ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

PH. BIANE
M. YOR

Variations sur une formule de Paul Lévy

Annales de l'I. H. P., section B, tome 23, nº S2 (1987), p. 359-377
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1987__23_S2_359_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Sup. au n° 2, 1987, Vol. 23, p. 359-377. *Probabilités et Statistiques*

Variations sur une formule de Paul Lévy

par

Ph. BIANE et M. YOR

Université P.-et-M.-Curie, Laboratoire de Probabilités,
4, place Jussieu, Tour 56, 3e étage, couloir 56-66,
75252 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — En décomposant le mouvement brownien à l'aide de la suite des polynômes de Legendre, on obtient une extension de la formule de Paul Lévy concernant l'aire stochastique du mouvement brownien complexe.

Les lois conditionnelles ainsi dégagées ont un rapport étroit avec celle du temps passé par un processus de Bessel au-dessous d'un niveau donné, conditionnellement à son temps local en ce niveau.

Nous expliquons, par des grossissements gaussiens de la filtration brownienne, les relations qui existent entre ces deux familles de lois conditionnelles.

Mots clés : Mouvement brownien, aire stochastique, polynômes de Legendre, temps locaux, fractions continues.

ABSTRACT. — An extension of Paul Lévy's stochastic area formula is obtained when decomposing Brownian motion along the Legendre polynomial basis of $L^2[0,1]$.

Conditional laws which appear in this extension are closely linked with that of the total time spent by a Bessel process below a fixed level, given its local time at this level.

We explain the relationship between these two families of conditional laws with the help of some gaussian enlargements of the Brownian filtration.

Key words : Brownian motion, stochastic area, Legendre polynomials, local times, continous fractions.

Classification A.M.S. : Primary: 60 *J* 65, 60 *J* 55. *Secondary:* 60 *H* 05, 60 *G* 44.

INTRODUCTION

P. Lévy [6] obtient une formule remarquable concernant la loi de l'aire stochastique du mouvement brownien complexe : si $Z=X+iY$ est un mouvement brownien complexe, issu de 0 et $S=\int_0^1 X_s\,dY_s-Y_s\,dX_s$, P. Lévy montre que, pour tous $\lambda\in\mathbb{R}$, et $z\in\mathbb{C}$:

$$E[\exp i\lambda S\,|\,Z(1)=z]=\frac{\lambda}{\operatorname{sh}\lambda}\exp\left(-\frac{|z|^2}{2}(\lambda\coth\lambda-1)\right). \tag{1}$$

Cette formule joue un rôle important dans différentes questions d'analyse et de probabilités : équation de la chaleur sur le groupe d'Heisenberg (Gaveau [4]), preuve probabiliste du théorème de l'indice (Bismut [2 *a*], [2 *b*]),...

Pour prouver (1), P. Lévy utilise la représentation du pont brownien en série de Fourier. Dans cet article, nous introduisons une autre décomposition orthogonale du mouvement brownien, et montrons qu'elle est intimement liée à la fonctionnelle S. En particulier, nous obtenons l'extension suivante de (1) :

THÉORÈME 1. — *Soit* $P_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}((t^2-1)^n)$ *la suite des polynômes de Legendre, et* $Z(t)=\sum_0^\infty(2p+1)\int_0^1 P_p(2s-1)\,ds\,\beta_p$ *la décomposition orthogonale correspondante, où* $\beta_p=\int_0^1 P_p(2s-1)\,dZ(s)$. *Alors :*

(i) *Si l'on note* $\xi\times\eta=\operatorname{Im}(\bar{\xi}\eta)$, *pour* $\xi,\ \eta\in\mathbb{C}$, *ce qui permet d'écrire :* $S=\int_0^1 Z(t)\times dZ(t)$, *on a :*

$$S=\sum_{p=0}^\infty \beta_p\times\beta_{p+1}. \tag{2}$$

(ii) *De plus, pour tout* $n\in\mathbb{N}$:

$$E\left[\exp i\lambda\sum_{p=n}^\infty \beta_p\times\beta_{p+1}\,\middle|\,\beta_n=z\right]$$
$$=\frac{\lambda^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)I_\nu(\lambda)}\exp-\frac{|z|^2}{2}\frac{\lambda I_{\nu+1}(\lambda)}{I_\nu(\lambda)} \tag{3}$$

où $\nu = n + \frac{1}{2}$ *et* I_ν *est la fonction de Bessel modifiée usuelle.*

(Remarquons que, dans le cas $n=0$, on retrouve bien (1), car :

$$\beta_0 = Z(1); \qquad \frac{\lambda^{1/2}}{2^{1/2}\,\Gamma(3/2)\,I_{1/2}(\lambda)} = \frac{\lambda}{\operatorname{sh}\lambda}; \qquad \lambda\frac{I_{3/2}}{I_{1/2}}(\lambda) = \lambda\coth\lambda - 1.\Big)$$

La formule (3) présente une analogie frappante avec la formule suivante : B désignant un mouvement brownien d-dimensionnel, issu de 0, on note L le temps local, sur tout $\mathbb{R}_+$, de $|B|$ au niveau $a=1$.

On a alors, en notant $\nu = \frac{d}{2} - 1$:

$$E\left[\exp - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^\infty 1_{(|B_s|\leq 1)}\,ds \,\Big|\, L = t\right]$$

$$= \frac{\lambda^\nu}{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)\,I_\nu(\lambda)} \exp - \frac{t}{2}\lambda\frac{I_{\nu+1}(\lambda)}{I_\nu(\lambda)} \tag{4}$$

(*voir* Pitman-Yor [7]).

Dans le cas $d=3$, $n=0$, les formules (3) et (4) se déduisent l'une de l'autre au moyen d'un théorème de Ray et Knight sur les temps locaux browniens (D. Williams [9], [10]; *voir* aussi Yor [12]).

Nous allons étendre ces résultats et montrer, en particulier, une extension du théorème de Ray et Knight aux temps locaux des processus de Bessel, puis nous mettrons en évidence, par des grossissements gaussiens de la filtration du mouvement brownien Z, la structure algébrique qui permettra d'identifier naturellement les formules (3) et (4) (*voir* § 2 et 3).

Signalons tout de suite que la formule (3) est étroitement liée aux développements en fractions continues (*cf.* Watson [13], p. 303).

$$x\frac{I_{\nu+1}(x)}{I_\nu(x)} = \frac{x^2}{2(\nu+1)+}\;\frac{x^2}{2(\nu+2)+}\;\frac{x^2}{2(\nu+3)+}\cdots \tag{5}$$

dont : $x\coth x - 1 = \frac{x^2}{3+}\;\frac{x^2}{5+}\;\frac{x^2}{7+}\cdots$ est un cas particulier ($\nu = 1/2$).

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé partiellement au Dublin Institute of Advanced

Studies (Irlande) et à l'Université de Berkeley (Californie) pendant les mois de juillet et août 1986.

Les auteurs remercient John Lewis (Dublin) et Jim Pitman (Berkeley) pour leur hospitalité et plusieurs discussions qui ont conduit à une meilleure présentation des résultats de cet article.

Nous remercions également Alain Sznitman pour sa lecture soigneuse de notre travail.

1. SUR CERTAINES VARIABLES DU SECOND CHAOS DE WIENER DU MOUVEMENT BROWNIEN COMPLEXE

Dans ce paragraphe, $Z=X+iY$ désigne un mouvement brownien complexe. Soit $(K(t,s);\ t,s\in\mathbb{R}_+)$ un noyau antisymétrique $(K(t,s)=-K(s,t))$ réel, tel que $\int_0^\infty\int_0^\infty K^2(t,s)\,ds\,dt<\infty$. On pose

$$A=\int_0^\infty\int_0^\infty K(t,s)\,dX(s)\,dY(t).$$

(L'intégrale stochastique double est bien définie, car X et Y sont indépendants.)

Dans la suite, $L^2(\mathbb{R}_+)$ désignera toujours l'espace des fonctions réelles φ telles que $\int_0^\infty \varphi^2(t)\,dt<\infty$.

Nous nous proposons de déterminer la loi de A, conditionnellement à $\Phi=\int_0^\infty \varphi(s)\,dZ(s)$, où $\varphi\in L^2(\mathbb{R}_+)$, et vérifie $\int_0^\infty \varphi^2(t)\,dt=1$ (ce que l'on peut supposer, sans perdre de généralité).

Pour cela, nous allons écrire le noyau K dans une base convenable de $L^2(\mathbb{R}_+)$: K définit sur $L^2(\mathbb{R}_+)$ un opérateur de Hilbert-Schmidt antisymétrique au moyen de la formule : $Kf(t)=\int_0^\infty K(t,s)f(s)\,ds$, $f\in L^2(\mathbb{R}_+)$. Considérons la suite de vecteurs de $L^2(\mathbb{R}_+)$: $\varphi, K\varphi, K^2\varphi, \ldots, K^n\varphi, \ldots$ Supposons, pour simplifier les calculs, que cette suite forme un système total dans $L^2(\mathbb{R}_+)$. Sous cette hypothèse, on peut lui appliquer le procédé de Gram-Schmidt et en déduire une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R}_+)$, soit $\underline{\psi}=(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n, \ldots)$. Dans la base $\underline{\psi}$, la matrice de l'opérateur K s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_0 & & & \\ a_0 & 0 & -a_1 & & \mathbf{0} \\ & a_1 & 0 & -a_2 & \\ & & a_2 & 0 & \\ & \mathbf{0} & & & \ddots \end{pmatrix}$$

où les a_i sont des nombres réels tels que $\sum_0^\infty a_i^2 < \infty$.

En effet, il suffit de vérifier que, pour tous $i \geqq 0$, $k \geqq 2$, on a :

$$\int_0^\infty K\,\psi_i(t)\,\psi_{i+k}(t)\,dt = 0.$$

Or, par définition de $\underline{\psi}$, ψ_i appartient au sous-espace de L^2 engendré par φ, $K\varphi$, $K^2\varphi$, $\ldots$, $K^i\varphi$; donc, $K\psi_i$ appartient au sous-espace engendré par φ, $K\varphi$, $K^2\varphi$, $\ldots$, $K^{i+1}\varphi$, lequel coïncide avec le sous-espace engendré par $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{i+1}$; finalement, $K\psi_i$ est orthogonal à ψ_{i+k}.

La réduction de l'opérateur K que nous venons d'effectuer est l'analogue, pour les opérateurs antisymétriques, de la réduction sous forme de Jacobi des opérateurs symétriques, qui est utilisée dans l'étude du problème des moments (*voir* Akhiezer [1]). Le noyau K peut s'écrire :

$$K(t, s) = \sum_0^\infty a_i (\psi_i(s)\,\psi_{i+1}(t) - \psi_i(t)\,\psi_{i+1}(s)),$$

la convergence de la série ayant lieu dans $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$; d'où :

$$A = \sum_0^\infty a_i\,\xi_i \times \xi_{i+1} \qquad \text{avec} \qquad \xi_i = \int_0^\infty \psi_i(t)\,dZ(t). \tag{6}$$

Les ξ_i sont des variables complexes, normales centrées réduites, et la convergence a lieu dans L^2, et p. s., d'après le théorème de convergence des martingales. La méthode ci-dessus s'applique aussi bien lorsque l'on remplace $L^2(\mathbb{R}_+)$ par $L^2[0, 1]$. On retrouve alors l'aire stochastique du mouvement brownien complexe en posant :

$$K(t, s)=1_{(s<t\leq 1)}-1_{(t<s\leq 1)}.$$

L'opérateur K est donné par :

$$Kf(t)=2\int_0^t f(s)\,ds-\int_0^1 f(s)\,ds, \qquad \text{pour} \quad f\in L^2[0, 1].$$

On peut remarquer que K est le noyau de Green de l'opérateur $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}$ sur $[0, 1]$ avec condition aux bords : $f(0)+f(1)=0$.

Partant de $\varphi\equiv 1$, on voit par récurrence que $K^n\varphi(t)$ est un polynôme de degré n en t, et on obtient donc la base $\underline{\psi}$ en orthonormalisant la suite $1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots$

On en déduit :

$$\psi_p(t)=(2p+1)^{1/2}P_p(2t-1)$$

où

$$P_p(t)=\frac{1}{2^p p!}\frac{d^p}{dt^p}((t^2-1)^p)$$

est le p-ième polynôme de Legendre (*voir* Szegö [8]). Les coefficients a_i se calculent à l'aide de la formule de récurrence :

$$P'_{n+1}=(2n+1)P_n+P'_{n-1} \qquad (\textit{voir } \text{Szegö [8]})$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{\sqrt{2n+3}}\psi_{n+1}=\sqrt{2n+1}\,K\psi_n+\frac{\psi_{n-1}}{\sqrt{2n-1}}$$

d'où :

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}.$$

La formule (2) se déduit donc de (6) et de $\xi_p=\sqrt{2p+1}\,\beta_p$.

Revenons maintenant à un noyau K général et utilisons la décomposition (6) pour étudier la loi de A conditionnellement à $\xi_0=\varphi$.

THÉORÈME 2. — *Soient* $\lambda\in\mathbb{R}$, $z\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$.

Introduisons le développement en fraction continue :

$$C_n(\lambda)=\frac{1}{1+}\ \frac{a_{n+1}^2\lambda^2}{1+}\ \frac{a_{n+2}^2\lambda^2}{1+}\cdots$$

et le produit infini :

$$\frac{1}{D_n(\lambda)}=\prod_{p=n}^{\infty} C_p(\lambda).$$

Alors, on a :

$$E\left[\exp i\lambda\sum_{j=n}^{+\infty} a_j\xi_j\times\xi_{j+1}\,\middle|\,\xi_n=z\right]=\frac{1}{D_n(\lambda)}\exp\left(-\frac{|z|^2}{2}a_n^2\lambda^2 C_n(\lambda)\right).\quad(7)$$

Preuve. — Clairement, il suffit de montrer la formule (7) pour $n=0$, les autres cas s'en déduisant.

Posons

$$u_{2p}=(-1)^p\operatorname{Re}(\xi_{2p});\qquad u_{2p+1}=(-1)^p\operatorname{Im}(\xi_{2p+1});$$
$$v_{2p}=(-1)^p\operatorname{Im}(\xi_{2p});\qquad v_{2p+1}=(-1)^p\operatorname{Re}(\xi_{2p+1}).$$

Les variables u_p, v_p, sont gaussiennes, centrées réduites, indépendantes.

A s'écrit, en fonction des u_p, v_p :

$$A=\sum_0^{\infty} a_p(u_p u_{p+1}-v_p v_{p+1}),\qquad \text{et}\qquad \xi_0=u_0+iv_0.$$

On a donc :

$$E[\exp(i\lambda A)\,|\,\xi_0=x+iy]=E\left[\exp i\lambda a_0 u_1 x+i\lambda\sum_1^{\infty} a_p u_p u_{p+1}\right]$$
$$\times E\left[\exp -i\lambda a_0 y v_1-i\lambda\sum_1^{\infty} a_p v_p v_{p+1}\right].$$

Nous allons calculer cette dernière expression au moyen du

Lemme. — *Soit* X *un vecteur gaussien centré dans* $\mathbb{R}^d$, *de covariance* I, S *une matrice* $d\times d$, *symétrique réelle,* $\mathbf{m}\in\mathbb{R}^d$; *on note* $\langle\ ,\ \rangle$ *le produit* *scalaire usuel sur* $\mathbb{R}^d$. *Alors, pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$\mathrm{E}\left[\exp i\frac{\lambda}{2}\langle \mathrm{SX}, \mathrm{X}\rangle + i\langle \mathrm{X}, \mathbf{m}\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{\text{dét}(\mathrm{I} - i\lambda\mathrm{S})^{1/2}} \exp -\frac{1}{2}\langle (\mathrm{I} - i\lambda\mathrm{S})^{-1}\mathbf{m}, \mathbf{m}\rangle.$$

où $\text{dét}(\mathrm{I} + z\mathrm{S})^{1/2}$ *est défini par prolongement analytique à partir de* $z=0$, *le long de l'axe* $\mathrm{Re}\, z = 0$.

Appliquons le lemme à

$$\mathrm{S} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & & \\ a_1 & 0 & a_2 & & \mathbf{0} & \\ & a_2 & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & \mathbf{0} & & & 0 & a_{d-1} \\ & & & & a_{d-1} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{m} = (\lambda a_0 x, 0, \ldots, 0).$$

On en déduit :

$$\mathrm{E}\left[\exp i\lambda a_0 x u_1 + i\lambda \sum_1^{d-1} a_i u_i u_{i+1}\right] = \frac{1}{\mathrm{D}_1(\lambda, d)^{1/2}} \exp -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{D}_2(\lambda, d)}{\mathrm{D}_1(\lambda, d)}\lambda^2 a_0^2 x^2$$

en notant, pour $n \leqq d-2$:

$$\mathrm{D}_n(\lambda, d) = \text{dét}\begin{pmatrix} 1 & -i\lambda a_{n+1} & & & \mathbf{0} \\ -i\lambda a_{n+1} & 1 & -i\lambda a_{n+2} & & \\ & -i\lambda a_{n+2} & 1 & & \\ \mathbf{0} & & & 1 & -i\lambda a_{d-1} \\ & & & -i\lambda a_{d-1} & 1 \end{pmatrix}$$

En développant le déterminant $\mathrm{D}_n(\lambda, d)$ par rapport à la première colonne, on obtient :

$$\mathrm{D}_n(\lambda, d) = \mathrm{D}_{n+1}(\lambda, d) + a_{n+1}^2 \lambda^2 \mathrm{D}_{n+2}(\lambda, d)$$

d'où

$$\frac{D_{n+1}}{D_n}(\lambda, d) = \frac{1}{1 + a_{n+1}^2 \lambda^2 (D_{n+2}/D_{n+1})(\lambda, d)}$$

et donc

$$\frac{D_{n+1}}{D_n}(\lambda, d) = \frac{1}{1+} \; \frac{a_{n+1}^2 \lambda^2}{1+} \; \frac{a_{n+2}^2 \lambda^2}{1+} \cdots \frac{a_{d-2}^2 \lambda^2}{1 + a_{d-1}^2 \lambda^2}. \qquad (\dagger)$$

Or,

$$\frac{1}{D_n(\lambda, d)} = \prod_n^{d-1} \frac{D_{p+1}(\lambda, d)}{D_p(\lambda, d)}, \qquad \text{car} \quad D_d(\lambda, d) = 1. \qquad (\neq)$$

On a donc :

$$E\left[\exp i\lambda \sum_0^{d-1} a_j (u_j u_{j+1} - v_j v_{j+1}) \,|\, u_0 = x,\ v_0 = y\right]$$
$$= \frac{1}{D_1(\lambda, d)} \exp - \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{D_2(\lambda, d)}{D_1(\lambda, d)} a_0^2 \lambda^2 \qquad (*)$$

Quand $d \to +\infty$, on a :

$$\frac{D_{n+1}}{D_n}(\lambda, d) \to C_n(\lambda), \qquad \text{et} \qquad D_1(\lambda, d) \to D_1(\lambda).$$

En effet, il découle de la formule $(*)$, considérée d'abord pour $x^2 + y^2 = 0$, puis pour $x^2 + y^2 \neq 0$, que les expressions :

$$\frac{D_2}{D_1}(\lambda, d) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{D_1(\lambda, d)}$$

convergent lorsque $d \to \infty$.

On identifie les limites, à l'aide respectivement de $(\dagger)$ et $(\neq)$. En particulier, le produit qui figure en $(\neq)$ converge vers le produit des limites des expressions $\frac{D_{p+1}}{D_p}(\lambda, d)$, lorsque $d \to \infty$, grâce aux inégalités :

$$1 \geqq \frac{D_{p+1}}{D_p}(\lambda, d) \geqq \frac{1}{1 + a_{p+1}^2 \lambda^2},$$

et au théorème de convergence dominée.

On a ainsi obtenu finalement la formule (7).

Nous sommes maintenant en mesure de terminer la preuve du théorème 1 : on a vu que (2) résultait de (6); la formule (3), quant à elle, provient de (7) et du développement (5), ainsi que du résultat asymptotique : pour λ, ν fixés,

$$\frac{I_{\nu+k}(\lambda)\, 2^{\nu+k}\,\Gamma(\nu+k)}{\lambda^{\nu+k}} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 1$$

qui découle du développement en série entière de $I_{\nu+k}(\lambda)/\lambda^{\nu+k}$ (*cf.* Watson [13]).

2. L'AIRE STOCHASTIQUE DE CERTAINS PROCESSUS A VALEURS DANS $\mathbb{R}^2$

On rappelle que le processus de Bessel de dimension d est une diffusion sur $\mathbb{R}_+$, de générateur $\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d-1}{2x}\frac{d}{dx}$; si d est entier, la norme euclidienne d'un mouvement brownien de dimension d est un processus de Bessel de dimension d.

Soit R un processus de Bessel de dimension 3, issu de 0. On appelle $(L^a;\ a \geqq 0)$ le processus (continu) de ses temps locaux sur tout $\mathbb{R}_+$. Il est bien connu (*cf.* Williams [10]) que le processus $(L^a;\ a \geqq 0)$ a la loi du carré d'un processus de Bessel de dimension 2, issu de 0. Ce résultat admet l'extension suivante pour les processus de Bessel de dimension quelconque : W désigne un mouvement brownien complexe; pour $p>0$, on pose $V_p(t)=\frac{1}{t^p}\int_0^t s^p\, dW(s)$. Soit R_p un processus de Bessel de dimension $2p+3$ issu de 0 et $(L_p^a;\ a \geqq 0)$ le processus de ses temps locaux sur tout $\mathbb{R}_+$.

PROPOSITION. — *Le processus* $(L_p^a;\ a \geqq 0)$ *a même loi que* $(|V_p(a)|^2;\ a \geqq 0)$.

Preuve. — Notons, pour simplifier l'écriture des expressions qui interviennent ci-dessous, $h(x)=x^{2p+1}$.

(i) $(R_p(t),\ t \geqq 0)$ processus de Bessel de dimension $(2p+3)$, issu de 0, étant donné, il existe $(R(u),\ u \geqq 0)$ processus de Bessel de dimension 3, issu de 0, tel que :

$$h(\mathrm{R}_p(t)) = \mathrm{R}\left(\int_0^t ds\, h'^2(\mathrm{R}_p(s))\right) \qquad (t \geqq 0).$$

Pour obtenir ce résultat, il suffit d'appliquer la formule d'Itô au processus $(h(\mathrm{R}_p(t)),\ t \geqq 0)$, et d'effectuer le changement de temps inverse de

$$\left(\int_0^t ds\, h'^2(\mathrm{R}_p(s)),\ t \geqq 0\right).$$

(ii) Il découle aisément de la représentation obtenue en (i), et de la formule de densité de temps d'occupation, que les processus des temps locaux $(\mathrm{L}_p^a;\ a \geqq 0)$ et $(\mathrm{L}^a;\ a \geqq 0)$ de R_p et R respectivement sont liés par la relation :

$$\mathrm{L}_p^a = \frac{1}{h'(a)} \mathrm{L}^{h(a)} \qquad (a > 0).$$

(iii) Par ailleurs, il existe un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ $(\beta_t;\ t \geqq 0)$ tel que :

$$\mathrm{V}_p(a) = \frac{1}{(h'(a))^{1/2}} \beta_{h(a)} \qquad (a > 0)$$

et, finalement, on déduit de l'identité en loi (due à Williams [10])

$$(|\beta(x)|^2,\ x \geqq 0) \overset{(d)}{=} (\mathrm{L}^x;\ x \geqq 0)$$

que :

$$(\mathrm{L}_p^a;\ a \geqq 0) \overset{(d)}{=} (|\mathrm{V}_p(a)|^2,\ a \geqq 0).$$

Remarque. — La présentation donnée par Le Gall [5] (prop. 1.1) de la loi de $(\mathrm{L}_p^a;\ a \geqq 0)$ se ramène à celle de notre proposition par changement de temps déterministe, et inversion du temps. □

Nous déduisons maintenant de la proposition une formule exprimant la loi de l'aire stochastique de V_p, en suivant la méthode utilisée en [12] dans le cas $p = 0$.

THÉORÈME 3. — *Pour tout p réel,* $p > -1/2$, *notons :* $\nu = p + \frac{1}{2}$. *On a :*

$$\mathrm{E}\left[\exp i\lambda\int_0^1 \mathrm{V}_p(s)\times d\mathrm{V}_p(s)\,\Big|\,\mathrm{V}_p(1)=z\right]$$
$$=\frac{\lambda^\nu}{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)\,\mathrm{I}_\nu(\lambda)}\exp-\frac{|z|^2}{2}\left(\lambda\frac{\mathrm{I}_{\nu+1}(\lambda)}{\mathrm{I}_\nu(\lambda)}\right). \quad (8)$$

Preuve. — Remarquons tout d'abord que la loi du processus $(\mathrm{V}_p(t))_{t\geqq 0}$ est invariante par rotation : pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, $(e^{i\theta}\mathrm{V}_p)$ et V_p ont même loi.

Comme la fonctionnelle $\int_0^1 \mathrm{V}_p(t)\times d\mathrm{V}_p(t)$ est également invariante par rotation de V_p, l'expression (8) ne dépend que de $|z|$.

D'autre part, on a :

$$\mathrm{V}_p\times d\mathrm{V}_p=\mathrm{V}_p\times d\mathrm{W}=|\mathrm{V}_p|\,d\gamma,$$

avec γ mouvement brownien réel.

Nous allons montrer que $|\mathrm{V}_p|$ est indépendant de γ.

Posons $\mathrm{M}(t)=\int_0^t s^p\,d\mathrm{W}(s)$. Il existe un mouvement brownien complexe β tel que

$$\mathrm{M}(t)=\beta_{c(t)},$$

où

$$c(t)=\int_0^t s^{2p}\,ds=\frac{1}{(2p+1)}t^{2p+1}.$$

On a :

$$\sigma\{|\mathrm{V}_p(s)|;\ s\leqq t\}=\sigma\{|\mathrm{M}(s)|;s\leqq t\}=\sigma\{|\beta(u)|;\ u\leqq c(t)\}.$$

De plus, $d\gamma(t)=\dfrac{1}{t^p}\,\dfrac{\mathrm{M}(t)}{|\mathrm{M}(t)|}\times d\mathrm{M}(t)$, d'où l'on déduit :

$$\gamma(t)=\int_0^{c(t)}\frac{1}{\tau(u)^p}\,\frac{\beta_u\times d\beta_u}{|\beta_u|},\qquad \text{où}\quad \tau(u)=((2p+1)\,u)^{1/(2p+1)},$$

ce qui entraîne l'égalité :

$$\sigma\{\gamma(u);\ u\leqq t\}=\sigma\left\{\tilde\gamma(v)\equiv\int_0^v\frac{\beta_s\times d\beta_s}{|\beta_s|};\ v\leqq c(t)\right\}.$$

L'indépendance de $|V_p|$ et γ découle maintenant de ce que $|\beta|$ a même filtration que le mouvement brownien réel

$$\tilde{\beta}(t)=\int_0^t \frac{(\beta_u, d\beta_u)}{|\beta_u|} \qquad (t \geqq 0)$$

lequel est indépendant du mouvement brownien $\tilde{\gamma}$, car $\langle \tilde{\beta}, \tilde{\gamma} \rangle = 0$.

Nous pouvons maintenant démontrer la formule (8) :

$$\begin{aligned} E\left[\exp i\lambda \int_0^1 V_p(t) \times dV_p(t) \,\middle|\, V_p(1)=z \right] &= E\left[\exp i\lambda \int_0^1 |V_p(t)|\, d\gamma(t) \,\middle|\, |V_p(1)|^2 = |z|^2 \right] \\ &= E\left[\exp -\frac{\lambda^2}{2} \int_0^1 |V_p(t)|^2\, dt \,\middle|\, |V_p(1)|^2 = |z|^2 \right] \end{aligned}$$

(en intégrant par rapport à γ)

$$= E\left[\exp -\frac{\lambda^2}{2} \int_0^1 L_p^a\, da \,\middle|\, L_p^1 = |z|^2 \right]$$

(d'après la proposition)

$$= E\left[\exp -\frac{\lambda^2}{2} \int_0^\infty ds\, 1_{(R_p(s) \leqq 1)} \,\middle|\, L_p^1 = |z|^2 \right]$$

(d'après la formule de densité de temps d'occupation)

$$= \frac{\lambda^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1) I_\nu(\lambda)} \exp -\frac{|z|^2}{2}\left(\lambda \frac{I_{\nu+1}(\lambda)}{I_\nu(\lambda)} \right) \qquad (\text{d'après (4)}),$$

ce qui prouve la formule (8). □

Développons l'intégrale $\int_0^1 V_p(t) \times dV_p(t)$ en termes des composantes X et Y de $W \equiv X + iY$. Il vient :

$$\int_0^t V_p(t) \times dV_p(t) = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{t^p}\left(\int_0^t s^p\, dX(s) \right) dY(t) - \frac{1}{t^p}\left(\int_0^t s^p\, dY(s) \right) dX(t) \right\}.$$

Le couple $\left(V_p(1), \int_0^1 V_p(t) \times dV_p(t) \right)$ correspond donc avec les notations du paragraphe 1 au couple (φ, K) défini par :

$$\varphi(t)=t^p \qquad (0 \leqq t \leqq 1);$$

$$K(t, s)=\frac{s^p}{t^p} 1_{(s<t)}-\frac{t^p}{s^p} 1_{(t<s)}.$$

Notre but était d'expliquer le lien entre les formules (3) et (4).

Nous venons de voir comment les formules (8) et (4) sont reliées. Il nous reste à expliquer le lien entre (8) et (3), ce qui fait l'objet du paragraphe 3.

3. INTERPRÉTATION A L'AIDE DU GROSSISSEMENT GAUSSIEN DE LA FILTRATION BROWNIENNE

Commençons par rappeler quelques résultats de Chaleyat-Maurel et Jeulin [3].

Soit B un mouvement brownien réel, et $G=\int_0^\infty g(s)\, dB(s)$ avec $g \in L^2(\mathbb{R}_+)$ une variable du premier chaos de Wiener de B.

Notons $\gamma_g(s)=\int_s^\infty du\, g^2(u)$, $a=\inf\{s : \gamma_g(s)=0\}$, et $\mathscr{B}^g$ la filtration obtenue par grossissement initial de la filtration de B avec la variable G. D'après [3] (th. I.1.1), on a :

(i) si $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $\left(\int_0^t f(s)\, dB_s;\ t \geqq 0\right)$ est une $\mathscr{B}^g$-semi-martingale si, et seulement si :

$$\int_0^{t \wedge a} |f(s)| \frac{|g(s)|}{\gamma_g(s)^{1/2}} ds < \infty, \quad \text{pour tout } t; \tag{9}$$

(ii) il existe un $\mathscr{B}^g$ mouvement brownien réel β tel que, lorsque la condition (9) est réalisée, alors : $\left(\int_0^t f(s)\, dB_s;\ t \geqq 0\right)$ admet la décomposition suivante comme semi-martingale dans la filtration $\mathscr{B}^g$:

$$\int_0^t f(s)\, dB_s=\int_0^t f(s)\, d\beta_s+\int_0^{t \wedge a} ds \frac{f(s)\, g(s)}{\gamma_g(s)} \int_s^\infty g(u)\, dB_u. \tag{10}$$

En particulier, si la condition (9) est satisfaite pour $f \equiv 1$, B est une $\mathscr{B}^g$ semi-martingale, et β est défini au moyen de la formule (10), où l'on prend $f \equiv 1$. De plus, d'après [3] (lemme I.2.2), on a, dans tous les cas, pour toute $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+)$:

$$\int_0^\infty f(s)\,d\mathrm{B}(s) = \int_0^\infty \mathrm{T}_g f(s)\,d\beta(s) + \frac{\int_0^\infty f(t)\,g(t)\,dt}{\int_0^\infty g^2(t)\,dt}\,\mathrm{G}. \tag{11}$$

$$\int_0^\infty f(s)\,d\beta(s) = \int_0^\infty \mathrm{S}_g f(s)\,d\mathrm{B}(s) \tag{12}$$

où :

$$\mathrm{T}_g f(t) \begin{cases} = f(t) - \dfrac{g(t)}{\int_t^\infty g^2(s)\,ds} \displaystyle\int_t^\infty g(u) f(u)\,du & (t<a) \\ = f(t) \qquad (t \geqq a) \end{cases}$$

$$\mathrm{S}_g f(t) \begin{cases} = f(t) - g(t) \displaystyle\int_0^t \frac{g(u) f(u)}{\int_u^\infty g^2(v)\,dv}\,du & (t<a) \\ = f(t) \qquad (t \geqq a). \end{cases}$$

Les opérateurs S_g et T_g vérifient :

S_g est une isométrie de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+)$ sur le sous-espace $\mathrm{H}_g \equiv \left\{ f \in \mathrm{L}^2 \Big/ \int fg = 0 \right\}$, l'orthogonal de g dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+)$.

T_g envoie isométriquement H_g sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+)$, et $\operatorname{Ker} \mathrm{T}_g = g.\mathbb{R}$.

$\mathrm{S}_g \circ \mathrm{T}_g = \pi =$ projection orthogonale sur H_g.

$\mathrm{T}_g \circ \mathrm{S}_g = \mathrm{Id}$.

S_g et T_g sont adjoints.

Remarque. — A titre d'exemple, considérons $g(t) = e^{-t/2}$.

Alors : $\mathrm{S}_g^n(g) = \mathrm{Q}_n g$, où Q_n est le n-ième polynôme de Laguerre. Dans la base orthonormale $(\mathrm{Q}_n g;\ n \in \mathbb{N})$ de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+)$, S_g agit donc par le shift sur $\mathbb{N}$, et T_g par le shift inverse, c'est-à-dire :

$$\mathrm{S}_g(\mathrm{Q}_n g) = \mathrm{Q}_{n+1} g; \qquad \mathrm{T}_g(\mathrm{Q}_{n+1} g) = \mathrm{Q}_n g \quad (n \geqq 0); \qquad \mathrm{T}_g(g) = 0. \ \square$$

Nous allons maintenant examiner comment s'exprime la décomposition (6) à l'aide du grossissement.

Reprenons Z un mouvement brownien complexe, K un noyau antisymétrique et $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+)$, de norme 1. On note π le projecteur orthogonal sur H_φ. D'après le paragraphe 1, on a :

$$A = \int_0^\infty \varphi(s)\, dZ(s) \times \int_0^\infty K\varphi(s)\, dZ(s) + \int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{K}(t, s)\, dX(s)\, dY(t)$$

où $\tilde{K}$ est le noyau associé à l'opérateur $\pi \circ K \circ \pi$.

Introduisons le mouvement brownien complexe Z^1 obtenu par grossissement initial de la filtration de Z par $\int_0^\infty \varphi(s)\, dZ(s)$. On a :

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{K}\, dX\, dY = \int_0^\infty \int_0^\infty K^1\, dX^1\, dY^1$$

où K^1 est le noyau de l'opérateur $T_\varphi \circ K \circ S_\varphi$.

De plus : $\int_0^\infty K\varphi(s)\, dZ(s) = \int_0^\infty (T_\varphi \circ K)\, \varphi(s)\, dZ^1(s)$, d'après (11).

Pour obtenir le deuxième terme du développement (6) de A, on applique l'opérateur K^1 à $(T_\varphi \circ K)(\varphi)$, et on obtient :

$$\frac{1}{|T_\varphi \circ K\varphi|_{L^2}} \int_0^\infty (T_\varphi \circ K)\, \varphi(s)\, dZ^1(s) \times \int_0^\infty (T_\varphi \circ K \circ \pi \circ K)\, \varphi(s)\, dZ^1(s)$$

On continue ensuite en grossissant la filtration de Z^1 par $\int_0^\infty T_\varphi \circ K\varphi(s)\, dZ^1(s) \ldots$

Revenons à l'aire stochastique du mouvement brownien complexe.

On pose $\varphi_n(t) = (1-t)^n$ $(0 \leqq t \leqq 1)$, et on note : $Z^n = X^n + i Y^n$ la suite des mouvements browniens définis par récurrence : $Z^0 = Z$ et Z^{n+1} est le mouvement brownien obtenu par grossissement initial de Z^n avec la variable $U_n = \int_0^1 \varphi_n(t)\, dZ^n(t)$.

Remarquons que la condition (9) est satisfaite pour $f=1$, et $g = \varphi_n$, car on a alors : $\dfrac{g(s)}{\gamma_g(s)^{1/2}} = \left(\dfrac{2n+1}{1-s}\right)^{1/2}$, fonction intégrable sur [0, 1].

THÉORÈME 4. — *Définissons :*

$$S_n = \int_0^1 \int_0^1 K_n(t, s)\, dX^n(s)\, dY^n(t) \tag{13}$$

avec

$$K_n(t, s) = \frac{(1-t)^n}{(1-s)^n} 1_{\{s<t\}} - \frac{(1-s)^n}{(1-t)^n} 1_{\{t<s\}}.$$

Alors :

(i) $S_n = U_n \times U_{n+1} + S_{n+1}$.
(ii) *Avec les notations de la formule* (2) : $U_n = \beta_n$ *pour tout* $n \geqq 0$.
(iii) *Pour tout* $n \geqq 0$, (S_n, U_n) *a même loi que*

$$\left(\int_0^1 V_n(t) \times dV_n(t),\ V_n(1) \right).$$

Preuve. — (iii) provient de la formule (13) et de la remarque à la fin du paragraphe 2; on passe de (S_n, U_n) à $\left(\int_0^1 V_n(t) \times dV_n(t),\ V_n(1) \right)$ en effectuant l'isométrie de $L^2[0, 1]$: $f \to \check{f}$, où $\check{f}(t) = f(1-t)$, ce qui ne change pas les lois des variables.

Pour montrer (i) et (ii), il suffit, à la suite de la discussion précédente, de montrer les formules :

(*a*) $T_{\varphi_n} \circ K_n \circ S_{\varphi_n} = K_{n+1}$;

(*b*) $(T_{\varphi_n} \circ K_n)\, \varphi_n = \dfrac{1}{2n+1} \varphi_{n+1}$.

Or, pour toute $f \in L^2[0, 1]$, on a :

$$K_n f(t) = (1-t)^n \int_0^t \frac{f(s)}{(1-s)^n} ds - \frac{1}{(1-t)^n} \int_t^1 (1-s)^n f(s)\, ds$$

$$S_{\varphi_n} f(t) = f(t) - (2n+1)(1-t)^n \int_0^t \frac{f(s)}{(1-s)^{n+1}} ds$$

$$T_{\varphi_n} f(t) = f(t) - (2n+1)(1-t)^{-n-1} \int_t^1 (1-s)^n f(s)\, ds.$$

Introduisons l'opérateur ε défini par : $\varepsilon f(t) = (1-t) f(t)$.

On a :

$$K_n = \frac{1}{(2n+1)}(\varepsilon \circ T_{\varphi_n} - S_{\varphi_n} \circ \varepsilon)$$

et

$$K_{n+1} = \frac{1}{(2n+1)}(T_{\varphi_n} \circ \varepsilon - \varepsilon \circ S_{\varphi_n})$$

d'où (*a*) en utilisant $T_{\varphi_n} \circ S_{\varphi_n} = \mathrm{Id}$.

(*b*) découle de ce que $T_{\varphi_n}(\varphi_n) = 0$ et $\varepsilon(\varphi_n) = \varphi_{n+1}$. □

Note ajoutée aux épreuves : Certains des calculs algébriques du paragraphe 1 sont très proches de ceux de P. Krée [14]; comparer en particulier le lemme ci-dessus et [14], theorem (1.4).

RÉFÉRENCES

[1] N. I. AKHIEZER, *The Classical Moment Problem and Some Related Questions in Analysis*, Oliver & Boyd, Edinburgh, 1965.

[2] (*a*) J. M. BISMUT, The Atiyah-Singer Theorems, I et II, *Journal Funct. Anal.*, vol. **57**, 1984, p. 56-99 et 329-348. (*b*) J. M. BISMUT, Probability and Geometry. In *Probability and Analysis*, G. LETTA et M. PRATELLI éd., *Lect. Notes in Maths, n°* **1206**, Springer, 1986.

[3] M. CHALEYAT-MAUREL et Th. JEULIN, Grossissement gaussien de la filtration brownienne. In *Grossissements de filtrations : exemples et applications*, Th. JEULIN et M. YOR éd., *Lect. Notes in Maths*, n° **1118**, p. 59-109, Springer, 1985.

[4] B. GAVEAU, Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous-elliptiques sur certains groupes nilpotents, *Acta. Math.*, vol. **139**, 1977, p. 96-153.

[5] J. F. LE GALL, Sur la mesure de Hausdorff de la courbe brownienne, *Sém. de Probas. XIX, Lect. Notes in Maths*, n° **1123**, Springer, 1985.

[6] P. LEVY, Wiener's Random Function, and Other Laplacian Random Functions, *Proc. 2nd Berkeley Symp. Math. Stat. Proba.*, vol. **II**, 1950, p. 171-186, Univ. California.

[7] J. W. PITMAN et M. YOR, Bessel Processes and Infinitely Divisible Laws, In *Stochastic Integrals*, D. WILLIAMS éd., *Lect. Notes in Maths*, n° **851**, Springer, 1981.

[8] G. SZEGÖ, Orthogonal Polynomials, *Colloquium Publ.*, vol. **23**, édition révisée, Amer. Math. Soc., Providence, 1959.

[9] D. WILLIAMS, On a Stopped Brownian Motion Formula of H. M. Taylor, *Sém. Probas. X, Lect. Notes in Maths*, n° **511**, Springer, 1976.

[10] D. WILLIAMS, Path Decomposition and Continuity of Local Time for One-Dimensional Diffusion, *Proc. London Math. Soc. Ser.* 3, vol. **28**, 1974, p. 738-768.

[11] D. WILLIAMS, *Diffusions, Markov Processes and Martingales*, vol. I, Foundations, Wiley, 1979.

[12] M. YOR, Remarques sur une formule de P. Lévy, *Sém. de Probas XIV*, *Lect. Notes in Maths*, n° **784**, Springer, 1980.

[13] G. N. WATSON, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, Second Edition, 1966.
[14] P. KRÉE, A Remark on Paul Lévy's Stochastic Area Formula. In *Aspect of Mathematics and its Applications*, J. A. BARROSO éd., Elsevier Science Publishers, B. V., 1986.

(*Manuscrit reçu le* 4 *décembre* 1986.)