Ann. I. H. Poincaré – PR 38, 4 (2002) 581–612

S0246-0203(01)01105-0/FLA

PRINCIPES D'INVARIANCE POUR LES FLOTS DIAGONAUX SUR $SL(d,\mathbb{R})/SL(d,\mathbb{Z})$

Stéphane LE BORGNE

IRMAR, Université de Rennes I, 35042 Rennes Cedex, France

Reçu le 23 janvier 2001, revisé le 9 juillet 2001

RÉSUMÉ. – Nous démontrons les principes d'invariance de Donsker et Strassen pour les flots sur $SL(d,\mathbb{R})/SL(d,\mathbb{Z})$ définis par des matrices diagonales. La technique utilisée est la même que dans [9]. La théorie des représentations des groupes de Lie fournit des estimations de décorrélation. On en déduit un résultat d'équirépartition des feuilles dilatées par le flot qui nous permet ensuite d'appliquer la méthode de Gordin. Nous établissons également un résultat de régularité pour l'équation de cobord. © 2002 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

ABSTRACT. – We prove the Donsker and Strassen invariance principles for the flows on $SL(d,\mathbb{R})/SL(d,\mathbb{Z})$ defined by diagonal matrices. For this, we use decorrelation estimations given by the representation theory of Lie groups. From them we deduce a result of equidistribution of unstable leaves for the flow and we follow Gordin's method. We also establish a regularity result for the coboundary equation. © 2002 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Introduction et énoncés des résultats

Depuis l'article de Sinaï [21] paru en 1960, la preuve du théorème limite central (TLC) dans les systèmes dynamiques de type hyperbolique a fait l'objet de très nombreux travaux. Pour les systèmes d'Anosov, on se sert généralement du codage obtenu grâce à la construction de partitions markoviennes (cf. par exemple [13,20]). Lorsque l'on sort de ce cadre (abandon de la compacité de l'espace ou de la régularité de la transformation, affaiblissement de la condition de régularité) différentes techniques peuvent être utilisées ([6,9,18,19,24]).

La méthode des martingales, développée par Billingsley, Ibragimov puis Gordin [12] permet d'obtenir des résultats plus précis que le seul TLC, tel le principe d'invariance. Elle peut être appliquée à des situations où on ne dispose pas de partitions markoviennes (cf. par exemple les articles [9,18,24]).

Nous employons ici cette méthode dans le cas des systèmes définis par l'action d'un groupe à un paramètre de matrices diagonales sur $SL(d,\mathbb{R})/SL(d,\mathbb{Z})$ pour $d \geqslant 3$.

Notons G le groupe $SL(d,\mathbb{R})$ et Γ le sous-groupe $SL(d,\mathbb{Z})$. L'espace quotient G/Γ a une structure de variété différentiable. La mesure de Haar sur G, μ, donne une mesure finie sur G/Γ invariante par translation à gauche que nous noterons $\bar{\mu}$ et supposerons normalisée ($\bar{\mu}(G/\Gamma) = 1$).

Nous désignerons par $\overline{x}$ la classe à gauche modulo Γ de l'élément x de G.

Soient $(T_i)_{i=1}^d$ une suite décroissante de d nombres positifs non tous égaux à 1 dont le produit vaut un. Appelons T la matrice

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & & & & \\ & T_2 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & T_{d-1} & \\ & & & & T_d \end{pmatrix}.$$

Le groupe à un paramètre

$$\left\{ T^t = \begin{pmatrix} T_1^t & & & & \\ & T_2^t & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & T_{d-1}^t & \\ & & & & T_d^t \end{pmatrix} \Big/ \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

définit sur G/Γ un flot, noté encore T^t, préservant la mesure $\bar{\mu}$

$$T^t \colon G/\Gamma \longrightarrow G/\Gamma : \bar{x} \longmapsto T^t \bar{x}.$$

Le système dynamique $(G/\Gamma, T^t, \bar{\mu})$ est mélangeant (cf. [5]) donc pour toute fonction f intégrable sur G/Γ, pour presque tout $\bar{x} \in G/\Gamma$, on a

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(T^s \bar{x}) \, \mathrm{d}s = \int_{G/\Gamma} f(\bar{y}) \, \mathrm{d}\bar{\mu}(\bar{y}).$$

Soit f une fonction de carré intégrable d'intégrale nulle. Sa variance, sous l'action du flot, peut être définie comme la limite, si elle existe

$$\widetilde{\sigma}^2(f) = \lim_n \frac{1}{N} \left\| \int_0^N f(T^s \cdot) \, \mathrm{d}s \right\|_2^2.$$

Sous la condition

$$\int_0^\infty \left| \langle T^s f, f \rangle \right| \mathrm{d}s < \infty,$$

la variance existe et est égale à :

$$\widetilde{\sigma}^2(f) = 2 \int_0^\infty \langle T^s f, f \rangle \, \mathrm{d}s.$$

Lorsque $\widetilde{\sigma} = \widetilde{\sigma}(f)$ *est strictement positif*, nous dirons que la fonction f vérifie :

– *le théorème limite central* (*TLC*) si

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\alpha} \left| \bar{\mu}\left\{ \bar{x}\colon \frac{1}{\widetilde{\sigma}\sqrt{t}} \left(\int_0^t f\left(T^s \bar{x}\right) \mathrm{d}s - t\bar{\mu}(f) \right) < \alpha \right\} - \Phi(\alpha) \right| = 0,$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

– *le principe d'invariance de Donsker* (*PID*) si le processus à valeurs dans l'espace des fonctions continues sur [0, 1] défini par

$$\left(\bar{x} \mapsto \left(s \mapsto \xi_t(s, \bar{x}) = \frac{1}{\widetilde{\sigma}\sqrt{t}} \int_0^{ts} f\left(T^u \bar{x}\right) \mathrm{d}u \right) \right)_{t>0}$$

converge faiblement vers la mesure de Wiener lorsque t tend vers l'infini,

– *le principe d'invariance de Strassen* (*PIS*) si, presque sûrement, l'ensemble de fonctions sur [0, 1]

$$\left(s \mapsto \zeta_t(s, \bar{x}) = \frac{1}{(2t\widetilde{\sigma}^2 \log\log t)^{1/2}} \int_0^{ts} f\left(T^u \bar{x}\right) \mathrm{d}u \right)_{t>0}$$

est relativement compact dans l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ d'ensemble limite l'ensemble des fonctions g absolument continues sur [0, 1] telles que

$$g(0) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \dot{g}(t)^2 \, \mathrm{d}t \leqslant 1,$$

où $\dot{g}$ désigne la dérivée de g.

Nous dirons qu'une fonction f est un cobord au sens du flot s'il existe une application h finie mesurable telle que, pour tout t, pour presque tout x, on ait :

$$\int_0^t f\left(T^s \bar{x}\right) \mathrm{d}s = h\left(T^t \bar{x}\right) - h(\bar{x}).$$

Dans ce cas, quand t tend vers l'infini, $\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t f(T^s \bar{x})\, \mathrm{d}s$ converge en probabilité vers 0 et f ne vérifie pas le théorème limite central.

Fixons une distance riemannienne d_0 sur G invariante par translation à droite et définissons une distance sur G/Γ en posant

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \inf_{\gamma\in\Gamma} d_0(x, y\gamma).$$

Nous noterons $B(\bar{x}, r)$ (resp. $B_0(x, r)$) la boule de centre $\bar{x}$ (resp. x) et de rayon r pour la distance d (resp. d_0).

Soit $C > 0$ et $p \in]0, 1[$ deux réels. Nous dirons qu'une fonction f définie sur G/Γ est (C, p)-*höldérienne* si, pour tout couple de points $\bar{x}$ et $\bar{y}$ pris dans G/Γ, on a

$$\left|f(\bar{x}) - f(\bar{y})\right| \leqslant Cd(\bar{x}, \bar{y})^p.$$

Un ensemble $U \subset G/\Gamma$ étant donnés, nous désignons son bord par ∂U et, pour tout réel positif r, définissons l'ensemble $\partial U(r)$ par

$$\partial U(r) = \left\{\bar{y} \in G/\Gamma/B_0(Id, r)\bar{y} \cap \partial U \neq \emptyset\right\}.$$

Nous dirons qu'un ensemble $U \subset G/\Gamma$ est (C, p)-*régulier* si, pour tout $r > 0$,

$$\bar{\mu}\left(\partial U(r)\right) \leqslant Cr^p.$$

Nous allons prouver les deux théorèmes suivants.

THÉORÈME A. – *Soit f une fonction höldérienne ou une indicatrice d'un ensemble régulier. Alors, si f n'est pas un cobord, elle vérifie le principe d'invariance de Donsker et le principe d'invariance de Strassen.*

THÉORÈME B. – *Une fonction höldérienne qui est un cobord est un cobord dans l'ensemble des fonctions höldériennes.*

Ainsi, d'après le théorème B, une fonction höldérienne dont l'intégrale le long d'une orbite périodique n'est pas nulle, n'est pas un cobord et, d'après le théorème A, elle vérifie le principe d'invariance de Donsker et le principe d'invariance de Strassen.

La technique que nous proposons ne s'applique bien qu'en temps discret. Nous mènerons donc toute l'étude dans le cadre du système dynamique $(G/\Gamma, T = T^1, \bar{\mu})$. La *variance* $\sigma^2(\varphi)$ est définie comme la limite (si cette limite existe et est finie) :

$$\sigma^2(\varphi) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left\|\varphi + T\varphi + \cdots + T^{n-1}\varphi\right\|_2^2.$$

Notons $S_n\varphi$ la somme $\varphi + T\varphi + \cdots + T^{n-1}\varphi$. Les versions discrètes des énoncés de l'introduction sont :

- *le principe d'invariance de Donsker* (*PID*$'$) : soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions continues à droite et ayant une limite à gauche sur [0, 1] muni de la tribu borélienne pour la topologie de Skorokhod. Lorsque σ^2 n'est pas nul, définissons le processus aléatoire à valeurs dans $\mathcal{D}$

$$\xi_n(t, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]}\varphi(x), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1;\ n = 1, 2, \ldots.$$

  Nous dirons que la fonction φ vérifie le principe d'invariance de Donsker si σ^2 n'est pas nul et si la loi de ξ_n converge faiblement vers la mesure de Wiener sur $\mathcal{D}$.
- *le principe d'invariance fort de Strassen* (*PIS*$'$) : soit $\mathcal{C}_0$ l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ muni de la topologie de la convergence uniforme et $\mathcal{K}$

l'ensemble des fonctions g absolument continues sur $[0,1]$ telles que

$$g(0)=0 \quad \text{et} \quad \int \dot{g}^2 \, \mathrm{d}t \leqslant 1,$$

où $\dot{g}$ désigne la dérivée de g par rapport à t. Si σ^2 n'est pas nul, pour tout x dans X, considérons l'élément $\zeta(\cdot, x)$ de $\mathcal{C}_0$ défini comme l'interpolation affine par morceaux de l'application définie en k/n, $k \leqslant n$, par :

$$\zeta_n(k/n, x) = \frac{1}{(2n\sigma^2 \log\log n)^{1/2}} S_k\varphi(x).$$

Nous dirons que la fonction φ vérifie le principe d'invariance fort de Strassen si σ^2 n'est pas nul et si, presque sûrement, l'ensemble $\{\zeta_n, n > 2\}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}_0$ et l'ensemble de ses points limites coïncide avec $\mathcal{K}$. C'est une version forte de la loi du logarithme itéré.

Nous allons prouver que les fonctions φ appartenant à la classe $\mathcal{C}$ introduite ci-dessous vérifient les propriété (PID′) et (PIS′). La classe $\mathcal{C}$ est un ensemble de fonctions que l'on peut bien approcher par convolution.

Dans la section 1, paragraphe 8 (corollaire 1.8), nous introduisons un opérateur différentiel Ω et un entier m. Pour tout nombre réel strictement supérieur à 1, ρ, nous appellerons ρ-identité approchée une suite (χ_n) de fonctions définies sur G, positives ou nulles, indéfiniment dérivables, d'intégrale 1, telle que, il existe $C > 0$ telle que, pour tout n,

- le support de χ_n soit inclus dans $B_0(Id, \rho^{-n})$,
- $\|\Omega^m \chi_n\|_\infty \leqslant C\rho^{Cn}$,
- χ_n est lipschitzienne de constante de Lipschitz ρ^{Cn}.

De telles suites existent. (Etant donnée une fonction χ positive ou nulle, indéfiniment dérivable, d'intégrale 1 dont le support est inclus dans $B_0(Id, r_0)$ on peut poser $\chi_n(\cdot) = c_n\rho^{Dn}\chi(\Phi(\rho^n\Phi^{-1}(.)))$ où c_n est une constante de normalisation (Φ et r_0 sont définis au paragraphe 1.5).) Soit ψ une fonction localement intégrable sur G. Posons :

$$\chi_n * \psi(x) = \int_G \psi\left(g^{-1}x\right)\chi_n(g)\,\mathrm{d}\mu(g) = \int_G \psi(g)\chi_n\left(xg^{-1}\right)\mathrm{d}\mu(g).$$

Identifions l'algèbre de Lie de G à l'ensemble des champs de vecteurs sur G invariants à *droite*. Alors, pour tout n, les fonctions $\chi_n * \psi$ sont indéfiniment différentiables et, pour tout opérateur différentiel Ω appartenant à l'algèbre enveloppante universelle de G, $\Omega(\chi_n * \psi) = (\Omega\chi_n) * \psi$. Soit φ une fonction $\bar{\mu}$-intégrable définie sur G/Γ. On lui associe une fonction φ définie sur G localement intégrable en posant $\varphi(x) = \varphi(\bar{x})$. On vérifie immédiatement (sur la première définition) que $\chi_n * \varphi$ est invariante par translation à droite par les éléments de Γ. Il lui correspond donc une fonction définie sur G/Γ : nous la noterons φ_n.

La classe $\mathcal{C}$ est l'ensemble des fonctions φ ayant les propriétés suivantes (les normes $\|\cdot\|_p$ sont les normes de l'espace $(G/\Gamma, \bar{\mu})$) :

(1)
  (1a) $\varphi \in L^4$,
  (1b) $\int_{G/\Gamma} \varphi(\bar{z})\,\mathrm{d}\bar{\mu}(\bar{z}) = 0$.
(2) Pour toute ρ-identité approchée (χ_n), il existe des constantes $C > 0$ et $p > 0$ telles que, pour tout n on ait :
  (2a) $\|\Omega^m(\varphi_n)\|_2 \leqslant C\rho^{Cn}$,
  (2b) $\|\varphi_n - \varphi\|_4 \leqslant C\rho^{-pn}$,
  (2c) φ_n est höldérienne de constante de Hölder $C\rho^{Cn}$.

Nous allons démontrer le théorème suivant. Rappelons que φ est un cobord au sens du système s'il existe une fonction h mesurable telle que $\varphi = h - Th$.

THÉORÈME A′. – *Un fonction φ appartenant à $\mathcal{C}$ qui n'est pas un cobord vérifie les propriétés* (*PID*′) *et* (*PIS*′).

La preuve que nous proposons consiste à construire une filtration $\mathcal{A}_n$ telle que les fonctions mentionnées dans l'énoncé satisfassent aux hypothèses du théorème suivant (cf. [14] page 145) :

THÉORÈME G. – *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique ergodique inversible, $(\mathcal{A}_n)$ une filtration de $\mathcal{A}$ telle que $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1} = T^{-1}\mathcal{A}_n$ et f une fonction dans $L^2(\mu)$ telle que*

$$\sum_{n<0} \left\|E(f|\mathcal{A}_n)\right\|_2 < \infty \quad et \quad \sum_{n>0} \left\|f - E(f|\mathcal{A}_n)\right\|_2 < \infty.$$

Alors, soit il existe une fonction h de carré intégrable telle que $f = h - Th$, soit la fonction f vérifie (*TCLF*′) *et* (*PIS*′).

Le théorème A se déduit du théorème A′ : pour montrer qu'une fonction f vérifie les théorèmes limites en temps continu énoncés dans l'introduction, on commence par appliquer le théorème A′ à la fonction φ_f définie par :

$$\varphi_f(\bar{x}) = \int_0^1 f\left(T^s \bar{x}\right) \mathrm{d}s.$$

Pour cela il suffit de vérifier que φ_f appartient à l'ensemble $\mathcal{C}$. Il nous faut ensuite pouvoir passer des énoncés discrets (PID′) et (PIS′) aux énoncé (PID) et (PIS). Cela est fait en annexe pour les fonctions höldériennes et les indicatrices d'ensembles réguliers.

Plan de l'article

La section 1 est une liste de rappels, définitions et notations.

Nous verrons, dans la section 2, comment les propriétés de mélange exponentiel du flot permettent de montrer la bonne répartition de morceaux de variétés dilatées par le flot.

Nous donnons ensuite la construction d'une filtration en tribus dont les atomes sont des morceaux de feuilles dilatées par le flot (section 3). Cette construction est menée avec suffisamment de soins pour obtenir quelques estimations utiles dans la section 4 où l'on donne la preuve du théorème A′.

Enfin, la section 5 est consacrée à la preuve du théorème B et au problème des fonctions cobords.

La technique exposée dans ce travail peut être appliquée à d'autres flots sur des espaces homogènes de groupes de Lie semi-simples (par exemple les flots définis dans [16] sur des espaces homogènes compacts). Nous avons choisi de traiter un cas simple non compact. Signalons enfin que Dolgopyat propose dans [11] une démarche proche de celle que nous exposons ici.

Je remercie Jean-Pierre Conze à qui ce travail doit beaucoup (le présent article reprend les idées exposées dans [9]). Merci également à Yves Guivarc'h et Marc Peigné pour d'utiles références et d'intéressantes discussions et au rapporteur pour ses remarques et suggestions.

1. Rappels

1.1. Décomposition d'Iwasawa

Soit A le groupe des matrices diagonales à coefficients strictement positifs de déterminant 1. Si K et N désignent respectivement le groupe spécial orthogonal et le groupe "trigonal strict supérieur", formé des matrices triangulaires supérieures de valeurs propres égales à un, l'application :

$$(k, a, n) \longmapsto kan$$

est un homéomorphisme de $K \times A \times N$ sur $SL(d, \mathbb{R})$ qui transporte la mesure de Haar $\mathrm{d}g$ de G en

$$\Theta(a)\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}n \quad \left(\text{avec } \Theta(a) = \prod_{i<j} a_{ii}/a_{jj}\right).$$

1.2. Domaines de Siegel

DÉFINITION. – *Soient t, u des réels positifs et*

$$A_t = \{a \in A / a_{ii} \leqslant t a_{i+1i+1},\ i = 1, \ldots, d-1\},$$
$$N_u = \{n \in N / |n_{ij}| \leqslant u\}.$$

On appelle domaine de Siegel de $SL(d, \mathbb{R})$ tout ensemble de la forme

$$\mathcal{S}_{t,u} = K.A_t.N_u.$$

Les ensembles $\mathcal{S}_{t,u}$ sont d'assez bonnes approximations d'un domaine fondamental pour la relation de congruence modulo Γ. En effet, d'une part, lorsque les paramètres u et t sont suffisamment grand le domaine de Siegel $\mathcal{S}_{t,u}$ contient un domaine fondamental pour la relation de congruence modulo Γ (voir [1]) :

THÉORÈME 1.1. – *On a $SL(d, \mathbb{R}) = \mathcal{S}_{t,u} SL(d, \mathbb{Z})$ dès que $t \geqslant 2/\sqrt{3}$ et $u \geqslant 1/2$.*

D'autre part, les domaines de Siegel sont recouverts par des réunions finies de domaines fondamentaux (voir [8] page 259 et suivantes) :

THÉORÈME 1.2. – *Il existe un ensemble fini $\mathcal{F}_{t,u}$ inclus dans Γ (dépendant uniquement de d, t, u) tel que si x appartient à $\mathcal{S}_{t,u}$ alors l'ensemble $x\Gamma \cap \mathcal{S}_{t,u}$ est inclus dans $x\mathcal{F}_{t,u}$.*

1.3. Fonctions höldériennes et espaces L^r

PROPOSITION 1.3. – *Pour tout $r < \infty$ une fonction höldérienne sur G/Γ appartient à $L^r(G/\Gamma, \bar{\mu})$.*

Démonstration. – Soit φ une fonction höldérienne. Il existe $C > 0$ et $p \in]0, 1]$ tels que

$$|\varphi(\bar{x}, \bar{y})| \leqslant Cd(\bar{x}, \bar{y})^p.$$

Il suffit donc de montrer que la fonction $\bar{x} \mapsto d(\bar{x}, \overline{Id})$ appartient à tous les espaces $L^r(G/\Gamma, \bar{\mu})$ ou encore, puisque $d(\bar{x}, \overline{Id}) \leqslant d_0(x, Id)$ que, pour tout $r \in [1, \infty[$,

$$\int_{\mathcal{S}_{t,u}} d_0(x, Id)^r \,\mathrm{d}\bar{\mu}(x) < \infty. \tag{$**$}$$

L'invariance de d_0 par translation à droite donne :

$$\begin{aligned} d_0(kan, Id) &\leqslant d_0(kan, an) + d_0(an, n) + d_0(n, Id) \\ &= d_0(k, Id) + d_0(a, Id) + d_0(n, Id). \end{aligned}$$

Les ensembles K et N_u étant compacts, l'inégalité $(**)$ est vérifiée si

$$\int_{A_t} d_0(a, Id)^r \,\Theta(a)\,\mathrm{d}a < \infty.$$

En utilisant encore une fois l'invariance par translation à droite de d_0, on voit que, pour tout $n > 0$, on a

$$d_0(a, Id) \leqslant n d_0\big(a^{1/n}, Id\big).$$

On en tire la majoration

$$d_0(a, Id) \leqslant C \max_i |\log(a_{ii}/a_{i+1i+1})|.$$

Pour tout $i = 1, \dots, d-1$ posons maintenant $b_i = \log(a_{ii}/a_{i+1i+1})$. On a

$$\begin{aligned} &\int_{A_t} d_0(a, Id)^r \,\Theta(a)\,\mathrm{d}a \\ &\quad \leqslant \int_{]-\infty, \log t]^{d-1}} \max_i b_i^r \exp\left(\sum_{i<j}\sum_{k=i}^{j-1} b_k\right) \mathrm{d}b_1 \cdots \mathrm{d}b_{d-1} < \infty. \qquad \square \end{aligned}$$

1.4. Feuilles stables, instables et neutres

La relation

$$\left(TxT^{-1}\right)_{ij} = \frac{T_i x_{ij}}{T_j}$$

permet d'identifier les variétés stables, instables et neutres du difféomorphisme T. Considérons la partition de $\{1, \ldots, d\}$ en les ensembles J_k définis par :

- pour tout k, pour tout i, j appartenant à J_k, on a $T_i = T_j$,
- pour tout k, n tels que $k < n$, pour tout i appartenant à J_k, tout j appartenant à J_n, on a $T_i > T_j$.

Désignons par $h_{J_i J_j}$ une matrice indéxée par l'ensemble $J_i \times J_j$, par Id_{J_i} la matrice identité indexée par J_i. Les variétés stables, instables et neutres de T sont données par les orbites de groupes de matrices triangulaires ou diagonales par blocs.

La variété instable passant par $\bar{x} = x\Gamma$ est la variété immergée $H_u x\Gamma$ définie par le groupe H_u des matrices de la forme

$$h_u = \begin{pmatrix} Id_{J_1} & h_{J_1J_2} & \ldots & h_{J_1J_{l-1}} & h_{J_1J_l} \\ 0 & Id_{J_2} & \ldots & h_{J_2J_{l-1}} & h_{J_2J_l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & Id_{J_{l-1}} & h_{J_{l-1}J_l} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & Id_{J_l} \end{pmatrix}.$$

La variété stable passant par $\bar{x} = x\Gamma$ est la variété immergée $H_s x\Gamma$ définie par le groupe H_s des matrices de la forme

$$h_s = \begin{pmatrix} Id_{J_1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ h_{J_2J_1} & Id_{J_2} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{J_{l-1}J_1} & h_{J_{l-1}J_2} & \ldots & Id_{J_{l-1}} & 0 \\ h_{J_lJ_l} & h_{J_lJ_2} & \ldots & h_{J_lJ_{l-1}} & Id_{J_l} \end{pmatrix}.$$

La variété neutre passant par $\bar{x} = x\Gamma$ est la variété immergée $H_e x\Gamma$ définie par le groupe H_e des matrices de la forme

$$h_e = \begin{pmatrix} h_{J_1J_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & h_{J_2J_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & h_{J_lJ_l} \end{pmatrix}.$$

Prenons deux exemples.

Si la suite (T_i) est strictement décroissante alors les groupes H_u, H_s et H_e sont respectivement les groupes des matrices unipotentes triangulaires supérieures, des matrices unipotentes triangulaires inférieures et des matrices diagonales de déterminant 1.

Si $T_1 > T_2 = T_3 = \cdots = T_d$ alors les variétés neutres sont les orbites de l'action du groupe des matrices de la forme

$$h_e = \begin{pmatrix} h_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & \dots & h_{2(l-1)} & h_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & h_{(d-1)2} & \dots & h_{(d-1)(d-1)} & h_{(d-1)d} \\ 0 & h_{d2} & \dots & h_{d(d-1} & h_{dd} \end{pmatrix}.$$

La dimension de ces variétés est $d^2 - 2d + 1$.

Dans tous les cas la dimension des feuilles neutres est supérieure ou égale à $d - 1$. Lorsque $d \geqslant 3$ la transformation T^t n'est donc pas un flot d'Anosov.

1.5. Coordonnées locales

Appelons E_{ij} les éléments de la base canonique de $M(d, \mathbb{R})$. L'ensemble $B_u = \{E_{ij}/i \in J_k, j \in J_l, k > l\}$ forme une base de l'algèbre de Lie du groupe nilpotent H_u. Appelons d_u son cardinal et notons $(Y_{u,1}, \dots, Y_{u,d_u})$ ses éléments par commodité. On définit de même $(Y_{e,1}, \dots, Y_{e,d_e})$ et $(Y_{s,1}, \dots, Y_{s,d_s})$ des bases des algèbres de Lie de H_e et H_s ($d_s = d_u$, $(Y_{e,1}, \dots, Y_{e,d_e})$ contient des éléments de la forme $E_{ii} - E_{jj}$). Soit $D = d^2 - 1$ la dimension de $SL(d, \mathbb{R})$. L'application

$$\begin{aligned} &\Phi : \mathbb{R}^D = \mathbb{R}^{d_s + d_0 + d_u} \longrightarrow G \\ &(t_{s,1}, \dots t_{s,d_s}, t_{e,1}, \dots t_{e,d_e}, t_{u,1} \dots t_{u,d_u}) \\ &\quad \longmapsto \exp\left(\sum_1^{d_u} t_{u,i} Y_{u,i}\right) \exp\left(\sum_1^{d_e} t_{e,i} Y_{e,i}\right) \exp\left(\sum_1^{d_s} t_{s,i} Y_{s,i}\right) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme d'un voisinage de 0 sur un voisinage de l'identité.

Notons $\Delta(r)$ l'ensemble $\{g \in SL(d, \mathbb{R})/\exists h \in M(d, \mathbb{R}), \|h\|_\infty \leqslant r, g = Id + h\}$, $B_0(x, r)$ (resp. $B(\bar{x}, r)$) la boule de centre x (resp. $\bar{x}$) et de rayon r pour la distance d_0 (resp. d). On montre l'existence de constantes C_0 et r_0, telles que, pour $r \leqslant r_0$, on ait :

$$\Delta\left(C_0^{-2} r\right) \subset \Phi\left(\left] - C_0^{-1} r, C_0^{-1} r\right[^D\right) \subset B_0(Id, r) \subset \Phi\left(\left] - C_0 r, C_0 r\right[^D\right) \subset \Delta\left(C_0^2 r\right). \quad \text{(I)}$$

Nous ferons fréquemment référence à cette suite d'inclusions.

1.6. Décomposition de la mesure de Haar

Nous noterons m_s, m_u, m_e les mesures de Haar sur H_s, H_u, H_e. Il existe une fonction multiplicative Θ_e définie sur H_e telle que, pour toute fonction φ à continue à support dans $B_0(Id, r_0)$,

$$\int_G \varphi(g)\, \mathrm{d}\mu(g) = \int_{H_s \times H_e \times H_u} \varphi(h_s h_e h_u) \Theta_e(h_e)\, \mathrm{d}h_s\, \mathrm{d}h_e\, \mathrm{d}h_u.$$

1.7. Rayon d'injectivité

Désignons par π la projection canonique de G sur G/Γ. On remarque que si la restriction de π à $B_0(x,r)$ est bijective alors on peut identifier isométriquement $B(\bar{x},r)$ et $B_0(Id,r)$. Appelons rayon d'injectivité de G/Γ en $\bar{x}$ le rayon r maximal pour lequel cette identification est possible. La variété G/Γ n'est pas compacte. Le rayon d'injectivité peut prendre des valeurs arbitrairement petites.

LEMME 1.4. – *Soit un "parallélipipède" de volume* 1 *dont les arêtes sont de normes inférieures à L. Il existe une constante $c>0$ telle que* :
(a) *toutes les arêtes soient de normes supérieures à c/L^{d-1},*
(b) *l'une des arêtes forme avec les faces qui ne la contiennent pas un angle α tel que $\sin\alpha \geqslant c/L^d$,*
(c) *le parallélipipède contienne une boule de rayon c/L^{2d-1}.*

Soit $\mathcal{D}$ un domaine fondamental inclus dans l'ensemble de Siegel $\mathcal{S}_{2/\sqrt{3},1/2}$. Pour tout entier positif k notons E_k l'ensemble $\{x \in G/\|x\|_\infty \in [\mathrm{e}^{k-1},\mathrm{e}^k]\}$. Un calcul d'intégrale montre qu'il existe une constante $c_1>0$ telle que $E_k \cap \mathcal{D}$ est de μ-mesure inférieure à $\mathrm{e}^{-c_1 k}$.

PROPOSITION 1.5. – *Il existe c_0 tel que, pour tout k et tout x appartenant à $\mathcal{D}\cap E_k$, la projection canonique*

$$\pi : G \longrightarrow G/\Gamma : x \longmapsto x\Gamma = \bar{x}$$

est un difféomorphisme de $\Phi(]-c_0\mathrm{e}^{-k/c_0}, c_0\mathrm{e}^{-k/c_0}[^D)x$ sur son image.

Démonstration. – Soient x un élément de $E_k \cap D$ et γ un élément de Γ différent de l'identité. Les vecteurs lignes de x sont de normes inférieures à e^k et forment un parallélipipède de volume 1 ($x \in SL(d,\mathbb{R})$). On peut donc affirmer (lemme 1.4 a) et b)) que l'un au moins des vecteurs lignes de x :
– est de norme supérieure à $c\mathrm{e}^{-k(d-1)}$,
– forme avec l'orthogonal un angle α tel que $\sin\alpha \geqslant c\mathrm{e}^{-kd}$.
Comme les coefficients de $x(\gamma - Id)$ sont les produits scalaires des vecteurs lignes de x par les vecteurs colonnes de $\gamma - Id \neq 0$ on en déduit :

$$\|x(\gamma - Id)\|_\infty \geqslant c\mathrm{e}^{-(2d-1)k}.$$

Cela signifie que $x + \{y/\|y\|_\infty < c\mathrm{e}^{-(2d-1)k}\} = (Id + \{yx^{-1}/\|y\|_\infty \leqslant c\mathrm{e}^{-(2d-1)k}\})x$ ne contient aucun élément de $x\Gamma$ autre que x. Grâce au lemme 1.4 (c), comme $\|x^{-1}\|_\infty$ est inférieur à $d!\mathrm{e}^{dk}$, on montre qu'il existe une constante $c_2>0$ telle que l'ensemble $(Id + \{yx^{-1}/\|y\|_\infty < c\mathrm{e}^{-(2d-1)k}\})$ contienne $\Delta(c_2\mathrm{e}^{-(d(2d-1)+2d-1)k})$. On déduit alors le résultat des inclusions (I). □

1.8. Mélange

Soient φ et ψ deux fonctions indéfiniment dérivables sur G/Γ de moyennes nulles. Grâce à la théorie des représentations des groupes de Lie, nous allons donner une majoration du produit scalaire $\langle T^n\varphi, \psi\rangle$. Nous ne donnerons pas de détail, nous contentant d'indiquer comment les résultats classiques ([4,23]) s'appliquent. Nous reprenons un raisonnement trouvé dans [16].

Soit A^+ l'ensemble des matrices diagonales de déterminant un dont les coefficients diagonaux a_i sont positifs et forment une suite décroissante. Soit Ξ la fonction de Harish–Chandra, équivalente à $4\pi \log a/a$ en l'infini, définie par :

$$\Xi(a) = \int_0^{2\pi} \left| \frac{\cos^2\theta}{a^4} + \sin^2\theta \right|^{-1/2} \mathrm{d}\theta.$$

Soit ã un élément de A^+. Notons $\Psi(\tilde{a})$ la quantité

$$\Psi(\tilde{a}) = \min_{i\neq j} \Xi\left(\sqrt{a_i/a_j}\right).$$

On trouvera le théorème suivant dans le livre de Howe et Tan ([15] page 215).

THÉORÈME 1.6. – *Soit* ã *un élément de* A^+*. Soit* K *un sous-groupe compact maximal de* $SL(d,\mathbb{R})$*. Soit* U *une représentation unitaire de* $SL(d,\mathbb{R})$ $(d \geqslant 3)$ *sans vecteur invariant. Alors, si* u *et* v *sont deux vecteurs* K*-finis, on a*

$$|\langle u, U(\tilde{a})v\rangle| \leqslant \|u\|\|v\|(\dim \mathrm{Vect}\, Ku \dim \mathrm{Vect}\, Kv)^{1/2}\Psi(\tilde{a}).$$

Une représentation unitaire sans vecteur invariant, U, de $SL(d,\mathbb{R})$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{F}$ induit une représentation du sous-groupe compact maximal $K = SO(d,\mathbb{R})$. Cette représentation se décompose en une somme directe hilbertienne de représentations irréductibles de dimensions finies. Notons $\hat{K}$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de K et δ un élément de $\hat{K}$.

Fixons une base du système de racines, R, de $\mathcal{K}$ l'algèbre de Lie de K. Appelons W la chambre de Weyl associée. Chaque représentation irréductible de K est déterminée de façon unique par une forme linéaire appartenant à un réseau et à $\overline{W}$ (appelé poids dominant de la représentation). Soient δ un élément de $\hat{K}$ et $\gamma(\delta)$ le poids dominant correspondant.
La formule de Weyl donne la dimension, $d(\delta)$, de δ en fonction de γ :

$$d(\delta) = \prod_{\alpha\in R_+} \frac{\langle\alpha, \gamma+\rho\rangle}{\langle\alpha, \rho\rangle},$$

où R_+ est l'ensemble des racines positives et ρ la demi-somme des racines positives. Pour tout $\delta \in \hat{K}$, notons ξ_δ le caractère de δ et $\chi_\delta = d(\delta)\xi_\delta$. Posons

$$P(\delta) = U(\overline{\chi_\delta}) = d(\delta) \int_K \overline{\xi_\delta(k)} U(k)\, \mathrm{d}k.$$

Les relations d'orthogonalité sur les caractères permettent de montrer que $P(\delta)$ est un projecteur. C'est le projecteur sur la composante isotypique $\mathcal{F}_\delta$ de $\mathcal{F}$. On a

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{\delta \in \hat{K}} P(\delta)\mathcal{F}.$$

Un vecteur v appartenant à $\mathcal{F}_\delta$ est K-fini :

$$\dim \mathrm{Vect}\, Kv \leqslant d(\delta)^2.$$

On dit qu'un vecteur v est indéfiniment dérivable si l'application $k \mapsto U(k)v$ est indéfiniment dérivable. On définit sur l'espace des vecteurs indéfiniment dérivables la représentation dérivée de U, qui est une représentation de l'algèbre de Lie de K et qui s'étend en une représentation de l'algèbre enveloppante universelle de $\mathcal{K}$. Nous utiliserons la même lettre U pour désigner ces trois représentations.

Soit $X_1, \ldots, X_n$ une base orthonormale pour un produit scalaire invariant sur $\mathcal{K}$. L'opérateur $\Omega = 1 - \sum_{i=1}^n X_i^2$ appartient au centre de l'algèbre enveloppante universelle de $\mathcal{K}$. On en déduit (lemme de Schur) que, si μ_δ est une représentation appartenant à δ, il existe $c(\delta)$ tel que $\mu_\delta(\Omega) = c(\delta)\mu_\delta(1)$. Les opérateurs $\Omega(X_i)$ étant anti-hermitiens, $c(\delta)$ est un nombre réel supérieur ou égal à 1. On montre (cf. [2]) qu'il existe un produit scalaire Q tel que $c(\delta) = 1 + Q(\gamma(\delta) + \rho) - Q(\rho)$. Pour tout vecteur indéfiniment dérivable v, on a d'une part

$$P(\delta)U(\Omega)v = c(\delta)P(\delta)v,$$

d'autre part $\|P(\delta)v\| \leqslant \|v\|$, ce qui entraîne que, pour tout entier m positif, pour tout δ appartenant à K, on a

$$\|P(\delta)v\| \leqslant c(\delta)^{-m} \left\|U\left(\Omega^m\right)v\right\|.$$

L'ensemble $\hat{K}$ s'identifie à l'ensemble des points d'un réseau appartenant à l'adhérence de la chambre de Weyl W. Comme la fonction $d(\delta)$ est polynomiale et la fonction $c(\delta)$ est quadratique, si m est suffisamment grand la somme $\sum_{\delta \in \hat{K}} d(\delta)c(\delta)^{-m}$ est finie.

On peut alors énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 1.7. – *Soient v et w deux vecteurs indéfiniment dérivables d'une représentation U sans vecteur invariant. Il existe des constantes $C > 0$ et m telles que*

$$\left|\langle U(\tilde{a})v, w\rangle 0\right| \leqslant C\Psi(\tilde{a})\left\|\Omega^m v\right\| \left\|\Omega^m w\right\|.$$

Démonstration. – On a

$$\begin{aligned}\left|\langle U(\tilde{a})v, w\rangle\right| &= \left|\left\langle \sum_{\delta \in \hat{K}} U(\tilde{a})P(\delta)v, \sum_{\zeta \in \hat{K}} P(\zeta)w \right\rangle\right| \\ &\leqslant C\Psi(\tilde{a}) \sum_{\delta \in \hat{K}, \zeta \in \hat{K}} \|P(\zeta)w\| \|P(\delta)v\| d(\delta)d(\zeta)\end{aligned}$$

$$\leqslant C\Psi(\tilde{a})\|\Omega^m v\|\,\|\Omega^m w\| \sum_{\delta\in\hat{K},\zeta\in\hat{K}} d(\delta)d(\zeta)c(\delta)^{-m}c(\zeta)^{-m}$$

$$\leqslant C\Psi(\tilde{a})\|\Omega^m v\|\,\|\Omega^m w\| \Big(\sum_{\delta\in\hat{K}} d(\delta)c(\delta)^{-m}\Big)^2. \qquad \square$$

COROLLAIRE 1.8. – *Soient v et w deux fonctions indéfiniment dérivables définies sur G/Γ d'intégrales nulles. Il existe $\zeta > 1$, $C_0' > 0$ et un entier m tel que*

$$|\langle T^n v, w\rangle| \leqslant C_0'\|\Omega^m v\|\,\|\Omega^m w\|\zeta^{-|n|}. \tag{M}$$

Démonstration. – Le théorème précédent s'applique à la représentation régulière sur l'espace $L_0^2(SL(d,\mathbb{R})/SL(d,\mathbb{Z}))$ (qui n'a pas de vecteur invariant). $\square$

2. Répartition des variétés instables

Dans ce paragraphe et les deux suivants nous allons prouver le théorème A′. La démonstration repose sur le fait que les feuilles dilatées par T sont bien réparties dans G/Γ. Il est nécessaire de disposer d'une information quantitative. Nous l'obtenons ici (comme dans [9]) à partir du résultat de décorrélation rappelé en I. Ce lien entre la décorrélation et la répartition des feuilles instables a déjà été utilisé par différents auteurs (cf. par exemple [17]).

Appelons $\Delta_u(r)$ l'ensemble des matrices unipotentes appartenant à H_u dont les coefficients non diagonaux sont de valeurs absolues inférieures à r.

Fixons $\varepsilon > 0$ et considérons un ensemble $F \subset H_u$ contenant la “boule” $\Delta_u(\varepsilon)$. Désignons par $B_s(Id,\varepsilon)$ (resp. $B_e(Id,\varepsilon)$) l'ensemble $H_s \cap B_0(Id,\varepsilon)$ (resp. $H_e \cap B_0(Id,\varepsilon)$).

Notons $\mathcal{U}_n$ l'ensemble $T^nB_s(Id,\varepsilon)T^{-n} \times T^nB_e(Id,\varepsilon)T^{-n} \times T^nFT^{-n} \subset H_s \times H_e \times H_u$. Si l'application

$$\mathcal{U}_0 \longrightarrow G : (h_s,h_e,h_u) \longmapsto h_sh_eh_u\bar{x}$$

est un difféomorphisme sur son image, notée $U_{\bar{x}}^{F,\varepsilon}$, nous dirons que F définit un (F,ε)-pavé en $\bar{x}$.

PROPOSITION 2.1. – *Soit φ une fonction appartenant à la classe $\mathcal{C}$. Pour tout $\rho > 1$, $n \geqslant 1$, $\varepsilon > 0$, $F \subset H_u$ contenant $\Delta_u(\varepsilon)$, toute ρ-identité approchée (χ_n) et tout $\bar{x}$ tels que $U = U_{\bar{x}}^{F,\varepsilon}$ soit un (F,ε)-pavé, il existe C_0'' et p tels qu'on ait l'inégalité :*

$$\left|\frac{1}{m_u(T^nFT^{-n})}\int_{T^nFT^{-n}} \varphi_{[\frac{n-1}{M}]}(h_uT^n\bar{x})\,\mathrm{d}h_u\right|$$
$$\leqslant C_0''\left(\frac{\bar{\mu}(\partial U(\rho^{-n})) + \zeta^{-n}\rho^{2C_0''n}}{\varepsilon^D} + \rho^{C_0''n/M}\varepsilon^p\right).$$

La constante ζ est celle que nous avons introduite au corollaire 1.8. Les fonctions φ_k sont les convolées de φ avec les fonctions χ_k et la constante p est la constante intervenant dans la définition de la classe $\mathcal{C}$ (voir l'introduction).

Démonstration. – L'inégalité de mélange (M) (rappelée dans le paragraphe 1) appliquée à $\chi_n * 1_U$ et $\varphi_{[\frac{n-1}{M}]}$, le fait que φ appartienne à $\mathcal{C}$ et les propriétés de la suite χ_n assurent l'existence d'une constante C_1' telle que :

$$\left|\left\langle T^{-n}\chi_n * 1_U, \varphi_{[\frac{n-1}{M}]}\right\rangle\right| \leqslant C_0'\left\|\Omega^m \chi_n * 1_U\right\|_2\left\|\Omega^m \varphi_{[\frac{n-1}{M}]}\right\|_2 \zeta^{-n} \leqslant C_1'\rho^{2C_1'n}\zeta^{-n}.$$

On a aussi

$$\left|\left\langle T^{-n}1_U, \varphi_{[\frac{n-1}{M}]}\right\rangle - \left\langle T^{-n}(\chi_n * 1_U), \varphi\right\rangle\right| \leqslant \|\varphi_{[\frac{n-1}{M}]}\|_2 \bar{\mu}\left(\partial U\left(\rho^{-n}\right)\right).$$

Par ailleurs, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\left\langle T^{-n}1_U, \varphi_{[\frac{n-1}{M}]}\right\rangle &= \int\limits_{T^nU} \varphi_{[\frac{n-1}{M}]}(\bar{y})\,\mathrm{d}\bar{\mu}(\bar{y}) \\ &= \int\limits_{\mathcal{U}_n} \Theta_e(h_e)\varphi_{[\frac{n-1}{M}]}\left(h_s h_e h_u T^n \bar{x}\right)\mathrm{d}h_s\,\mathrm{d}h_e\,\mathrm{d}h_u.\end{aligned}$$

Les ensembles $B_e(Id,\varepsilon)$ et $B_s(Id,\varepsilon)$ sont respectivement invariants et contractés par T, donc, pour tout n, et tout $(h_s,h_e) \in B_s(Id,\varepsilon)\times B_e(Id,\varepsilon)$, il existe une constante $C_2' > 0$ telle que :

$$d\left(T^n h_s h_e h_u T^{-n} T^n \bar{x}, T^n h_u T^{-n} T^n \bar{x}\right) \leqslant C_2'\varepsilon.$$

Comme $\varphi_{[\frac{n-1}{M}]}$ est $(C\rho^{C[\frac{n-1}{M}]}, p)$-höldérienne, pour tout (h_s,h_e,h_u) appartenant à $\mathcal{U}_n$, on a :

$$\left|\varphi_{[\frac{n-1}{M}]}\left(h_s h_e h_u T^n \bar{x}\right) - \varphi_{[\frac{n-1}{M}]}\left(h_u T^n \bar{x}\right)\right| \leqslant C\rho^{C[\frac{n-1}{M}]} C_2'^{\,p}\varepsilon^p,$$

donc,

$$\left|\left\langle T^{-n}1_U, \varphi_{[\frac{n-1}{M}]}\right\rangle - \int\limits_{\mathcal{U}_n} \Theta_e(h_e)\varphi_{[\frac{n-1}{M}]}\left(h_u T^n \bar{x}\right)\mathrm{d}h_s\,\mathrm{d}h_e\,\mathrm{d}h_u\right| \leqslant CC_2'^{\,p}\rho^{C[\frac{n-1}{M}]}\varepsilon^p\bar{\mu}(U).$$

En utilisant les inégalités précédentes et en divisant par $\bar{\mu}(U))$ (qui est supérieur à $c\varepsilon^D$ pour une certaine constante c), on obtient l'existence d'une constante $C_0'' > 0$ telle que :

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{m_u(T^nFT^{-n})}\int\limits_{T^nFT^{-n}} \varphi_{[\frac{n-1}{M}]}\left(h_u T^n \bar{x}\right)\mathrm{d}h_u\right| \\ &\quad\leqslant C_0''\left(\frac{\bar{\mu}(\partial U(\rho^{-n})) + \zeta^{-n}\rho^{2C_0''n}}{\varepsilon^D} + \rho^{C_0''[\frac{n-1}{M}]}\varepsilon^p\right). \qquad \square\end{aligned}$$

3. La filtration

Comme dans le cas $d = 2$ traité dans [9], nous construisons la fitration $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ permettant d'appliquer le théorème 2.1 à partir d'un recouvrement $\mathcal{R}$. Il nous faut imposer quelques conditions à $\mathcal{R}$. Rappelons que E_k désigne l'ensemble des matrices dont la norme infinie est comprise entre e^{k-1} et e^{k}. La constante c_0 a été introduite à la proposition 1.5 la constante r_0 au paragraphe 1.5 (Coordonnées locales).

LEMME 3.1. – *Il existe $C > 0$ tel que pour tout k on puisse recouvrir $E_k \cap \mathcal{D}$ par au plus e^{Ck} ensembles de la forme $\Phi(]-c_0\mathrm{e}^{-k/c_0}, c_0\mathrm{e}^{-k/c_0}[^D)x$.*

Démonstration. – Soit x une matrice appartenant à $E_k \cap \mathcal{D}$. Dans $GL(d,\mathbb{R})$, l'ensemble $\Delta(C_0^{-1}c_0\mathrm{e}^{-k/c_0})x$ est un parallélipipède de volume $(C_0^{-1}c_0)^{d^2}\mathrm{e}^{-kd^2/c_0}$ contenu dans une boule de rayon e^{k+1}. Il contient donc (lemme 1.3) une boule de rayon $c\mathrm{e}^{-k/c'}$ où c' est une constante indépendante de k. L'ensemble $E_k \cap \mathcal{D}$ est inclus dans l'ensemble des matrices ayant des coefficients inférieurs à e^k qui s'identifie à l'hypercube de côtés e^k dans $\mathbb{R}^{d^2}$. Cet hypercube est la réunion de $(1/c)^{d^2}\mathrm{e}^{(1+1/c')d^2k}$ hypercubes de côté $c\mathrm{e}^{-k/c'}$. L'énoncé du lemme en découle (on utilise encore une fois les inclusions (I)). □

Choisissons un recouvrement $\mathcal{R}$ de G/Γ infini dénombrable vérifiant, pour certaines constantes positives C_1 et C_2, les conditions suivantes :

(R1) Le recouvrement est décrit par une famille $(x_i,\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}} \in (G\times\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$:

$$\mathcal{R} = \{\Phi(]-\varepsilon_i,\varepsilon_i[^D)\bar{x}_i\colon\ i\in\mathbb{N}\}.$$

(R2) Pour tout i, l'application

$$]-C_1\varepsilon_i, C_1\varepsilon_i[^D \to G/\Gamma : v \mapsto \Phi(v)\bar{x}_i$$

est un difféomorphisme de $]-C_1\varepsilon_i, C_1\varepsilon_i[^D$ sur son image.

(R3) Pour tout i, les éléments de $\mathcal{R}$ dont l'intersection avec $\Phi(]-\varepsilon_i,\varepsilon_i[^D)\bar{x}_i$ est non vide sont tous inclus dans $\Phi(]-C_1\varepsilon_i, C_1\varepsilon_i[^D)\bar{x}_i$.

(R4) Le nombre d'ensembles appartenant à $\mathcal{R}$ dont l'intersection avec $\overline{E_k}$ n'est pas vide est inférieur à e^{C_2k}.

(R5) Pour tout i, $\varepsilon_i \leqslant \min(\|x_i\|_\infty^{-C_1}, r_0)$.

La construction d'un tel recouvrement peut se mener de la manière suivante. Il existe une constante C telle que, pour tout $\gamma\in\Gamma$, pour tout $x\in G$, on ait

$$(C\|\gamma\|)^{-1}\|x\gamma\| \leqslant \|x\| \leqslant C\|\gamma^{-1}\|\|x\gamma\|. \tag{$*$}$$

Pour tout $k\geqslant 0$, on recouvre $E_k\cap\mathcal{D}$ par au plus e^{Ck} ensemble de la forme $\Phi(]-c_0\mathrm{e}^{-k/c_0}, c_0\mathrm{e}^{-k/c_0}[^D)x$ de telle sorte que la réunion des ensembles considérés soit incluse dans un domaine de Siegel $\mathcal{S}_{t,u}$ (lemme 3.1). Au domaine $\mathcal{S}_{t,u}$ nous avons associé dans le théorème 1.2 l'ensemble fini $\mathcal{F}_{t,u}$ inclus dans Γ. Grâce à l'encadrement $(*)$ on sait qu'il existe un nombre C' tel que si x appartient à E_k alors, pour tout γ appartenant à $\mathcal{F}_{t,u}$, $x\gamma$ appartient à $\bigcup_{j=-C'}^{C'} E_{k+j}$. Notons C_1 la constante $C_0^2(1+2\mathrm{e}^{C'/c_0})$. L'application $]-c_0\mathrm{e}^{-k/c_0}, c_0\mathrm{e}^{-k/c_0}[^D \to G/\Gamma : v\mapsto \Phi(v)\bar{x}$ est un difféomorphisme de $]-c_0\mathrm{e}^{-k/c_0}, c_0\mathrm{e}^{-k/c_0}[^D$ sur son image (proposition 1.5). On peut recouvrir chaque ensemble $\Phi(]-c_0\mathrm{e}^{-k/c_0}, c_0\mathrm{e}^{-k/c_0}[^D)x$ par un nombre fini d'ensembles de la forme $\Phi(]C_1^{-1}c_0\mathrm{e}^{-k/c_0}, C_1^{-1}c_0\mathrm{e}^{-k/c_0}[^D)x_i$ de manière à avoir la propriété R2.

Si y est un point appartenant à $\Phi(]-\varepsilon_i,\varepsilon_i[^D)\bar{x}_i \cap \Phi(]-\varepsilon_j,\varepsilon_j[^D)\bar{x}_j$ alors la distance $d(\bar{x}_i,\bar{x}_j)$ est inférieure à $C_0(\varepsilon_i+\varepsilon_j)$ (inclusions (I)) et $\Phi(]-\varepsilon_j,\varepsilon_j[^D)\bar{x}_j \subset$

$B_0(Id, C_0(\varepsilon_i + 2\varepsilon_j))\bar{x}_i \subset \Phi(]-C_0^2(\varepsilon_i + 2\varepsilon_j), C_0^2(\varepsilon_i + 2\varepsilon_j)[^D)\bar{x}_i$. La propriété R3 en découle car on peut majorer uniformément $\varepsilon_j/\varepsilon_i$ par e^{C'/c_0}. En effet $\Phi(]-\varepsilon_i, \varepsilon_i[^D)\bar{x}_i \cap \Phi(]-\varepsilon_j, \varepsilon_j[^D)\bar{x}_j$ ne peut être non-vide que s'il existe $\gamma \in \mathcal{F}_{t,u}$ tel que $x_j\gamma$ appartienne à $(E_{k-1} \cup E_k \cup E_{k+1}) \cap \mathcal{S}_{t,u}$ (théorème 1.2) et donc $\varepsilon_j/\varepsilon_i$ est inférieur à e^{C'/c_0}.

L'intersection d'un ensemble $\Phi(]-\varepsilon_i, \varepsilon_i[^D)\bar{x}_i$ avec la projection canonique de E_k n'est non vide que si x_i appartient à $\bigcup_{j=-C'}^{C'} E_{k+j}$. On en déduit que la propriété R4 est vérifiée avec C_2 une constante dépendant de C', C et C_1. La propriété R5 ne pose pas de problème.

Soit $\bar{x}$ dans G/Γ, notons $\varepsilon_{\bar{x}}$ le plus grand des ε_i tels que $\bar{x}$ appartienne à $\Phi(]-\varepsilon_i, \varepsilon_i[^D)\bar{x}_i$. Il existe un entier i tel que $\varepsilon_{\bar{x}} = \varepsilon_i$ et $\bar{x}$ soit l'image par π d'un point x de G appartenant à $\Phi(]-\varepsilon_i, \varepsilon_i[^D)x_i$. Comme (propriété (R5)) $\varepsilon_i \leqslant \|x_i\|_\infty^{-C_1}$, on montre en utilisant les inclusions (I) que $\varepsilon_{\bar{x}} \leqslant (1 + C_0 r_0)\|x\|_\infty^{-C_1}$.

Définissons la partition $\mathcal{Q}$ de G/Γ de la façon suivante :

$$\mathcal{Q} = \left\{ \bigcap_{R\in\mathcal{R}} A_R / A_R = R \text{ ou } {}^cR \right\},$$

puis la partition $\mathcal{P}$ par

$$\mathcal{P}(\bar{x}) = \mathcal{Q}(\bar{x}) \cap \Delta_u(C_1\varepsilon_{\bar{x}})\bar{x},$$

enfin

$$\mathcal{P}_0^\infty(\bar{x}) = \mathcal{P}(\bar{x}) \cap T\mathcal{P}(T^{-1}\bar{x}) \cap T^2\mathcal{P}(T^{-2}\bar{x}) \cap \cdots.$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ appelons $\mathcal{A}_n$ la tribu dont les atomes sont les éléments de $T^{-n}\mathcal{P}_0^\infty$. L'atomes de $\mathcal{A}_n$ contenant $\bar{x}$ est

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_n(\bar{x}) &= T^{-n}\mathcal{P}(T^n\bar{x}) \cap T^{-(n-1)}\mathcal{P}(T^{n-1}\bar{x}) \cap T^{-(n-2)}\mathcal{P}(T^{n-2}\bar{x}) \cap \cdots \\ &= T^{-n}\mathcal{A}_0(T^n\bar{x}).\end{aligned}$$

L'égalité $\mathcal{A}_0(\bar{x}) = \mathcal{P}(\bar{x}) \cap \mathcal{A}_{-1}(\bar{x})$ montre que les atomes de $\mathcal{A}_{-1}$ sont des réunions finies d'atomes de $\mathcal{A}_0$. La famille $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifie donc la condition $\mathcal{A}_n \subset T^{-1}\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_{n+1}$.

Définissons l'ensemble $W_n^{\delta,\beta}$ par $(\delta, \beta \in]1, \infty[)$

$$W_n^{\delta,\beta} = \{\bar{x} \in G/\Gamma / \forall k \geqslant 0 \ \Delta_u(\beta^n\delta^{-k})T^{-k}\bar{x} \subset \mathcal{Q}(T^{-k}\bar{x})\}.$$

Si $\bar{x}$ appartient à $W_n^{\delta,\beta}$ en particulier on a l'inclusion $\Delta_u(\beta^n)\bar{x} \subset \mathcal{R}(\bar{x})$, donc $\varepsilon_{\bar{x}} \geqslant \beta^n$. Le point $\bar{x}$ est donc l'image par π (la projection sur G/Γ) d'un point x de G de norme $\|\cdot\|_\infty$ inférieure à $((1 + C_0 r_0)\beta^{-n})^{1/C_1}$.

Le groupe H_u est dilaté par la transformation T : il existe $\xi > 1$ tel que, pour tout $r > 0$, l'ensemble $T\Delta_u(r)T^{-1}$ contienne l'ensemble $\Delta_u(\xi r)$. On en déduit le lemme suivant.

LEMME 3.2. – *Si $\delta < \xi$ alors, pour $\bar{x}$ appartenant à $W_n^{\delta,\beta}$, on a l'inclusion*

$$\Delta_u(\beta^n)\bar{x} \subset \mathcal{P}_0^\infty(\bar{x}).$$

Démonstration. – Soit $\bar{x}$ un élément de $W_n^{\delta,\beta}$. Par définition, pour tout entier $k \geqslant 0$, on a

$$\Delta_u\left(\beta^n\delta^{-k}\right)T^{-k}\bar{x} \subset \mathcal{P}\left(T^{-k}\bar{x}\right),$$

donc

$$\Delta_u\left(\beta^n\delta^{-k}\xi^k\right)\bar{x} \subset T^k\Delta_u\left(\beta^n\delta^{-k}\right)T^{-k}\bar{x} \subset T^k\mathcal{P}\left(T^{-k}\bar{x}\right).$$

Si $\delta < \xi$, on obtient l'inclusion annoncée :

$$\Delta_u\left(\beta^n\right)\bar{x} \subset \bigcap_{k\geqslant 0} T^k\mathcal{P}\left(T^{-k}\bar{x}\right) = \mathcal{P}_0^\infty(\bar{x}). \qquad \square$$

LEMME 3.3. – *Il existe $C_3 > 0$ et $q > 0$ tels que, pour tout $\varepsilon > 0$, on ait*

$$\bar{\mu}\left\{\bar{x} \in G/\Gamma\colon\ \Delta_u(\varepsilon)\bar{x} \cap \partial\mathcal{Q}(\bar{x}) \neq \emptyset\right\} \leqslant C_3\varepsilon^q.$$

Démonstration. – L'ensemble $\overline{E_k}$ est recouvert par la réunion d'au plus e^{C_2k} pavés de la forme $\Phi(]-\varepsilon_i, \varepsilon_i[^D)x_i$. On a donc

$$\bar{\mu}\left\{\bar{x} \in \overline{E_k}\colon\ \Delta_u(\varepsilon)\bar{x} \cap \partial\mathcal{Q}(\bar{x}) \neq \emptyset\right\} \leqslant \mathrm{e}^{C_2k}\varepsilon.$$

On a vu (paragraphe 1.7) que pour tout k, on a $\bar{\mu}(\overline{E_k}) \leqslant \mathrm{e}^{-c_1k}$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
&\bar{\mu}\left\{\bar{x} \in G/\Gamma\colon\ \Delta_u(\varepsilon)\bar{x} \cap \partial\mathcal{Q}(\bar{x}) \neq \emptyset\right\}\\
&\quad\leqslant \sum_0^L \bar{\mu}\left\{\bar{x} \in \overline{E_k}\colon\ \Delta_u(\varepsilon)\bar{x} \cap \partial\mathcal{Q}(\bar{x}) \neq \emptyset\right\} + \bar{\mu}\left(\bigcup_{L+1}^\infty \overline{E_k}\right)\\
&\quad\leqslant \sum_0^L \mathrm{e}^{C_2k}\varepsilon + \sum_{L+1}^\infty \mathrm{e}^{-c_1k}\\
&\quad\leqslant \mathrm{e}^{L+1}\varepsilon + \mathrm{e}^{-c_1(L+1)}/\left(1-\mathrm{e}^{-c_1}\right).
\end{aligned}$$

En choisissant L convenablement en fonction de ε on obtient le résultat. $\square$

LEMME 3.4. –

$$\bar{\mu}\left({}^cW_n^{\delta,\beta}\right) \leqslant C_4\beta^{nq}.$$

Démonstration. – C'est une conséquence de l'invariance de $\bar{\mu}$ par T et du lemme 3.3 :

$$\begin{aligned}
\bar{\mu}\left({}^cW_n^{\delta,\beta}\right) &= \bar{\mu}\left(\left\{\bar{x} \in G/\Gamma/\exists k \geqslant 0\,\Delta_u\left(\beta^n\delta^{-k}\right)T^{-k}\bar{x} \cap \partial\mathcal{Q}\left(T^{-k}\bar{x}\right) \neq \emptyset\right)\right\}\\
&\leqslant \sum_{k=0}^\infty \bar{\mu}\left(\left\{\bar{x} \in G/\Gamma/\Delta_u\left(\beta^n\delta^{-k}\right)T^{-k}\bar{x} \cap \partial\mathcal{Q}\left(T^{-k}\bar{x}\right) \neq \emptyset\right)\right\}\\
&\leqslant \sum_{k=0}^\infty C_3\left(\beta^n\delta^{-k}\right)^q. \qquad \square
\end{aligned}$$

Pour montrer la bonne répartition des atomes de $\mathcal{A}_n$ nous avons également besoin d'une information sur la régularité de leurs bords (il faut majorer le terme $\bar{\mu}(\partial U(\rho^{-n}))$

dans l'inégalité de la proposition 2.1). La nilpotence du groupe H_u permet d'obtenir cette information par des arguments algébriques très simples.

LEMME 3.5. – *Il existe un compact $K \subset \mathbb{R}^{d_u}$ tel que, pour tout k, pour tout $\bar{x} \in \overline{E_k}$, il existe un ensemble $E_{\bar{x}}$ inclus dans K dont le bord est constitué d'au plus $d^2 \mathrm{e}^{C_2 k}$ morceaux de surfaces algébriques de degré d tel que l'on ait* :

$$\mathcal{P}(\bar{x}) = \exp(E_{\bar{x}})\bar{x}.$$

Démonstration. – Soit $\bar{x} \in G/\Gamma$. Un ensemble R étant donné, convenons que $\tilde{R}(\bar{x})$ désigne R si $\bar{x}$ appartient à R, son complémentaire sinon. La propriété R4 du recouvrement $\mathcal{R}$ assure qu'il existe un entier $l \leqslant \mathrm{e}^{C_2 k}$ et une famille $i_1, \ldots, i_l$ tels que l'ensemble $\mathcal{Q}(\bar{x})$ soit défini par

$$\mathcal{Q}(\bar{x}) = \bigcap_{j=1}^{l} \widetilde{R(\bar{x}_{i_j})}.$$

La propriété R3 entraîne que, pour tout $j = 1, \ldots, l$, il existe $(t_{u,1}, \ldots, t_{u,d_u}, \ldots, t_{s,d_s})$ appartenant à $]-C_1\varepsilon_{i_j}, C_1\varepsilon_{i_j}[^D$ tels que

$$\bar{x} = \exp\left(\sum_{k=1}^{d_u} t_{u,k} Y_{u,k}\right) \exp\left(\sum_{k=1}^{d_e} t_{e,k} Y_{e,k}\right) \exp\left(\sum_{k=1}^{d_s} t_{s,k} Y_{s,k}\right) \bar{x}_{i_j}.$$

Considérons un d_u-uplet $(v_1, \ldots, v_{d_u})$. Comme H_u est nilpotent de degré d, il existe des polynômes $P_k^j(v)$ de degrés inférieurs ou égaux à d dont les coefficients dépendent de $(t_{u,1}, \ldots, t_{u,d_u})$ tels que

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{d_u} v_k Y_{u,k}\right)\bar{x} = \exp\left(\sum_{k=1}^{d_u} P_k(v) Y_{u,k}\right) \exp\left(\sum_{k=1}^{d_e} t_{e,k} Y_{e,k}\right) \exp\left(\sum_{k=1}^{d_s} t_{s,k} Y_{s,k}\right) \bar{x}_{i_j}.$$

Le point $\exp(\sum_{k=1}^{d_u} v_k Y_{u,k})\bar{x}$ appartient à $\Phi(]-\varepsilon_{i_j}, \varepsilon_{i_j}[^D)\bar{x}_{i_j}$ si et seulement si, pour tout i, $P_i(v)$ appartient à $]-\varepsilon_{i_j}, \varepsilon_{i_j}[$. On en déduit que l'ensemble défini dans l'énoncé de la proposition est décrit par

$$E_{\bar{x}} = \left\{v \in]-C_1\varepsilon_{\bar{x}}, C_1\varepsilon_{\bar{x}}[^{d_u} / \ \forall (k, j) \in [1, d_u] \times [1, l],\ P_k^j(v) \in \text{ou} \notin]-\varepsilon_{i_j}, \varepsilon_{i_j}[\right\}. \qquad \square$$

Notons λ_u la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{d_u}$.

LEMME 3.6. – *Soient K un compact de $\mathbb{R}^{d_u}$ et ε un réel positif. Il existe une constante C_5 dépendant uniquement de K telle que, pour toute hypersurface algébrique $S \subset \mathbb{R}^{d_u}$ de degré inférieur ou égal à d, on ait*

$$\lambda_u\{x \in K / d(x, S) < \varepsilon\} \leqslant C_5 \varepsilon.$$

LEMME 3.7. – *Il existe une constante $C_6 > 0$ telle que, si $\bar{x} \in W_n^{\delta,\beta}$ alors on a*

$$m_u\left\{\bar{y} \in \mathcal{P}_0^\infty(\bar{x}) / \Delta_u(\varepsilon)\bar{x} \cap \partial\mathcal{P}_0^\infty(\bar{x}) \neq \emptyset\right\} < C_6 \beta^{-C_6 n} \varepsilon.$$

Démonstration. – Soit $\bar{x}$ un élément de $W_n^{\delta,\beta}$. Par définition, pour tout entier $k \geqslant 0$, on a

$$\Delta_u\big(\beta^n\delta^{-k}\big)T^{-k}\bar{x} \subset \mathcal{P}\big(T^{-k}\bar{x}\big),$$

donc

$$\Delta_u\big(\beta^n\delta^{-k}\xi^k\big)\bar{x} \subset T^k\mathcal{P}\big(T^{-k}\bar{x}\big).$$

Par ailleurs on sait que $\mathcal{P}(\bar{x}) \subset \Delta_u(r_0)\bar{x}$, donc, si $\beta^n\delta^{-k}\xi^k > r_0$, l'ensemble $\mathcal{P}(\bar{x})$ est inclus dans $\Delta_u(\beta^n\delta^{-k}\xi^k)\bar{x}$. On en déduit que $\mathcal{P}_0^\infty(\bar{x})$ est égal à

$$\mathcal{P}_0^\infty(\bar{x}) = \bigcap_{k=0}^{[(\ln r_0 + n\ln\beta)/\ln(\xi/\delta)]} T^k\mathcal{P}\big(T^{-k}\bar{x}\big).$$

Comme on l'a vu un peu plus haut il existe un point x de G se projetant sur $\bar{x}$ de norme inférieure à $((1+C_0r_0)\beta^{-n})^{1/C_1}$. Il existe donc une constante C' telle que, pour tout entier k compris entre 0 et $[(\ln r_0 - n\ln\beta)/\ln(\xi/\delta)]$, on ait $\|T^kx\|_\infty \leqslant \mathrm{e}^{C'n\log\beta}$. Cela entraîne (propriété R4) que le bord de $\mathcal{P}_0^\infty(\bar{x})$ est constitué par au plus $d^2[(\ln r_0 - n\ln\beta)/\ln(\xi/\delta)]\mathrm{e}^{C'C_2n\log\beta}$ images par l'application exponentielle de morceaux d'hypersurfaces de degré d contenues dans le compact K défini dans le lemme 3.5. En utilisant le lemme 3.6, le fait que m_u est l'image par l'application exponentielle de la mesure de Lebesgue et les inclusions (I), on obtient :

$$\begin{aligned} &m_u\big\{\bar{y} \in \mathcal{P}_0^\infty(\bar{x})/d(\bar{y}, \partial\mathcal{P}_0^\infty(\bar{x})) < \varepsilon\big\} \\ &\quad < d^2\big[(\ln r_0 - n\ln\beta)/\ln(\xi/\delta)\big]\mathrm{e}^{-C'C_2n\log\beta}C_0C_5\varepsilon. \qquad \square \end{aligned}$$

4. Preuve du théorème A′

Il nous suffit (théorème G cf. Introduction) d'établir la convergence des deux séries :

$$\sum_{n<0}\|E(f|\mathcal{A}_n)\|_2 < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{n>0}\|f - E(f|\mathcal{A}_n)\|_2 < \infty.$$

Les partitions $\mathcal{P}_n^\infty$ sont mesurables au sens de Rokhlin. Pour tout n, il existe donc des familles de probabilités conditionnelles $(m_P)_{P\in\mathcal{P}_n^\infty}$ permettant d'exprimer l'espérance conditionnelle par rapport aux tribus $\mathcal{A}_n$: pour toute fonction f intégrable, pour m-presque tout x,

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n)(\bar{x}) = \int_{\mathcal{P}_n^\infty(\bar{x})} f(y)\,\mathrm{d}m_{\mathcal{P}_n^\infty(x)}(y).$$

Par construction il existe une famille $\{F(n,\bar{x})\}_{n\in\mathbb{Z},\bar{x}\in G/\Gamma}$ de sous-ensembles de H_u relativement compacts contenant *Id* tels que pour tout $n\in\mathbb{Z}$ et tout $\bar{x}\in G/\Gamma$, on ait :

$$\mathcal{A}_n(\bar{x}) = F(n,\bar{x})\bar{x} = T^{-n}\mathcal{A}_0\big(T^n\bar{x}\big) = T^{-n}F\big(0, T^n\bar{x}\big)T^n\bar{x}.$$

Les probabilités conditionnelles s'expriment, pour toute fonction f intégrable, pour $\bar{\mu}$-presque tout $\bar{x}$, sous la forme :

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n)(\bar{x}) = \frac{1}{m_u(T^{-n}F(0,T^nx)T^n)} \int_{T^{-n}F(0,T^nx)T^n} f(h_u\bar{x})\,\mathrm{d}h_u. \tag{E}$$

Donnons-nous une fonction φ appartenant à la classe $\mathcal{C}$ et considérons les constantes C_0'' et p associées à φ dans la proposition 2.1. Choisissons un nombre C_7 supérieur à $C_6 + D$, puis δ inférieur à ξ (voir lemme 3.2), β dans l'intervalle $]1, \zeta^{((2C_0''+1)C_7)^{-1}}[$, ρ dans l'intervalle $]\beta^{C_7}, (\frac{\zeta}{\beta^{C_7}})^{1/2C_0''}[$ et enfin M suffisamment grand pour que ρ soit inférieur à $\beta^{Mp/C_0''}$.

Prenons un point $\bar{x} \in W_n^{\delta,\beta}$. Nous avons montré l'inclusion : $\Delta_u(\beta^n)\bar{x} \subset \mathcal{P}_0^{\infty}(\bar{x})$ (lemme 3.2). La propriété R2 du recouvrement assure que l'ensemble $U_{\bar{x}}^{F(0,\bar{x}),\beta^n}$ est un pavé. Cela signifie que les hypothèses de la proposition 2.1 décrivant la vitesse de répartition des feuilles dilatées sont satisfaites, donc que l'on a (l'entier n considéré ici est négatif) :

$$\left|\frac{1}{m_u(T^{-n}F(0,\bar{x})T^n)} \int_{T^{-n}F(0,\bar{x})T^n} \varphi_{[\frac{1-n}{M}]}\big(h_uT^{-n}\bar{x}\big)\,\mathrm{d}h_u\right|$$
$$\leqslant C_0''\left(\frac{\bar{\mu}(\partial U(\rho^n)) + \zeta^n\rho^{-2C_0''n}}{\beta^{nD}} + \rho^{\frac{-C_0''n}{M}}\beta^{np}\right),$$

soit encore (cf. l'égalité (E))

$$\left|\mathbb{E}(\varphi_{[\frac{1-n}{M}]}|\mathcal{A}_n)\big(T^{-n}x\big)\right| \leqslant C_0''\left(\frac{\bar{\mu}(\partial U(\rho^n)) + \zeta^n\rho^{-2C_0''n}}{\beta^{nD}} + \rho^{\frac{-C_0''n}{M}}\beta^{np}\right),$$

et, puisque

$$\bar{\mu}\big(\partial U(\rho^n)\big) \leqslant C_6\beta^{-C_6n}\rho^n$$

(lemme 3.7), les choix que nous avons faits pour les paramètres β, ρ, M assurent qu'il existe $\eta > 1$ et $C_8 > 0$ tels que

$$\left|\mathbb{E}(\varphi_{[\frac{1-n}{M}]}|\mathcal{A}_n)\big(T^{-n}x\big)\right| \leqslant C_8\eta^n.$$

Nous avons aussi montré que $\bar{\mu}({}^cW_n^{\delta,\beta})$ est inférieur à $C_4\beta^{nq}$ (lemme 3.4). Coupons $\mathbb{E}(\mathbb{E}(\varphi_{[\frac{1-n}{M}]}|\mathcal{A}_n)^2)$ en deux :

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(\varphi_{[\frac{1-n}{M}]}|\mathcal{A}_n)^2\big) = \int_{T^{-n}W_n^{\delta,\beta}} \mathbb{E}(\varphi_{[\frac{1-n}{M}]}|\mathcal{A}_n)^2(\bar{x})\,\mathrm{d}\bar{\mu}(\bar{x}) + \int_{T^{-n\,c}W_n^{\delta,\beta}} \mathbb{E}(\varphi_{[\frac{1-n}{M}]}|\mathcal{A}_n)^2(\bar{x})\,\mathrm{d}\bar{\mu}(\bar{x}).$$

La première des deux intégrales est inférieure à $C_8\eta^n$ et on majore la seconde par $\|\chi_{[\frac{1-n}{M}]} * \varphi\|_4(C_4\beta^{nq})^{1/2}$ grâce à l'inégalité de Cauchy. L'inégalité triangulaire et le fait que φ appartienne à $\mathcal{C}$ donne alors :

$$\begin{aligned}\|\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{A}_n)\|_2 &\leqslant \|\mathbb{E}(\varphi-\varphi_{[\frac{1-n}{M}]}|\mathcal{A}_n)\|_2+\|\mathbb{E}(\varphi_{[\frac{1-n}{M}]}|\mathcal{A}_n)\|_2\\ &\leqslant C\rho^{-[\frac{1-n}{M}]}+\left(\|\varphi_{[\frac{1-n}{M}]}\|_4\left(C_4\beta^{nq}\right)^{1/2}+C_8\eta^n\right)^{1/2},\end{aligned}$$

et la convergence de la première série est établie.

Les atomes de la tribu $\mathcal{A}_n$ sont les images par T^{-n} des atomes de la tribu $\mathcal{A}_0$ qui sont des morceaux de feuilles dilatées par T. Par suite, lorsque n tend vers $+\infty$ le diamètre des atomes de $\mathcal{A}_n$ décroît exponentiellement vite vers 0 : il existe $C_9>0$ et $\gamma>1$ tels que, pour tout $\bar{x}\in G/\Gamma$, pour tout $n\geqslant 0$, on ait

$$\operatorname{Diam}\left(\mathcal{P}_n^{\infty}\right)\leqslant C_9\gamma^{-n}.$$

L'inégalité triangulaire, les propriétés (22) et (23) (des fonctions de la classe $\mathcal{C}$) fournissent alors la majoration suivante :

$$\begin{aligned}\|\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{A}_n)-\varphi\|_2 &\leqslant \|\mathbb{E}(\varphi-\varphi_{[\frac{n-1}{M}]}|\mathcal{A}_n)\|_2+\|\varphi_{[\frac{n-1}{M}]}-\mathbb{E}(\varphi_{[\frac{n-1}{M}]}|\mathcal{A}_n)\|_2+\|\varphi_{[\frac{n-1}{M}]}-\varphi\|_2\\ &\leqslant 2C\rho^{-pn/M}+C\rho^{Cn/M}C_9^p\gamma^{-np}.\end{aligned}$$

Si M est choisi suffisamment grand la convergence de la seconde série est établie. □

5. Preuve du théorème B

Comme pour le théorème A, nous commençons par nous ramener au temps discret. Rappelons qu'étant donnée une fonction f nous avons noté φ_f la fonction

$$\varphi_f(\bar{x})=\int_0^1 f\left(T^s\bar{x}\right)\mathrm{d}s.$$

Comme dans [9] on montre que, pour une fonction f, si φ_f appartient à la classe $\mathcal{C}$, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

– f est un cobord au sens du flot,
– φ_f est un cobord pour le système $(G/\Gamma, T, \bar{\mu})$.

Nous allons prouver la proposition suivante :

PROPOSITION 5.1. – *Soit φ une fonction höldérienne sur G/Γ. Si φ est un cobord mesurable alors il existe une fonction h höldérienne d'ordre $p/2$ telle que $\varphi=h-h\circ T$.*

Lorsque f est höldérienne, φ_f l'est aussi donc la proposition entraîne le théorème B.

La preuve que nous proposons est la même que celle que nous avons déjà donnée dans [9]. Commençons par un lemme général.

LEMME 5.2. – *Soit G un groupe de Lie de dimension n, $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie, $X_1,\dots,X_k$ des éléments de $\mathcal{G}$ engendrant $\mathcal{G}$. Supposons que les crochets de Lie répétés des X_i de longueur inférieure à m engendrent linéairement l'espace vectoriel $\mathcal{G}$. Alors il existe $C>0$, $a>0$, un entier N et une suite $(i_1,\dots,i_N)$ d'éléments de $\{1,\dots,k\}$ tel que, pour tout $r\leqslant a$, l'application*

$$\varphi : \left[-Cr^{1/m}, Cr^{1/m}\right]^N \to B_0(Id, r) \subset G:$$
$$(t_1, \ldots, t_N) \mapsto \exp(t_1 X_{i_1}) \cdots \exp(t_N X_{i_N})$$

soit surjective.

Nous ne donnerons qu'une idée de preuve de ce résultat.

Démonstration. – Considérons $Y_1, \ldots, Y_n$ une base de $\mathcal{G}$ constituée de crochets de Lie répétés des éléments X_i. Notons m_i la longueur du crochet définissant Y_i.

La formule de Campbell–Hausdorff, appliquée une ou deux fois, nous livre les égalités suivantes, pour t petit :

$$\exp(tX)\exp(tZ)\exp(-tX)\exp(-tZ) = \exp\bigl(t^2[X, Z] + \mathrm{o}\bigl(t^2\bigr)\bigr),$$
$$\exp(tX)\exp(tZ)\exp(-tX)\exp(-tZ)\exp(tW)\exp(-tX)$$
$$\exp(tZ)\exp(tX)\exp(-tZ)\exp(-tW) = \exp\bigl(t^3\bigl[[X, Z], W\bigr] + \mathrm{o}\bigl(t^3\bigr)\bigr).$$

De la même façon, pour tout $i = 1, \ldots, n$, il existe p_i et une suite $(j_1^i, \ldots, j_{p_i}^i)$ tels que

$$\exp\bigl(\pm t^{m_i} Y_i + \mathrm{o}\bigl(t^{m_i}\bigr)\bigr) = \exp(\pm t X_{j_1^i}) \cdots \exp(\pm t X_{j_{p_i}^i}). \qquad (***)$$

Fixons maintenant deux constantes $C > 0$ et $a > 0$ tels que, pour $r \leqslant a^m$, l'application

$$\psi :]-Cr, Cr[^n \longrightarrow G:\ (t_1, \ldots, t_n) \longmapsto \exp(t_1 Y_1) \cdots \exp(t_n Y_n)$$

soit un difféomorphisme de $]-Cr, Cr[^n$ sur son image, image qui contienne la boule $B_0(Id, nr)$.

Pour tout élément x de $B_0(Id, (n-1)r)$ il existe $(t_1, \ldots, t_n) \in [-Cr^{1/m}, Cr^{1/m}]^n$ tel que

$$x = \exp\bigl(\pm t_1^{m_1} Y_1\bigr) \cdots \exp\bigl(\pm t_n^{m_n} Y_n\bigr).$$

L'égalité $(***)$ assure que les courbes

$$\mathcal{C}_1 : \left[-Cr^{1/m}, Cr^{1/m}\right] \longrightarrow G:\ t \longmapsto \exp\bigl(\pm t^{m_1} Y_1\bigr)x$$

et

$$\mathcal{C}_2 : \left[-Cr^{1/m}, Cr^{1/m}\right] \longrightarrow G:\ t \longmapsto \exp\bigl(\pm t X_{j_1^1}\bigr) \cdots \exp\bigl(\pm t X_{j_{p_1}^1}\bigr)x$$

sont très proches l'une de l'autre pour les petites valeurs du paramètre. Par conséquent, quitte à jouer un peu sur les constantes, comme $\mathcal{C}_1$ rencontre l'ensemble $B_0(Id, (n-1)r) \cap \psi(\{0\}\times]-Cr, Cr[^{n-1})$, on peut assurer que la courbe $\mathcal{C}_2$ rencontre $B_0(Id, nr) \cap \psi(\{0\}\times]-Cr, Cr[^{n-1})$. Autrement dit, tout élément x de $B_0(Id, (n-1)r)$ peut s'écrire sous la forme

$$x = \exp(\pm t X_{j_1^1}) \cdots \exp(\pm t X_{j_{p_1}^1}) \exp\bigl(\pm t^{m_2} Y_2\bigr) \cdots \exp\bigl(\pm t^{m_n} Y_n\bigr).$$

On remplace ainsi successivement chaque expression $\exp(\pm t^{m_i} Y_i)$ par le produit $\exp(\pm t X_{j_1^i}) \cdots \exp(\pm t X_{j_{p_i}^i})$ correspondant pour obtenir le résultat. $\square$

Le lemme précédent signifie que l'on peut atteindre tous les points de la boule $B_0(Id, r)$ en se déplaçant sur une ligne brisée formée de morceaux de courbes intégrales des champs $X_1, \ldots, X_k$ (pendant un temps éventuellement beaucoup plus long que r). Le résultat suivant (dont nous aurons besoin) exprime que, si on exige que les sommets de la ligne brisée appartiennent à un ensemble de mesure pleine prescrit, on peut encore atteindre presque tous les points de la boule. C'est un corollaire du lemme 5.2 et du théorème de Fubini.

COROLLAIRE 5.3. – *Soit $\mathcal{X} \subset G$ un ensemble de mesure de Haar pleine. Il existe $C > 0$, $a > 0$ et un ensemble de mesure pleine $\mathcal{X}_N$ tels que pour tout $x \in \mathcal{X}_N$ pour tout $r \leqslant a$, pour presque tout $y \in B_0(Id, a)x$, il existe une suite $(i_1, \ldots, i_N)$ d'éléments de $\{1, \ldots, k\}$, un N-uplet $(t_1, \ldots, t_N) \in [-Cd_0(x, y)^{1/m}, Cd_0(x, y)^{1/m}]^N$ tel que*

$$\begin{array}{rl} x & \in \mathcal{X} \\ \exp(t_N X_{i_N})x & \in \mathcal{X} \\ \exp(t_{N-1} X_{i_N}) \exp(t_N X_{i_N})x & \in \mathcal{X} \\ \vdots & \\ y = \exp(t_1 X_{i_1}) \cdots \exp(t_N X_{i_N})x & \in \mathcal{X} \end{array} \tag{1}$$

Démonstration. – Fixons un réel positif r inférieur à a (lemme 5.2). On montre en utilisant le théorème de Fubini qu'il existe un ensemble $\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}$ de mesure pleine tel que, pour tout $x \in \mathcal{X}_1$, $\exp(tX_{i_N})x$ appartient à $\mathcal{X}$ pour presque tout $t \in [-Cr^{1/m}, Cr^{1/m}]$. De la même façon il existe un ensemble $\mathcal{X}_2 \subset \mathcal{X}_1$ de mesure pleine tel que $\exp(tX_{i_{N-1}})x$ appartient à $\mathcal{X}_1$ pour presque tout $t \in [-Cr^{1/m}, Cr^{1/m}]$. On continue jusqu'à obtenir $\mathcal{X}_N \subset \mathcal{X}_{N-1}$ un ensemble de mesure pleine tel que, pour tout $x \in \mathcal{X}_N$, pour presque tout $(t_1, \ldots, t_N) \in [-Cr^{1/m}, Cr^{1/m}]^N$, on ait (1). L'image de $[-Cr^{1/m}, Cr^{1/m}]^N$ par l'application ϕ

$$(t_1, \ldots, t_n) \longmapsto \exp(t_1 X_{i_1}) \cdots \exp(t_N X_{i_N})$$

contient $B_0(Id, r)$. Grâce au théorème de Sard on sait que l'ensemble des points en lesquels la dérivée de ϕ n'est pas de rang maximum a une image négligeable. Comme ϕ est localement conjuguée à une application linéaire surjective en un point où la dérivée est surjective, l'image d'un sous-ensemble de mesure pleine de $[-Cr^{1/m}, Cr^{1/m}]^N$ contient un sous-ensemble de mesure pleine de $B_0(Id, r)$. On en déduit que, pour tout entier k, pour presque tous les points de $B_0(x, 2^{-k}a) \setminus B_0(x, 2^{-k-1}a)$ il existe

$$(t_1, \ldots, t_N) \in \left[-C\left(2^{-k-1}a\right)^{1/m}, C\left(2^{-k-1}a\right)^{1/m}\right]^N \subset \left[-Cd_0(x, y)^{1/m}, Cd_0(x, y)^{1/m}\right]^N$$

tel que l'on ait (1). Comme $B_0(x, a) = \bigcup_k B_0(x, 2^{-k}a) \setminus B_0(x, 2^{-k-1}a)$, le corollaire est prouvé. □

On vérifiera sans difficulté que les crochets de Lie de longueur inférieure à 2 des éléments des deux bases $(Y_1^i, \ldots, Y_{d_i}^i)$ de $\mathcal{H}^i$ $(i = s, u)$ engendrent l'algèbre de Lie de G.

Donnons maintenant la preuve de la proposition 5.1.

Démonstration. – Les vecteurs $Y_{i,1}, \ldots, Y_{i,d_i}$ forment une base de $\mathcal{H}_i$ $(i = s, u)$. Comme on l'a vu dans le paragraphe I, pour tout $j = 1, \ldots, d_s$, tout $k = 1, \ldots, d_u$, il existe des constantes réelles positives inférieures à 1, λ_{sj} et λ_{uk} (dépendant uniquement de T) telles que, pour tout $n \geqslant 0$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on ait les égalités :

$$T^n \exp(tY_{s,j})T^{-n} = \exp\bigl(\lambda_{sj}^n tY_{s,j}\bigr), \qquad T^{-n} \exp(tY_{u,k})T^n = \exp\bigl(\lambda_{uk}^n tY_{u,j}\bigr).$$

Appelons λ le plus grand des réels λ_{sj} et λ_{uk}. Il existe P tel que, pour tout $t \in [-C\sqrt{a}, C\sqrt{a}]$, pour tout $i = u, s$, tout $j = 1, \ldots, d_i$, on ait :

$$\frac{|t|}{\sqrt{P}} \leqslant d_0\bigl(Id, \exp(tY_{i,j})\bigr) \leqslant \sqrt{P}|t|.$$

Pour tout $x \in G$, tout $t \in [-C\sqrt{a}, C\sqrt{a}]$ et tout entier $n \geqslant 0$, on a alors :

$$\begin{aligned} &d_0\bigl(T^n x, T^n \exp(tY_{s,j})x\bigr) \\ &\quad = d_0\bigl(T^n x, \exp\bigl(t\lambda_{sj}^n Y_{s,j}\bigr)T^n x\bigr) = d_0\bigl(Id, \exp\bigl(t\lambda_{sj}^n Y_{s,j}\bigr)\bigr) \leqslant \sqrt{P}\lambda_{sj}^n|t| \\ &\quad \leqslant P\lambda^n d_0\bigl(Id, \exp(tY_{s,j})\bigr) = P\lambda^n d_0\bigl(x, \exp(tY_{s,j})x\bigr), \end{aligned}$$

et de la même façon, $d_0(T^{-n}x, T^{-n}\exp(tY_{u,k})x) \leqslant P\lambda^n d_0(Id, \exp(tY_{u,k}))$. Si la fonction φ est un cobord mesurable alors $n^{-1/2}S_n\varphi$ converge en probabilité vers 0. Comme φ vérifie les hypothèses du théorème G (voir l'introduction), il existe une fonction h de carré intégrable telle que $\varphi = h - Th$ (sinon $n^{-1/2}S_n\varphi$ convergerait en loi vers une variable gaussienne non dégénérée). En particulier, il existe h intégrable d'intégrale nulle telle que $\varphi = h - Th$.

En les relevant dans G, jusqu'à la fin de la preuve, nous considérerons que h et φ sont des fonctions Γ-périodiques définies sur G.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, notons $S_n\varphi$ et $S_{-n}\varphi$ les sommes

$$S_n\varphi = \sum_0^{n-1} T^k\varphi, \qquad S_{-n}\varphi = \sum_{-n}^{-1} T^k\varphi.$$

L'égalité de cobord fournit les identités suivantes :

$$\frac{1}{N}\sum_1^N S_n\varphi = h - \frac{1}{N}\sum_1^N T^n h, \qquad \frac{1}{N}\sum_1^N S_{-n}\varphi = -h + \frac{1}{N}\sum_1^N T^{-n}h.$$

Notons

$$\mathcal{X} = \left\{x \in G / h(x) = \lim \frac{1}{N}\sum_1^N S_n\varphi(x) = -\lim \frac{1}{N}\sum_1^N S_{-n}\varphi(x)\right\}.$$

Les transformations T et T^{-1} étant ergodiques, les suites $\frac{1}{N}\sum_1^N T^n h$ et $\frac{1}{N}\sum_1^N T^{-n}h$ tendent vers 0 presque partout donc $\mathcal{X}$ est de mesure pleine.

La régularité de φ et les propriétés de contraction de T conduisent aux inégalités suivantes : il existe R positif et $\lambda \in [0, 1[$ tels que

$$\begin{aligned}
&\left|T^k\varphi(x) - T^k\varphi\big(\exp(tY_{s,j})x\big)\right| \\
&\quad = \left|\varphi\big(T^k x\big) - \varphi\big(T^k \exp(tY_{s,j})x\big)\right| \leqslant Rd_0\big(T^k x, T^k \exp(tY_{s,j})T^{-k}T^k x\big)^p \\
&\quad \leqslant Rd_0\big(Id, T^k \exp(tY_{s,j})T^{-k}\big)^p \leqslant Rd_0\big(Id, \exp\big(\lambda_{sj}^k tY_{s,j}\big)\big)^p \\
&\quad \leqslant RP\lambda^k d_0\big(x, \exp(tY_{s,j})x\big)^p.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\left|S_n\varphi(x) - S_n\varphi\big(\exp(tY_{s,j})x\big)\right| \leqslant RP\sum_0^{n-1}\big(\lambda^k d_0\big(x, \exp(tY_{s,j})x\big)\big)^p.$$

On en déduit que si x et $\exp(tY_{s,j})x$ appartiennent tous les deux à $\mathcal{X}$, il existe R' tel que

$$\left|h(x) - h\big(\exp(tY_{s,j})x\big)\right| \leqslant R'd_0\big(x, \exp(tY_{s,j})x\big)^p. \tag{2}$$

On montre de la même façon en utilisant l'égalité $h(x) = -\lim \frac{1}{N}\sum_1^N S_{-n}\varphi$ que si x et $\exp(tY_{u,k})x$ appartiennent tous les deux à $\mathcal{X}$, il existe $R'' \geqslant R'$ tel que l'on ait,

$$\left|h(x) - h\big(\exp(tY_{u,k})x\big)\right| \leqslant R''d_0\big(x, \exp(tY_{u,k})x\big)^p. \tag{3}$$

Ceci signifie que la restriction de h à $\mathcal{X}$ est régulière le long des flots $\exp(tY_{u,k})$ et $\exp(tY_{s,j})$.

D'après le corollaire 5.3, il existe un entier N, un ensemble de mesure pleine $\mathcal{X}_N$ et une suite $(X_1, \ldots, X_N)$ de vecteurs tous égaux à l'un des $Y_{u,k}$ ou $Y_{s,j}$ tels que, pour tout élément x de $\mathcal{X}_N$, pour presque tout $y \in B_0(x, a)$, il existe $(t_1, \ldots, t_N) \in [-C\sqrt{d_0(x, y)}, C\sqrt{d_0(x, y)}]^N$ tel que

$$\begin{array}{cl}
x & \in \mathcal{X} \\
\exp(t_N X_N)x & \in \mathcal{X} \\
\exp(t_{N-1}X_{N-1})\exp(t_N X_N)x & \in \mathcal{X} \\
\vdots & \\
y = \exp(t_1X_1)\cdots\exp(t_N X_N)x & \in \mathcal{X}.
\end{array}$$

Les inégalités (2) et (3) entraînent :

$$\begin{aligned}
&|h(x) - h(y)| \\
&\quad \leqslant \left|h(x) - h\big(\exp(t_N X_N)x\big)\right| \\
&\qquad + \left|h\big(\exp(t_N X_N)x\big) - h\big(\exp(t_{N-1}X_{N-1})\exp(t_N X_N)x\big)\right| + \cdots \\
&\qquad + \left|h\big(y = \exp(t_1X_1)\cdots\exp(t_N X_N)x\big) - h\big(\exp(t_2X_2)\cdots\exp(t_N X_N)x\big)\right| \\
&\quad \leqslant R''\big(d_0\big(x, \exp(t_N X_N)x\big)^p \\
&\qquad + d_0\big(\exp(t_N X_N)x, \exp(t_{N-1}X_{N-1})\exp(t_N X_N)x\big)^p \cdots \\
&\qquad + d_0\big(y = \exp(t_1X_1)\cdots\exp(t_N X_N)x, \exp(t_2X_2)\cdots\exp(t_N X_N)x\big)^p.
\end{aligned}$$

Les applications $t \mapsto \exp(tX_j)z$ sont lipschitziennes (uniformément en z) et le N-uplet $(t_1, \ldots, t_N)$ appartient à $[-C\sqrt{d_0(x, y)}, C\sqrt{d_0(x, y)}]^N$ donc les N distances apparaissant ci-dessus sont comparables à $\sqrt{d_0(x,y)}$: il existe $L>0$ tel que $|h(x)-h(y)|\leqslant Ld_0(x,y)^{p/2}$. Pour tout $x\in G$, notons $P(x,a)$ l'ensemble des points y de $B_0(x,a)$ tels que $|h(x)-h(y)|\leqslant Ld_0(x,y)^{p/2}$. Convenons de plus que $P^1(x,a)$ est égal à $P(x,a)$ tandis que $P^{-1}(x,a)$ désigne ${}^cB_0(x,a)$. Nous avons montré que si $x\in\mathcal{X}_N$ alors $\mu(P(x,a))=\mu(B_0(x,a))$. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une famille d'éléments de $\mathcal{X}_N$ dénombrable et dense dans G/Γ. Les ensembles

$$\bigcup_{\varepsilon\in\{-1,1\}^n}\bigcap_{k=1}^{n}P^{\varepsilon_k}(x_k,a)$$

sont de mesure pleine pour tout $n\geqslant 1$, et forment une famille décroissante. Leur intersection

$$\mathcal{X}_\infty=\bigcup_{\varepsilon\in\{-1,1\}^{\mathbb{N}^*}}\bigcap_{k=1}^{\infty}P^{\varepsilon_k}(x_k,a)$$

est de mesure pleine.

Soient x et y deux points de $\mathcal{X}_\infty$ tels que $d_0(x,y)<a$ et $(x_{k_i})_{i\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite de $(x_n)_{n\geqslant 1}$ tendant vers x. Comme x et y sont éléments de $\mathcal{X}_\infty$, lorsque i est assez grand, on a :

$$\left|h(x)-h(y)\right|\leqslant\left|h(x)-h(x_{k_i})\right|+\left|h(x_{k_i})-h(y)\right|\leqslant L\left(d_0(x,x_{k_i})^{p/2}+d_0(x_{k_i},y)^{p/2}\right).$$

On en déduit que la restriction de h à $\mathcal{X}_\infty$ est höldérienne d'ordre $p/2$. La fonction h_0 continue sur G, égale à h sur $\mathcal{X}_\infty$ est höldérienne d'ordre $p/2$, Γ-périodique et vérifie $\varphi=h_0-Th_0$. □

Annexe A. Passage du temps continu au temps discret

A.1. La classe C et les fonctions höldériennes et indicatrices

Nous vérifions que si f est une fonction höldérienne ou une indicatrice d'ensemble régulier, alors la fonction $\varphi=\varphi_f$ appartient à la classe $\mathcal{C}$ défini par un paramètre p dépendant de la régularité de f.

Jusqu'à la fin du paragraphe, K désignera une constante telle que, pour tout $z\in B_0(Id,1)\cup\{T^s/s\in[0,1]\}$, on ait l'inégalité :

$$d(z\bar{x},z\bar{y})\leqslant Kd(\bar{x},\bar{y}).$$

• *Lorsque f est (C,p)-höldérienne*, φ_f est (CK^p,p)-höldérienne car

$$\begin{aligned}\left|\varphi_f(\bar{x})-\varphi_f(\bar{y})\right|&=\left|\int_0^1\left(f\left(T^s\bar{x}\right)-f\left(T^s\bar{y}\right)\right)\mathrm{d}s\right|\\&\leqslant C\int_0^1 d\left(T^s\bar{x},T^s\bar{y}\right)^p\,\mathrm{d}s\leqslant CK^pd(\bar{x},\bar{y})^p.\end{aligned}$$

La propriété (1a) est une conséquence du fait (établi dans le paragraphe I) que les fonctions höldériennes appartiennent à tous les espaces $L_p(\bar{\mu})$. On obtient la propriété (1b) grâce au théorèmes de Fubini. On a $\Omega^m(\varphi_n) = (\Omega^m \chi_n) * \varphi$ donc

$$\left\|\Omega^m \varphi_n\right\|_2 \leqslant \left\|\Omega^m \chi_n\right\|_2 \|\varphi\|_2 \leqslant C\rho^{Cn} \|\varphi\|_2; 0$$

la propriété (2a) est établie. La propriété (2b) est une conséquence des lignes de calculs qui suivent :

$$\begin{aligned}\left|\varphi_n(\bar{x}) - \varphi(\bar{x})\right| &= \int_G \left(\varphi\left(z^{-1}\bar{x}\right) - \varphi(\bar{x})\right)\chi_n(z)\,\mathrm{d}\mu(z) \leqslant CK^p \int_G d\left(z^{-1}\bar{x}, \bar{x}\right)^p \chi_n(z)\,\mathrm{d}\mu(z)\\ &\leqslant CK^p \int_G d\left(z^{-1}, Id\right)^p \chi_n(z)\,\mathrm{d}\mu(z) \leqslant CK^p\rho^{-pn}.\end{aligned}$$

Enfin l'inégalité suivante est plus forte que (2c) :

$$\begin{aligned}\left|\varphi_n(\bar{x}) - \varphi_n(\bar{y})\right| &= \int_G \left(\varphi\left(z^{-1}\bar{x}\right) - \varphi\left(z^{-1}\bar{y}\right)\right)\chi_n(z)\,\mathrm{d}\mu(z)\\ &\leqslant CK^p \int_G d\left(z^{-1}\bar{x}, z^{-1}\bar{y}\right)^p \chi_n(z)\,\mathrm{d}\mu(z) \leqslant CK^{2p} d(\bar{x}, \bar{y})^p.\end{aligned}$$

• *Soit U un ensemble (C, p)-régulier*. On montre que $f = 1_U - \bar{\mu}(U)$ vérifie les propriétés (1a), (1b) et (2a) (avec les mêmes arguments que dans le cas d'une fonction höldérienne). Passons à la propriété (2b) :

$$\begin{aligned}\|\varphi_n - \varphi\|_4 &\leqslant 2\|\varphi\|_\infty \|\varphi_n - \varphi\|_1\\ &\leqslant 4 \int_{G/\Gamma} \left| \int_G \int_0^1 f\left(T^s z^{-1}\bar{y}\right) \mathrm{d}s\, \chi_n(z)\,\mathrm{d}\mu(z) - \int_0^1 f\left(T^s\bar{y}\right)\mathrm{d}s \right| \mathrm{d}\bar{\mu}(\bar{y})\\ &\leqslant 4 \int_0^1 \int_{G/\Gamma} \left| \int_G \left(f\left(T^s z^{-1}\bar{y}\right) \mathrm{d}s\, \chi_n(z)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\mu(z) - f\left(T^s\bar{y}\right)\right)\right| \mathrm{d}\bar{\mu}(\bar{y}).\end{aligned}$$

Si, pour tout élément z de $B_0(Id, \rho^{-n})$, $T^s z^{-1}\bar{y}$ et $T^s\bar{y}$ appartiennent tous les deux à U ou U^c alors $\int_G f(T^s z^{-1}\bar{y})\chi_n(z)\,\mathrm{d}\mu(z)$ et $f(T^s\bar{y})$ sont égaux. Autrement dit $f(T^s\bar{y})$ et $\int_G f(T^s z^{-1}\bar{y})\chi_n(z)\,\mathrm{d}\mu(z)$ ne peuvent être distincts que pour les $\bar{y}$ pour lesquels il existe $z \in B_0(Id, \rho^{-n})$ tel que $T^s z^{-1}\bar{y}$ appartienne à U alors que $T^s\bar{y}$ appartient à U^c, ou l'inverse, c'est-à-dire si $\bar{y}$ appartient à l'ensemble

$$\bigcup_{z\in B_0(Id,\rho^{-n})} T^{-s}\left(\left(T^s z T^{-s} U \cap U^c\right) \cup \left(T^s z T^{-s} U^c \cap U\right)\right).$$

Comme la distance $d(T^{-s} z T^s, Id)$ vérifie

$$d\left(T^{-s} z T^s, Id\right) = d\left(T^{-s} z, T^{-s}\right) \leqslant K d(z, Id) \leqslant K\rho^{-n}$$

cet ensemble est inclus dans $T^{-s}\partial U(2K\rho^{-n})$. Par hypothèse U est (C,p)-régulier ; on obtient (2b) :

$$\|\varphi_n-\varphi\|_4 \leqslant 4\int_0^1 \bar\mu\big(T^{-s}\partial U\big(2K\rho^{-n}\big)\big)\,\mathrm{d}s \leqslant 4C2^pK^p\rho^{-pn}.$$

Enfin la propriété (2c) se déduit des inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}\big|\varphi_n(\bar x)-\varphi_n(\bar y)\big| &\leqslant \int_G |\varphi(v)|\big|\chi_n\big(yv^{-1}\big)-\chi_n\big(xv^{-1}\big)\big|\,\mathrm{d}\mu(v)\\ &\leqslant \int_{B_0(Id,\rho^{-n})y\cup B_0(Id,\rho^{-n})x} |\varphi(v)|d_0\big(yv^{-1},xv^{-1}\big)\rho^{Cn}\,\mathrm{d}\mu(v)\\ &\leqslant 2\mu\big(B_0\big(Id,\rho^{-n}\big)\big)d_0(y,x)\rho^{Cn}.\end{aligned}$$

A.2. Passage des énoncés (PID′) et (PIS′) aux énoncés (PID) et (PIS)

On a l'égalité :

$$\widetilde{\sigma}(f)=\sigma(\varphi_f).$$

Nous noterons cette quantité σ jusqu'à la fin du paragraphe.

Les calculs qui suivent montrent comment on peut passer des énoncés discrets aux énoncés continus. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^{tu} f\big(T^s\bar x\big)\,\mathrm{d}s &= \sum_0^{[[t]u]-1}\int_k^{k+1} f\big(T^s\bar x\big)\,\mathrm{d}s+\int_{[[t]u]}^{tu} f\big(T^s\bar x\big)\,\mathrm{d}s\\ &= S_{[[t]u]}\varphi_f(\bar x)+\int_{[[t]u]}^{tu} f\big(T^s\bar x\big)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Pour tout $t>0$ et $u\in[0,1]$, la quantité $tu-[[t]u]$ est comprise entre 0 et 2. On a donc :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\sup_{u\in[0,1]}\frac{1}{\sqrt t}\left|\int_{[[t]u]}^{tu} f\big(T^s\cdot\big)\,\mathrm{d}s\right|>\varepsilon\right)\\ &\quad\leqslant \mathbb{P}\left(\sup_{u\in[0,1]}\int_{[[t]u]}^{[[t]u]+2}\big|f\big(T^s\cdot\big)\big|\,\mathrm{d}s>\varepsilon\sqrt t\right)\leqslant \mathbb{P}\left(\sup_{u\in[0,1]}\int_0^2\big|f\big(T^s\cdot\big)\big|\,\mathrm{d}s\circ T^{[[t]u]}>\varepsilon\sqrt t\right)\\ &\quad= \mathbb{P}\left(\sup_{k=0,\dots,[t]}\int_0^2\big|f\big(T^s\cdot\big)\big|\,\mathrm{d}s\circ T^k>\varepsilon\sqrt t\right)\leqslant\sum_0^{[t]}\mathbb{P}\left(\int_0^2\big|f\big(T^s\cdot\big)\big|\,\mathrm{d}s\circ T^k>\varepsilon\sqrt t\right)\\ &\quad\leqslant (t+1)\mathbb{P}\left(\int_0^2\big|f\big(T^s\cdot\big)\big|\,\mathrm{d}s>\varepsilon\sqrt t\right)\leqslant\frac{t+1}{\varepsilon^6t^3}\int_{G/\Gamma}\left(\int_0^2\big|f\big(T^s\bar x\big)\big|\,\mathrm{d}s\right)^6\mathrm{d}\bar\mu(\bar x).\end{aligned}$$

Par ailleurs, en utilisant l'inégalité de Jensen et le théorème de Fubini, on a aussi :

$$\int_{G/\Gamma}\left(\int_0^2 \left|f\left(T^s\bar{x}\right)\right| \mathrm{d}s\right)^6 \mathrm{d}\bar{\mu}(\bar{x})$$

$$\leqslant \int_{G/\Gamma} 2^5\left(\int_0^2 \left|f\left(T^s\bar{x}\right)\right|^6 \mathrm{d}s\right) \mathrm{d}\bar{\mu}(\bar{x}) \leqslant 2^5 \int_0^2 \int_{G/\Gamma} \left|f\left(T^s\bar{x}\right)\right|^6 \mathrm{d}\bar{\mu}(\bar{x})\,\mathrm{d}s \leqslant 2^6\|f\|_6^6.$$

Nous avons prouvé dans les rappels que les fonctions que nous considérons appartiennent à à tous les espaces L_p.

Finalement, nous avons montré que :

$$\mathbb{P}\left(\sup_{u\in[0,1]} \frac{1}{\sqrt{t}}\left|\int_{[[t]u]}^{tu} f\left(T^s\cdot\right) \mathrm{d}s\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{t+1}{t^3}\frac{2^6\|f\|_6^6}{\varepsilon^6}$$

ce qui suffit pour affirmer que presque sûrement $\frac{1}{\sqrt{t}}\left|\int_{[[t]u]}^{tu} f(T^s\cdot)\,\mathrm{d}s\right|$ converge uniformément vers 0 lorsque t tend vers l'infini. L'égalité

$$\left|\frac{1}{\sqrt{t}}S_{[[t]u]}\varphi_f - \frac{1}{\sqrt{[t]}}S_{[[t]u]}\varphi_f\right| = \mathrm{o}(1/t)S_{[[t]u]}\varphi_f$$

entraîne que presque sûrement la différence

$$\left|\frac{1}{\sqrt{t}}S_{[[t]u]}\varphi_f - \frac{1}{\sqrt{[t]}}S_{[[t]u]}\varphi_f\right|$$

tend vers 0 uniformément en u. On montre de manière semblable que la même chose vaut pour

$$\left|\frac{1}{(2[t]\sigma^2\log\log[t])^{1/2}}S_{[[t]u]}\varphi_f - \frac{1}{(2t\sigma^2\log\log t)^{1/2}}S_{[[t]u]}\varphi_f\right|.$$

Ecrivons alors :

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\int_0^{tu} f\left(T^s\bar{x}\right)\mathrm{d}s = \frac{1}{\sigma\sqrt{[t]}}S_{[[t]u]}\varphi_f(\bar{x}) + \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{t}} - \frac{1}{\sigma\sqrt{[t]}}\right)S_{[[t]u]}\varphi_f(\bar{x})$$
$$+\frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\int_{[[t]u]}^{tu} f\left(T^s\bar{x}\right)\mathrm{d}s.$$

Les deux derniers termes du membre de droite convergent en probabilité vers 0 (remarques précédentes) et le premier converge en loi vers le mouvement brownien (théorème A′). La première partie du théorème A est acquise.

Intéressons-nous maintenant à la deuxième partie. On a

$$
\begin{aligned}
\zeta_t(u,\bar{x}) &= \frac{1}{(2t\sigma^2\log\log t)^{1/2}}\int_0^{tu} f\left(T^s\bar{x}\right)\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{(2[t]\sigma^2\log\log[t])^{1/2}} S_{[[t]u]}\varphi_f(\bar{x}) \\
&\quad + \left(\frac{1}{(2t\sigma^2\log\log t)^{1/2}} - \frac{1}{(2[t]\sigma^2\log\log[t])^{1/2}}\right) S_{[[t]u]}\varphi_f(\bar{x}) \\
&\quad + \frac{1}{(2t\sigma^2\log\log t)^{1/2}}\int_{[[t]u]}^{tu} f\left(T^s\bar{x}\right)\mathrm{d}s \\
&= \zeta_{[t]}^{\varphi_f}(u,\bar{x}) + \frac{1}{(2[t]\sigma^2\log\log[t])^{1/2}} S_{[[t]u]}\varphi_f(\bar{x}) - \zeta_{[t]}^{\varphi_f}(u,\bar{x}) \\
&\quad + \left(\frac{1}{(2t\sigma^2\log\log t)^{1/2}} - \frac{1}{(2[t]\sigma^2\log\log[t])^{1/2}}\right) S_{[[t]u]}\varphi_f(\bar{x}) \\
&\quad + \frac{1}{(2t\sigma^2\log\log t)^{1/2}}\int_{[[t]u]}^{tu} f\left(T^s\bar{x}\right)\mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

où $\zeta_{[t]}^{\varphi_f}(u,\bar{x})$ désigne l'interpolation définie dans l'introduction pour l'énoncé du principe d'invariance de Strassen dans le cas du temps discret (PIS$'$). Comme on l'a déjà vu, les troisième et quatrième termes de cette somme tendent presque sûrement uniformément vers 0. Pour tout $u \in [\frac{k}{[t]}, \frac{k+1}{[t]}]$, on a :

$$
\left|\frac{1}{(2[t]\sigma^2\log\log[t])^{1/2}} S_{[[t]u]}\varphi_f(\bar{x}) - \zeta_{[t]}^{\varphi_f}(u,\bar{x})\right| \leqslant \frac{1}{(2[t]\sigma^2\log\log[t])^{1/2}}\int_k^{k+1}\left|f\left(T^s\bar{x}\right)\right|\mathrm{d}s.
$$

Le calcul fait plus haut, permet donc d'affirmer que le deuxième terme tend aussi presque sûrement vers 0 uniformément en u. La deuxième partie du théorème A est une conséquence du théorème A$'$ appliqué à φ_f.

RÉFÉRENCES

[1] Borel A., Introduction aux groupes arithmétiques, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XV. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1341, Hermann, Paris, 1969.

[2] Bourbaki N., Éléments de mathématique : groupes et algèbres de Lie. Chapitre 9. Groupes de Lie réels compacts. [Chapter 9. Compact real Lie groups], Masson, Paris, 1982.

[3] Bourbaki N., Éléments de mathématique. Fascicule XXIX. Livre VI : Intégration. Chapitre 7. Mesure de Haar. Chapitre 8. Convolution et représentations, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1306, Hermann, Paris, 1963.

[4] Bröcker T., tom Dieck T., Representations of compact Lie groups, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 98, Springer-Verlag, New York, 1995.

[5] Bauer M., Broise A., Dal'bo F., Guimier F., Guivarch Y., Peigné M., Propriétés de mélange pour les groupes à un paramètre de $SL(d, \mathbb{R})$, Séminaires de probabilités de université de Rennes 1, 1992.
[6] Bunimovich L.A, Sinaĭ Ya.G., Chernov N.I., Statistical properties of two-dimensional hyperbolic billiards, Uspekhi Mat. Nauk 46 4 (280) (1991) 43–92, 192 (Russian) translation in: Russian Math. Surveys 46 (4) (1991) 47–106.
[7] Burton R., Denker M., On the central limit theorem for dynamical systems, Trans. Am. Math. Soc. 302 (1987) 715–726.
[8] Cassels J.W.S., Rational Quadratic Forms, Academic Press, 1978.
[9] Conze J.-P., Le Borgne S., Méthode de martingales et flot géodésique sur une surface de courbure négative constante, Ergodic Theory Dynam. Systems 21 (2) (2001) 421–441.
[10] Conze J.-P., Raugi A., Convergence des potentiels pour un opérateur de transfert, applications aux systèmes dynamiques et aux chaînes de Markov. Fascicule de probabilités, Publ. Inst. Rech. Math. Rennes, Univ. Rennes I, Rennes, 1998.
[11] Dolgopyat D., Limit theorems for partially hyperbolic systems, preprint.
[12] Gordin M., The central limit theorem for stationary processes, Soviet Math. Dokl. 10 (1969) 1174–1176, translation from Dokl. Akad. Nauk SSSR 188 (1969) 739–741.
[13] Guivarc'h Y., Hardy J., Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 24 (1) (1988) 73–98.
[14] Hall P., Heyde C.C., Martingale Limit Theory and its Application, Probability and Mathematical Statistics, Academic Press, New York, 1980.
[15] Howe R., Tan E.-C., Nonabelian harmonic analysis. Applications of $SL(2, R)$. Universitext, Springer, New York, 1992.
[16] Katok A., Spatzier R., First cohomology of Anosov actions of higher rank abelian groups and applications to rigidity, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 76 (1994) 131–156.
[17] Kleinbock D.Y., Margulis G.A., Bounded orbits of nonquasiunipotent flows on homogeneous spaces, in: Sinaĭ's Moscow Seminar on Dynamical Systems, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 171, pp. 141–172.
[18] Le Borgne S., Limit theorems for non-hyperbolic automorphisms of the torus, Israel J. Math. 109 (1999) 61–73.
[19] Le Jan Y., The central limit theorem for the geodesic flow on noncompact manifolds of constant negative curvature, Duke Math. J. 74 (1) (1994) 159–175.
[20] Ratner M., The central limit theorem for geodesic flows on n-dimensional manifolds of negative curvature, Israel J. Math. 16 (1973) 181–197.
[21] Sinaĭ Ja.G., The central limit theorem for geodesic flows on manifolds of constant negative curvature, Soviet Math. Dokl. 1 (1960) 983–987.
[22] Volny D., Counter examples to the central limit problem for stationary dependent random variables, Yokohama Math. J. 36 (1988) 70–78.
[23] Warner G., Harmonic analysis on semi-simple Lie groups. I., Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 188, Springer, New York, 1972.
[24] Young L.-S., Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity, Ann. of Math. (2) 147 (3) (1998) 585–650.