } (S^i(\xi_n) \leq n + n^\alpha (\ln n)^2, \\ & \quad |S^i([\xi_n, \tau_{|n+2n^\alpha (\ln n)^2, +\infty[}^i) \cap [n, n + 2n^\alpha (\ln n)^2]| < \varepsilon n^{1/2} \ln n)\} \\ & \leq c\varepsilon n^{1/2} \ln n (n^{\psi(\alpha-1/4)} (\ln n)^{-3\psi/2} + n^{1-\alpha\psi} (\ln n)^{-2\psi}). \end{aligned}$$

Alors, nous vérifions que pour tout $\psi > 5/2$, avec le α correspondant, le lemme de Borel–Cantelli entraîne qu’avec probabilité 1, cet événement n’arrive jamais pour n assez grand. Ainsi, chacune de ces $\varepsilon n^{1/2} \ln n$ marches aléatoires non-stoppées visite au moins $\varepsilon n^{1/2} \ln n$ points différents dans $[n, n + 2\varepsilon n^\alpha (\ln n)^2]$. Donc les marches aléatoires stoppées s’arrêtent toutes avant $n + 2\varepsilon n^\alpha (\ln n)^2$. Cela achève la preuve de l’erreur externe. \square

3.2. Cas multi-dimensionnel

Nous séparons la marche aléatoire S en deux : S_1 et S_2 . La marche aléatoire S_1 est la projection de S sur l’axe de la dérive D_μ , orienté dans le sens de μ , et S_2 est la projection de S sur l’hyperplan D_μ^\perp , orthogonal à cet axe. La marche aléatoire S_2 est centrée et nous notons $|Q_2|$ le déterminant de sa matrice de covariance. Nous disposons de peu d’informations sur le comportement asymptotique d’une marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d , dès que nous nous éloignons de l’axe de la dérive. Ainsi, notre étude sera moins précise que dans le cas centré, notamment, nous n’obtiendrons qu’une borne supérieure pour la forme du nuage de l’“ALD” interne. Comme nous n’avons pas de propriété de couverture pour le nuage, nous pouvons relâcher l’hypothèse d’irréductibilité. Nous supposons également que D_μ correspond à un des axes de R^d . Ainsi, S_1 et S_2 sont des marches aléatoires sur \mathbb{Z} et \mathbb{Z}^{d-1} respectivement. Enfin, nous supposons que la marche aléatoire possède des moments exponentiels et, de plus, que S_1 vérifie la condition $\mathcal{E}(r)$ de la remarque 3.2.

Soit $z \in \mathbb{Z}^d$, nous notons $x_z \stackrel{\text{déf.}}{=} \langle z, \mu \rangle$ (où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^d) et y_z la projection de z sur D_μ^\perp . Nous définissons les tronçons cylindriques suivant ($k \in \mathbb{N}^*$)

$$\mathcal{T}(k) \stackrel{\text{déf.}}{=} \{z \in \mathbb{Z}^d : \alpha k \ln k < x_z \leq \alpha(k+1) \ln(k+1), \|y_z\| \leq k^{1/2} (\ln k)^{3/2} + (\ln n)^2\},$$

$$\mathcal{T}^-(n) \stackrel{\text{déf.}}{=} \{z \in \mathbb{Z}^d : -a \ln n < x_z \leq 0, \|y_z\| \leq (\ln n)^2\},$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de \mathbb{R}^d . La constante a doit vérifier $a > 2/\ln r$ où r est le réel défini par la condition (ii) de $\mathcal{E}(r)$ sur S_1 . Pour sa part, la constante α doit vérifier $\alpha > [2 + (d+1)^2/(2d)]/\ln r$. Notre résultat est le suivant.

THÉORÈME 3.5. – Soit $S(k)$ une marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d , non-centrée et vérifiant les conditions ci-dessus. Alors, avec probabilité 1, pour n assez grand,

$$A(n^d) \subset \mathcal{T}^-(n) \bigcup_{k=1}^{2n^{2d/(d+1)}} \mathcal{T}(k).$$

Remarque 3.6. – Pour une meilleure vision de ce résultat, nous remarquons que $\bigcup_{k=1}^{2n^{2d/(d+1)}} \mathcal{T}(k) \subset \mathcal{P}(n)$, avec

$$\mathcal{P}(n) = \left\{ z \in \mathbb{Z}^d : 0 \leq x_z \leq \alpha \frac{2d}{d+1} n^{2d/(d+1)} \ln n, \|y_z\| \leq \sqrt{\frac{x_z}{\alpha}} \ln x_z + (\ln n)^2 \right\}.$$

Démonstration. – Dans un premier temps, nous prouvons que les points de $A(n^d)$ avec $x_z \leq 0$ sont, avec probabilité 1, pour n assez grand, dans $\mathcal{T}^-(n)$. D’après les hypothèses

sur S_1 , comme dans le cas uni-dimensionnel, nous avons

$$\mathbf{P}\{\exists j, 1 \leq j \leq n^d \text{ t.q. } \tau_1^j(\cdot - \infty, -a \ln n) < \infty\} \leq n^{-c},$$

où $\tau_1^j(I)$ est le temps d'atteinte de l'intervalle I par la $j^{\text{ème}}$ marche aléatoire S_1 , et $c > 1$. Donc cet événement n'arrive que finiment souvent presque sûrement. De plus,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\exists j \leq n^d \text{ t.q. } \exists k \text{ t.q. } S_1^j(k) \leq 0 \text{ et } \|S_2^j(k)\| > (\ln n)^2\} \\ \leq n^d [\mathbf{P}\{\exists k \leq (\ln n)^2 \text{ t.q. } S_1^j(k) \leq 0 \text{ et } \|S_2^j(k)\| > (\ln n)^2\} \\ + \mathbf{P}\{\exists k > (\ln n)^2 \text{ t.q. } S_1^j(k) \leq 0 \text{ et } \|S_2^j(k)\| > (\ln n)^2\}]. \end{aligned}$$

Or, en notant $\xi_2(n)$ le temps de sortie de la boule de \mathbb{R}^{d-1} de rayon n par S_2 , puisque S_2 a des moments exponentiels,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\exists k \leq (\ln n)^2 \text{ t.q. } S_1^j(k) \leq 0 \text{ et } \|S_2^j(k)\| > (\ln n)^2\} \\ \leq \mathbf{P}\{\xi_2((\ln n)^2) \leq (\ln n)^2\} \leq c \exp(-c(\ln n)^2). \end{aligned}$$

D'autre part, en notant $\tilde{S}_1(k) \stackrel{\text{déf.}}{=} S_1(k) - \|\mu\|k$, \tilde{S}_1 est centrée et possède des moments exponentiels. Donc \tilde{S}_1 satisfait à un principe de grandes déviations de fonction de taux $I(x) \geq cx^2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\exists k > (\ln n)^2 \text{ t.q. } S_1^j(k) \leq 0\} \leq \mathbf{P}\{\exists k > (\ln n)^2 \text{ t.q. } |\tilde{S}_1(k)| \geq \|\mu\|k\} \\ \leq c \exp(-c\|\mu\|^2(\ln n)^2). \end{aligned}$$

Alors,

$$\mathbf{P}\{\exists j \leq n^d \text{ t.q. } \exists k \text{ t.q. } S_1^j(k) \leq 0 \text{ et } \|S_2^j(k)\| > (\ln n)^2\} \leq n^{-2}.$$

Donc, par le lemme de Borel–Cantelli, cet événement n'arrive que finiment souvent presque sûrement.

Maintenant, nous regardons l'ensemble des points de $A(n^d)$ avec $x_z > 0$, que nous noterons $A^+(n^d)$. Nous adaptons la méthode utilisée dans [14]. Nous notons τ_k le temps d'atteinte (éventuellement infini) de $\mathcal{T}(k)$. Ainsi, par [5], pour tout $J > 0$, pour k assez grand

$$\mathbf{P}\{S(\tau_k) = z\} \leq G(O, z) \leq c\|z\|^{(1-d)/2} \leq Jk^{(1-d)/2}.$$

Alors, pour tout ensemble $U \subset \mathcal{T}(k)$ (k assez grand),

$$\mathbf{P}\{S(\tau_k) \in U\} \leq J\#Uk^{(1-d)/2}. \quad (34)$$

Nous notons $\tau_1 = \tau_1([\alpha k \ln k, +\infty[)$ et $\xi_2 = \xi_2(k^{1/2}(\ln k)^{3/2})$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\tau_k \neq \tau_1\} &= \mathbf{P}\{\tau_k > \tau_1\} \leq \mathbf{P}\{\xi_2 < \tau_1\} \\ &\leq \mathbf{P}\{\tau_1 \geq k(\ln k)^{3/2}\} + \mathbf{P}\{\xi_2 < k(\ln k)^{3/2}\} \\ &\leq \mathbf{P}\{\tilde{S}_1(k(\ln k)^{3/2}) < -k \ln k\} + \mathbf{P}\{\xi_2 < k(\ln k)^{3/2}\} \\ &\leq c \exp(-c(\ln k)^{3/2}). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbf{P}\{\exists j \leq n^d \text{ t.q. } \exists k \leq n^{2d/(d+1)} \text{ t.q. } \tau_k \neq \tau_1\} \leq n^d \sum_{k \geq n^{2d/(d+1)}} \mathbf{P}\{\tau_k \neq \tau_1\} \leq cn^{-\beta},$$

avec $\beta > 1$. L'événement $\{\tau_k \neq \tau_1\}$ n'arrive donc plus, pour aucune des n^d marches aléatoires, pour k assez grand. Il en est de même de l'événement $\{S_1(\tau_k) - \alpha k \ln k \geq \alpha \ln k, \tau_k = \tau_1\}$ grâce au calcul suivant et au choix de α .

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_1(\tau_k) - \alpha k \ln k \geq \alpha \ln k, \tau_k = \tau_1\} &\leq \mathbf{P}\{S_1(1) > \alpha \ln k\} \mathbb{E}\{\tau_1\} \\ &\leq ck(\ln k)r^{-\alpha \ln k} \sum_{x \in \mathbb{Z}} r^{-x} p(x) = k^{1-\alpha \ln r} \ln k. \end{aligned}$$

Nous définissons $Z_k(j) \stackrel{\text{déf.}}{=} \#(A(j) \cap \mathcal{T}(k))$, et $\nu_k(j) \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathbb{E}\{Z_k(j)\}$. Ainsi, pour k assez grand,

$$\nu_{k+1}(l+1) - \nu_{k+1}(l) \leq \mathbb{E}\{h(A(l)^c, \mathcal{T}(k+1)) \mathbb{1}_{\{\tau_k = \tau_1\}} \mathbb{1}_{\{S_1(\tau_k) - \alpha k \ln n < \alpha \ln n\}}\},$$

où $h(A(l)^c, \mathcal{T}(k+1))$ est la probabilité d'atteindre $A(l)^c$ à l'intérieur de $\mathcal{T}(k+1)$.

Or, en conditionnant par $\tau_k = \tau_1$ et $S_1(\tau_k) - \alpha k \ln k < \alpha \ln n$, si une particule atteint $A(l)^c$ dans $\mathcal{T}(k+1)$, alors elle a atteint $\mathcal{T}(k)$ à l'intérieur du nuage $A(l)$. Donc, par (34)

$$\nu_{k+1}(l+1) - \nu_{k+1}(l) \leq \mathbb{E}\{h(\mathcal{T}(k), A(l))\} \leq \mathbb{E}\{J Z_k(l) k^{(1-d)/2}\} = J \nu_k(l) k^{(1-d)/2}.$$

Mais $\nu_k(0) = 0$, donc en sommant ces sommes télescopiques, nous obtenons

$$\nu_{k+1}(j) \leq J k^{(1-d)/2} \sum_{l=1}^{j-1} \nu_k(l).$$

Or, pour $k = n^{2d/(d+1)}$, l'inégalité $\nu_{n^{2d/(d+1)}}(j) \leq j$ est toujours vraie. Donc, par récurrence, nous prouvons que, pour $k \geq n^{2d/(d+1)}$ et j fixé,

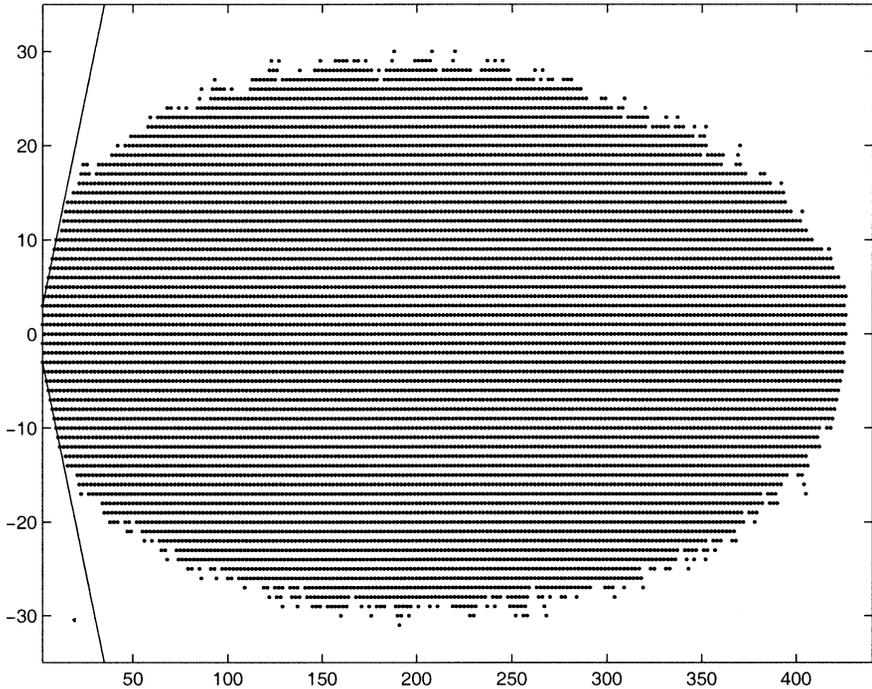
$$\nu_k(j) \leq [J n^{d(1-d)/(d+1)}]^{k-n^{2d/(d+1)}} \frac{j^{k-n^{2d/(d+1)}+1}}{(k-n^{2d/(d+1)}+1)!}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{A^+(n^d) \not\subset \bigcup_{k=1}^{2n^{2d/(d+1)}} \mathcal{T}(k)\right\} &\leq \mathbf{P}\{Z_{2n^{2d/(d+1)}}(n^d) \geq 1\} \leq \nu_{2n^{2d/(d+1)}}(n^d) \\ &\leq [J e]^{n^{2d/(d+1)}} e^{n^{d(d-1)/(d+1)}}. \end{aligned}$$

Nous pouvons choisir $J < 1/e$. Alors, le lemme de Borel–Cantelli donne le résultat. \square

Remarque 3.7. – Si la marche aléatoire S_1 est à portée finie, la largeur des cylindres $\mathcal{T}(k)$ peut être réduite à une constante qui dépend de la portée.

FIG. 1. Exemple pour $n = 10000$.

3.3. Exemple

Nous considérons un exemple bi-dimensionnel défini par la probabilité de transition suivante :

$$p((x, y), (x + 1, y + 1)) \stackrel{\text{déf.}}{=} 1/2 \stackrel{\text{déf.}}{=} p((x, y), (x + 1, y - 1)).$$

La marche aléatoire associée a une fonction de Green aisément calculable $G((x, y)) = p_1^x(y)$, pour $x \geq y$ avec p_1^x la probabilité de transition itérée de la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z} . Alors, les méthodes utilisées dans le cas centré, permettent d'encadrer le nuage au temps n^2 entre deux boules correspondant aux lignes de niveau de la fonction de Green, à une constante multiplicative près. Ainsi, nous n'avons pas de preuve de l'existence d'une forme limite pour le nuage. Néanmoins, des simulations informatiques semblent montrer l'existence d'une forme limite (voir Fig. 1). Mais la forme qui semble se dégager ne correspond pas à une ligne de niveau de la fonction de Green.

Remerciements

Je remercie chaleureusement Laurent Saloff-Coste pour son aide et ses encouragements tout au long de la préparation de ce travail. Je remercie également Richard Durrett pour avoir suggéré l'étude de l'exemple non-centré bi-dimensionnel.

RÉFÉRENCES

- [1] Ben Arous G., Quastel J., Ramirez A., Internal DLA in a random environment, à paraître dans Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.
- [2] Breiman L., Probability, Addison-Wesley, 1968.
- [3] Cox J.T., Durrett R., Hybrid zones and voter model interfaces, Bernoulli 1 (4) (1995) 343–370.
- [4] Diaconis P., Fulton W., A growth model, a game, an algebra, Lagrange inversion, and characteristic classes, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino 49 (1991) 95–119.
- [5] Doney R., An analogue of the renewal theorem in higher dimensions, Proc. London Math. Soc. (3) 16 (1966) 669–684.
- [6] Gravner J., Quastel J., Internal DLA and the Stefan problem, Ann. Probab. 28 (4) (2000) 1528–1562.
- [7] Griffin P., McConnell T., On the position of a random walk at the time of first exit from a sphere, Ann. Probab. 20 (2) (1992) 825–854.
- [8] Gut A., On the moments and limit distributions of some first passage times, Ann. Probab. 2 (1974) 277–308.
- [9] Gut A., Stopped Random Walks, Limit Theorems and Applications, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [10] Janson S., Moments for first-passage and last-exit times, the minimum, and related quantities for random walks with positive drift, Adv. Appl. Probab. 18 (4) (1986) 865–879.
- [11] Kochen S., Stone C., A note on the Borel–Cantelli lemma, Illinois J. Math. 8 (1964) 248–251.
- [12] Lawler G., Intersections of Random Walks, Birkhäuser, 1991.
- [13] Lawler G., Subdiffusive fluctuations for internal diffusion limited aggregation, Ann. Probab. 23 (1) (1995) 71–86.
- [14] Lawler G., Bramson M., Griffeath D., Internal diffusion limited aggregation, Ann. Probab. 20 (4) (1992) 2117–2140.
- [15] Spitzer F., Principles of Random Walks, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, Vol. 34, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [16] Stone C., Wainger S., One-sided error estimates in renewal theory, J. Analyse Math. 20 (1967) 325–352.
- [17] Uchiyama K., Green’s function for random walks on \mathbb{Z}^n , Proc. London Math. Soc. (3) 77 (1) (1998) 215–240.