

# EDSR, CONVERGENCE EN LOI ET HOMOGENÉISATION D'EDP PARABOLIQUES SEMI-LINÉAIRES

**Guillaume GAUDRON<sup>a,\*</sup>, Etienne PARDOUX<sup>b</sup>**

<sup>a</sup> *LSP – CNRS UMR 5583, Département de Mathématiques, INSA Toulouse,  
135, avenue de Rangueil, 31077 Toulouse Cedex 4, France*

<sup>b</sup> *LATP – CNRS UMR 6632, Centre de Mathématiques et Informatique, Université de Provence/INRIA,  
39, rue Joliot Curie, 13453 Marseille Cedex 13, France*

Manuscrit reçu le 19 novembre 1998, révisé le 20 mars 2000

---

**RÉSUMÉ.** – Nous présentons des résultats de convergence en loi d'EDSR associées à des EDP, sous l'hypothèse de convergence en loi de la diffusion associée à la partie linéaire de l'EDP. Nous donnons en outre des exemples d'applications de ces résultats à l'homogénéisation d'EDP ou systèmes d'EDP paraboliques semi-linéaires à coefficients aléatoires ou périodiques dont la non-linéarité peut présenter une croissance quadratique du gradient. © 2001 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

*Mots-clés:* Milieux aléatoires, Milieux périodiques, Équations différentielles stochastiques rétrogrades, Homogénéisation, Convergence de processus, EDP semi-linéaires paraboliques, Systèmes

**ABSTRACT.** – We present weak convergence results for BSDEs related to PDEs, under the assumption that the diffusion associated to the linear part of the PDE converges in law. Besides we give examples of applications of our results to the homogenization of semi-linear parabolic PDEs or systems of PDEs with periodic or random coefficients whose nonlinearity may have a quadratic growth in the gradient. © 2001 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

*Key words:* Random media, Periodic media, Backward stochastic differential equations, Homogenization, Convergence of stochastic processes, Parabolic semi-linear PDEs, Systems

*AMS classification:* 60B10, 60H30, 35R60, 35K55

## 1. Introduction

Nous voulons obtenir des résultats d'homogénéisation pour des EDP semi-linéaires à coefficients aléatoires ou périodiques, et ce, à l'aide d'outils probabilistes et de formules probabilistes pour les solutions des EDP étudiées. Les non-linéarités seront plus particulièrement traitées à l'aide des EDS Rétrogrades (EDSR) introduites par Pardoux-Peng [22].

---

\* Travail effectué au sein de l'Université de Provence/INRIA.

*E-mail addresses:* gaudron@gmm.insa-tlse.fr (G. Gaudron), pardoux@gyptis.univ-mrs.fr (E. Pardoux).

Plus précisément, nous étudions l’homogénéisation de systèmes d’EDP non-linéaires du type

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon^k = \mathcal{L}^\varepsilon u_\varepsilon^k + h^\varepsilon(t, x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon \sigma^\varepsilon), \\ u_\varepsilon^k(t = \bar{T}, x) = g_k(x), \\ \mathcal{L}^\varepsilon = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d [\sigma^\varepsilon (\sigma^\varepsilon)^*]_{i,j} (t, x) \partial_{x_i x_j}^2 + v^\varepsilon(t, x) \cdot \nabla, \\ 1 \leq k \leq n \end{cases} \quad (1)$$

en cherchant la limite de  $u_\varepsilon$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0, où

- $u_\varepsilon : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,
- $h^\varepsilon : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times d} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  
 $(t, x, y, z) \mapsto h_0(t, x, y) + z(\sigma^\varepsilon)^*(t, x)h_1(t, x) + h_2(t, x, y)|z|^2$ ,
- les coefficients de  $\mathcal{L}^\varepsilon$  sont aléatoires ou périodiques.

Ce genre de problème a déjà été étudié, par exemple dans [3] dans le cas d’une équation elliptique avec une croissance quadratique du gradient et sous des hypothèses assez fortes sur  $\sigma^\varepsilon$ .

Pour notre part, appelons  $X^{\varepsilon,x}$  le processus de diffusion partant de  $x$  et de générateur  $\mathcal{L}^\varepsilon$ ,  $M^{X^\varepsilon}$  sa partie martingale. Nous introduisons des EDSR de manière non “habituelle” puisque la représentation des martingales se fera par rapport à  $M^{X^\varepsilon}$  (voir [21], Remarque 2.5) : nous dirons que  $(Y^{\varepsilon,x,T}, M^{\varepsilon,x,T})$  est solution de l’EDSR  $n$ -dimensionnelle

$$\begin{cases} Y_t^{\varepsilon,x,T} = g(X_T^{\varepsilon,x}) + \int_t^T h_0(s, X_s^{\varepsilon,x}, Y_s^{\varepsilon,x,T}) ds + \int_t^T d\langle X^{\varepsilon,x}, M^{\varepsilon,x,T} \rangle_s h_1(s, X_s^{\varepsilon,x}) \\ \quad + \int_t^T h_2(s, X_s^{\varepsilon,x}, Y_s^{\varepsilon,x,T}) d(\text{tr}\langle M^{\varepsilon,x,T} \rangle_s) + M_t^{\varepsilon,x,T} - M_T^{\varepsilon,x,T}, \\ M_t^{\varepsilon,x,T} = \int_0^t U_s^{\varepsilon,x,T} dM_s^{X^\varepsilon} \end{cases}$$

si ces processus sont continus,  $\mathcal{F}^{X^\varepsilon}$ -adaptés et vérifient

$$E(\text{tr}\langle M^{\varepsilon,x,T} \rangle_T) = E \int_0^T |U_s^{\varepsilon,x,T} \sigma^\varepsilon(s, X_s^\varepsilon)|^2 ds < \infty.$$

On évite ainsi l’introduction d’un mouvement brownien dont le choix est arbitraire si  $\sigma$  est dégénérée. Remarquons qu’avec cette non -linéarité le “Z” usuel apparaît implicitement dans  $M^{\varepsilon,x,T}$ ,  $\langle M^{\varepsilon,x,T} \rangle$  et  $\langle X^{\varepsilon,x}, M^{\varepsilon,x,T} \rangle$ .

Les processus précédents sont reliés à l’EDP (1) dans le sens où, d’après Pardoux et Peng [23], on a

$$u_\varepsilon(t, x) = Y_0^{\varepsilon,x,\bar{T}-t}.$$

C’est pourquoi nous les introduisons, espérant en les étudiant obtenir des informations sur le comportement asymptotique de  $u_\varepsilon$ . En choisissant cette méthode, on complique a priori le problème en introduisant un aléa supplémentaire dû à l’introduction du processus de diffusion. Cependant on dispose de techniques propres aux probabilités.

Remarquons que Briand, Hu [5] et Buckdahn, Hu [6] ont eux aussi utilisé les EDSR pour homogénéiser des EDP semi- et quasi-linéaires à coefficients périodiques, par une méthode différente qui évite la convergence en loi, et permet de traiter un terme non linéaire général dépendant du gradient, ce qui n’est pas le cas de notre méthode. Cependant, il n’est pas clair comment adapter leur approche au cas de coefficients aléatoires, ce que notre méthode permet de faire très naturellement.

Notre objectif est d’étudier la convergence en loi de  $(Y^{\varepsilon,x,T}, M^{\varepsilon,x,T})$ . Remarquons que ces processus sont définis sur un espace  $(\Omega, \mathcal{F}_t^{X^\varepsilon}, P)$ ,  $\Omega$  désignant l’espace des fonctions continues à valeur dans  $\mathbb{R}^{2n}$  muni de la topologie de la convergence uniforme. Dans le cas aléatoire,  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$  et  $P(dw_1, dw_2) = \pi(dw_1)P_{w_1}(dw_2)$  où  $\pi$  désigne la loi du milieu et  $P_{w_1}$  désigne la loi de la diffusion sous-jacente quand le milieu est fixé par sa réalisation  $w_1$ ; dans le cas périodique,  $P$  est la loi de la diffusion.

Après avoir précisé dans la partie 2 les notations et les hypothèses que nous utiliserons, nous donnons dans la partie 3 des résultats d’existence et d’unicité d’EDSR. Dans la partie 4, nous étudions la convergence de systèmes d’EDSR dans le cas  $h_2 \equiv 0$ , puis dans les parties 5 et 6 nous étudions la convergence de processus dans le cas  $n = 1$  et  $h_2$  non nul. Dans la partie 7 enfin nous appliquons nos résultats à l’homogénéisation d’EDP ou de systèmes d’EDP au travers de quelques exemples.

## 2. Notations et hypothèses

Dans la suite on allégera la notation en remplaçant  $(X_t^{\varepsilon,x}, Y_t^{\varepsilon,x,T}, M_t^{\varepsilon,x,T})$  par  $(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon, M_t^\varepsilon)$ . Nous utiliserons de plus les notations suivantes :

- si  $X$  est une semi-martingale,  $M^X$  désignera sa partie martingale,
- $C([0, T], \mathbb{R}^d)$  désigne l’espace des fonctions continues de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}^d$ , muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts,
- $D([0, T], \mathbb{R}^d)$  désigne l’espace des fonctions càdlàg de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}^d$ , muni de la topologie de la convergence en dt-mesure,
- si  $V$  est un vecteur de dimension  $k$ , nous noterons

$$\nabla_u V = (\partial_{u_j} V_i)_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq d}$$

que nous abrègerons  $\nabla V$  s’il n’y a pas d’ambiguïté sur la variable de dérivation,

- si  $u$  et  $v$  sont deux vecteurs, nous noterons  $u.v$  leur produit scalaire,
- $\|A\| = \sqrt{\text{tr}(AA^*)}$  ( $A$  vecteur ou matrice),
- nous noterons  $\|A\|_\infty$  le sup essentiel de  $|A(x)|$ .

Posons de plus un certain nombre d’hypothèses que nous utiliserons de manière croisée tout au long de l’article :

(Hx) :  $\mathcal{L}^\varepsilon$  a de “bonnes propriétés” d’homogénéisation : on supposera que  $(X^\varepsilon) \rightarrow (X)$  (en loi sous  $P$ ), où  $X$  est une diffusion de générateur déterministe

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d (\sigma \sigma^*)_{i,j}(t, x) \partial_{x_i x_j}^2 + v(t, x) \cdot \nabla.$$

On supposera en particulier que pour toute fonction  $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$  et pour tout  $t > 0$  on a la convergence en loi

$$\int_0^t \mathcal{L}^\varepsilon \varphi(X_r^\varepsilon) dr \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} \int_0^t \mathcal{L} \varphi(X_r) dr.$$

On suppose en outre que le problème de martingale associé à  $\mathcal{L}$  est bien posé.

Remarquons qu’il résulte de cette hypothèse (Hx) et du théorème de représentation des martingales (voir par exemple [12, p. 175]) que toute  $\mathcal{F}^X$ -martingale est une intégrale stochastique par rapport à la partie martingale de  $X$ ,

(Hxx) : il existe  $2\nu > e > 0$  tels que  $E|(X^\varepsilon)_t - (X^\varepsilon)_s|^e \leq C(t-s)^{1+\nu}$ ,

(Hxxx) : Posons  $O_T^\varepsilon = \sup_{0 \leq t \leq T} |(\nabla X^\varepsilon)_t|^{4p} + \sup_{0 \leq t \leq T} |(\nabla X^\varepsilon)_t^{-1}|^{4p}$  où  $p$  est un entier “assez grand”. On suppose qu’il existe  $a > 0$  tel que  $\sup_\varepsilon E(|O_T^\varepsilon|^{2+a}) < \infty$ .

(Hxg) :  $g$  est continue et  $\sup_\varepsilon E|g(X_T^\varepsilon)|^p < \infty$  pour une valeur de  $p$  suffisamment grande,

(Hx0) :  $\sup_\varepsilon E \int_0^T |h_0(s, X_s^\varepsilon, 0)|^p ds < \infty$  pour une valeur de  $p$  suffisamment grande,

(Hx1) : pour tout  $z$ ,  $|z(\sigma^\varepsilon)^* h_1| \leq K|z|$  et  $h_1$  est continue,

(Hg) :  $g$  est continue bornée avec  $|g(x)| \leq g_\infty$ ,

(Hg)' :  $|\nabla g(x)| \leq g'_\infty$ ,

(H1b) : pour tout  $z$ ,  $|z(\sigma)^* h_1| \leq K|z|$  et  $h_1$  est continue,

(H1b)' :  $h_1$  est continue bornée à dérivées premières bornées,

(H01) :  $h_0$  est continue et  $|h_0(t, x, y) - h_0(t, x, y')| \leq k|y - y'|$ , pour tout  $(t, x, y, y') \in \mathbb{R}^{1+d+2n}$ ,

(H0b) :  $h_0$  est continue bornée, à dérivée première en  $y$  bornée uniformément en  $x$ ,

(H0b)' :  $h_0$  est continue bornée, à dérivées premières bornées,

(H2b) :  $h_2$  est continue bornée,

(H2b)' :  $h_2$  est continue bornée, à dérivées bornées en  $x$ , et  $\partial_y h_2 \leq 0$ .

*Remarque.* –

– Concernant (Hx) : plusieurs types d’hypothèses permettent d’obtenir ce résultat dans le cadre de l’homogénéisation ; voir par exemple Avellaneda et Majda [1], Bensoussan, Lions et Papanicolaou [4], Carmona et Xu [7], Freidlin [9], Komorowski et Papanicolaou [15], Landim, Olla et Yau [17], Olla [19]. On pourra trouver d’autres exemples de convergence qui sortent de ce premier cadre : Gaudron [10], Pardoux et Veretennikov [24].

– Concernant (Hxx) : cette hypothèse est en particulier satisfaite lorsque  $\sigma^\varepsilon$  est bornée, uniformément en  $\varepsilon$ .

– Concernant (Hxxx) : dans le cas particulier  $\sigma = \text{Id}(\mathbb{R}^d)$ , et si  $v = v(x)$  est dérivable, on a

$$(\nabla X)_t = 1 + \int_0^t \nabla_x v(X_s) (\nabla X)_s ds.$$

Supposons que nous soyons en dimension 1 ; on a alors

$$(\partial_x X)_t = e^{\int_0^t \partial_x v(X_s) ds}.$$

Dans le cas aléatoire, si  $\partial_x v^\varepsilon$  est p.s. uniformément borné en  $\varepsilon$  et en l’aléa du milieu, cette hypothèse est bien vérifiée.

Si  $v^\varepsilon(x) = v(x/\varepsilon)$  et  $\partial_x v$  est une variable aléatoire de moyenne nulle, on peut espérer montrer que  $\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \partial_x v(X_s^\varepsilon/\varepsilon) ds$  converge vers un processus gaussien grâce au théorème central-limite et donc l’hypothèse (Hxxx) peut raisonnablement être satisfaite.

En revanche, si  $v^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} v(x/\varepsilon)$  avec  $\partial_x v$  bornée, on obtient l’explosion du terme  $\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t \partial_x v(X_s^\varepsilon/\varepsilon) ds$ , et l’hypothèse (Hxxx) n’est pas satisfaite.

– Concernant (H2b) et (H2b)’ : ces hypothèses ne sont pas optimales du point de vue des résultats existant sur les EDP. Elles permettent de prouver l’existence et l’unicité des EDSR un peu plus facilement. On peut très probablement adapter les preuves de [13] à des hypothèses plus faibles sur  $h_2$ , et du coup adapter nos preuves de convergence sous ces mêmes hypothèses.

Inégalité de Young : nous utiliserons à plusieurs reprises le résultat suivant, où  $p > 1$  :

$$ab \leq C_p(|a|^p + |b|^{p/(p-1)}). \tag{2}$$

Nous utiliserons aussi l’inégalité de Kunita–Watanabe (voir par exemple [26, p. 61]) : si  $X$  et  $Y$  sont deux semi-martingales et si  $H$  et  $K$  sont deux processus mesurables, alors

$$\int_a^b |H_s||K_s| d[X, Y]_s \leq \sqrt{\int_a^b H_s^2 d[X, X]_s} \sqrt{\int_a^b K_s^2 d[Y, Y]_s}. \tag{3}$$

### 3. Existence et unicité des EDSR

L’objet de cette section est de rappeler des résultats d’existence et d’unicité de solutions d’EDSR et de prouver certains types de résultats d’unicité dans le cas d’une équation dont la partie martingale est adaptée à une filtration contenant la filtration  $\mathcal{F}^X$ .

*Remarque.* – Dans toute cette partie, nous supposons que  $X$  est un processus de diffusion de générateur

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d (\sigma\sigma^*)_{i,j}(t, x) \partial_{x_i x_j}^2 + v(t, x) \cdot \nabla,$$

et que toute  $\mathcal{F}^X$ -martingale peut s’écrire comme une intégrale stochastique par rapport à la partie martingale de  $X$ . Ainsi nous aurons des résultats d’existence de solution d’EDSR avec une partie martingale guidée par  $M^X$  (voir [21]).

Rappelons tout d’abord un théorème d’existence et d’unicité des EDSR donné par Pardoux [21], où on a renforcé l’hypothèse de croissance en  $|y|$  :

**THÉORÈME 3.1.** – *Soit  $g(X_T)$  une variable aléatoire réelle de carré intégrable à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $h_0(t, x, y)$  et  $h_1(t, x)$  des fonctions à valeurs respectives dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^d$  telles que*

- (i)  $E \int_0^T |h_0(s, X_s, 0)|^2 ds < \infty$ ,
- (ii)  $(y - y') \cdot (h_0(t, x, y) - h_0(t, x, y')) \leq k|y - y'|^2$ , pour tout  $(t, x, y, y') \in \mathbb{R}^{1+d+2n}$ ,
- (iii)  $y \rightarrow h_0(\cdot, \cdot, y)$  est continue,
- (iv)  $|h_0(t, x, y)| \leq |h_0(t, x, 0)| + k'|y|$  où  $k' > 0$ .
- (v)  $|z\sigma^*h_1| \leq K|z|, \forall z$ .

Alors l'EDSR

$$Y_t = g(X_T) + \int_t^T h_0(s, X_s, Y_s) ds + \int_t^T d\langle X, M \rangle_s h_1(s, X_s) - M_T + M_t \quad (4)$$

admet une unique solution  $\mathcal{F}^X$ -adaptée  $(Y, M)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{2n}$  telle que  $M_t = \int_0^t U_s dM_s^X$  et  $E \int_0^T |\sigma(s, X_s) U_s|^2 ds < \infty$ . On a de plus les estimations suivantes (où  $c$  ne dépend que de  $k, K$  et  $T$ ) :

$$E \left( \sup_s |Y_s|^2 + \int_0^T |U_s \sigma(s, X_s)|^2 ds \right) \leq cE(|g(X_T)|^2) + cE \left( \int_0^T |h_0(s, X_s, 0)|^2 ds \right),$$

$$|Y_t|^2 \leq E^{\mathcal{F}_t^X} \left( e^{(1+K^2+2k)(T-t)} |g(X_T)|^2 + \int_t^T e^{(1+K^2+2k)(T-s)} |h_0(s, X_s, 0)|^2 ds \right). \quad (5)$$

On peut améliorer la partie “unicité” de ce théorème :

PROPOSITION 3.2. – Soient  $\mathcal{F}$  une filtration contenant  $\mathcal{F}^X$ ,  $Y$  un processus  $\mathcal{F}$ -adapté tel que

$$Y_t = g(X_T) + \int_t^T h_0(s, X_s, Y_s) ds + \int_t^T d\langle X, M \rangle_s h_1(s, X_s) + M_t - M_T \quad (6)$$

où  $M$  est une  $\mathcal{F}$ -martingale bornée dans  $L^2$  (qui n'est pas supposée continue a priori).

Alors, si  $M^X$  est une  $\mathcal{F}$ -martingale,  $E(|g(X_T)|^2) < \infty$  et  $h_0$  et  $h_1$  vérifient les hypothèses du théorème précédent, on a que  $(Y, M)$  est l'unique solution  $\mathcal{F}^X$ -adaptée de l'EDSR du Théorème 3.1 vérifiant  $M_t = \int_0^t U_s dM_s^X$  et  $E \int_0^T |U_s \sigma(s, X_s)|^2 ds < \infty$ .

Preuve. – D'après le théorème précédent 3.1, l'équation (6) a au moins une solution  $(\bar{Y}, \bar{M})$   $\mathcal{F}^X$ -adaptée, donc  $\mathcal{F}$ -adaptée, où  $\bar{M}_t = \int_0^t \bar{U}_s dM_s^X$  et  $E \int_0^T |\bar{U}_s \sigma(s, X_s)|^2 ds < \infty$ . Or  $\bar{M}$  est une  $\mathcal{F}$ -martingale par hypothèse puisque  $\bar{U}$  est  $\mathcal{F}^X$ -adapté et  $M^X$  est une  $\mathcal{F}$ -martingale. Nous allons maintenant donner un argument déjà utilisé dans [24].

Supposons que  $(Y, M)$  vérifie les hypothèses de l'énoncé et l'équation (6). D'après Itô on a

$$\begin{aligned} &|Y_t - \bar{Y}_t|^2 + \text{tr}([M - \bar{M}]_t - [M - \bar{M}]_t) \\ &= 2 \int_t^T (Y_s - \bar{Y}_s) \cdot (h_0(s, X_s, Y_s) - h_0(s, X_s, \bar{Y}_s)) ds \\ &\quad + 2 \int_t^T (Y_s - \bar{Y}_s) \cdot [(d\langle X, M \rangle_s - d\langle X, \bar{M} \rangle_s) h_1(s, X_s)] - 2 \int_t^T (Y_s - \bar{Y}_s) \cdot (dM_s - d\bar{M}_s). \end{aligned}$$

Rappelons que  $E(\sup_s |\bar{Y}_s|^2) < \infty$ . On peut de plus montrer comme dans [20] que  $E(\sup_s |Y_s|^2) < \infty$ . On peut alors prendre l'espérance dans le terme précédent et obtenir, en utilisant l'inégalité de Kunita–Watanabe (3),

$$\begin{aligned}
 & E(|Y_t - \bar{Y}_t|^2 + \text{tr}[M - \bar{M}]_T - \text{tr}[M - \bar{M}]_t) \\
 &= 2E \int_t^T (Y_s - \bar{Y}_s) \cdot (h_0(s, X_s, Y_s) - h_0(s, X_s, \bar{Y}_s)) ds \\
 &\quad + 2E \int_t^T (Y_s - \bar{Y}_s) \cdot [d\langle X, M - \bar{M} \rangle_s h_1(s, X_s)] \\
 &\leq 2kE \int_t^T |Y_s - \bar{Y}_s|^2 ds + E \int_t^T |Y_s - \bar{Y}_s|^2 [h_1^*(s, X_s) d\langle X \rangle_s h_1(s, X_s)] \\
 &\quad + E \int_t^T d(\text{tr}[M - \bar{M}]_s) \\
 &\leq (2k + \|\sigma^* h_1\|_\infty^2) E \int_t^T |Y_s - \bar{Y}_s|^2 ds + E(\text{tr}[M - \bar{M}]_T) - E(\text{tr}[M - \bar{M}]_t)
 \end{aligned}$$

d'où

$$E|Y_t - \bar{Y}_t|^2 \leq (k + K^2) E \int_t^T |Y_s - \bar{Y}_s|^2 ds.$$

Ainsi  $Y = \bar{Y}$  d'après le lemme de Gronwall, d'où  $M = \bar{M}$ . On en déduit que  $(Y, M)$  est l'unique solution de l'EDSR.  $\square$

Remarquons qu'on peut aussi déduire du Théorème 3.1 un premier résultat d'existence et d'unicité pour les EDSR à valeurs dans  $\mathbb{R}$  avec une croissance quadratique en  $z$  :

**THÉORÈME 3.3.** – *Dans le cas particulier où  $n = 1$ , sous (Hg), (H0b) et (H2b), l'EDSR*

$$Y_t = g(X_T) + \int_t^T h_0(s, X_s, Y_s) ds + \int_t^T h_2(Y_s) d\langle M \rangle_s + M_t - M_T \tag{7}$$

admet une unique solution  $\mathcal{F}_t^X$ -adaptée  $(Y, M)$  vérifiant  $E\langle M \rangle_T < \infty$ . On notera  $M_t = \int_0^t U_s \cdot dM_s^X$ .

*Preuve.* – Soit  $k$  une solution de l'équation différentielle ordinaire  $k'' - 2h_2 k' = 0$ . On choisit

$$k(y) = \int_0^y e^{\int_0^s 2h_2(u) du} ds.$$

On peut remarquer que  $k$  est une fonction de classe  $C^2$ , strictement croissante. Elle est donc inversible et son inverse est elle-même de classe  $C^2$ .

Soit maintenant  $\tilde{h}_0(t, x, y) = k' \circ k^{-1}(y)h_0(t, x, k^{-1}(y))$ . On a

$$\begin{aligned} \partial_y \tilde{h}_0(t, x, y) &= (k^{-1})'(y)k'' \circ k^{-1}(y)h_0(t, x, k^{-1}(y)) \\ &\quad + (k^{-1})'(y)k' \circ k^{-1}(y)\partial_y h_0(t, x, k^{-1}(y)) \\ &= 2h_2(k^{-1}(y))h_0(t, x, k^{-1}(y)) + \partial_y h_0(t, x, k^{-1}(y)) \end{aligned}$$

donc  $\tilde{h}_0$  est lipschitzienne en  $y$  uniformément en  $x$ , puisque à dérivée bornée d'après (H0b) et (H2b), et en outre  $\tilde{h}_0(t, x, 0) = h_0(t, x, 0)$ . On peut alors considérer l'EDSR unidimensionnelle

$$K_t = k \circ g(X_T) + \int_t^T \tilde{h}_0(s, X_s, K_s) ds + \tilde{M}_t - \tilde{M}_T$$

qui admet une unique solution  $\mathcal{F}^X$ -adaptée  $(K, \tilde{M})$  vérifiant  $E\langle \tilde{M} \rangle_T < \infty$  d'après le Théorème 3.1. On a en outre  $\tilde{M}_t = \int_0^t L_s \cdot dM_s^X$ .

Posons maintenant  $Y = k^{-1}(K)$ ,  $U = L/k'(k^{-1}(K))$  et  $M_t = \int_0^t U_s \cdot dM_s^X$ . D'après Itô on a alors que  $(Y, M)$  est une solution  $\mathcal{F}^X$ -adaptée de

$$Y_t = g(X_T) + \int_t^T h_0(s, X_s, Y_s) ds + \int_t^T h_2(Y_s) d\langle M \rangle_s + M_t - M_T.$$

On voit en effet que

$$\begin{aligned} k^{-1}(K_t) &= k^{-1}(k(g(X_T))) - \int_t^T (k^{-1})'(K_s) dK_s - \int_t^T \frac{1}{2} (k^{-1})''(K_s) d\langle \tilde{M} \rangle_s \\ &= g(X_T) + \int_t^T 1/k' \circ k^{-1}(K_s) k' \circ k^{-1}(K_s) h_0(s, X_s, k^{-1}(K_s)) ds \\ &\quad - \int_t^T 1/k' \circ k^{-1}(K_s) d\tilde{M}_s + \frac{1}{2} \int_t^T k'' \circ k^{-1}(K_s) / [k' \circ k^{-1}(K_s)]^3 d\langle \tilde{M} \rangle_s \\ &= g(X_T) + \int_t^T h_0(s, X_s, Y_s) ds - \int_t^T L_s / k' \circ k^{-1}(K_s) \cdot dM_s^X \\ &\quad + \int_t^T h_2(Y_s) k'(Y_s) / k'(Y_s) [1/k' \circ k^{-1}(K_s)]^2 d \left\langle \int_0^\cdot L_u \cdot dM_u^X \right\rangle_s \\ &= g(X_T) + \int_t^T h_0(s, X_s, Y_s) ds + \int_t^T h_2(Y_s) d \left\langle \int_0^\cdot L_u / k' \circ k^{-1}(K_u) \cdot dM_u^X \right\rangle_s \\ &\quad - \int_t^T U_s \cdot dM_s^X \end{aligned}$$

soit



$$Y_t = g(X_T) + \int_t^T h_0(s, X_s, Y_s) ds + \int_t^T h_2(Y_s) d\langle M \rangle_s + M_t - M_T.$$

De plus, comme  $g$  bornée par hypothèse (Hg), on sait que  $k(g(X_T))$  est bornée. On obtient donc par application de (5) que  $K$  est borné par un certain  $K_\infty$ . Ainsi

$$E\langle M \rangle_T \leq e^{4\|h_2\|_\infty k^{-1}(K_\infty)} E\langle \tilde{M} \rangle_T < \infty.$$

Enfin, cette solution est unique par unicité de  $(K, \tilde{M})$ .  $\square$

Un résultat un peu différent peut être obtenu en adaptant Kobylanski [13,14] :

THÉORÈME 3.4. – (a) sous (Hg), (H1b), (H0b') et (H2b') l'EDSR

$$Y_t = g(X_T) + \int_t^T h_0(s, X_s, Y_s) ds + \int_t^T d\langle X, M \rangle_s h_1(s, X_s) + \int_t^T h_2(s, X_s, Y_s) d\langle M \rangle_s + M_t - M_T$$

admet une unique solution  $\mathcal{F}^X$ -adaptée vérifiant  $E\langle M \rangle_T < \infty$ . Nous écrivons  $M_t = \int_0^t U_s \cdot dM_s^X$ .

(b) On a en outre les estimés suivants :

$$E\langle M \rangle_T \leq C(\|h_0\|_\infty, \|h_2\|_\infty, \|g\|_\infty, \|\sigma^* h_1\|_\infty),$$

$$|Y_t| < D(\|h_0\|_\infty, \|h_2\|_\infty, \|g\|_\infty, \|\sigma^* h_1\|_\infty) \quad p.s. \tag{8}$$

Remarque. – La preuve de l'unicité de ce résultat repose de même que dans le Théorème 3.3 sur un changement d'EDSR. D'après [14] en effet, on peut construire une fonction continue strictement croissante  $\Phi$  définie sur un intervalle et poser  $\hat{Y}_t = \Phi^{-1}(Y_t)$  et  $\hat{M}_t = \int_0^t L_s / \Phi' \circ \Phi^{-1}(Y_s) \cdot dM_s^X$  tels que

$$\begin{cases} \hat{Y}_t = \hat{g}(X_T) + \int_t^T \hat{h}_0(s, X_s, \hat{Y}_s) ds + \int_t^T d\langle X, \hat{M} \rangle_s \hat{h}_1(s, X_s) \\ \quad + \int_t^T \hat{h}_2(s, X_s, \hat{Y}_s) d\langle \hat{M} \rangle_s + \hat{M}_t - \hat{M}_T, \\ E\langle \hat{M} \rangle_T \leq \hat{C}, \\ |\hat{Y}| \leq \hat{D} \end{cases} \tag{9}$$

où  $\hat{g} = \Phi^{-1} \circ g$ ,  $\hat{h}_0(t, x, y) = h_0(t, x, \Phi(y)) / \Phi'(y)$ ,  $\hat{h}_1 \equiv h_1$  et  $\hat{h}_2(t, x, y) = \Phi'(y) h_2(t, x, \Phi(y)) + \Phi''(y) / (2\Phi'(y))$ .

Ainsi,  $\hat{h}_0$  et  $\hat{h}_1$  conservent les propriétés respectives de  $h_0$ ,  $h_1$ , et  $\hat{h}_2$  satisfait la "condition de structure" suivante : il existe  $\zeta > 0$  tel que pour  $y \in \Phi^{-1}([-D, D])$

$$\partial_y \hat{h}_2 + \zeta |\hat{h}_2|^2 \leq -\delta < 0. \tag{10}$$

Dans la démonstration de ce résultat,  $\Phi$  est déterminé essentiellement par rapport à ses dérivées, ce qui nous laisse la possibilité de fixer  $\Phi^{-1}(-D) > 0$ . Ainsi nous aurons  $\hat{Y}_t > \Phi(-D) > 0$ . Dans la suite, nous travaillerons généralement sur cette nouvelle

EDSR (9). De plus, nous utiliserons par abus de notation  $\|\hat{h}_i\|_\infty$ ,  $i = 0, 1, 2$ , le sup essentiel de ces fonctions sur  $\mathbb{R}^{d+1} \times [-M, M]$  où  $M$  est suffisamment grand.

Nous pouvons commencer par énoncer un lemme qui nous sera utile par la suite :

LEMME 3.5. –

$$E(\langle \hat{M} \rangle_T^2) \leq F(\|\hat{h}_0\|_\infty, \|\hat{h}_2\|_\infty, \|\Phi^{-1} \circ g\|_\infty, \|\sigma^* \hat{h}_1\|_\infty).$$

*Preuve.* – D’après Itô on a en choisissant  $p \in \mathcal{N}^*$  tel que  $p - 1 - 1/\zeta > 0$

$$\begin{aligned} & |\hat{Y}_t|^{2p} + p(2p - 1) \int_t^T |\hat{Y}_s|^{2p-2} d\langle \hat{M} \rangle_s \\ &= |\hat{g}(X_T)|^{2p} + 2p \int_t^T \hat{Y}_s^{2p-1} \hat{h}_0(s, X_s, \hat{Y}_s) ds \\ &+ 2p \int_t^T \hat{Y}_s^{2p-1} \hat{h}_2(s, X_s, \hat{Y}_s) d\langle \hat{M} \rangle_s - 2p \int_t^T \hat{Y}_s^{2p-1} d\hat{M}_s \\ &+ 2p \int_t^T \hat{Y}_s^{2p-1} d\langle X, \hat{M} \rangle_s \hat{h}_1(s, X_s). \end{aligned}$$

Or en utilisant (10) on a

$$\begin{aligned} y^{2p-1} \hat{h}_2(s, x, y) &= y^{2p-1} [\hat{h}_2(s, x, \lambda y) |\lambda|^2]_0^1 \\ &= y^{2p-1} \int_0^1 d\lambda [y \partial_y \hat{h}_2(s, x, \lambda y) |\lambda|^2 + 2\lambda \hat{h}_2(s, x, \lambda y)] \\ &= \int_0^1 d\lambda [y^{2p} \partial_y \hat{h}_2(s, x, \lambda y) \lambda^2 + 2\lambda y^{2p-1} \hat{h}_2(s, x, \lambda y)] \\ &\leq \int_0^1 d\lambda \lambda^2 |y|^{2p} [\partial_y \hat{h}_2 + \zeta (\hat{h}_2)^2](s, x, \lambda y) + \frac{|y|^{2p-2}}{\zeta} \int_0^1 d\lambda \\ &\leq \frac{|y|^{2p-2}}{\zeta} \int_0^1 d\lambda \\ &\leq \frac{|y|^{2p-2}}{\zeta}, \end{aligned}$$

d’où

$$2p \int_t^T \hat{Y}_s^{2p-1} \hat{h}_2(s, X_s, \hat{Y}_s) d\langle \hat{M} \rangle_s \leq \frac{2p}{\zeta} \int_t^T |\hat{Y}_s|^{2p-2} d\langle \hat{M} \rangle_s.$$

De plus on a par Kunita–Watanabe (3)

$$\begin{aligned} & 2 \int_t^T \hat{Y}_s^{2p-1} d\langle X, \hat{M} \rangle_s h_1(s, X_s) \\ & \leq \int_t^T |\hat{Y}_s|^{2p} |\sigma^*(s, X_s) h_1(s, X_s)|^2 ds + \int_t^T |\hat{Y}_s|^{2p-2} d\langle \tilde{M} \rangle_s. \end{aligned}$$

Ainsi, par construction de  $\Phi$  et puisque  $h_1 \equiv \hat{h}_1$  nous obtenons

$$\begin{aligned} & 2p \left( p - 1 - \frac{1}{\xi} \right) |\Phi^{-1}(-D)|^{2p-2} \int_t^T d\langle \hat{M} \rangle_s \\ & \leq 2p \left( p - 1 - \frac{1}{\xi} \right) \int_t^T |\hat{Y}_s|^{2p-2} d\langle \hat{M} \rangle_s \\ & \leq |\hat{g}(X_T)|^{2p} + 2p \hat{D}^{2p-1} T \|\hat{h}_0\|_\infty + p \hat{D}^{2p} T \|\sigma^* \hat{h}_1\|_\infty^2 - 2 \int_t^T \hat{Y}_s^{2p-1} d\hat{M}_s. \end{aligned}$$

Des estimations (9) nous déduisons  $E(\int_0^T \hat{Y}_s^{2p-1} d\hat{M}_s)^2 \leq \hat{D}^{4p-2} E\langle \hat{M} \rangle_T \leq \hat{D}^{4p-2} \hat{C}$ , et donc

$$E(\langle \hat{M} \rangle_T^2) \leq F(\|\hat{h}_0\|_\infty, \|\hat{h}_2\|_\infty, \|\hat{g}\|_\infty, \|\sigma^* \hat{h}_1\|_\infty). \quad \square$$

Maintenant, nous pouvons énoncer le dernier résultat d’unicité de cette partie :

**THÉORÈME 3.6.** – Soient  $\mathcal{F}$  une filtration contenant  $\mathcal{F}^X$ ,  $\hat{M}$  une  $\mathcal{F}$ -martingale continue bornée dans  $L^2$ , et  $\hat{Y}$  un processus  $\mathcal{F}$ -adapté tel que

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t &= \hat{g}(X_T) + \int_t^T \hat{h}_0(s, X_s, \hat{Y}_s) ds + \int_t^T d\langle X, \hat{M} \rangle_s \hat{h}_1(s, X_s) \\ &+ \int_t^T \hat{h}_2(s, X_s, \hat{Y}_s) d\langle \hat{M} \rangle_s + \hat{M}_t - \hat{M}_T. \end{aligned} \tag{11}$$

Alors, sous les conditions précédentes pour les fonctions  $\hat{h}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , si  $\hat{Y}$  est borné p.s. et  $M^X$  est une  $\mathcal{F}$ -martingale,  $(\hat{Y}, \hat{M})$  est l’unique solution de l’EDSR (9) vérifiant  $E\langle \hat{M} \rangle_T < \infty$ .

*Preuve.* – Notons  $(\bar{Y}, \bar{M})$  la solution  $\mathcal{F}^X$ -adaptée de l’EDSR (9). On a bien que  $\bar{M}$  est une  $\mathcal{F}$ -martingale puisque  $\bar{M}_t = \int_0^t \bar{U}_s \cdot dM_s^X$ ,  $\bar{U}$  est  $\mathcal{F}^X$ -adapté, donc  $\mathcal{F}$ -adapté et  $M^X$  est une  $\mathcal{F}$ -martingale. Soit enfin  $(\hat{Y}, \hat{M})$  la solution de l’EDSR précédente (11), où  $\hat{M}$  est continue. On a alors par Itô, pour  $p \in \mathcal{N}^*$

$$|\hat{Y}_t - \bar{Y}_t|^{2p} + p(2p - 1) \int_t^T |\hat{Y}_s - \bar{Y}_s|^{2p-2} d\langle \hat{M} - \bar{M} \rangle_s$$

$$\begin{aligned}
&= -2p \int_t^T (\hat{Y}_s - \bar{Y}_s)^{2p-1} d(\hat{Y}_s - \bar{Y}_s) \\
&= 2p \int_t^T (\hat{Y}_s - \bar{Y}_s)^{2p-1} (\hat{h}_0(s, X_s, \hat{Y}_s) - \hat{h}_0(s, X_s, \bar{Y}_s)) ds \\
&\quad + 2p \int_t^T (\hat{Y}_s - \bar{Y}_s)^{2p-1} [\hat{h}_2(s, X_s, \hat{Y}_s) d\langle \hat{M} \rangle_s - \hat{h}_2(s, X_s, \bar{Y}_s) d\langle \bar{M} \rangle_s] \\
&\quad + 2p \int_t^T (\hat{Y}_s - \bar{Y}_s)^{2p-1} d\langle X, \hat{M} - \bar{M} \rangle_s \hat{h}_1(s, X_s) + \text{Martingale} \\
&= A + 2pB + 2pC + \text{Martingale}.
\end{aligned}$$

*Terme A*

$$\begin{aligned}
A &= 2p \int_t^T (\hat{Y}_s - \bar{Y}_s)^{2p-1} (\hat{h}_0(s, X_s, \hat{Y}_s) - \hat{h}_0(s, X_s, \bar{Y}_s)) ds \\
&\leq 2pk \int_t^T |\hat{Y}_s - \bar{Y}_s|^{2p} ds
\end{aligned}$$

puisque  $\hat{h}_0$  est lipschitzienne en  $y$ .

*Terme B* (nous noterons  $\rho_s = \lambda \hat{Y}_s + (1 - \lambda) \bar{Y}_s$ )

$$\begin{aligned}
B &= \int_t^T (\hat{Y}_s - \bar{Y}_s)^{2p-1} [\hat{h}_2(s, X_s, \lambda \hat{Y}_s + (1 - \lambda) \bar{Y}_s) d\langle \lambda \hat{M} + (1 - \lambda) \bar{M} \rangle_s]_0^1 \\
&= \int_t^T (\hat{Y}_s - \bar{Y}_s)^{2p-1} \int_0^1 d\lambda [\partial_y \hat{h}_2(s, X_s, \lambda \hat{Y}_s \\
&\quad + (1 - \lambda) \bar{Y}_s) (\hat{Y}_s - \bar{Y}_s) d\langle \lambda \hat{M} + (1 - \lambda) \bar{M} \rangle_s \\
&\quad + 2\hat{h}_2(s, X_s, \lambda \hat{Y}_s + (1 - \lambda) \bar{Y}_s) d\langle \hat{M} - \bar{M}, \lambda \hat{M} + (1 - \lambda) \bar{M} \rangle_s] \\
&\leq \int_t^T |\hat{Y}_s - \bar{Y}_s|^{2p} \int_0^1 \partial_y \hat{h}_2(s, X_s, \rho_s) d\langle \lambda \hat{M} + (1 - \lambda) \bar{M} \rangle_s d\lambda \\
&\quad + 2 \int_0^1 d\lambda \left( \int_t^T |\hat{Y}_s - \bar{Y}_s|^{2p} \hat{h}_2^2(s, X_s, \rho_s) d[\lambda \hat{M} + (1 - \lambda) \bar{M}]_s \right)^{1/2} \\
&\quad \times \left( \int_t^T |\hat{Y}_s - \bar{Y}_s|^{2p-2} d\langle \hat{M} - \bar{M} \rangle_s \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \int_t^T |\hat{Y}_s - \bar{Y}_s|^{2p} \int_0^1 \partial_y \hat{h}_2(s, X_s, \rho_s) d\langle \lambda \hat{M} + (1 - \lambda) \bar{M} \rangle_s d\lambda \\
 &\quad + \zeta \int_0^1 d\lambda \int_t^T |\hat{Y}_s - \bar{Y}_s|^{2p} (\hat{h}_2)^2(s, X_s, \rho_s) d\langle \lambda \hat{M} + (1 - \lambda) \bar{M} \rangle_s \\
 &\quad + \frac{1}{\zeta} \int_0^1 d\lambda \int_t^T |\hat{Y}_s - \bar{Y}_s|^{2p-2} d\langle \hat{M} - \bar{M} \rangle_s \\
 &\leq \int_t^T |\hat{Y}_s - \bar{Y}_s|^{2p} \int_0^1 d\lambda (\partial_y \hat{h}_2 + \zeta (\hat{h}_2)^2)(s, X_s, \rho_s) d\langle \lambda \hat{M} + (1 - \lambda) \bar{M} \rangle_s \\
 &\quad + \frac{1}{\zeta} \int_t^T |\hat{Y}_s - \bar{Y}_s|^{2p-2} d\langle \hat{M} - \bar{M} \rangle_s,
 \end{aligned}$$

en utilisant l’inégalité de Kunita–Watanabe (3) et le fait que  $2ab \leq \zeta a^2 + b^2/\zeta$ . On en déduit grâce à (10) que

$$2pB \leq \frac{2p}{\zeta} \int_t^T |\hat{Y}_s - \bar{Y}_s|^{2p-2} d\langle \hat{M} - \bar{M} \rangle_s.$$

*Terme C*

$$\begin{aligned}
 A &= 2 \int_t^T (\hat{Y}_s - \bar{Y}_s)^{2p-1} d\langle X, \hat{M} - \bar{M} \rangle_s \hat{h}_1(s, X_s) \\
 &\leq \int_t^T |\hat{Y}_s - \bar{Y}_s|^{2p} |\sigma^*(s, X_s) \hat{h}_1(s, X_s)|^2 ds + \int_t^T (\hat{Y}_s - \bar{Y}_s)^{2p-2} d\langle \hat{M} - \bar{M} \rangle_s \\
 &\leq K \|\sigma^* h_1\|_\infty \int_t^T |\hat{Y}_s - \bar{Y}_s|^{2p} ds + \int_t^T (\hat{Y}_s - \bar{Y}_s)^{2p-2} d\langle \hat{M} - \bar{M} \rangle_s.
 \end{aligned}$$

On aura donc finalement

$$\begin{aligned}
 &|\hat{Y}_t - \bar{Y}_t|^{2p} + 2p \left( p - 1 - \frac{1}{\zeta} \right) \int_t^T |\hat{Y}_s - \bar{Y}_s|^{2p-2} d\langle \hat{M} - \bar{M} \rangle_s \\
 &\leq C \int_t^T |\hat{Y}_s - \bar{Y}_s|^{2p} ds + \text{Martingale}
 \end{aligned}$$

ce qui assure par le lemme de Gronwall, en choisissant  $p$  tel que  $p - 1 - 1/\zeta \geq 0$ , que  $\hat{Y}_t = \bar{Y}_t$ . On en déduit donc l’unicité annoncée.  $\square$

Nous allons maintenant étudier plusieurs cas de convergence des processus stochastiques. Les limites seront identifiées grâce aux résultats précédents.

### 4. Convergence en loi de systèmes dans le cas $h_2 \equiv 0$

Sous l’hypothèse (Hx) de convergence en loi du processus  $X^\varepsilon$ , nous voulons étudier la convergence des processus suivants :

$$\begin{cases} Y_t^\varepsilon = g(X_t^\varepsilon) + \int_t^T h_0(s, X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon) ds \\ \quad + \int_t^T d\langle X^\varepsilon, M^\varepsilon \rangle_s h_1(s, X_s^\varepsilon) - M_T^\varepsilon + M_t^\varepsilon, \\ M_t^\varepsilon = \int_0^t U_s^\varepsilon dM_s^{X^\varepsilon}. \end{cases} \tag{12}$$

Nous rappelons que les topologies sur les espaces des fonctions continues et càdlàg ont été définies au début de la partie 2. Nous allons établir deux résultats de convergence en loi sur la suite  $(X^\varepsilon, Y^\varepsilon, M^\varepsilon)$ . Le premier (Proposition 4.1) concerne le cas  $h_1 \equiv 0$ . Le second (Théorème 4.2) concerne le cas général. La raison pour traiter les deux cas séparément est que la première situation impose des hypothèses nettement moins fortes.

PROPOSITION 4.1. – *On a sous (Hx), (Hxg), (Hx0) et (H01)*

- (i)  $(X^\varepsilon, Y^\varepsilon, M^\varepsilon)$  converge en loi vers  $(X, Y, M)$  dans  $(C([0, T], \mathbb{R}^d) \times D([0, T], \mathbb{R}^{2n}))$ ,
- (ii)  $M$  et la partie martingale de  $X$  sont des  $\mathcal{F}^{X, Y, M}$ -martingales bornées dans  $L^2$ ,
- (iii)  $Y_t = g(X_t) + \int_t^T h_0(s, X_s, Y_s) ds + M_t - M_T$ ,
- (iv)  $(Y, M)$  est l’unique solution de l’EDSR (4) (dans le cas  $h_1 \equiv 0$ ) telle que  $E(\text{tr}\langle M \rangle_T) < \infty$ .

*Preuve.* – D’après le Théorème 3.1 l’EDSR (12) admet une unique solution  $\mathcal{F}^{X^\varepsilon}$ -adaptée  $(Y^\varepsilon, M^\varepsilon)$  vérifiant  $E(\text{tr}\langle M^\varepsilon \rangle_T) < \infty$ . On déduit en outre des estimés (5) et des hypothèses (Hxg), (Hx0) et (H01) que

$$\begin{aligned} E(\text{tr}\langle M^\varepsilon \rangle_T) &= E \int_0^T |U_s^\varepsilon \sigma^\varepsilon(s, X_s^\varepsilon)|^2 ds \\ &\leq cE(|g(X_T^\varepsilon)|^2) + cE\left(\int_0^T |h_0(s, X_s^\varepsilon, 0)|^2 ds\right) \\ &\leq C. \end{aligned} \tag{13}$$

Nous allons utiliser les critères de convergence en loi au sens de Meyer et Zheng [18]. Rappelons qu’on appelle “variation conditionnelle” d’un processus  $K$  càdlàg la quantité

$$V(K) = \sup_\tau V_\tau(K)$$

où le sup est pris sur les subdivisions  $\tau : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  et

$$V_\tau(K) = \sum_i E[|E^{\mathcal{F}_{t_i}^K}(K_{t_{i+1}} - K_{t_i})|].$$

On obtiendra alors la tension au sens de Meyer–Zheng pour la suite de quasi-martingales  $K^\varepsilon$  si

$$\sup_\varepsilon \left( V(K^\varepsilon) + \sup_{0 \leq t \leq T} E|K_t^\varepsilon| \right) < \infty.$$

(i)  $Y^\varepsilon$  et  $M^\varepsilon$  sont des processus à “variations conditionnelles” uniformément bornées en  $\varepsilon$  sur  $[0, T]$ . En effet,

$$V(M^\varepsilon) = 0$$

puisque  $M^\varepsilon$  est une martingale. De plus on a en utilisant (5), (H01) et (Hx0)

$$\begin{aligned} V(Y^\varepsilon) &\leq E \left( \int_0^T |h_0(s, X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon)| ds \right) + V(M^\varepsilon) \\ &\leq kTE \left( 1 + \sup_s |Y_s^\varepsilon| \right) + E \int_0^T |h_0(s, X_s^\varepsilon, 0)| ds \\ &\leq 2kT + TE \left( \sup_s |Y_s^\varepsilon|^2 \right) + E \int_0^T |h_0(s, X_s^\varepsilon, 0)| ds \\ &\leq D. \end{aligned}$$

Enfin, on a en utilisant (13)

$$\sup_{t \in [0, T]} E(|M_t^\varepsilon|) \leq \sqrt{E(\text{tr}\langle M^\varepsilon \rangle_T)} \leq \sqrt{C}$$

et

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} E(|Y_t^\varepsilon|) &\leq D + \sqrt{C} + E(|g(X_T^\varepsilon)|) \\ &\leq D + \sqrt{C} + \sup_\varepsilon E(|g(X_T^\varepsilon)|). \end{aligned}$$

D’après ce qui précède, (Hxg) et le fait que  $X^\varepsilon \Rightarrow X$ , on obtient donc que  $\{(X^\varepsilon, Y^\varepsilon, M^\varepsilon), \varepsilon > 0\}$  est tendue. Il existe alors une sous-suite qui converge en loi vers  $(X, Y, M)$ .

(ii)  $M$  est une  $\mathcal{F}^{X, Y, M}$  martingale car en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0 le long de la sous-suite on obtient

$$\begin{aligned} E(f_s(X^\varepsilon, Y^\varepsilon, M^\varepsilon)M_s^\varepsilon) &= E(f_s(X^\varepsilon, Y^\varepsilon, M^\varepsilon)M_{s+t}^\varepsilon) \\ &\Rightarrow \\ E(f_s(X, Y, M)M_s) &= E(f_s(X, Y, M)M_{s+t}) \end{aligned}$$

pour toute fonction  $f_s$  de la forme

$$f_s(x, y, m) = \prod_{i=1}^n a_i(x_{t_i}) b_i(y_{t_i}) c_i(m_{t_i})$$

où  $a_i, b_i$  et  $c_i$  sont des fonctions continues bornées ( $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = s, s + t, t_i \in \mathcal{I}$  ensemble dense dans  $[0, T]$  de mesure de Lebesgue pleine, sur lequel on a la convergence des lois fini-dimensionnelles du triplet  $(X^\varepsilon, Y^\varepsilon, M^\varepsilon)$ , cf. Meyer et Zheng [18]).

De plus on a pour  $\varphi$  de classe  $C_b^2$

$$E \left[ f_s(X^\varepsilon, Y^\varepsilon, M^\varepsilon) \left( \varphi(X_{t+s}^\varepsilon) - \varphi(X_s^\varepsilon) - \int_s^{t+s} \mathcal{L}^\varepsilon \varphi(X_r^\varepsilon) dr \right) \right] = 0$$

d'où, par passage à la limite le long de la sous-suite en utilisant (Hx)

$$E \left[ f_s(X, Y, M) \left( \varphi(X_{t+s}) - \varphi(X_s) - \int_s^{t+s} \mathcal{L}\varphi(X_r) dr \right) \right] = 0.$$

Ainsi, on montre que  $M_t^\varphi = \varphi(X_t) - \varphi(x) - \int_0^t \mathcal{L}\varphi(X_s) ds$  est une  $\mathcal{F}^{X,Y,M}$ -martingale. En particulier, ceci entraîne que la partie martingale de  $X$  est une  $\mathcal{F}^{X,Y,M}$ -martingale.

(iii) Définissons l'application

$$F : C([0, T], \mathbb{R}^d) \times D([0, T], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x, y) \mapsto \int_t^T h_0(s, x_s, y_s) ds.$$

On veut montrer que  $F(X^\varepsilon, Y^\varepsilon) \Rightarrow F(X, Y)$ . Pour cela, considérons  $\psi$  une fonction continue bornée de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $\eta > 0$ , et définissons pour tout  $m > 0$  la fonction  $\Phi_m$  par

$$\Phi_m : D([0, T], \mathbb{R}^n) \rightarrow D([0, T], \mathbb{R}^n)$$

$$\Phi_m(y)_t = |y_t|^{-1} (|y_t| \wedge m) y_t.$$

On a alors

$$\begin{aligned} & |E\psi \circ F(X^\varepsilon, Y^\varepsilon) - E\psi \circ F(X, Y)| \\ & \leq |E\psi \circ F(X^\varepsilon, \Phi_m(Y^\varepsilon)) - E\psi \circ F(X, \Phi_m(Y))| \\ & \quad + |E\psi \circ F(X^\varepsilon, \Phi_m(Y^\varepsilon)) - E\psi \circ F(X^\varepsilon, Y^\varepsilon)| \\ & \quad + |E\psi \circ F(X, \Phi_m(Y)) - E\psi \circ F(X, Y)| \\ & \leq |E\psi \circ F(X^\varepsilon, \Phi_m(Y^\varepsilon)) - E\psi \circ F(X, \Phi_m(Y))| \\ & \quad + 2\|\psi\|_\infty [P(Y^\varepsilon \neq \Phi_m(Y^\varepsilon)) + P(Y \neq \Phi_m(Y))] \\ & \leq |E\psi \circ F(X^\varepsilon, \Phi_m(Y^\varepsilon)) - E\psi \circ F(X, \Phi_m(Y))| \\ & \quad + 2\|\psi\|_\infty [P(\exists t \leq T, |Y_t^\varepsilon| > m) + P(\exists t \leq T, |Y_t| > m)] \\ & \leq |E\psi \circ F(X^\varepsilon, \Phi_m(Y^\varepsilon)) - E\psi \circ F(X, \Phi_m(Y))| \\ & \quad + 2\|\psi\|_\infty \left[ P\left(\sup_{s \leq T} |Y_s^\varepsilon| > m\right) + P\left(\sup_{s \leq T} |Y_s| > m\right) \right]. \end{aligned}$$

Or, on a  $\sup_\varepsilon E(\sup_s |Y_s^\varepsilon|^2) < \infty$ , ce qui nous permet de prouver l'existence d'une valeur de  $m$  à partir de laquelle

$$\|\psi\|_\infty \left[ P\left(\sup_s |Y_s^\varepsilon| > m\right) + P\left(\sup_s |Y_s| > m\right) \right] < \frac{\eta}{2}.$$

De plus, remarquons que si  $(x_s^\varepsilon, y_s^\varepsilon) \rightarrow (x_s, y_s)$  avec pour tout  $s \geq 0$ ,  $|y_s^\varepsilon| \leq m$ , on a

$$\begin{aligned} |F(x^\varepsilon, y^\varepsilon) - F(x, y)| & \leq |F(x^\varepsilon, y^\varepsilon) - F(x^\varepsilon, y)| + |F(x^\varepsilon, y) - F(x, y)| \\ & \leq k \int_t^T |y_s^\varepsilon - y_s| ds + \int_t^T |h_0(s, x_s^\varepsilon, y_s) - h_0(s, x_s, y_s)| ds \end{aligned}$$



qui tend vers 0 par convergence dominée. Ainsi  $(x, y) \rightarrow \psi \circ F(x, \Phi_m(y))$  est continue bornée ce qui nous permet de conclure que

$$|E\psi \circ F(X^\varepsilon, Y^\varepsilon) - E\psi \circ F(X, Y)| \leq \eta$$

à partir d'un certain rang  $\varepsilon$ , et prouve notre convergence en loi

$$\int_t^T h_0(s, X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon) ds \Rightarrow \int_t^T h_0(s, X_s, Y_s) ds.$$

Or

$$Y_t^\varepsilon = g(X_T^\varepsilon) + \int_t^T h_0(s, X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon) ds + M_T^\varepsilon - M_t^\varepsilon,$$

d'où finalement, pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$Y_t = g(X_T) + \int_t^T h_0(s, X_s, Y_s) ds + M_t - M_T$$

par continuité à droite des processus.

(iv) D'après (Hx), nous savons que toute  $\mathcal{F}^X$ -martingale s'écrit comme une intégrale stochastique par rapport à la partie martingale de  $X$ . Notons maintenant  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{X,Y,M}$ . Ainsi, d'après ce qui précède,  $M$  et  $M^X$  sont des  $\mathcal{F}$ -martingales, et  $Y$  est  $\mathcal{F}$ -adapté. Ceci nous permet de conclure par application de la Proposition 3.2 que  $(Y, M)$  est l'unique solution de l'EDSR (4).  $\square$

Le résultat que nous venons de montrer utilise l'hypothèse (Hx). Nous pouvons l'améliorer en rajoutant le terme  $h_1$  à condition de renforcer les hypothèses sur la suite  $X^\varepsilon$ . Considérons maintenant pour cela que  $(X^\varepsilon, \langle X^\varepsilon, M^\varepsilon \rangle, Y^\varepsilon, M^\varepsilon)$  est une collection indéxée par  $\varepsilon$  de variables aléatoires à valeurs dans  $(C([0, T], \mathbb{R}^{d+n \times d}) \times D([0, T], \mathbb{R}^{2n}))$ . On a alors le

**THÉORÈME 4.2.** – *On a sous (Hx), (Hxx), (Hx0), (Hx1), (Hxg) et (H0l)*

- (i)  $(X^\varepsilon, \langle X^\varepsilon, M^\varepsilon \rangle, Y^\varepsilon, M^\varepsilon)$  converge en loi vers  $(X, \langle X, M \rangle, Y, M)$  dans  $(C([0, T], \mathbb{R}^{d+n \times d}) \times D([0, T], \mathbb{R}^{2n}))$ ,
- (ii)  $M$  et la partie martingale de  $X$  sont des  $\mathcal{F}^{X,Y,M}$ -martingales bornées dans  $L^2$ ,
- (iii)  $Y_t = g(X_T) + \int_t^T h_0(s, X_s, Y_s) ds + \int_t^T h_1(s, X_s) d\langle X, M \rangle_s + M_t - M_T$ ,
- (iv)  $(Y, M)$  est l'unique solution de l'EDSR (4) telle que  $E(\text{tr}\langle M \rangle_T) < \infty$ .

*Preuve.* – La démarche est sensiblement la même que pour la Proposition 4.1, sauf que dans ce cas, grâce à l'hypothèse (Hxx), nous montrerons la convergence en loi dans le sens "classique" du processus  $\langle X^\varepsilon, M^\varepsilon \rangle$ . Avant cela, montrons tout d'abord les deux lemmes suivants :

**LEMME 4.3.** – *Si  $(X^\varepsilon, \langle X^\varepsilon, M^\varepsilon \rangle, M^\varepsilon)$  converge en loi vers  $(X, L, M)$  dans  $C([0, T], \mathbb{R}^{d+n \times d}) \times D([0, T], \mathbb{R}^n)$ , alors  $L = \langle X, M \rangle$ .*

*Preuve.* – En effet, nous savons que

$$X_t^\varepsilon M_t^\varepsilon - \langle X^\varepsilon, M^\varepsilon \rangle_t = N_t^\varepsilon$$

où  $N^\varepsilon$  est une martingale. Par convergence en loi, puisque la suite  $N^\varepsilon$  est tendue d’après le critère de Meyer–Zheng, on a  $t$ -presque partout

$$X_t M_t - L_t = N_t$$

où  $N$  est une martingale, donc partout puisque les fonctions qui interviennent sont càdlàg. Ainsi, puisque  $L$  est continue,  $L = \langle X, M \rangle$  (voir par exemple [26, p. 58]).  $\square$

LEMME 4.4. – Si  $g_n \rightarrow g$  uniformément sur  $[0, T]$  avec  $g$  bornée,  $u_n \rightarrow u$  uniformément, et  $\int_0^T |du_n| \leq C$ , alors pour tout  $t \in [0, T]$  on a  $\int_t^T g_n du_n \rightarrow \int_t^T g du$ .

Preuve. – Par le lemme de Fatou, on déduit que  $\int_0^T |du| \leq C$ . Soit  $\{w_p, p \in \mathcal{N}\}$  une suite de fonctions constantes par morceaux approxinant  $g$ . On a

$$\begin{aligned} \left| \int_t^T g_n du_n - \int_t^T g du \right| &\leq \int_0^T |g_n - w_p| |du_n| + \int_0^T |w_p - g| |du| + \left| \int_t^T w_p du_n - \int_t^T w_p du \right| \\ &\leq C(\|g_n - g\|_\infty + \|g - w_p\|_\infty) + C\|g - w_p\|_\infty \\ &\quad + \left| \int_t^T w_p du_n - \int_t^T w_p du \right|. \end{aligned}$$

Soit maintenant  $\eta > 0$ . Il existe  $p$  suffisamment grand tel que  $\|g - w_p\|_\infty < \eta$ . Ce  $p$  étant fixé, on a bien  $|\int_t^T w_p du_n - \int_t^T w_p du| < \eta$  et  $\|g_n - g\|_\infty < \eta$  à partir d’un certain rang  $n$ , d’où

$$\left| \int_t^T g_n du_n - \int_t^T g du \right| \leq (3C + 1)\eta$$

ce qui prouve la convergence.  $\square$

Nous pouvons maintenant donner la preuve du Théorème 4.2 :

(i) de même que précédemment, en utilisant (5), (Hxg), (Hx0), (Hx1) et (H01), on montre que  $Y^\varepsilon$  et  $M^\varepsilon$  sont des processus à “variations conditionnelles” uniformément bornées en  $\varepsilon$  sur  $[0, T]$ . En effet on montre que

$$\begin{aligned} V(Y^\varepsilon) &\leq E\left(\int_0^T |h_0(s, X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon)| ds\right) + E\left(\int_0^T |d\langle X^\varepsilon, M^\varepsilon \rangle_s h_1(s, X_s^\varepsilon)|\right) + V(M^\varepsilon) \\ &\leq kTE\left(\sup_s |Y_s^\varepsilon|\right) + \sup_\varepsilon \int_0^T |h_0(s, X_s^\varepsilon, 0)| ds + 1/2\|(\sigma^\varepsilon)^* h_1\|_\infty^2 \\ &\quad + 1/2E\int_0^T |U_s^\varepsilon \sigma^\varepsilon|^2 ds \\ &\leq kTE\left(1 + \sup_s |Y_s^\varepsilon|^2\right) + \sup_\varepsilon \int_0^T |h_0(s, X_s^\varepsilon, 0)| ds + 1/2T\|(\sigma^\varepsilon)^* h_1\|_\infty^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 1/2 \sup_{\varepsilon} E(\text{tr}\langle M^\varepsilon \rangle_T) \\
 &\leq D.
 \end{aligned}$$

De plus on a

$$\sup_{\varepsilon} E \left[ \left( \int_0^T |U_s^\varepsilon \sigma^\varepsilon(s, X_s^\varepsilon)|^2 ds \right)^2 \right] < \infty.$$

En effet, d’après (5) nous avons

$$|Y_t^\varepsilon|^2 \leq e^{(1+K^2+2k)T} E^{\mathcal{F}^{X_t^\varepsilon}} \left( |g(X_T^\varepsilon)|^2 + \int_0^T |h_0(s, X_s^\varepsilon, 0)|^2 ds \right),$$

et grâce à l’inégalité de Doob (voir [26, p. 12])

$$\begin{aligned}
 E \left( \sup_s |Y_s^\varepsilon|^4 \right) &\leq CE \left( \sup_s \left| E^{\mathcal{F}^{X_s^\varepsilon}} \left( |g(X_T^\varepsilon)|^2 + \int_0^T |h_0(s, X_s^\varepsilon, 0)|^2 ds \right) \right|^2 \right) \\
 &\leq 4CE \left| E^{\mathcal{F}^{X_T^\varepsilon}} \left( |g(X_T^\varepsilon)|^2 + \int_0^T |h_0(s, X_s^\varepsilon, 0)|^2 ds \right) \right|^2 \\
 &\leq 4CE \left( |g(X_T^\varepsilon)|^2 + \int_0^T |h_0(s, X_s^\varepsilon, 0)|^2 ds \right)^2 \\
 &\leq 8CE |g(X_T^\varepsilon)|^4 + 8CTCE \int_0^T |h_0(s, X_s^\varepsilon, 0)|^4 ds,
 \end{aligned}$$

d’où

$$\sup_{\varepsilon} E \left( \sup_s |Y_s^\varepsilon|^4 \right) < \infty.$$

De plus on a en utilisant Kunita–Watanabe (3) et (Hx1)

$$\begin{aligned}
 |M_t^\varepsilon|^4 &\leq 8(Y_0^\varepsilon + Y_t^\varepsilon)^4 + 8 \left( \int_0^t h_0(s, X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon) ds \right)^4 + 8 \left( \int_0^t d\langle X^\varepsilon, M^\varepsilon \rangle_s h_1(s, X_s^\varepsilon) \right)^4 \\
 &\leq c_1 \sup_s |Y_s^\varepsilon|^4 + c_2 \int_0^T |h_0(s, X_s^\varepsilon, 0)|^4 ds \\
 &\quad + c_3 \left( \int_0^T |(\sigma^\varepsilon)^* h_1(s, X_s^\varepsilon)|^2 ds \right)^2 + c_4 \langle M^\varepsilon \rangle_t^2 \\
 &\leq c_1 \sup_s |Y_s^\varepsilon|^4 + c_2 \int_0^T |h_0(s, X_s^\varepsilon, 0)|^4 ds + c_3 T^2 K^4 + c_4 \langle M^\varepsilon \rangle_t^2.
 \end{aligned}$$

Appelons maintenant  $\tau^{\varepsilon,m} = \inf\{t \leq T, \langle M^\varepsilon \rangle_t \geq m\} \wedge T$ . Alors on a en utilisant ce qui précède et les inégalités de Burkholder

$$\begin{aligned} E \langle M^\varepsilon \rangle_{\tau^{\varepsilon,m}}^2 &\leq C E \sup_{s \leq \tau^{\varepsilon,m}} |M_s^\varepsilon|^4 \\ &\leq C_1 E \sup_s |Y_s^\varepsilon|^4 + C_2 E \int_0^T |h_0(s, X_s^\varepsilon, 0)|^4 ds + C_3 T^2 K^4 + C_4 E \langle M^\varepsilon \rangle_{\tau^{\varepsilon,m}}^2. \end{aligned}$$

Or  $C_4 = C.c_4$  peut être choisi aussi petit que l’on veut à condition que  $c_3$  soit grand, ce qui nous permet d’obtenir que

$$E \langle M^\varepsilon \rangle_{\tau^{\varepsilon,m}}^2 \leq C'_1 E \sup_s |Y_s^\varepsilon|^4 + C'_2 E \int_0^T |h_0(s, X_s^\varepsilon, 0)|^4 ds + C'_3 T^2 K^4,$$

d’où par convergence monotone quand  $m \rightarrow +\infty$

$$E \langle \langle M^\varepsilon \rangle_T^2 \rangle \leq C'_1 E \sup_s |Y_s^\varepsilon|^4 + C'_2 E \int_0^T |h_0(s, X_s^\varepsilon, 0)|^4 ds + C'_3 T^2 K^4,$$

soit en utilisant (Hx0) et ce qui précède

$$\sup_\varepsilon E \left( \int_0^T |U_s^\varepsilon \sigma^\varepsilon(s, X_s^\varepsilon)|^2 ds \right)^2 < \infty.$$

Enfin, d’après (Hxx), en choisissant  $\alpha$  tel que  $2e/(1 + \nu) < \alpha < \inf\{2e, 4e/(2 + e)\}$  puis  $p = 2e/\alpha$ , et en utilisant de nouveau l’inégalité de Kunita–Watanabe (3), on a

$$\begin{aligned} E |\langle X^\varepsilon, M^\varepsilon \rangle_t - \langle X^\varepsilon, M^\varepsilon \rangle_s|^\alpha &\leq [E |\langle X^\varepsilon \rangle_t - \langle X^\varepsilon \rangle_s|^\varepsilon]^{1/p} [E |\langle M^\varepsilon \rangle_t - \langle M^\varepsilon \rangle_s|^{\alpha p/2(p-1)}]^{1-1/p} \\ &\leq C(t - s)^{(1+\nu)/p} |E \langle M^\varepsilon \rangle_T^{\alpha p/2(p-1)}|^{1-1/p}. \end{aligned}$$

Ainsi on a bien

$$(1 + \nu)/p = (1 + \nu)\alpha/2e > 1$$

et, puisque  $\alpha < 2e/(1 + e)$

$$\alpha p/2(p - 1) = e/(2e/\alpha - 1) \leq 2,$$

d’où

$$E |\langle X^\varepsilon, M^\varepsilon \rangle_t - \langle X^\varepsilon, M^\varepsilon \rangle_s|^\alpha \leq C'(t - s)^{1+\nu'}.$$

La suite  $\{\langle X^\varepsilon, M^\varepsilon \rangle, \varepsilon > 0\}$  est donc tendue dans  $C([0, T], \mathbb{R}^{n \times d})$ . On déduit de ce qui précède et de (Hx) que  $(X^\varepsilon, \langle X^\varepsilon, M^\varepsilon \rangle, Y^\varepsilon, M^\varepsilon)$  converge en loi le long d’une sous-suite vers  $(X, L, Y, M)$ , et que  $L = \langle X, M \rangle$  grâce au Lemme 4.3.

(ii) Par le même raisonnement que dans la preuve de la Proposition 4.1, on montre que  $M$  et la partie martingale de  $X$  sont des  $\mathcal{F}^{X,Y,M}$ -martingales.

(iii) Considérons maintenant l’application

$$F : C([0, T], \mathbb{R}^{d+n \times d}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, u) \mapsto \int_t^T h_1(s, x_s) du_s.$$

On veut montrer que  $F(X^\varepsilon, \langle X^\varepsilon, M^\varepsilon \rangle) \Rightarrow F(X, \langle X, M \rangle)$ . Pour cela, considérons  $\psi$  une fonction continue bornée de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $\eta > 0$ . Appelons  $\Phi_m$  la fonction définie pour tout  $m > 0$  par

$$\Phi_m : C([0, T], \mathbb{R}^{n \times d}) \rightarrow C([0, T], \mathbb{R}^{n \times d})$$

$$\Phi_m(u)_t = u_{t \wedge \tilde{\tau}_m}$$

où  $\tilde{\tau}_m = \inf\{t \geq 0, \int_0^t |du| \geq m\}$ . On a alors

$$\begin{aligned} & |E\psi \circ F(X^\varepsilon, \langle X^\varepsilon, M^\varepsilon \rangle) - E\psi \circ F(X, \langle X, M \rangle)| \\ & \leq |E\psi \circ F(X^\varepsilon, \Phi_m(\langle X^\varepsilon, M^\varepsilon \rangle)) - E\psi \circ F(X, \Phi_m(\langle X, M \rangle))| \\ & \quad + |E\psi \circ F(X^\varepsilon, \Phi_m(\langle X^\varepsilon, M^\varepsilon \rangle)) - E\psi \circ F(X^\varepsilon, \langle X^\varepsilon, M^\varepsilon \rangle)| \\ & \quad + |E\psi \circ F(X, \Phi_m(\langle X, M \rangle)) - E\psi \circ F(X, \langle X, M \rangle)| \\ & \leq |E\psi \circ F(X^\varepsilon, \Phi_m(\langle X^\varepsilon, M^\varepsilon \rangle)) - E\psi \circ F(X, \Phi_m(\langle X, M \rangle))| \\ & \quad + 2\|\psi\|_\infty [P(\Phi_m(\langle X^\varepsilon, M^\varepsilon \rangle) \neq \langle X^\varepsilon, M^\varepsilon \rangle) + P(\Phi_m(\langle X, M \rangle) \neq \langle X, M \rangle)] \\ & \leq |E\psi \circ F(X^\varepsilon, \Phi_m(\langle X^\varepsilon, M^\varepsilon \rangle)) - E\psi \circ F(X, \Phi_m(\langle X, M \rangle))| \\ & \quad + 2\|\psi\|_\infty \left[ P\left(\int_0^T |d\langle X^\varepsilon, M^\varepsilon \rangle_s| > m\right) + P\left(\int_0^T |d\langle X, M \rangle_s| > m\right) \right]. \end{aligned}$$

Or, on a

$$\sup_\varepsilon E \int_t^T |d\langle X^\varepsilon, M^\varepsilon \rangle_s| \leq \sup_\varepsilon \sqrt{E(\text{tr}\langle X^\varepsilon \rangle_T) E(\text{tr}\langle M^\varepsilon \rangle_T)} < \infty,$$

ce qui nous permet de prouver l’existence d’une valeur de  $m$  à partir de laquelle

$$\|\psi\|_\infty \left[ P\left(\int_t^T |d\langle X^\varepsilon, M^\varepsilon \rangle_s| > m\right) + P\left(\int_t^T |d\langle X, M \rangle_s| > m\right) \right] < \frac{\eta}{2}.$$

De plus  $\psi \circ F(x, \Phi_m(u))$  est continue bornée grâce au Lemme 4.4 : en effet, si  $(x^\varepsilon, u^\varepsilon)$  converge uniformément vers  $(x, u)$  sur  $[0, T]$  avec  $\int_t^T |du_s^\varepsilon| \leq m$ , on a la fonction  $g^\varepsilon(t) = h_1(t, x_t^\varepsilon)$  qui converge uniformément vers  $g(t) = h_1(t, x_t)$  puisque  $h_1$  est continue et on peut appliquer le résultat du lemme pour obtenir la continuité de  $F$ . Ceci nous permet de conclure que

$$|E\psi \circ F(X^\varepsilon, \langle X^\varepsilon, M^\varepsilon \rangle) - E\psi \circ F(X, \langle X, M \rangle)| \leq \eta$$

à partir d’un certain rang  $\varepsilon$ , et prouve notre convergence en loi

$$\int_t^T d\langle X^\varepsilon, M^\varepsilon \rangle_s h_1(s, X_s^\varepsilon) \Rightarrow \int_t^T d\langle X, M \rangle_s h_1(s, X_s).$$

On en déduit en utilisant la même démonstration que dans la la preuve (iii) de la Proposition 4.1 que

$$Y_t = g(X_T) + \int_t^T h_0(s, X_s, Y_s) ds + \int_t^T d\langle X, M \rangle_s h_1(s, X_s) + M_t - M_T.$$

(iv) La dernière partie du théorème se montre comme dans la preuve de la Proposition 4.1, en faisant appel au résultat d’unicité du Théorème 3.1.  $\square$

*Remarque.* – Comme nous le verrons plus loin, ce qui est important dans l’application aux EDP du paragraphe 7, c’est que  $Y_0^\varepsilon$  converge vers  $Y_0$ . Or, pour un  $t$  donné,  $Y_t^\varepsilon$  ne converge pas nécessairement vers  $Y_t$  à cause de la topologie de convergence en loi choisie dans cette partie. C’est pourquoi nous aurons besoin du résultat suivant :

PROPOSITION 4.5. – *Sous les hypothèses de la Proposition 4.1 ou du Théorème 4.2, nous avons en outre que  $Y_0^\varepsilon$  converge vers  $Y_0$  en probabilité.*

*Preuve.* – Définissons sur l’intervalle  $t \in [T, T + 1]$

$$\begin{cases} Y_t^\varepsilon = g(X_T^\varepsilon), \\ M_t^\varepsilon = M_T^\varepsilon. \end{cases}$$

On étudie alors la convergence des processus sur l’intervalle étendu  $[0, T + 1]$ , les résultats précédents restant encore valides puisqu’en particulier  $M$  reste une martingale. On en déduit en particulier par la convergence au sens de Meyer–Zheng qu’il existe  $t_0 \in [T, T + 1]$  tel que  $M_{t_0}^\varepsilon \Rightarrow M_{t_0}$ . De plus, puisque  $M^\varepsilon$  est constant à  $\varepsilon$  fixé sur  $[T, T + 1]$ , on en déduit que  $M$  est p.s. constant, presque partout sur ce même intervalle, donc partout puisque nous savons qu’à la limite les processus obtenus sont càdlàg.

Finalement on a

$$M_T^\varepsilon = M_{t_0}^\varepsilon \Rightarrow M_{t_0} = M_T,$$

ce qui nous permet d’obtenir ce qui nous intéresse :

$$M_T^\varepsilon \Rightarrow M_T.$$

Or

$$Y_0^\varepsilon = g(X_T^\varepsilon) + \int_0^T h_0(s, X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon) ds + \int_0^T d\langle X^\varepsilon, M^\varepsilon \rangle_s h_1(s, X_s^\varepsilon) + M_T^\varepsilon$$

d’où, par le même raisonnement que dans la preuve du Théorème 4.2,

$$\begin{aligned} &g(X_T^\varepsilon) + \int_0^T h_0(s, X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon) ds + \int_0^T d\langle X^\varepsilon, M^\varepsilon \rangle_s h_1(s, X_s^\varepsilon) + M_T^\varepsilon \\ &\Rightarrow g(X_T) + \int_0^T h_0(s, X_s, Y_s) ds + \int_0^T d\langle X, M \rangle_s h_1(s, X_s) + M_T, \end{aligned}$$

soit

$$Y_0^\varepsilon \Rightarrow Y_0$$

ce qui assure le résultat puisque  $\mathcal{L}$  étant déterministe d’après (Hx),  $Y_0$  est alors lui-même déterministe par construction de l’EDSR.  $\square$

*Remarque.* – Dans le cas où le générateur limite  $\mathcal{L}$  est aléatoire, on conserve la convergence en loi  $Y_0^\varepsilon \Rightarrow Y_0$ .

### 5. Le cas $h_1 \equiv 0, h_2 = h_2(y)$ et $n = 1$

Maintenant, sous l’hypothèse (Hx) de convergence en loi du processus  $X^\varepsilon$ , nous voulons étudier la convergence de l’EDSR :

$$\begin{cases} Y_t^\varepsilon = g(X_t^\varepsilon) + \int_t^T h_0(s, X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon) ds + \int_t^T h_2(Y_s^\varepsilon) d\langle M^\varepsilon \rangle_s - M_t^\varepsilon + M_t^\varepsilon, \\ M_t^\varepsilon = \int_0^t U_s^\varepsilon . dM_s^{X^\varepsilon}. \end{cases} \quad (14)$$

Nous pouvons énoncer le

**THÉORÈME 5.1.** – *Sous (Hx), (Hg), (H0b) et (H2b),  $(X^\varepsilon, Y^\varepsilon) \rightarrow (X, Y)$  en loi dans  $(C([0, T], \mathbb{R}^d) \times D([0, T], \mathbb{R}))$  et il existe  $M$  tel que  $(Y, M)$  est l’unique solution  $\mathcal{F}^X$ -adaptée vérifiant  $E\langle M \rangle_T < \infty$  de l’EDSR :*

$$Y_t = g(X_t) + \int_t^T h_0(s, X_s, Y_s) ds + \int_t^T h_2(Y_s) d\langle M \rangle_s + M_t - M_T.$$

De plus  $Y_0^\varepsilon \rightarrow Y_0$  en probabilité.

*Preuve.* – D’après le Théorème 3.3 l’EDSR (14) admet une unique solution  $\mathcal{F}^{X^\varepsilon}$ -adaptée  $(Y^\varepsilon, M^\varepsilon)$  vérifiant  $E\langle M^\varepsilon \rangle_T < \infty$ . On a en outre  $M_t^\varepsilon = \int_0^t U_s^\varepsilon . dM_s^{X^\varepsilon}$ .

Posons  $K^\varepsilon = k(Y^\varepsilon)$ ,  $L^\varepsilon = k'(Y^\varepsilon)U^\varepsilon$  et  $\tilde{h}_0(t, x, y) = k' \circ k^{-1}(y)h_0(t, x, k^{-1}(y))$ . Dans ce cas on a par le calcul inverse de celui dans la preuve du Théorème 3.3

$$K_t^\varepsilon = k \circ g(X_t^\varepsilon) + \int_t^T \tilde{h}_0(X_s^\varepsilon, K_s^\varepsilon) ds - \int_t^T L_s^\varepsilon . dM_s^{X^\varepsilon}.$$

Appelons encore  $\tilde{M}_t^\varepsilon = \int_0^t L_s^\varepsilon . dM_s^{X^\varepsilon}$ .

*Remarque.* – On déduit des estimés (5) et de la convergence en loi (Hx) que

$$\begin{aligned} E\langle \tilde{M}^\varepsilon \rangle_T &\leq cE(|k \circ g(X_T^\varepsilon)|) + cE\left(\int_0^T \tilde{h}_0^2(X_s^\varepsilon, 0) ds\right) \\ &\leq c\|k \circ g\|_\infty + cT\|h_0\|_\infty^2 \leq C. \end{aligned}$$

Nous allons étudier la convergence de ces nouveaux processus obtenus par changement d’EDSR, et nous en déduirons le résultat souhaité.

Nous considérons pour cela que  $(X^\varepsilon, K^\varepsilon, \tilde{M}^\varepsilon)$  est une collection indexée par  $\varepsilon$  de variables aléatoires à valeurs dans  $C([0, T], \mathbb{R}^d) \times D([0, T], \mathbb{R}^2)$ . Puisque  $\tilde{h}_0$  vérifie les hypothèses requises, nous pouvons appliquer les résultats de la Proposition 4.1 à la convergence de  $(X^\varepsilon, K^\varepsilon, \tilde{M}^\varepsilon)$  dans le cas particulier  $n = 1$ . Celle-ci nous permet de conclure la preuve du Théorème 5.1 en appliquant à  $K$  la transformation inverse par  $k^{-1}$  puisque  $k^{-1}$  est une fonction continue.

Définissons maintenant sur l'intervalle  $t \in [T, T + 1]$

$$\begin{cases} K_t^\varepsilon = k \circ g(X_T^\varepsilon), \\ \tilde{M}_t^\varepsilon = \tilde{M}_T^\varepsilon. \end{cases}$$

On peut alors étudier la convergence des processus sur l'intervalle étendu  $[0, T + 1]$ , et obtenir par le même raisonnement que pour la Proposition 4.5.

$$K_0^\varepsilon \Rightarrow K_0.$$

On en déduit que

$$Y_0^\varepsilon \Rightarrow Y_0$$

en appliquant la transformation inverse  $Y = k^{-1}(K)$ . Remarquons que puisque dans notre cas  $\mathcal{L}$  est déterministe,  $K_0$  est lui-même déterministe par construction de l'EDSR, ce qui assure la convergence en probabilité et achève la démonstration.  $\square$

### 6. Un deuxième cas de convergence en loi

Nous voulons étudier la convergence des processus suivants

$$\begin{cases} X_t^\varepsilon = x + M_t^{X^\varepsilon} + \int_0^t v^\varepsilon(X_s^\varepsilon, s) ds, \\ Y_t^\varepsilon = g(X_T^\varepsilon) + \int_t^T h_0(s, X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon) ds + \int_t^T d\langle X^\varepsilon, M^\varepsilon \rangle_s h_1(s, X_s^\varepsilon) ds \\ \quad + \int_t^T h_2(s, X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon) d\langle M^\varepsilon \rangle_s - M_T^\varepsilon + M_t^\varepsilon, \\ M_t^\varepsilon = \int_0^t U_s^\varepsilon . dM_s^{X^\varepsilon} \end{cases}$$

sous l'hypothèse (Hx) que  $X^\varepsilon \rightarrow X$  en loi où  $X$  est une diffusion de générateur

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d (\sigma \sigma^*)_{i,j}(x, t) \partial_{x_i x_j}^2 + v(x, t) . \nabla.$$

Dans cette section, pour alléger les preuves, nous considérerons un processus  $X^\varepsilon$  simplifié pour lequel  $\sigma^\varepsilon \equiv \text{Id}(\mathbb{R}^d)$ . Nous avons alors  $|\sigma^* h_1| = |h_1|$ . De plus nous savons qu'il existe un  $\mathcal{F}^{X^\varepsilon}$ -mouvement brownien ddimensionnel  $B^\varepsilon$ , noté  $B$  dans la suite, tel que  $dM_s^{X^\varepsilon} = dB_s$ . Appelons  $Z_s^\varepsilon = U_s^\varepsilon$  pour retrouver des notations classiques pour les EDSR ; nous avons alors

$$\begin{aligned} X_t^\varepsilon &= x + B_t + \int_0^t v(X_s^\varepsilon, s) ds, \\ Y_t^\varepsilon &= g(X_T^\varepsilon) + \int_t^T h(s, X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon) ds - \int_t^T Z_s^\varepsilon . dB_s \end{aligned}$$

avec  $h(t, x, y, z) = h_0(t, x, y) + zh_1(t, x) + h_2(t, x, y)|z|^2$ .



Dans la partie précédente, nous nous ramenons à la convergence en loi “au sens de Meyer et Zheng” de  $(Y^\varepsilon, M^\varepsilon)$ . Dans un cas plus général, il faut établir la convergence de  $(X^\varepsilon, \langle X^\varepsilon, M^\varepsilon \rangle, Y^\varepsilon, M^\varepsilon, \langle M^\varepsilon \rangle)$  vers  $(X, \langle X, M \rangle, Y, M, N)$  et montrer que  $N = [M]$ . Le problème est que si en effet nous pouvons obtenir la convergence de cet ensemble de processus – où les trois derniers termes convergent dans  $D(0, T, \mathbb{R}^3)$  “au sens de Meyer et Zheng” –, il n’est pas possible d’en déduire en général que  $N = [M]$ . C’est en revanche vrai si  $N$  est un processus continu. Sous les hypothèses (H0b)’, (H2b)’ et (Hx2), nous allons pouvoir établir cette continuité, et même plus puisque dans ce cas nous sommes en mesure de prouver la tension des processus dans la topologie de la convergence uniforme sur tout compact : ainsi nous pouvons prouver la convergence en loi dans l’espace des fonctions continues.

D’après le Théorème 3.4, nous avons sous (Hg), (H0b)’ et (H2b)’ l’existence et l’unicité de l’EDSR étudiée. En reprenant la remarque qui suit ce théorème, nous transformons cette EDSR  $(Y^\varepsilon, Z^\varepsilon)$  en l’EDSR (9) pour  $(\hat{Y}^\varepsilon, \hat{Z}^\varepsilon)$  dont le coefficient  $\hat{h}_2$  satisfait (10). Ceci est réalisé avec la même fonction  $\Phi$  pour tout  $\varepsilon > 0$  puisqu’elle ne dépend que de  $\|h_0\|_\infty, \|h_2\|_\infty, \|h_1\|_\infty$  et  $\|g\|_\infty$ . Dans ce qui suit, nous utiliserons le fait que les fonctions  $\hat{h}_i, i = 0, 1, 2$ , étendues sur  $\mathbb{R}^{d+2}$ , ainsi que leurs dérivées, sont bornées. Nous pouvons alors énoncer la

PROPOSITION 6.1. – *Définissons*

$$O_T^\varepsilon = \sup_{0 \leq t \leq T} |(\nabla X^\varepsilon)_t|^{2p} + \sup_{0 \leq t \leq T} |(\nabla X^\varepsilon)_t^{-1}|^{2p},$$

$p > (2 + \zeta)/2\zeta, b = C_{2p}^{2p(2p-1)}(1 + \|\nabla_x \hat{h}_2\|_\infty)^{2p}/\delta^{2p-1}, K_p = 2pC_{2p}$  et  $\beta = K_p^{2p} \|\nabla_x \hat{h}_0\|_\infty^{2p/(2p-1)} + K_p^{2p} \|\nabla_x \hat{h}_1\|_\infty^{4p/(2p-1)} + 2p\|\partial_y \hat{h}_0\|_\infty + 2p/(2p - 1)\|\hat{h}_1\|_\infty^2$ . Si  $E(O_T^\varepsilon) < \infty$ , et sous la condition de structure (10), on obtient que p.s.

$$2|\hat{Z}_t^\varepsilon|^{2p} \leq e^{\beta(T-t)} E(O_T^\varepsilon (|(\nabla g)(X_T^\varepsilon)|^2 + 2T + b\langle \hat{M}^\varepsilon \rangle_T) | \mathcal{F}_t^{X^\varepsilon}).$$

*Preuve.* – Considérons tout d’abord  $(\hat{Y}^{\varepsilon,m}, \hat{Z}^{\varepsilon,m})$  la solution tronquée de l’EDSR précédemment définie : le  $z$  du coefficient non-linéaire est remplacé par  $\psi^m(z)$  avec

$$\psi^m(z) = \begin{cases} z & \text{si } |z| \leq m - 1, \\ m & \text{si } |z| \geq m \end{cases}$$

et  $\psi^m$  est dérivable, à dérivées continues. Remarquons qu’on peut alors supposer que  $|\psi^m(z)| \leq |z|$  et  $|\nabla \psi^m| \leq 1$ .

Dans ce qui suit, nous oublierons les indices  $\varepsilon, m$  et le signe  $\hat{\cdot}$  pour alléger l’écriture.

(i) EDSR satisfaite par  $(\hat{Y}_t, \hat{Z}_t) = ((\nabla Y)_t, (\nabla Z)_t)$ .

D’après les résultats de [23], en particulier puisque  $Z$  a été remplacé dans l’EDSR par une fonction bornée  $\psi(Z)$ , on peut dériver en  $x$  et obtenir

$$\begin{aligned} (\nabla Y)_t &= (\nabla g)(X_T)(\nabla X)_T + \int_t^T [\nabla_x h(s, X_s, Y_s, \psi(Z_s))(\nabla X)_s \\ &\quad + \partial_y h(s, X_s, Y_s, \psi(Z_s))(\nabla Y)_s \\ &\quad + \nabla_z h(s, X_s, Y_s, \psi(Z_s))\nabla \psi(Z_s)(\nabla Z)_s] ds - \int_t^T (\nabla Z)_s dB_s \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_t &= (\nabla g)(X_T)(\nabla X)_T + \int_t^T [\nabla_x h(s, X_s, Y_s, \psi(Z_s))(\nabla X)_s + \partial_y h(s, X_s, Y_s, \psi(Z_s))\tilde{Y}_s \\ &\quad + \nabla_z h(s, X_s, Y_s, \psi(Z_s))\nabla\psi(Z_s)\tilde{Z}_s] ds - \int_t^T \tilde{Z}_s dB_s \\ &= (\nabla g)(X_T)(\nabla X)_T + \int_t^T [\alpha_s(\nabla X)_s + \rho_s\tilde{Y}_s + \gamma_s\tilde{Z}_s] ds - \int_t^T \tilde{Z}_s dB_s \end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned} \alpha_t &= \nabla_x h_0(t, X_t, Y_t) + \psi(Z_t)\nabla_x h_1(t, X_t) + \nabla_x h_2(t, X_t, Y_t)|\psi(Z_t)|^2, \\ \rho_t &= \partial_y h_0(t, X_t, Y_t) + \partial_y h_2(t, X_t, Y_t)|\psi(Z_t)|^2, \\ \gamma_t &= 2h_2(t, X_t, Y_t)\psi(Z_t)\nabla\psi(Z_t) + \nabla\psi(Z_t)h_1(t, X_t). \end{aligned}$$

Remarquons qu'en utilisant l'hypothèse (Hg)', et le théorème de comparaison, on a que  $\tilde{Y}$  est borné p.s.

(ii) Inégalité satisfaite par  $\tilde{Y}$

Nous allons établir le résultat suivant :

LEMME 6.2. – On a p.s.

$$|\tilde{Y}_t|^2 \leq e^{\beta(T-t)} E \left( \sup_{0 \leq t \leq T} |(\nabla X)_t|^2 \left( |(\nabla g)(X_T)|^2 + 2T + b \int_0^T |Z_s|^2 ds \right) \middle| \mathcal{F}_t^X \right).$$

Preuve. – En appliquant la formule d'Itô on obtient pour  $p \in \mathcal{N}^*$

$$\begin{aligned} e^{\beta t} |\tilde{Y}_t|^{2p} &= e^{\beta T} |\tilde{Y}_T|^{2p} - 2p \int_t^T e^{\beta s} |\tilde{Y}_s|^{2p-2} \tilde{Y}_s \cdot (\tilde{Z}_s dB_s) \\ &\quad + \int_t^T e^{\beta s} |\tilde{Y}_s|^{2p-2} (2p\tilde{Y}_s \cdot \alpha_s(\nabla X)_s + 2p\rho_s |\tilde{Y}_s|^2 + 2p\tilde{Y}_s \cdot \gamma_s \tilde{Z}_s \\ &\quad - p(2p-1)\text{tr}(\tilde{Z}_s \tilde{Z}_s^*) - \beta |\tilde{Y}_s|^2) ds. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} 2p\tilde{Y}_s \cdot \gamma_s \tilde{Z}_s - p(2p-1)\text{tr}(\tilde{Z}_s \tilde{Z}_s^*)/2 &= \sum_{1 \leq i, j \leq d} (2p\tilde{Y}_s^j \gamma_s^i \tilde{Z}_s^{i,j} - p(2p-1)|\tilde{Z}_s^{i,j}|^2) \\ &\leq p/(2p-1) \sum_{1 \leq i, j \leq d} |\tilde{Y}_s^j \gamma_s^i|^2 \\ &= p/(2p-1)\tilde{Y}_s \cdot \gamma_s \gamma_s^* \tilde{Y}_s, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 e^{\beta t} |\tilde{Y}_t|^{2p} &\leq e^{\beta T} |\tilde{Y}_T|^{2p} - 2p \int_t^T e^{\beta s} |\tilde{Y}_s|^{2p-2} \tilde{Y}_s \cdot (\tilde{Z}_s dB_s) \\
 &\quad + \int_t^T e^{\beta s} |\tilde{Y}_s|^{2p-2} (2p \tilde{Y}_s \cdot \alpha_s(\nabla X)_s + 2p \rho_s |\tilde{Y}_s|^2 \\
 &\quad + p/(2p-1) \tilde{Y}_s \cdot \gamma_s \gamma_s^* \tilde{Y}_s - \beta |\tilde{Y}_s|^2) ds.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Soit maintenant  $w \in \mathbb{R}^d$ . On a alors

$$\begin{aligned}
 &|w|^{2p-2} w \cdot (\nabla_x h_0 + \psi(Z_t) \nabla_x h_1 + \nabla_x h_2 |\psi(Z_t)|^2) (\nabla X)_t \\
 &\leq |w|^{2p-1} (|\nabla_x h_1|^2/4 + |\nabla_x h_0|) |(\nabla X)_t| + |w|^{2p-1} (1 + |\nabla_x h_2|) |(\nabla X)_t| |\psi(Z_t)|^2.
 \end{aligned}$$

Or, grâce à l'inégalité de Young (2), on a d'une part

$$\begin{aligned}
 &2p |w|^{2p-1} (|\nabla_x h_1|^2/4 + |\nabla_x h_0|) |(\nabla X)_t| \\
 &\leq 2 |(\nabla X)_t|^{2p} + |w|^{2p} (K_p^{2p} |\nabla_x h_0|^{2p/(2p-1)} + K_p^{2p} |\nabla_x h_1|^{4p/(2p-1)})
 \end{aligned}$$

et d'autre part

$$|w|^{2p-1} (1 + |\nabla_x h_2|) |(\nabla X)_t| \leq \delta |w|^{2p} + (1 + |\nabla_x h_2|)^{2p} C_{2p}^{2p(2p-1)} / \delta^{2p-1} |(\nabla X)_t|^{2p}.$$

Enfin, remarquons que

$$\begin{aligned}
 |2h_2 \psi \nabla \psi(Z_t) + \nabla \psi(Z_t) h_1|^2 &\leq (4|h_2|^2 |\psi(Z_t)|^2 + 2|h_1|^2) |\nabla \psi(Z_t)|^2 \\
 &\leq 4|h_2|^2 |\psi(Z_t)|^2 + 2|h_1|^2.
 \end{aligned}$$

Ainsi, en remplaçant  $w$  par  $\tilde{Y}_s$ , et  $\alpha_s, \rho_s$  et  $\gamma_s$  par leurs valeurs respectives dans (15), et puisque  $2/(2p-1) \leq \zeta$  on obtient que

$$\begin{aligned}
 &2p |\tilde{Y}_s|^{2p-2} (2p \tilde{Y}_s \cdot \alpha_s(\nabla X)_s + 2p \rho_s |\tilde{Y}_s|^2 + p/(2p-1) \tilde{Y}_s \cdot \gamma_s \gamma_s^* \tilde{Y}_s - \beta |\tilde{Y}_s|^2) \\
 &\leq |(\nabla X)_s|^{2p} (2 + b |\psi(Z_s)|^2) \\
 &\leq |(\nabla X)_s|^{2p} (2 + b |Z_s|^2),
 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 e^{\beta t} |\tilde{Y}_t|^{2p} &\leq e^{\beta T} |\tilde{Y}_T|^{2p} + \int_t^T |(\nabla X)_s|^{2p} e^{\beta s} (2 + b |Z_s|^2) ds - \int_t^T e^{\beta s} |\tilde{Y}_s|^{2p-2} \tilde{Y}_s \cdot \tilde{Z}_s dB_s \\
 &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} |(\nabla X)_t|^{2p} e^{\beta T} \left( |(\nabla g)(X_T)|^{2p} + 2T + b \int_0^T |Z_s|^2 ds \right) \\
 &\quad - \int_t^T e^{\beta s} |\tilde{Y}_s|^{2p-2} \tilde{Y}_s \cdot \tilde{Z}_s dB_s.
 \end{aligned}$$

On obtient ainsi le résultat souhaité en prenant l'espérance conditionnelle (ce que l'on peut faire puisque  $\tilde{Y}$  est borné), soit

$$|\tilde{Y}_t|^{2p} \leq e^{\beta(T-t)} E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |(\nabla X)_t|^{2p} \left( |(\nabla g)(X_T)|^{2p} + 2T + b \int_0^T |Z_s|^2 ds \right) \middle| \mathcal{F}_t^X \right]. \quad \square$$

Remarque. – On a bien

$$2E \left( \sup_{0 \leq t \leq T} |(\nabla X)_t|^{2p} \int_0^T |Z_s|^2 ds \right) \leq E(O_T) + E \left( \int_0^T |Z_s|^2 ds \right)^2 < \infty$$

d’après l’hypothèse de la Proposition 6.1 et le Lemme 3.5.

(iii) toujours en utilisant les résultats de [23], on a  $Z_t = (\nabla Y)_t (\nabla X)_t^{-1}$

On en déduit, en reprenant les indices, que presque sûrement

$$\begin{aligned} |\hat{Z}_t^{\varepsilon,m}|^{2p} &\leq |\tilde{Y}_t^{\varepsilon,m}|^{2p} |(\nabla X^\varepsilon)_t^{-1}|^{2p} \\ &\leq |(\nabla X^\varepsilon)_t^{-1}|^{2p} e^{\beta(T-t)} E^{\mathcal{F}_t^{X^\varepsilon}} \sup_{0 \leq t \leq T} |(\nabla X^\varepsilon)_t|^{2p} \\ &\quad \times \left( |(\nabla \hat{g})(X_T^\varepsilon)|^{2p} + 2T + b \int_0^T |\hat{Z}_s^{\varepsilon,m}|^2 ds \right) \\ &\leq e^{\beta(T-t)} E^{\mathcal{F}_t^{X^\varepsilon}} |(\nabla X^\varepsilon)_t^{-1}|^{2p} \sup_{0 \leq t \leq T} |(\nabla X^\varepsilon)_t|^{2p} \\ &\quad \times (|(\nabla \hat{g})(X_T^\varepsilon)|^{2p} + 2T + b \langle \hat{M}^{\varepsilon,m} \rangle_T) \\ &\leq \frac{1}{2} e^{\beta(T-t)} E^{\mathcal{F}_t^{X^\varepsilon}} O_T^\varepsilon (|(\nabla \hat{g})(X_T^\varepsilon)|^{2p} + 2T + b \langle \hat{M}^{\varepsilon,m} \rangle_T). \end{aligned}$$

Or d’après le Théorèmes 1.4 de [14], on sait que à  $\varepsilon$  fixé  $\hat{Y}^{\varepsilon,m}$  converge uniformément vers  $\hat{Y}^\varepsilon$ . On peut alors reprendre la preuve du Théorème 1.2 de [14] en remplaçant l’hypothèse de monotonie en  $m$  de la suite  $\{\hat{Y}^{\varepsilon,m}, m > 0\}$  par sa convergence, et obtenir quitte à extraire une sous-suite quand  $m \rightarrow +\infty$ , que  $\hat{Z}^{\varepsilon,m}$  converge  $dP \times dt$  presque partout vers  $\hat{Z}^\varepsilon$ ; on a de plus que  $\sup_m |\hat{Z}_t^\varepsilon|$  appartient à  $L^2(dP \times dt)$ . Enfin, nous pouvons remarquer que le résultat du Lemme 3.5 reste valide et que  $\sup_{m,\varepsilon} E \langle \hat{M}^{\varepsilon,m} \rangle_T^2 < \infty$  : en effet, on reprend la preuve du lemme en utilisant le fait que  $|\psi^m(z)| \leq |z|$  et que par convergence uniforme  $|\hat{Y}^{\varepsilon,m}| \leq C \|\hat{Y}^\varepsilon\|_\infty \leq \hat{D}$ . Ainsi, on en déduit que le long de cette sous-suite et par convergence dominée on a

$$E^{\mathcal{F}_t^{X^\varepsilon}} O_T^\varepsilon \langle \hat{M}^{\varepsilon,m} \rangle_T \rightarrow E^{\mathcal{F}_t^{X^\varepsilon}} O_T^\varepsilon \langle \hat{M}^\varepsilon \rangle_T.$$

Ceci qui nous permet de passer à la limite des deux côtés de l’inégalité précédente quand  $m \rightarrow +\infty$  et d’obtenir le résultat souhaité, c’est-à-dire

$$2|\hat{Z}_t^\varepsilon|^{2p} \leq e^{\beta(T-t)} E(O_T^\varepsilon (|(\nabla \hat{g})(X_T^\varepsilon)|^{2p} + 2T + b \langle \hat{M}^\varepsilon \rangle_T) | \mathcal{F}_t^{X^\varepsilon}). \quad \square$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de convergence qui nous intéresse :

THÉORÈME 6.3. – Sous (Hx), (Hxxx), (Hg), (Hg)', (10), et si les fonctions  $\hat{h}_i, i = 0, 1, 2$ , ainsi que leurs dérivées sont bornées, on a que  $(X^\varepsilon, \hat{Y}^\varepsilon, \hat{M}^\varepsilon, \langle X^\varepsilon, \hat{M}^\varepsilon \rangle, \langle \hat{M}^\varepsilon \rangle)$

converge en loi dans  $C([0, T], \mathbb{R}^{2d+3})$  vers  $(X, \hat{Y}, \hat{M}, \langle X, \hat{M} \rangle, \langle \hat{M} \rangle)$  où  $(\hat{Y}, \hat{M})$  est l'unique solution  $\mathcal{F}^X$  adaptée de l'EDSR

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t &= \hat{g}(X_T) + \int_t^T \hat{h}_0(s, X_s, \hat{Y}_s) + \int_t^T d\langle X, M \rangle_s \hat{h}_1(s, X_s) \\ &+ \int_t^T \hat{h}_2(s, X_s, \hat{Y}_s) d\langle \hat{M} \rangle_s + \hat{M}_t - \hat{M}_T \end{aligned}$$

vérifiant  $E\langle \hat{M} \rangle_T < \infty$ .

*Preuve.* – (i) on peut vérifier la tension des processus  $\hat{Y}^\varepsilon, \hat{M}^\varepsilon, \langle X^\varepsilon, \hat{M}^\varepsilon \rangle$  et  $\langle \hat{M}^\varepsilon \rangle$ . En effet, on a d'après la Proposition 6.1 une majoration de  $|Z_t^\varepsilon|^2$  dans laquelle on a pu choisir une constante  $\beta$  qui ne dépend pas de  $\varepsilon$ . Notons pour simplifier :

$$A^\varepsilon = O_T^\varepsilon \text{ et } B^\varepsilon = |(\nabla \hat{g})(X_T^\varepsilon)|^2 + 2T + b\langle \hat{M} \rangle_T.$$

Remarquons que  $E((B^\varepsilon)^2)$  est uniformément borné d'après (Hg)' et le résultat du Lemme 3.5. En utilisant l'inégalité de Young, et si  $\alpha \in ]0, 1[$  est l'unique valeur telle que

$$a = 4\alpha/(1 - \alpha),$$

où  $a$  est la constante qui intervient dans l'hypothèse (Hxxx), on a alors

$$\begin{aligned} E((A^\varepsilon B^\varepsilon)^{1+\alpha}) &\leq C_1 E(A^\varepsilon)^{2(1+\alpha)/(1-\alpha)} + C_2 E(B^\varepsilon)^2 \\ &\leq C_1 E((O_T^\varepsilon)^{2+4\alpha/(1-\alpha)}) + C_2 E(B^\varepsilon)^2 \\ &\leq C_1 E((O_T^\varepsilon)^{2+a}) + C_2 E(B^\varepsilon)^2 \\ &\leq C_3. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} 2^{1+\alpha} E(|\langle \hat{M}^\varepsilon \rangle_t - \langle \hat{M}^\varepsilon \rangle_s|^{1+\alpha}) &= E\left(\left|\int_s^t |Z_u^\varepsilon|^2 du\right|^{1+\alpha}\right) \\ &\leq E\left(\left|\int_s^t e^{\beta(T-u)} E(A^\varepsilon B^\varepsilon | \mathcal{F}_u^{X^\varepsilon}) du\right|^{1+\alpha}\right) \\ &\leq e^{\beta T(1+\alpha)} E\left(\left|\int_s^t E(A^\varepsilon B^\varepsilon | \mathcal{F}_u^{X^\varepsilon}) du\right|^{1+\alpha}\right) \\ &\leq e^{\beta T(1+\alpha)} E\left[\left(\int_s^t 1 du\right)^\alpha \left(\int_s^t |E(A^\varepsilon B^\varepsilon | \mathcal{F}_u^{X^\varepsilon})|^{1+\alpha} du\right)\right] \\ &\leq e^{\beta T(1+\alpha)} (t-s)^\alpha \int_s^t E|E(A^\varepsilon B^\varepsilon | \mathcal{F}_u^{X^\varepsilon})|^{1+\alpha} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq e^{\beta T(1+\alpha)}(t-s)^\alpha \int_s^t E|A^\varepsilon B^\varepsilon|^{1+\alpha} du \\ &\leq e^{\beta T(1+\alpha)} C_3(t-s)^{1+\alpha}. \end{aligned}$$

En outre  $\langle \hat{M}^\varepsilon \rangle_0 = 0$  donc  $(\langle \hat{M}^\varepsilon \rangle.)$  est tendue d’après un critère de tension bien connu (voir par exemple le Théorème 4.1, p. 320 dans [12]). Ceci nous permet d’avancer de même que  $(\hat{M}^\varepsilon.)$  est tendue grâce par exemple au Théorème 4.13, p. 322 de [12]. De plus on a

$$\begin{aligned} |\langle X^\varepsilon, \hat{M}^\varepsilon \rangle_t - \langle X^\varepsilon, \hat{M}^\varepsilon \rangle_s| &\leq \sqrt{\text{tr}\langle X^\varepsilon \rangle_t - \text{tr}\langle X^\varepsilon \rangle_s} \sqrt{\langle \hat{M}^\varepsilon \rangle_t - \langle \hat{M}^\varepsilon \rangle_s} \\ &\leq C\sqrt{(t-s)}\sqrt{\langle \hat{M}^\varepsilon \rangle_t - \langle \hat{M}^\varepsilon \rangle_s} \end{aligned}$$

ce qui assure d’après ce qui précède la tension de  $(\langle X^\varepsilon, \hat{M}^\varepsilon \rangle.)$ . Et enfin, on a p.s.

$$|\hat{Y}_t^\varepsilon - \hat{Y}_s^\varepsilon| \leq \|\hat{h}_0\|_\infty(t-s) + (\|\hat{h}_2\|_\infty + \|\hat{h}_1\|_\infty^2)(\langle \hat{M}^\varepsilon \rangle_t - \langle \hat{M}^\varepsilon \rangle_s) + |\hat{M}_t^\varepsilon - \hat{M}_s^\varepsilon|$$

donc  $(\hat{Y}^\varepsilon.)$  est tendu puisque d’une part  $\hat{Y}_0^\varepsilon$  est p.s. uniformément borné et d’autre part ses accroissements sont majorés par des accroissements de processus ayant cette propriété.

D’après ce qui précède, on obtient donc que  $\{(X^\varepsilon, \hat{Y}^\varepsilon, \hat{M}^\varepsilon, \langle X^\varepsilon, \hat{M}^\varepsilon \rangle, \langle \hat{M}^\varepsilon \rangle), \varepsilon > 0\}$  est tendue puisque  $X^\varepsilon \rightarrow X$ . Il existe alors une sous-suite qui converge en loi vers  $(X, \hat{Y}, \hat{M}, \langle X, \hat{M} \rangle, \langle \hat{M} \rangle)$ .

(ii)  $\hat{M}$  est une  $\mathcal{F}^{X, \hat{Y}, \hat{M}, \langle X, \hat{M} \rangle, \langle \hat{M} \rangle}$ -martingale car en passant à la limite sur  $\varepsilon$  le long de la sous-suite on obtient

$$\begin{aligned} &E(f_s(X^\varepsilon, \hat{Y}^\varepsilon, \hat{M}^\varepsilon, \langle X^\varepsilon, \hat{M}^\varepsilon \rangle, \langle \hat{M}^\varepsilon \rangle) \hat{M}_s^\varepsilon) \\ &= E(f_s(X^\varepsilon, \hat{Y}^\varepsilon, \hat{M}^\varepsilon, \langle X^\varepsilon, \hat{M}^\varepsilon \rangle, \langle \hat{M}^\varepsilon \rangle) \hat{M}_{s+t}^\varepsilon) \\ &\Rightarrow E(f_s(X, \hat{Y}, \hat{M}, \langle X, \hat{M} \rangle, \langle \hat{M} \rangle) \hat{M}_s) \\ &= E(f_s(X, \hat{Y}, \hat{M}, \langle X, \hat{M} \rangle, \langle \hat{M} \rangle) \hat{M}_{s+t}) \end{aligned}$$

où

$$f_s(X^\varepsilon, \hat{Y}^\varepsilon, \hat{M}^\varepsilon, \langle X^\varepsilon, \hat{M}^\varepsilon \rangle, \langle \hat{M}^\varepsilon \rangle) = \prod_{i=1}^n a_i(X_{t_i}^\varepsilon) b_i(\hat{Y}_{t_i}^\varepsilon) c_i(\hat{M}_{t_i}^\varepsilon) d_i(\langle \hat{M}^\varepsilon \rangle_{t_i}) e_i(\langle X^\varepsilon, \hat{M}^\varepsilon \rangle_{t_i})$$

avec  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = s$  et les  $a_i, b_i, c_i, e_i$  et  $d_i$  continues bornées.

(iii) On sait de plus que pour  $\varphi$  de classe  $C_b^2$

$$E \left[ f_s(X^\varepsilon, \hat{Y}^\varepsilon, \hat{M}^\varepsilon, \langle X^\varepsilon, \hat{M}^\varepsilon \rangle, \langle \hat{M}^\varepsilon \rangle) \left( \varphi(X_{t+s}^\varepsilon) - \varphi(X_s^\varepsilon) - \int_s^{t+s} \mathcal{L}^\varepsilon \varphi(X_r^\varepsilon) dr \right) \right] = 0$$

d’où, par passage à la limite le long de la sous-suite en utilisant (Hx)

$$E \left[ f_s(X, \hat{Y}, \hat{M}, \langle X, \hat{M} \rangle, \langle \hat{M} \rangle) \left( \varphi(X_{t+s}) - \varphi(X_s) - \int_s^{t+s} \mathcal{L} \varphi(X_r) dr \right) \right] = 0.$$

Ainsi, on obtient que la partie martingale de  $X$  est une  $\mathcal{F}^{X, \hat{Y}, \hat{M}, \langle X, \hat{M} \rangle, \langle \hat{M} \rangle}$ -martingale.

(iv) Nous savons que  $\hat{Y}$  est borné par passage à la limite sur  $\hat{Y}^\varepsilon$  qui est uniformément borné en  $\varepsilon$  d’après les estimés (9). De plus

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t^\varepsilon &= \hat{g}(X_T^\varepsilon) + \int_t^T \hat{h}_0(s, X_s^\varepsilon, \hat{Y}_s^\varepsilon) ds + \int_t^T d\langle X^\varepsilon, M^\varepsilon \rangle \hat{h}_1(s, X_s^\varepsilon) \\ &\quad + \int_t^T \hat{h}_2(s, X_s^\varepsilon, \hat{Y}_s^\varepsilon) d\langle \hat{M}^\varepsilon \rangle_s + \hat{M}_t^\varepsilon - \hat{M}_T^\varepsilon. \end{aligned}$$

D’après la convergence en loi de  $(X^\varepsilon, \hat{Y}^\varepsilon)$  vers  $(X, \hat{Y})$ , et puisque  $\hat{h}_0$  est continue bornée, on a par convergence dominée la convergence en loi

$$\int_t^T \hat{h}_0(s, X_s^\varepsilon, \hat{Y}_s^\varepsilon) ds \Rightarrow \int_t^T \hat{h}_0(s, X_s, \hat{Y}_s) ds.$$

Notons maintenant  $C^+([0, T], \mathbb{R})$  l’espace des fonctions continues croissantes et considérons l’application

$$\begin{aligned} F : C([0, T], \mathbb{R}^{d+1}) \times C^+([0, T], \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, u) &\mapsto \int_t^T \hat{h}_2(s, x_s, y_s) du_s. \end{aligned}$$

Elle est continue grâce au Lemme 4.4. En effet, si  $(x^\varepsilon, y^\varepsilon)$  converge uniformément vers  $(x, y)$  sur un compact, on a  $g^\varepsilon = \hat{h}_2(\cdot, x^\varepsilon, y^\varepsilon)$  qui converge uniformément vers  $g = \hat{h}_2(\cdot, x, y)$  puisque  $\hat{h}_2$  est continue. De plus, par croissance on aura bien dans ce cas  $\int_0^T |df_n| = f_n(T) - f_n(0) \leq C$ . On montre ainsi, en utilisant la convergence en loi de  $(X^\varepsilon, \hat{Y}^\varepsilon, \langle \hat{M}^\varepsilon \rangle)$  vers  $(X, \hat{Y}, \langle \hat{M} \rangle)$ , que

$$\int_t^T \hat{h}_2(s, X_s^\varepsilon, \hat{Y}_s^\varepsilon) d\langle \hat{M}^\varepsilon \rangle_s \Rightarrow \int_t^T \hat{h}_2(s, X_s, \hat{Y}_s) d\langle \hat{M} \rangle_s.$$

Enfin, de même que dans la preuve du Théorème 4.2 on a

$$\int_t^T d\langle X^\varepsilon, \hat{M}^\varepsilon \rangle_s \hat{h}_1(s, X_s^\varepsilon) \Rightarrow \int_t^T d\langle X, \hat{M} \rangle_s \hat{h}_1(s, X_s).$$

D’où finalement pour tout  $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t &= \hat{g}(X_T) + \int_t^T \hat{h}_0(s, X_s, \hat{Y}_s) ds + \int_t^T d\langle X, \hat{M} \rangle_s \hat{h}_1(s, X_s) \\ &\quad + \int_t^T \hat{h}_2(s, X_s, \hat{Y}_s) d\langle \hat{M} \rangle_s + \hat{M}_t - \hat{M}_T \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du théorème grâce au résultat d’unicité énoncé dans le Théorème 3.6. En effet, en posant  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{X, \hat{Y}, \hat{M}, \langle \hat{M} \rangle}$ , nous savons d’après ce qui précède

que  $\hat{M}$  et  $M^X$  sont des  $\mathcal{F}$ -martingales et que  $\hat{Y}$  est  $\mathcal{F}$ -adapté. Ceci nous permet de conclure que  $(\hat{Y}, \hat{M})$  est l'unique solution de l'EDSR (9) par application du théorème d'unicité 3.6. Donc en particulier,  $\hat{M}$  est  $\mathcal{F}^X$ -adaptée.  $\square$

On en déduit le théorème principal de convergence :

**THÉORÈME 6.4.** – *Sous (Hx), (Hxxx), (Hg), (Hg)', (H0b)', (H1b)' et (H2b)',  $(X^\varepsilon, Y^\varepsilon)$  converge en loi dans  $C([0, T], \mathbb{R}^{d+1})$  vers  $(X, Y)$  et il existe  $M$  tel que  $(Y, M)$  est l'unique solution  $\mathcal{F}^X$  adaptée vérifiant  $E\langle M \rangle_T < \infty$  de l'EDSR*

$$Y_t = g(X_T) + \int_t^T h_0(s, X_s, Y_s) ds + \int_t^T d\langle X, M \rangle_s h_1(s, X_s) + \int_t^T h_2(s, X_s, Y_s) d\langle M \rangle_s + M_t - M_T.$$

*Preuve.* – On utilise les résultats précédents et le fait que  $\Phi$  est continue et inversible.  $\square$

### 7. Retour aux EDP et exemples

Nous allons maintenant donner des exemples d'homogénéisation d'EDP semi-linéaires aléatoires ou périodiques dont les résultats peuvent être obtenus grâce aux paragraphes précédents.

Tout d'abord, plaçons-nous en dimension  $d = 2$  dans le cadre de l'homogénéisation proposé par Olla ([19], chapitre 4) : considérons  $(\Omega_1, \mathcal{G}, \pi)$  un espace de probabilité et  $\{\tau_x, x \in \mathbb{R}^2\}$  un groupe de transformations préservant la mesure  $\pi$ . Nous supposons que  $\pi$  est ergodique pour  $\tau_x$ .

Nous définissons deux opérateurs différentiels  $D_1$  et  $D_2$  par

$$D_i f(\eta) = \partial_{x_i} f(\tau_x \eta)|_{x=0}$$

où  $\eta \in \Omega_1$ , et nous noterons  $D = (D_1, D_2)$ . Nous considérons  $V$  un champ de vecteur de  $\Omega_1$  dans  $\mathbb{R}^2$  à divergence nulle, c'est-à-dire tel que

$$D_1 V_1 + D_2 V_2 = 0.$$

Ainsi, il existe une fonction  $H$  appelée "fonction de courant" telle que  $V_1 = D_2 H$  et  $V_2 = -D_1 H$ . Appelons maintenant  $v^\eta(x) = V(\tau_x \eta)$ , notons  $f_\lambda^i$  la solution de l'équation

$$\lambda f_\lambda^i - L f_\lambda^i = V_i, \quad i = 1, 2,$$

où

$$L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2H \\ -2H & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}$$

et définissons  $f_0^i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} f_\lambda^i$  (limite définie en un certain sens si  $H$  est bornée). Considérons le système d'équations

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon^k = \frac{1}{2} \Delta u_\varepsilon^k + \frac{1}{\varepsilon} v^\eta(\frac{x}{\varepsilon}) \cdot \nabla u_\varepsilon^k + h_0^k(t, x, u_\varepsilon) + \nabla u_\varepsilon h_1^k(t, x), & 1 \leq k \leq n, \\ u_\varepsilon(t = \bar{T}, x) = g(x). \end{cases} \tag{16}$$



Nous pouvons énoncer le

**COROLLAIRE 7.1.** – *Sous les hypothèses précédentes, sous (Hxg), (Hx0), et (H01), et si  $h_1$  est bornée, on a  $u_\varepsilon(t, x)$  qui converge en  $\pi$ -probabilité vers  $\bar{u}(t, x)$  solution de viscosité de*

$$\begin{cases} \partial_t \bar{u}^k = \mathcal{L} \bar{u}^k + h_0^k(t, x, \bar{u}) + \nabla \bar{u} a h_1^k(t, x), & 1 \leq k \leq n, \\ \bar{u}(t = \bar{T}, x) = g(x) \end{cases} \quad (17)$$

avec  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{i,j} \partial_{x_i x_j}$  et  $a$ , le tenseur effectif de diffusion, défini par

$$a = \left( \delta_{i,j} + \int Df_0^i \cdot Df_0^j d\pi \right)_{1 \leq i,j \leq 2}.$$

*Preuve.* – (i) (Hxg) et (Hx0) dépendent fortement de la nature des fonctions  $g$  et  $h_0$ . Si elles sont bornées, les hypothèses sont évidemment satisfaites ; si elles sont à croissance polynomiale, les hypothèses restent encore valides. De plus  $|(\sigma^\varepsilon)^* h_1| = |h_1|$ , donc (Hx1) est vérifiée. En outre, d’après Olla [19], on a en  $\pi$ -probabilité la convergence en loi du processus sous-jacent  $X^{\eta,\varepsilon,x}$  vers une diffusion de générateur  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{i,j} \partial_{x_i x_j}$ , donc en particulier nous avons la convergence en loi sur l’espace produit et (Hx). Enfin, puisque  $\langle X^\varepsilon \rangle_t = t \text{Id}(\mathbb{R}^d)$ , l’hypothèse (Hxx) est bien satisfaite. On peut donc utiliser le Théorème 4.2 pour obtenir la convergence en loi au sens de Meyer et Zheng de l’EDSR associée (12).

(ii) on a pour tout  $(t, x) Y_0^{\varepsilon,t,x,\eta} \rightarrow Y_0^{t,x}$  (en probabilité) quand  $\varepsilon \rightarrow 0$

En effet, d’après la Proposition 4.5,  $Y_0^\varepsilon$  converge en probabilité vers  $Y_0$ .

(iii)  $\bar{u}(t, x) \equiv Y_0^{\bar{T}-t,x}$  solution de viscosité de l’équation (16)

Pour cela, il suffit de reprendre la même preuve que dans [20]. De même,  $u_\varepsilon(t, x) = Y_0^{\varepsilon,\bar{T}-t,x}$  est solution de viscosité de (17). On a donc d’après (ii) que

$$u_\varepsilon(t, x) \rightarrow \bar{u}(t, x)$$

en probabilité quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .  $\square$

Maintenant, plaçons-nous en dimension  $d$  : considérons  $(\Omega_1, \mathcal{G}, \pi)$  un espace de probabilité et  $\{\tau_{x,t}, (x, t) \in \mathbb{R}^{d+1}\}$  un groupe de transformations préservant la mesure  $\pi$ . Nous supposons que  $\pi$  est ergodique pour  $\tau_{x,t}$ .

Définissons  $\{T_{x,t}, (x, t) \in \mathbb{R}^{d+1}\}$  une famille d’opérateurs agissant sur  $L^2(\pi)$  par

$$T_{x,t} f(\eta) = f(\tau_{x,t} \eta)$$

où  $\eta \in \Omega_1$ . Soit  $D = (D_t, D_i, 1 \leq i \leq d)$  le générateur infinitésimal de  $\{T_{x,t}, (x, t) \in \mathbb{R}^{d+1}\}$  suivant :

$$D_i = \partial_{x_i} T_{x,t}|_{x=0,t=0}, \quad D_t = \partial_t T_{x,t}|_{x=0,t=0}.$$

Soit  $H_{i,j}(\eta)$  une “matrice de courant” satisfaisant aux hypothèses de Landim et al. [17, p. 5]. Définissons maintenant pour  $i \in \{1, \dots, d\}$   $V_i = \sum_j D_j H_{i,j}$  et  $v^\eta(t, x) = V(\tau_{x,t} \eta)$ . Appelons enfin  $\sigma$  le tenseur de diffusion défini p. 6 dans [17] et  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma \sigma^*)_{i,j} \partial_{x_i x_j}$ .

Nous étudions l’équation

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon = \frac{1}{2} \Delta u_\varepsilon + (c + v^\eta(t, x)) \cdot \nabla u_\varepsilon + \varepsilon^2 h_0(\varepsilon^2 t, \varepsilon x + ct/\varepsilon, u_\varepsilon) + h_2(u_\varepsilon) |\nabla u_\varepsilon|^2, \\ u_\varepsilon(t = \varepsilon^2 \bar{T}, x) = g(\varepsilon x + c\bar{T}/\varepsilon^2) \end{cases}$$

où  $c$  est une constante. Nous cherchons la limite quand  $\varepsilon$  tend vers 0 de  $\tilde{u}_\varepsilon(t, x) = u_\varepsilon(t/\varepsilon^2, x/\varepsilon - tc/\varepsilon^2)$ . Nous pouvons énoncer le

**COROLLAIRE 7.2.** – *Sous les hypothèses précédentes ainsi que sous (Hg), (H0b) et (H2b),  $\tilde{u}_\varepsilon(t, x)$  converge en  $\pi$ -probabilité vers  $\bar{u}(t, x)$  solution de viscosité de*

$$\begin{cases} \partial_t \bar{u} = \mathcal{L}\bar{u} + h_0(t, x, \bar{u}) + h_2(\bar{u}) |\sigma \nabla \bar{u}|^2, \\ \bar{u}(t = \bar{T}, x) = g(x). \end{cases}$$

*Preuve.* – Il suffit tout d’abord de vérifier que  $\tilde{u}_\varepsilon$  est solution de l’EDP suivante

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u}_\varepsilon = \frac{1}{2} \Delta \tilde{u}_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} v^\eta(x/\varepsilon - tc/\varepsilon^2, t/\varepsilon^2) \cdot \nabla \tilde{u}_\varepsilon + h_0(x, \tilde{u}_\varepsilon) + h_2(\tilde{u}_\varepsilon) |\nabla \tilde{u}_\varepsilon|^2, \\ \tilde{u}_\varepsilon(t = \bar{T}, x) = g(x), \end{cases}$$

puis de suivre la même démonstration que dans le Corollaire 7.1 en utilisant le résultat, présenté dans [17], de convergence en probabilité des lois du processus  $X^\varepsilon$  sous-jacent, ainsi que le Théorème 5.1.  $\square$

Intéressons-nous maintenant au cas étudié dans [15] d’un modèle turbulent dans lequel le terme de diffusion est nul. On s’intéresse à la solution du système d’équations hyperboliques du premier ordre

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon^k = 1/\varepsilon v^\eta(x/\varepsilon, t/\varepsilon^2) \cdot \nabla u_\varepsilon^k + h_0^k(t, x, u_\varepsilon^k), \quad 1 \leq k \leq n, \\ u_\varepsilon^k(t = \bar{T}, x) = g(x) \end{cases}$$

où  $v^\eta$  est un champ aléatoire défini de la manière suivante : soit  $(\Omega_1, \mathcal{G}, \pi)$  un espace de probabilité et  $\{\tau_{x,t}, (x, t) \in \mathbb{R}^{d+1}\}$  un groupe de transformations préservant la mesure  $\pi$  tel que  $\tau_{s,x} \tau_{t,y} = \tau_{s+t, x+y}$ . Nous supposons que  $\pi$  est ergodique pour  $\tau_{x,t}$ . Soit  $V$  un champ aléatoire centré, tel que, pour  $\eta \in \Omega_1$ ,  $v^\eta(t, x) = V(\tau_{t,x}(\eta))$  définit un vecteur aléatoire dont les lois fini-dimensionnelles sont gaussiennes. Nous supposons en outre que

- (1)  $v$  possède p.s. des trajectoires continues en  $t$  et  $C^1$  en  $x$ ,
- (2)  $v$  est à divergence nulle,
- (3)  $E[v(0, 0)] = 0$ ,
- (4)  $R(t, x) \equiv [E v_i(t, x) v_j(0, 0)]_{1 \leq i, j \leq d}$  ainsi que ses dérivées partielles en  $x$  sont lipschitz et continues,
- (5) il existe  $T_0$  tel que pour tout  $t \geq T_0$  et  $x \in \mathbb{R}^d$  on a  $R(t, x) = 0$ .

Nous pouvons alors énoncer le

**COROLLAIRE 7.3.** – *Sous les hypothèses précédentes et sous (Hxg), (Hx0) et (H01),  $u_\varepsilon(t, x)$  converge en  $\pi$ -probabilité vers  $\bar{u}(t, x)$  et  $\bar{u}$  est solution de viscosité de*

$$\begin{cases} \partial_t \bar{u}^k = \sum_{i,j} a_{i,j}(x) \partial_{x_i x_j} \bar{u}^k + h_0^k(t, x, \bar{u}), \quad 1 \leq k \leq n, \\ \bar{u}(t = \bar{T}, x) = g(x) \end{cases}$$

où  $a_{i,j} = b_{i,j} + b_{j,i}$  et  $b_{i,j} = \int_0^\infty E v_i(s, X_s^1) v_j(0, 0) ds$ .

*Preuve.* – Nous pouvons faire les mêmes remarques sur la validité de (Hxg) et (Hx0) que pour le Corollaire 7.1. De plus, d’après [15], le processus sous-jacent  $X^\varepsilon$  converge en loi vers un mouvement brownien de covariance  $a$ . Il suffit alors de suivre le même raisonnement que dans la preuve du Corollaire 7.1 en utilisant les résultats des Propositions 4.1 et 4.5.  $\square$

Considérons maintenant l’équation (1), dont  $u_\varepsilon(x, t)$  est solution, dans le cas déterministe suivant :  $x \in \mathbb{R}$ ,  $v^\varepsilon(x) = v(x, x/\varepsilon)$  avec  $v$  1-périodique en sa deuxième variable, dérivable, uniformément borné en  $\varepsilon$ , et  $\sigma^\varepsilon = 1$ .

**COROLLAIRE 7.4.** – *Sous les hypothèses précédentes et sous (Hg), (Hg)', (H0b)', (H1b)' et (H2b)',  $u_\varepsilon(x, t)$  converge vers  $\bar{u}(x, t)$  et  $\bar{u}$  est solution de viscosité de*

$$\begin{cases} \partial_t \bar{u} = \mathcal{L}\bar{u} + h_0(t, x, \bar{u}) + h_1(t, x)\nabla \bar{u} + h_2(t, x, \bar{u})|\nabla \bar{u}|^2, \\ \bar{u}(x, t = \bar{T}) = g(x) \end{cases}$$

avec  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_{xx}^2 + \bar{v}(x).\partial_x$  et  $\bar{v}(x) = \int_0^1 v(x, y) dy$ .

*Preuve.* – On peut adopter le même schéma type de preuve que précédemment, en utilisant les résultats présentés dans [9]. En effet on voit p. 140 que le processus  $X^\varepsilon$  converge vers une diffusion de générateur  $\mathcal{L}$  défini précédemment, ce qui vérifie l’hypothèse (Hx). Pour pouvoir maintenant appliquer le Théorème 6.4, nous devons vérifier l’hypothèse (Hxxx). Pour cela, appliquons la formule d’Itô à

$$f^\varepsilon(x) = \int_0^x v^\varepsilon(u) du.$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_0^{X_t^\varepsilon} v^\varepsilon(u) du &= \int_0^x v^\varepsilon(u) du + \int_0^t v^\varepsilon(X_s^\varepsilon) dX_s^\varepsilon + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_x v^\varepsilon(X_s^\varepsilon) ds \\ &= \int_0^x v^\varepsilon(u) du + \int_0^t v^\varepsilon(X_s^\varepsilon) dB_s + \int_0^t |v^\varepsilon|^2(X_s^\varepsilon) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_x v^\varepsilon(X_s^\varepsilon) ds \end{aligned}$$

d’où, en notant  $N_t^\varepsilon = 2 \int_0^t v^\varepsilon(X_s^\varepsilon) dB_s$ ,

$$\int_0^t \partial_x v^\varepsilon(X_s^\varepsilon) ds = 2 \int_0^{X_t^\varepsilon} v^\varepsilon(u) du - 2 \int_0^x v^\varepsilon(u) du - 2 \int_0^t |v^\varepsilon|^2(X_s^\varepsilon) ds - N_t^\varepsilon.$$

Puisque  $v^\varepsilon$  est uniformément borné par hypothèse, on en déduit que

$$\begin{aligned} \int_0^t \partial_x v^\varepsilon(X_s^\varepsilon) ds &\leq 2|X_t^\varepsilon| \|v\|_\infty + 2|x| \|v\|_\infty - N_t^\varepsilon \\ &\leq 4|x| \|v\|_\infty + 2\|v\|_\infty |B_t| + 2T \|v\|_\infty^2 - N_t^\varepsilon \end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned}
 - \int_0^t \partial_x v^\varepsilon(X_s^\varepsilon) ds &\leq 2|X_t^\varepsilon| \|v\|_\infty + 2|x\| \|v\|_\infty + 2T \|v\|_\infty^2 + N_t^\varepsilon \\
 &\leq 4|x\| \|v\|_\infty + 2\|v\|_\infty |B_t| + 4T \|v\|_\infty^2 + N_t^\varepsilon.
 \end{aligned}$$

Or

$$(\partial_x X^\varepsilon)_t = e^{\int_0^t \partial_x v^\varepsilon(X_s^\varepsilon) ds},$$

donc en utilisant ce qui précède on obtient pour tout  $p > 0$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |(\partial_x X^\varepsilon)_t|^p \leq C_1 \left( \sup_{0 \leq t \leq T} e^{4p\|v\|_\infty |B_t|} + \sup_{0 \leq t \leq T} e^{-2pN_t^\varepsilon} \right)$$

et

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |(\partial_x X^\varepsilon)_t^{-1}|^p \leq C_{-1} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} e^{4p\|v\|_\infty |B_t|} + \sup_{0 \leq t \leq T} e^{2pN_t^\varepsilon} \right).$$

Remarquons maintenant que pour tout  $v \in \mathbb{R}$

$$\langle v N^\varepsilon \rangle_t = 4v^2 \int_0^t |v^\varepsilon(X_s^\varepsilon)|^2 ds \leq 4v^2 T \|v\|_\infty^2 \quad \text{p.s.}$$

et donc, puisque le crochet précédent est borné, on obtient par un résultat élémentaire que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} E(e^{vN_t^\varepsilon - v^2/2\langle N^\varepsilon \rangle_t}) = 1.$$

Ainsi nous avons, grâce aux inégalités de Doob, que pour tout  $v > 0$

$$\sup_\varepsilon E \left( \sup_{0 \leq t \leq T} e^{vN_t^\varepsilon} \right) < \infty,$$

ce qui nous permet de conclure que pour tout  $a > 0$  on a bien

$$\sup_\varepsilon E(|O_T^\varepsilon|^{2+a}) < \infty$$

et donc que l'hypothèse souhaitée est bien vérifiée. On a alors d'après le Théorème 6.4 la convergence en loi du processus  $Y_s^{\varepsilon,t,x}$ ,  $s \leq t$ , vers  $Y_s^{t,x}$ , ce qui assure que  $Y_0^{\varepsilon,t,x}$  converge en loi vers  $Y_0^{t,x}$ . Comme la limite est déterministe par construction de l'EDS rétrograde, on obtient la convergence en probabilité.  $\square$

Considérons enfin l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon = \mathcal{L}^\varepsilon u_\varepsilon + h^\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon), \\ u_\varepsilon(x, t=0) = g(x), \\ \mathcal{L}^\varepsilon = \frac{1}{2}\Delta + v^\varepsilon(x) \cdot \nabla \end{cases}$$

dans le cas déterministe suivant :

- $v^\varepsilon(x) = v(x/\varepsilon)$  avec  $v$  1-périodique, dérivable avec des dérivées bornées,  $x \in \mathbb{R}^d$ ,
- $h^\varepsilon(x, y, z) = h_0(t, x, x/\varepsilon, y) + zh_1(t, x) + h_2(t, x, y)|z|^2$  et  $h_0$  est 1-périodique en sa deuxième variable.

On a alors le résultat suivant :

COROLLAIRE 7.5. – *Sous les hypothèses précédentes et sous (Hg), (Hg)', (H0b)', (H1b)' et (H2b)',  $u_\varepsilon(x, t)$  converge vers  $\bar{u}(x, t)$  et  $\bar{u}$  est solution de viscosité de*

$$\begin{cases} \partial_t \bar{u} = \mathcal{L}\bar{u} + \bar{h}_0(t, x, \bar{u}) + \nabla \bar{u} h_1(t, x) + h_2(t, x, \bar{u}) |\nabla \bar{u}|^2, \\ \bar{u}(x, t = \bar{T}) = g(x) \end{cases}$$

où  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \Delta + \bar{v} \cdot \nabla$ ,  $\bar{v} = \int_0^1 v(y) dy$  et  $\bar{h}_0(x, y) = \int_0^1 h_0(x, u, y) du$ .

*Preuve.* – Dans ce cas, nous proposons en plus un exemple d’homogénéisation de la partie non-linéaire de l’équation. Nous utilisons encore les résultats présentés dans [9]. Ainsi le processus  $X^\varepsilon$  converge vers une diffusion de générateur  $\mathcal{L}$ . Pour pouvoir appliquer le Théorème 6.4, commençons par vérifier l’hypothèse (Hxxx) : pour cela, nous appliquerons une méthode de perturbation que l’on peut trouver par exemple dans Pardoux et Veretennikov [25].

Notons  $(R_{ij}^\varepsilon)_t = (\partial_{x_j} X_i^\varepsilon)_t$  et  $R_j^\varepsilon = (R_{ij}^\varepsilon)_{1 \leq i \leq d}$ , noté  $R^\varepsilon$  par la suite. On a alors

$$(R_{ij}^\varepsilon)_t = \delta_{i,j} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_k \int_0^t \partial_{x_k} v_i(X_s^\varepsilon / \varepsilon) (R_{kj}^\varepsilon)_s ds$$

d’où

$$|R_t^\varepsilon|^{16p} = 1 + \frac{16p}{\varepsilon} \int_0^t |R_s^\varepsilon|^{16p-2} (\nabla v(X_s^\varepsilon / \varepsilon) R_s^\varepsilon) \cdot R_s^\varepsilon ds.$$

Remarquons maintenant que puisque nous avons pour tout  $1 \leq i, j \leq d$

$$\int_0^1 \partial_{x_j} v^i(x) dx = 0,$$

nous pouvons définir  $V_{ij}(x) = \int_0^{+\infty} E[\partial_{x_j} v^i(x + B_s)] ds$  et ainsi donner un sens à l’équation différentielle ordinaire (matricielle) de Poisson suivante

$$\Delta V_{ij} = -\partial_{x_j} v^i,$$

regardée comme définie sur le tore  $[0, 1]^d$ , et que nous noterons  $\Delta V = -\nabla v$ . La solution de cette équation est bien définie dans  $W_p^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ . On peut donc écrire, en utilisant la formule d’Itô–Krylov (cf. [16]) et en notant  $\Phi(R, X) = |R|^{16p-2} (RV(X)) \cdot R$ ,

$$\begin{aligned} & 16p\varepsilon \Phi(R_t^\varepsilon, X_t^\varepsilon / \varepsilon) \\ &= 16p\varepsilon \Phi(R_0^\varepsilon, x / \varepsilon) + 16p \int_0^t \nabla_r \Phi(R_s^\varepsilon, X_s^\varepsilon / \varepsilon) \cdot (\nabla v(X_s^\varepsilon / \varepsilon) R_s^\varepsilon) ds \\ &+ 16p \int_0^t \sum_i \partial_{x_i} \Phi(R_s^\varepsilon, X_s^\varepsilon / \varepsilon) v_i(X_s^\varepsilon / \varepsilon) ds + 16p \int_0^t \sum_i \partial_{x_i} \Phi(R_s^\varepsilon, X_s^\varepsilon / \varepsilon) dB_s^i \\ &+ \frac{16p}{\varepsilon} \int_0^t \sum_i \partial_{x_i x_i} \Phi(R_s^\varepsilon, X_s^\varepsilon / \varepsilon) ds. \end{aligned}$$

Or on s’est arrangé par le choix de  $V$  pour que

$$\sum_i \partial_{x_i x_i} \Phi(r, x) = |r|^{16p-2} (r \Delta V(x)). r = -|r|^{16p-2} (r \nabla v(x)). r.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} & |R_t^\varepsilon|^{16p} + 16p\varepsilon \Phi(R_t^\varepsilon, X_t^\varepsilon/\varepsilon) \\ &= 1 + 16p\varepsilon \Phi(R_0^\varepsilon, x/\varepsilon) + 16p \int_0^t \nabla_r \Phi(R_s^\varepsilon, X_s^\varepsilon/\varepsilon) \cdot (\nabla v(X_s^\varepsilon/\varepsilon) R_s^\varepsilon) ds \\ &+ 16p \int_0^t \sum_i \partial_{x_i} \Phi(R_s^\varepsilon, X_s^\varepsilon/\varepsilon) v_i(X_s^\varepsilon/\varepsilon) ds + 16p \int_0^t \sum_i \partial_{x_i} \Phi(R_s^\varepsilon, X_s^\varepsilon/\varepsilon) dB_s^i. \end{aligned}$$

L’intérêt de cette méthode de perturbation est d’avoir obtenu une expression dans laquelle les puissances de  $\varepsilon$  qui apparaissent sont favorables (d’ordre 1 ou 0). Ainsi, puisque  $V$  et  $v$  sont bornées et à dérivées bornées, on obtient pour  $\varepsilon$  assez petit

$$\begin{aligned} 2|R_t^\varepsilon|^{16p} &\leq |R_t^\varepsilon|^{16p} + 16p\varepsilon \Phi(R_t^\varepsilon, X_t^\varepsilon/\varepsilon) \\ &\leq 1 + 16p\varepsilon \Phi_\infty + K \int_0^t |R_s^\varepsilon|^{16p} ds + \text{martingale.} \end{aligned}$$

On en déduit par le lemme de Gronwall et les inégalités de Hölder que

$$\sup_\varepsilon E \left( \sup_t |(R_j^\varepsilon)|^{16p} \right) < \infty.$$

On peut suivre le même raisonnement pour chaque  $j \in \{1, 2, \dots, d\}$ , ce qui nous permet d’obtenir finalement

$$\sup_\varepsilon E \left( \sup_t |(\nabla X^\varepsilon)_t|^{16p} \right) < \infty.$$

Remarquons qu’on peut démontrer le même résultat pour  $(\nabla X^\varepsilon)_t^{-1}$  puisque

$$(\nabla X)_t^{-1} = \text{Id}(\mathbb{R}^d) - \int_0^t (\nabla X)_s^{-1} \nabla v(X_s) ds,$$

et obtenir ainsi le résultat souhaité, avec  $a = 2$  :

$$\sup_\varepsilon E (|O_T^\varepsilon|^{2+a}) < \infty.$$

Grâce à l’hypothèse (Hxxx), nous pouvons appliquer nos théorèmes de convergence. Cependant, dans ce cas, nous devons adapter la preuve puisque la partie non-linéaire de l’équation va elle-même être homogénéisée. Pour cela nous allons “geler” certaines coordonnées comme proposé dans [24] et utiliser le fait que si une fonction  $f$  est 1-périodique en sa première variable, on la convergence en probabilité

$$\int_a^b f(X_s^\varepsilon/\varepsilon, y) ds \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (b-a) \int_0^1 f(u, y) du.$$

En effet on a

$$\int_a^b f(X_s^\varepsilon/\varepsilon, x) ds = \varepsilon^2 \int_{a/\varepsilon^2}^{b/\varepsilon^2} f(X_{\varepsilon^2 s}^\varepsilon/\varepsilon, y) ds$$

et

$$\begin{aligned} X_{\varepsilon^2 s}^\varepsilon/\varepsilon &= x/\varepsilon + B_{\varepsilon^2 s}/\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon^2 s} v(X_u^\varepsilon/\varepsilon) du \\ &= x/\varepsilon + B_{\varepsilon^2 s}/\varepsilon + \varepsilon \int_0^s v(X_{\varepsilon^2 u}^\varepsilon/\varepsilon) du. \end{aligned}$$

Ainsi, puisque  $v$  est bornée, nous aurons

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \int_{a/\varepsilon^2}^{b/\varepsilon^2} f(X_{\varepsilon^2 s}^\varepsilon/\varepsilon, y) ds = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \int_{a/\varepsilon^2}^{b/\varepsilon^2} f(x/\varepsilon + B_{\varepsilon^2 s}/\varepsilon, y) ds.$$

Notons maintenant  $B_t^x = x + B_t$  et  $\tilde{f}(x, y) = f(x, y) - \int_0^1 f(u, y) du$ . On a alors

$$E \left( \varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} \tilde{f}(x/\varepsilon + B_{\varepsilon^2 s}/\varepsilon, y) ds \right)^2 = \varepsilon^4 E \left( \int_0^{t/\varepsilon^2} \tilde{f}(B_s^{x/\varepsilon}, y) ds \right)^2$$

dont nous allons évaluer la limite quand  $\varepsilon$  tend vers 0.

D’après le Théorème 3.2, p. 373 de [4], par ergodicité du mouvement brownien sur le tore, il existe  $K > 0$  et  $\rho > 0$  (indépendants de  $x$  et de  $y$ ) tels que

$$\sup_x |E \tilde{f}(B_t^x, y)| \leq K \|\tilde{f}\|_\infty e^{-\rho t}.$$

On en déduit que si  $u \leq s$  on a alors

$$\begin{aligned} |E^{\mathcal{F}_u^B} \tilde{f}(B_s^{x/\varepsilon}, y)| &= |E^{\mathcal{F}_u^B} \tilde{f}(B_{s-u}^{x/\varepsilon + B_u}, y)| \\ &\leq \sup_x |E \tilde{f}(B_{s-u}^x, y)| \\ &\leq K \|\tilde{f}\|_\infty e^{-\rho(s-u)}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} E \left( \int_0^t \tilde{f}(B_s^{x/\varepsilon}, y) ds \right)^2 &= E \int_0^t \int_0^t \tilde{f}(B_s^{x/\varepsilon}, y) \tilde{f}(B_u^{x/\varepsilon}, y) du ds \\ &= 2E \int_0^t \int_0^s \tilde{f}(B_s^{x/\varepsilon}, y) \tilde{f}(B_u^{x/\varepsilon}, y) du ds \\ &= 2 \int_0^t \int_0^s E \tilde{f}(B_s^{x/\varepsilon}, y) \tilde{f}(B_u^{x/\varepsilon}, y) du ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq 2 \int_0^t \int_0^s E(|\tilde{f}(B_u^{x/\varepsilon}, y)| |E^{\mathcal{F}_u^B} \tilde{f}(B_s^{x/\varepsilon}, y)|) du ds \\
 &\leq 2 \|\tilde{f}\|_\infty \int_0^t \int_0^s E|E^{\mathcal{F}_u^B} \tilde{f}(B_s^{x/\varepsilon}, y)| du ds \\
 &\leq 2K \|\tilde{f}\|_\infty^2 \int_0^t \int_0^s e^{-\rho(s-u)} du ds \\
 &\leq 2 \frac{K}{\rho} \|\tilde{f}\|_\infty^2 t,
 \end{aligned}$$

d'où

$$\varepsilon^4 E \left( \int_0^{t/\varepsilon^2} \tilde{f}(B_s^{x/\varepsilon}, y) ds \right)^2 \leq 2 \frac{K}{\rho} \|\tilde{f}\|_\infty^2 t \varepsilon^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

En remplaçant  $\tilde{f}$  par sa valeur, on en déduit donc le résultat souhaité, c'est à dire la convergence en probabilité

$$\varepsilon^2 \int_{a/\varepsilon^2}^{b/\varepsilon^2} f(x/\varepsilon + B_{\varepsilon^2 s}/\varepsilon, y) ds \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (b - a) \int_0^1 f(u, y) du.$$

En utilisant la tension de  $(X^\varepsilon, Y^\varepsilon)$ , la séparabilité de  $C([0, T], \mathbb{R}^d)$ , et le fait qu'on peut approcher ces fonctions par des fonctions en escalier, nous pouvons maintenant suivre les mêmes étapes que dans [25] et obtenir la convergence en loi

$$\int_t^T h_0(s, X_s^\varepsilon, X_s^\varepsilon/\varepsilon, Y_s^\varepsilon) ds \Rightarrow \int_t^T \left( \int_0^1 h_0(s, X_s, u, Y_s) du \right) ds$$

ce qui nous permet de conclure en adaptant le Théorème 6.4 et en suivant la même démonstration que dans la preuve du Corollaire 7.4.  $\square$

*Remarque.* – On peut adapter la preuve précédente au cas  $v(x, x/\varepsilon)$ .

*Remarque 1.* – Les exemples de la partie 7 proviennent du domaine de l'homogénéisation (renormalisation en  $x/\varepsilon$  et  $t/\varepsilon^2$ , puis passage à la limite). Naturellement, tous les résultats de convergence pour les EDSR s'appliquent dans d'autres cas de convergence en loi de la partie linéaire de l'EDP (voir par exemple [24], ou bien les exemples de lois d'échelle "anormales" dans [1,2,10]).

*Remarque 2.* – On peut obtenir des résultats similaires d'homogénéisation pour des EDP semi-linéaires elliptiques à coefficients aléatoires ou périodiques. Pour cela on utilise la convergence d'une autre classe d'EDSR dans laquelle le temps final  $T$  est remplacé par un temps d'arrêt  $\tau$  : voir [5,11].



## RÉFÉRENCES

- [1] Avellaneda M., Majda A., Mathematical models with exact renormalization for turbulent transport, *Comm. Math. Phys.* 131 (1990) 381–429.
- [2] Avellaneda M., Majda A., An integral representation and bounds on the effective diffusivity in passive advection by laminar and turbulent flows, *Comm. Math. Phys.* 138 (1991) 339–391.
- [3] Bensoussan A., Boccardo L., Murat F.,  $H$  convergence for quasi-linear elliptic equations with quadratic growth, *Appl. Math. Optim.* 26 (1992) 253–272.
- [4] Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G., *Asymptotic Analysis for Periodic Structure*, *Stud. Math. Appl.*, Vol. 5, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [5] Briand P., Hu Y., Stability of BSDEs with random terminal time and homogenization of semilinear elliptic PDEs, *J. Funct. Anal.* 155 (2) (1998) 455–494.
- [6] Buckdahn R., Hu Y., Probabilistic approach to homogenizations of systems of quasi-linear parabolic PDEs with periodic structure, *Nonlinear Anal.* 32 (5) (1998) 609–619.
- [7] Carmona R., Xu L., Homogenization for time-dependent two-dimensional incompressible Gaussian flows, *Ann. Appl. Probab.* 7 (1) (1997) 265–279.
- [8] Dermoune A., Hamadene S., Ouknine Y., Backward stochastic differential equation with local time, *Stochastics* 66 (1999) 103–119.
- [9] Freidlin M., Markov processes and differential equations: asymptotic problems, in: *Lectures in Mathematics*, ETH Zürich, Birkhäuser, Basel, 1996, pp. 137–152, chapter 11.
- [10] Gaudron G., Scaling laws and convergence for the advection–diffusion equation, *Ann. Appl. Probab.* 8 (3) (1998) 649–663.
- [11] Gaudron G., On convergence of BSDE’s and homogenization of elliptic semi-linear PDE’s (soumis pour publication).
- [12] Jacod J., Shiryaev A.N., *Limit Theorems for Stochastic Processes*, *Grundlehren Math. Wiss.*, Vol. 288, Springer-Verlag, New York, 1987.
- [13] Kobylanski M., Résultat d’existence et d’unicité pour des EDSR avec des générateurs à croissance quadratique, *Notes aux CRAS, Sér I* 324 (1997) 81–86.
- [14] Kobylanski M., Backward stochastic differential equations and partial differential equations with quadratic growth (soumis pour publication).
- [15] Komorowski T., Papanicolaou G., Motion in a Gaussian, incompressible flow, *Ann. Appl. Probab.* 7 (1) (1997) 229–264.
- [16] Krylov N.V., *Controlled Diffusion Processes*, *Appl. Math.*, Vol. 14, Springer-Verlag, New York, 1980.
- [17] Landim C., Olla S., Yau H.T., Convection diffusion equation with space-time ergodic random flow, *Probab. Theory Related Fields* 112 (1998) 203–220.
- [18] Meyer P.A., Zheng W.A., Tightness criteria for laws of semimartingales, *Ann. Inst. H. Poincaré, Probab. Statist.* 20 (1984) 353–372.
- [19] Olla S., *Homogenization of Diffusion Processes in Random Fields*, *Cours de l’École Doctorale de l’École Polytechnique*, 1994.
- [20] Pardoux E., BSDE’s and semilinear PDE’s *Stochastic Analysis and Related Topics VI*, The Geilo Workshop 1996, in: *Progress in Probability*, Vol. 42, Birkhauser, Basel, 1998, pp. 79–127.
- [21] Pardoux E., BSDE’s, weak convergence and homogenization of semilinear PDE’s, in: Clarke F.H., Stern R.J. (Eds.), *Nonlinear Analysis, Differential Equations and Control*, Kluwer, Dordrecht, 1999, pp. 503–549.
- [22] Pardoux E., Peng S., Adapted solution of a backward stochastic differential equation, *Systems Control Lett.* 14 (1990) 55–61.

- [23] Pardoux E., Peng S., Backward SDEs and quasilinear PDEs, in: Rozovskii B.L., Sowers R.B. (Eds.), Stochastic Partial Differential Equations and Their Applications, LNCIS 176, Springer, New York, 1992.
- [24] Pardoux E., Veretennikov A.Y., Averaging for backward stochastic differential equations, with application to semi-linear PDE's, Stochastics Stochastics Rep. 60 (3–4) (1997) 355–370.
- [25] Pardoux E., Veretennikov A.Y., On Poisson equation and diffusion approximation, Annals of Probability (à paraître).
- [26] Protter P., Stochastic Integration and Differential Equations, A New Approach, Appl. Math. 21, Springer, New York, 1995.