ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J. JACOD
A. KLOPOTOWSKI
J. MÉMIN

Théorème de la limite centrale et convergence fonctionnelle vers un processus à accroissements indépendants : la méthode des martingales

Annales de l'I. H. P., section B, tome 18, nº 1 (1982), p. 1-45
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1982__18_1_1_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XVIII, n° 1, 1982, p. 1-45.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Théorème de la limite centrale et convergence fonctionnelle vers un processus à accroissements indépendants : la méthode des martingales

par

J. JACOD (*), A. KLOPOTOWSKI (**) et J. MÉMIN (*)

(*) Département de Mathématiques et Informatique,
Université de Rennes, Beaulieu, 35042 Rennes Cedex
(**) Université de Torun, Institut de Mathématiques,
12-18 ul. Chopina, 87-100 Torun, Pologne

Depuis Gnedenko et Kolmogorov [*7*] un nombre considérable d'auteurs ont contribué au théorème de la limite centrale, ordinaire ou fonctionnel, avec une loi limite normale ou indéfiniment divisible ou même plus générale, pour des « sommes discrètes » (sommes normalisées ou tableaux triangulaires) ou des processus, à l'aide de méthodes dérivées de l'idée de « loi accompagnatrice ».

Il se trouve que, sous des habillages parfois assez différents, beaucoup de ces démonstrations reposent sur une utilisation à peu près identique de la théorie des martingales. En outre, cette utilisation apparaît plus clairement, nous semble-t-il, dans le cadre des processus que dans celui des sommes discrètes (bien que l'arsenal technique pour les processus soit bien-sûr plus important).

Nous proposons donc ci-dessous une démonstration unifiée, qui permet de retrouver un grand nombre de résultats connus; citons par exemple, sans prétention à l'exhaustivité : Brown [*1*], Brown et Eagleson [*2*], McLeish [*19*], Durrett et Resnick [*5*], Hall [*9*], Klopotowski [*16*], qui tous traitent de sommes discrètes. Citons aussi, pour des théorèmes de convergence de processus, et avec des méthodes formellement plus proches de ce qui suit : Kabanov, Liptcer et Shiryaev [*15*], Jacod et Mémin [*11*], Liptcer et Shiryaev [*18*]. Enfin, nos résultats englobent également les théorèmes fonctionnels obtenus par la méthode des « problèmes de martingales » lorsque la limite est un processus à accroissement indépendants : ceux par exemple de Rebolledo [*20*] ou de Grigelionis et Mikulevicius [*8*].

Nous nous sommes efforcés, dans cet article, de dégager les idées de base, et de démontrer des résultats aussi généraux que possible ; nous n'avons pas, par contre, la prétention de faire une étude complète du sujet, et en particulier nous n'avons pas donné d'applications, renvoyant pour cela à la littérature (abondante !), avec toutefois une exception : nous avons traduit les théorèmes généraux obtenus dans le cadre des tableaux triangulaires.

L'article est organisé comme suit : la section 1 a la prétention de présenter de manière pédagogique (?) l'idée sous-jacente et les hypothèses « naturelles » dans ce genre de méthodes. Cette section est essentiellement non technique, en particulier on n'y parle pas de semi-martingales, avec le cortège de notions qui y sont attachées, alors que les sections suivantes sont au contraire fondées sur la théorie des semi-martingales.

Dans la section 2 nous démontrons un résultat général de convergence en loi d'une suite (X^n) de processus vers une limite X qui est un processus à accroissements indépendants sans discontinuités fixes : c'est le théorème (2.21). Ce théorème contient aussi un résultat de convergence en loi d'une suite de variables vers une limite dont la loi est indéfiniment divisible (ou est un mélange de telles lois). Nous appliquons ceci au cas où X est un brownien (§ 2-*d*) et au cas où les X^n sont obtenus à partir de tableaux triangulaires (§ 2-*e*).

Dans la section 3 nous démontrons le même résultat de convergence, lorsque X est un processus à accroissements indépendants quelconque (avec éventuellement des discontinuités fixes) : c'est le théorème (3.1). Soulignons que, de manière assez surprenante (étant données les difficultés qu'on rencontre habituellement à traiter des processus non quasi-continus à gauche), les conditions du théorème (3.1) ne sont pas plus restrictives que celles du théorème (2.21). En particulier les résultats obtenus ici sont bien plus forts que ceux de [*11*], dans lequel nous avions abordé le même type de problème. Enfin malheureusement, si le théorème (3.1) est facile à énoncer, il est très long à démontrer, ce qui donne à la section 3 une allure très technique et difficile.

1. LES PRINCIPES FONDAMENTAUX

§ 1.*a*) Autour d'un théorème trivial.

On s'intéresse à la convergence en loi de variables ou de processus. Quitte à prendre des produits tensoriels d'espaces probabilisés, on peut supposer que toutes les variables sont définies sur un même espace de base $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$. Les convergences en loi et en probabilité sont notées : $\xrightarrow{\mathscr{L}}$, $\xrightarrow{\mathrm{P}}$.

Pour obtenir la convergence en loi d'une suite (χ_n) de v. a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ vers une limite χ, on peut partir de l'hypothèse simple (voire simpliste) suivante.

HYPOTHÈSE (H1). — Pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ il existe une décomposition

$$e^{iu\cdot\chi_n} = \beta_n^u \gamma_n^u \tag{1.1}$$

($u.\chi_n$ désigne le produit scalaire), où les variables complexes β_n^u et γ_n^u vérifient :

i) $\gamma_n^u \xrightarrow{\mathrm{P}} \gamma^u := \mathrm{E}(e^{iu\cdot\chi})$;

ii) $\mathrm{E}(\beta_n^u) = 1$;

iii) les suites $(\beta_n^u)_{n\geqslant 1}$ sont uniformément intégrables. ■

Sous (H1) la convergence en loi de (χ_n) vers χ est immédiate : en effet γ^u est « déterministe », donc (1.1) et *ii*) entraînent

$$\mathrm{E}(e^{iu\cdot\chi_n}) - \mathrm{E}(e^{iu\cdot\chi}) = \mathrm{E}[\beta_n^u(\gamma_n^u - \gamma^u)] ;$$

d'après (1.1), *iii*) et *i*), la suite $\{\beta_n^u(\gamma_n^u - \gamma^u)\}_{n\geqslant 1}$ est uniformément intégrable et tend vers 0 en loi, donc dans L^1, donc $\mathrm{E}(e^{iu\cdot\chi_n}) \to \mathrm{E}(e^{iu\cdot\chi})$.

(1.2) REMARQUE. — On a tout un éventail de choix possibles dans la décomposition (1.1). L'hypothèse-clé *i*) est d'autant plus « facile » à vérifier que γ_n^u est « plus déterministe ». On a ainsi les deux extrêmes suivants :

a) γ_n^u est « le plus déterministe possible », soit

$$\gamma_n^u = \mathrm{E}(e^{i.u\chi_n}), \qquad \text{et} \qquad \beta_n^u = e^{iu.\chi_n}/\gamma_n^u$$

(on suppose que $\gamma_n^u \neq 0$). *i*) équivaut alors dans ce cas à la convergence en loi de (χ_n) vers χ, auquel cas (H1) est vérifié si et seulement si $\gamma^u \neq 0$.

b) γ_n^u est « le plus aléatoire possible », soit $\gamma_n^u = e^{iu\cdot\chi_n}$ et $\beta_n^u = 1$. *i*) équivaut alors à la convergence en loi de (χ_n) vers χ *et* au fait que χ est p. s. déterministe, ce qui est donc très restrictif.

Si donc on veut atteindre la plus grande généralité possible, il y a donc intérêt à choisir γ_n^u aussi déterministe que possible, mais dans le cas extrême *a)* on arrive à une tautologie ! ■

L'hypothèse (H1), et notamment *iii)*, est plus restrictive qu'il n'y paraît : par exemple *iii)*, *i)* et (1.1) entraînent que $\gamma^u \neq 0$. Dans le but d'affaiblir *iii)*, et aussi pour étendre le champ d'application de ces résultats au cas des « mélanges de lois » et des processus, nous introduisons une autre hypothèse, plus faible et beaucoup plus compliquée.

HYPOTHÈSE (H2). — Soit ζ_n et ζ (resp. χ_n et χ) des v. a. à valeurs dans $\mathbb{C}$ (resp. dans $\mathbb{R}^d$); soit $\mathbf{G}$ une sous-tribu de $\mathbf{F}$. On suppose que $|\zeta_n| \leqslant 1$, $|\zeta| \leqslant 1$, et que pour tous $u \in \mathbb{R}^d$, n, $p \in \mathbb{N}$, il existe des v. a. β_{np}^u et γ_n^u avec

(1.3) $$e^{iu\cdot\chi_n} = \beta_{np}^u \gamma_n^u \qquad \text{si} \qquad |\gamma_n^u| > 1/p,$$

et qui vérifient :

i) χ et ζ sont indépendantes, conditionnellement par rapport à $\mathbf{G}$;

ii) $E(\zeta_n \mid \mathbf{G}) \xrightarrow{P} E(\zeta \mid \mathbf{G})$;

iii) $\gamma^u := E(e^{iu\cdot\chi} \mid \mathbf{G})$ ne s'annule pas, p. s.;

iv) $\gamma_n^u \xrightarrow{P} \gamma^u$;

v) $E(\beta_{np}^u \mid \mathbf{G} \vee \sigma(\zeta_n)) = 1$;

vi) les suites $(\beta_{np}^u)_{n\geqslant 1}$ sont uniformément intégrables. ■

(1.4) THÉORÈME. — *Sous (H2) on a* $E(\zeta_n e^{iu\cdot\chi_n} \mid \mathbf{G}) \xrightarrow{P} E(\zeta e^{iu\cdot\chi} \mid \mathbf{G})$, *et donc* $E(\zeta_n e^{iu\cdot\chi_n}) \to E(\zeta e^{iu\cdot\chi})$, *pour tout* $u \in \mathbb{R}^d$.

Démonstration. — Fixons $u \in \mathbb{R}^d$. Comme $|\gamma^u| > 0$ p. s. et comme γ^u est $\mathbf{G}$-mesurable, il suffit de montrer que $E(\zeta_n e^{iu\cdot\chi_n} \mid \mathbf{G}) \xrightarrow{P} E(\zeta e^{iu\cdot\chi} \mid \mathbf{G})$ sur chaque ensemble $\{ |\gamma^u| > 1/p \}$, ce qui revient à supposer que $|\gamma^u| > 1/p$ partout pour un $p \in \mathbb{N}$ donné. Si $A_n = \{ |\gamma_n^u| > 1/p \}$, *iv)* entraîne alors que $P(A_n) \to 1$. Posons

$$a_n = E(\zeta_n e^{iu\cdot\chi_n} \mid \mathbf{G}) - (\zeta e^{iu\cdot\chi} \mid \mathbf{G}).$$

En appliquant *i)* et *iii)*, puis *v)* et (1.3), il vient

(1.5) $$\begin{aligned} a_n &= E(\zeta_n e^{iu\cdot\chi_n} I_{A_n} \mid \mathbf{G}) + E(\zeta_n e^{iu\cdot\chi_n} I_{A_n^c} \mid \mathbf{G}) - E(\zeta\gamma^u \mid \mathbf{G}) \\ &= E(\zeta_n \beta_{np}^u (\gamma_n^u - \gamma^u) I_{A_n} \mid \mathbf{G}) + E(\zeta_n (e^{iu\cdot\chi_n} - \beta_{np}^u \gamma^u) I_{A_n^c} \mid \mathbf{G}) + \gamma^u E(\zeta_n - \zeta \mid \mathbf{G}). \end{aligned}$$

D'après *ii)*, le dernier terme de (1.5) tend vers 0 en probabilité. On sait que $P(A_n^c) \to 0$, et d'après *vi)* la suite $\{ \zeta_n (e^{iu\cdot\chi_n} - \beta_{np}^u \gamma^u) \}_{n\geqslant 1}$ est uniformément intégrable, donc le second terme de (1.5) tend aussi vers 0 en probabilité. Enfin d'après (1.3) et *vi*), la suite

$$\{ \zeta_n \beta^u_{np}(\gamma^u_n - \gamma^u) = \zeta_n(e^{iu\cdot\chi_n} - \beta^u_{np}\gamma^u) \}_{n\geqslant 1}$$

est uniformément intégrable (car $|\gamma^u| \leqslant 1$) et tend vers 0 en probabilité d'après *iv*), donc le premier terme de (1.5) tend vers 0 en probabilité. Par suite $a_n \xrightarrow{P} 0$ et on a le résultat. ■

(1.6) Remarque. — Par rapport à (H1), l'hypothèse (H2) est plus faible pour trois raisons :

1) l'introduction de ζ_n et ζ, ce qui nous servira à démontrer les théorèmes de convergence fonctionnelle;

2) le remplacement de β^u_n par les β^u_{np}, ce qui sert à affaiblir (H1-*iii*) ;

3) l'introduction de la tribu **G**. L'usage en est, typiquement, le suivant : supposons qu'on sache, grâce à l'utilisation de (H1) par exemple, prouver la convergence en loi de (χ_n) vers χ quand χ suit une loi indéfiniment divisible (un cas fréquent !). Grâce à **G** on peut alors obtenir des convergences vers des « mélanges » de telles lois.

En fait, cela revient à considérer des versions régulières $\mu_n(\omega, dx)$ et $\mu(\omega, dx)$ des lois conditionnelles de χ_n et χ par rapport à **G** et à démontrer que μ_n tend vers μ, étroitement en probabilité. Mais cela évite ainsi l'usage des probabilités conditionnelles régulières et l'introduction de la convergence étroite en probabilité. ■

§ 1.*b*) Application : le théorème fondamental.

Nous allons maintenant montrer comment le thérorème (1.4) s'applique dans la méthode des « lois accompagnatrices », en énonçant un théorème général dont la plupart des résultats de la littérature sont des corollaires.

La première remarque consiste à souligner que la méthode des lois accompagnatrices est fondamentalement une méthode *adaptée à la convergence des processus*, et plus précisément des processus indicés par $\mathbb{R}_+$ et à trajectoires cadlag (continues à droite et pourvues de limites à gauche), même quand on l'applique à la convergence d'une suite (χ_n) de v. a. : en effet dans ce cas on suppose que χ_n est la valeur prise par un processus X^n en un temps (éventuellement aléatoire) τ^n, soit $\chi_n = X^n_{\tau^n}$; puis, on donne des conditions sur les X^n permettant d'obtenir la convergence des χ_n (ceci est vrai en particulier dans le cas des tableaux triangulaires, comme on le verra plus bas).

Dans ce paragraphe, on suppose que X^n et X sont des processus indicés par $\mathbb{R}_+$, cadlag, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, nuls en 0. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $F^n = (\mathbf{F}_t^n)_{t \geq 0}$ une filtration rendant X^n adapté. Pour les notions de « théorie générale des processus » nous renvoyons à Dellacherie et Meyer [*4*] ou à Jacod [*10*].

Soit D une partie de $\mathbb{R}_+$; soit **G** une sous-tribu de **F**.

(1.7) DÉFINITION. — On dit que X^n *converge fini-dimensionnellement le long de* D *vers* X, *conditionnellement par rapport à* **G**, et on écrit :

$$X^n \xrightarrow{\mathscr{L}f(\mathbf{G},D)} X,$$

si pour tous $q \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_q \in D$, g continue bornée sur $\mathbb{R}^{d \times q}$, on a

$$\text{(1.8)} \qquad E[g(X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_q}) \mid \mathbf{G}] \xrightarrow{P} E[g(X_{t_1}, \ldots, X_{t_q}) \mid \mathbf{G}].$$

Quand **G** est triviale, cela revient à : $(X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_q}) \xrightarrow{\mathscr{L}} (X_{t_1}, \ldots, X_{t_q})$, et on écrit alors : $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}f(D)} X$. Quand en plus $D = \mathbb{R}_+$, c'est la convergence fini-dimensionnelle usuelle. ■

(1.9) DÉFINITION. — On dit que X est *un PAI* (processus à accroissements indépendants) **G**-*conditionnel le long de* D si pour tous $q \in \mathbb{N}$, $t_1 < \ldots < t_q < s \in D$, les variables $X_s - X_{t_q}$ et $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_q})$ sont indépendantes, conditionnellement par rapport à **G** (si **G** est triviale et si $D = \mathbb{R}_+$, X est alors un PAI ordinaire). ■

HYPOTHÈSE (H3). — *i*) $\mathbf{G} \subset \mathbf{F}_0^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

ii) X est un PAI **G**-conditionnel le long de D;

iii) $G(u)_t := E(e^{iu.X_t} \mid \mathbf{G})$ ne s'annule pas, p. s., si $t \in D$;

iv) pour tous $n \in \mathbb{N}$, $u \in \mathbb{R}^d$, il existe :

a) un processus complexe cadlag $G^n(u)$ tel que $G^n(u)_0 = 1$, que $G^n(u)_t = 0$ si $t \geq T^n(u) := \inf(s : G^n(u)_s = 0)$, et que $\mid G^n(u) \mid$ soit un processus F^n-prévisible et à variation finie;

b) un processus complexe cadlag $M^n(u)$, qui est une F^n-martingale locale sur l'intervalle $[\![0, T^n(u)[\![$: cela signifie que $(M^n(u)_{S \wedge t})_{t \geq 0}$ est une F^n-martingale locale pour tout F^n-temps d'arrêt S tel que $S < T^n(u)$ p. s., et ces processus vérifient :

$$\text{(1.10)} \qquad e^{iu.X^n} = M^n(u)G^n(u) \quad \text{sur} \quad [\![0, T^n(u)[\![$$

$$\text{(1.11)} \qquad G^n(u)_t \xrightarrow{P} G(u)_t \quad \text{si} \quad t \in D. \quad ■$$

(1.12) THÉORÈME. — *Sous (H3) on a* $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}f(\mathbf{G},D)} X$.

Démonstration. — On va démontrer (1.8), dans lequel on peut bien sûr supposer $t_1 < \ldots < t_q$, par récurrence sur q, en supposant si $q \geqslant 2$ que

$$(1.13) \qquad E[g(X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_{q-1}}) \mid \mathbf{G}] \xrightarrow{P} E[g(X_{t_1}, \ldots, X_{t_{q-1}}) \mid \mathbf{G}],$$

pour toute g continue bornée sur $\mathbb{R}^{d(q-1)}$. Pour obtenir (1.8) il suffit de montrer que

$$E\left[\exp i\left\{\sum_{k=1}^{q-1} v_k . X^n_{t_k} + u.(X^n_{t_q} - X^n_{t_{q-1}})\right\} \mid \mathbf{G}\right] \xrightarrow{P} E\left[\exp i\left\{\sum_{k=1}^{q-1} v_k . X_{t_k} + u.(X_{t_q} - X_{t_{q-1}})\right\} \mid \mathbf{G}\right]$$

pour tout choix des $v_k \in \mathbb{R}^d$ et de $u \in \mathbb{R}^d$. En d'autres termes, si

$$\zeta_n = \exp i \sum_{k=1}^{q-1} v_k . X^n_{t_k}, \qquad \zeta = \exp i \sum_{k=1}^{q-1} v_k . X_{t_k} \qquad (\text{et } \zeta_n = \zeta = 1 \quad \text{si} \quad q = 1)$$

$$\chi_n = X^n_{t_q} - X^n_{t_{q-1}}, \qquad \chi = X_{t_q} - X_{t_{q-1}} \qquad (\text{et } t_0 = 0 \quad \text{si} \quad q = 1),$$

il suffit de montrer que

$$E(\zeta_n e^{iu.\chi_n} \mid \mathbf{G}) \xrightarrow{P} E(\zeta e^{iu.\chi} \mid \mathbf{G}).$$

A cet effet, on applique le théorème (1.4) : il suffit de prouver que ζ_n, ζ, χ_n, χ, $\mathbf{G}$, vérifient (H2).

On a (H3-*ii*) $\Rightarrow$ (H2-*i*), et (1.13) $\Rightarrow$ (H2-*ii*) (si $q = 1$, (H2-*ii*) est trivial). Si $\gamma^u = E(e^{iu.\chi} \mid \mathbf{G})$, (H3) entraîne que $\gamma^u = G(u)_{t_q}/G(u)_{t_{q-1}}$, donc $\gamma^u \neq 0$ p. s., et on a (H2-*iii*).

Dans la suite on fait la convention $a/0 = 0$ si $a \in \mathbb{C}$. Soit

$$\gamma^u_n = G^n(u)_{t_q}/G^n(u)_{t_{q-1}}.$$

Il est clair que (1.11) et (H3-*ii*) entraînent (H2-*iv*).

Il reste à définir β^u_{np}. On fixe $u \in \mathbb{R}^d$, $n, p \in \mathbb{N}$. Pour simplifier les notations, on écrit $G = G^n(u)$, $M = M^n(u)$, $T = T^n(u)$. Soit $R = \inf(t > t_{q-1} : |G_t/G_{t_{q-1}}| \leqslant 1/p)$. Le temps $R \wedge T$ est F^n-prévisible et strictement positif, donc il existe une suite (S_m) de F^n-temps d'arrêt croissant vers $T \wedge R$ et vérifiant $S_m < T \wedge R$; comme M est une martingale locale sur $[\![0, T[\![$, on peut même choisir les S_m de sorte que M^{S_m} (comme d'habitude, $M^{S_m}_t = M_{S_m \wedge t}$) soit une martingale uniformément intégrable pour chaque $m \in \mathbb{N}$. Posons

$$N_t = \begin{cases} M_t/M_{t_{q-1}} & \text{si} \quad t_{q-1} < t < R \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $t_{q-1} < t < \mathrm{R}$, on a $t < \mathrm{T}$ (car $\mathrm{G} = 0$ sur $[\![\mathrm{T}, \infty[\![$), donc (1.10) et la définition de R entraînent que $| \mathrm{N}_t | \leqslant p$. On a donc $| \mathrm{N}_t | \leqslant p$ pour tout $t \geqslant 0$. Comme $\mathrm{M}^{\mathrm{S}_m}$ est une martingale, on a

$$\mathrm{N}_{\mathrm{S}_m \wedge t_q} = \mathrm{E}(\mathrm{N}_{\mathrm{S}_{m+1} \wedge t_q} \mid \mathbf{F}^n_{\mathrm{S}_m \wedge t_q}),$$

donc $(\mathrm{N}_{\mathrm{S}_m \wedge t_q})_{m \geqslant 1}$ est une martingale bornée, et on peut poser

$$\beta^u_{np} = \lim_{(m)} \mathrm{N}_{\mathrm{S}_m \wedge t_q}.$$

On a $| \beta^u_{np} | \leqslant p$, d'où (H2-*vi*).

On a $\mathrm{E}(\mathrm{N}_{\mathrm{S}_m \wedge t_q} \mid \mathbf{F}^n_{t_{q-1}}) = \mathrm{N}_{t_{q-1}} = 1$ sur l'ensemble $\{ t_{q-1} \leqslant \mathrm{S}_m \}$, donc $\mathrm{E}(\beta^u_{np} \mid \mathbf{F}^n_{t_{q-1}}) = 1$ et comme $\mathbf{G} \vee \sigma(\zeta_n) \subset \mathbf{F}^n_{t_{q-1}}$ on a (H2-*v*).

Il reste à prouver qu'on a (1.3), et pour cela on va d'abord montrer que $| \mathrm{G} |$ est décroissant. Soit S un F^n-temps d'arrêt tel que $\mathrm{S} < \mathrm{T}$. Alors M^{S} est une martingale locale, donc $| \mathrm{M}^{\mathrm{S}} |$ est une sous-martingale locale dont on note $| \mathrm{M}^{\mathrm{S}} | = \tilde{\mathrm{M}} + \mathrm{A}$ la décomposition de Doob-Meyer ($\tilde{\mathrm{M}}_0 = 0$, $\tilde{\mathrm{M}}$ martingale locale, A processus prévisible croissant). Mais (1.10) entraîne que $| \mathrm{M}^{\mathrm{S}} | = 1/ | \mathrm{G} |^{\mathrm{S}}$, qui est prévisible et à variation finie par hypothèse. L'unicité de la décomposition de Doob-Meyer entraîne alors que $\mathrm{A} = 1/ | \mathrm{G} |^{\mathrm{S}}$, donc $| \mathrm{G} |^{\mathrm{S}}$ est décroissant. Ceci est vrai pour tout $\mathrm{S} < \mathrm{T}$, et $\mathrm{G} = 0$ sur $[\![\mathrm{T}, \infty[\![$, donc $| \mathrm{G} |$ est décroissant. Montrons alors (1.3) : si $| \gamma^u_n | > 1/p$ on a $\mathrm{R} > t_q$ et $\mathrm{T} > t_q$, donc $\mathrm{S}_m > t_q$ pour m assez grand et $\beta^u_{np} = \mathrm{M}_{t_q}/\mathrm{M}_{t_{q-1}}$; (1.3) découle alors de (1.10). ■

COMMENTAIRES SUR L'HYPOTHÈSE (H3). — Cette hypothèse semble à première vue fort arbitraire et nous allons voir, de manière heuristique, en quoi ses différents constituants sont « naturels » quand on utilise le théorème (1.4). Pour cela, on examine point par point la preuve précédente.

1) (H3-*ii*) est indispensable : c'est ce qui permet d'obtenir (H2-*i*). Lorsque D est réduit à un point (i. e., on s'intéresse à la convergence de v. a. et non de processus), elle est d'ailleurs vide.

2) (H3-*iii*) est indispensable : c'est ce qui permet d'obtenir (H2-*iii*), sans laquelle le théorème (1.4) ne saurait être valide. Toutefois cette hypothèse est liée au fait qu'on utilise les fonctions caractéristiques; on verra dans la section 3 qu'on pourrait aussi utiliser les transformées de Laplace (à condition de tronquer convenablement : voir § 3-*d*), pour lesquelles l'analogue de (H3-*iii*) est automatiquement vérifié.

3) $\mathrm{M}^n(u)$ est une martingale locale : cette hypothèse permet d'obtenir des β^u_{np} qui ne dépendent pas des $v_k (k \leqslant q-1)$ et des $t_k (k \leqslant q-2)$: ce n'est certes pas indispensable, mais c'est une simplification commode, qui

permet d'avoir des énoncés raisonnables; remarquer cependant que (H2-v) est déjà une propriété « du type martingale ».

4) $|\,G^n(u)\,|$ est prévisible à variation finie : cette hypothèse joue un rôle, technique mais fort important, pour obtenir des $(\beta^u_{np})_{n\geqslant 1}$ uniformément intégrables. En outre, d'après la remarque (1.2) on a intérêt à choisir $G^n(u)$ aussi déterministe que possible, et le mieux qu'on puisse faire dans cette direction, si on veut (1.10) avec pour $M^n(u)$ une martingale locale, est précisément de prendre $G^n(u)$ prévisible.

5) (H3-i) est anodine (en général, $\mathbf{G}$ est triviale). A ce propos, signalons que la filtration F^n est quelconque, pourvu que $\mathbf{G} \subset \mathbf{F}^n_0$ et que X^n soit F^n-adapté. Mais on a en général intérêt à choisir F^n aussi petite que possible : plus F^n est petite, plus $G^n(u)$ est déterministe; et si F^n est trop grosse, il n'existe pas de décomposition (1.10).

(1.14) REMARQUE. — Soit τ^n un F^n-temps d'arrêt fini. La même démonstration prouve que $E[f(X^n_{\tau^n}) \mid \mathbf{G}] \xrightarrow{P} E[f(X_t) \mid \mathbf{G}]$ pour f continue bornée sur $\mathbb{R}^d$, si on remplace (1.11) par : $G^n(u)_{\tau^n} \xrightarrow{P} G(u)_t$.

On peut aussi se ramener à (1.12) proprement dit en faisant un changement de temps : soit $f(s) = s/(t-s)$ si $s < t$ et $f(s) = \infty$ si $s \geqslant t$; on applique alors (1.12) aux processus $\tilde{X}^n_s = X^n_{f(s)\wedge\tau^n}$ et $\tilde{X} = X$, et à $D = \{\,t\,\}$. ■

§ 1.c) Utilisation du théorème fondamental pour les tableaux triangulaires.

Un tableau triangulaire est une famille $(X_{n,k} : n \in \mathbb{N},\ k = 1, 2, \ldots, m_n)$ de v. a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (on peut éventuellement avoir $m_n = \infty$), définies sur $(\Omega, \mathbf{F}, P)$. Soit $\mathbf{G}$ une sous-tribu de $\mathbf{F}$, et $\mathbf{F}_{n,k} = \mathbf{G} \vee \sigma(X_{n,q} : 1 \leqslant q \leqslant k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant m_n$, $\mathbf{F}_{n,0} = \mathbf{G}$.

Le problème habituellement posé est le suivant : étant donné pour chaque $n \in \mathbb{N}$ un $(\mathbf{F}_{n,k})_{k\geqslant 0}$-temps d'arrêt σ_n à valeurs dans $\{\,0, 1, \ldots, m_n\,\}$, étudier la convergence des sommes ligne par ligne :

$$\varkappa_n = \Sigma_{1\leqslant k\leqslant\sigma_n} X_{n,k}.$$

(1.15) THÉORÈME. — *Soit χ une v. a. telle que $\gamma^u = E(e^{iu\cdot\chi} \mid \mathbf{G})$ ne s'annule pas. Si les variables*

$$\gamma^u_n = \Pi_{1\leqslant k\leqslant\sigma_n} E(e^{iu\cdot X_{n,k}} \mid \mathbf{F}_{n,k-1})$$

convergent en probabilité vers γ^u *pour tout* $u \in \mathbb{R}^d$, *on a* $\chi_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi$ *et même* $E[f(\chi_n) \mid \mathbf{G}] \xrightarrow{P} E[f(\chi) \mid \mathbf{G}]$ *pour toute* f *continue bornée sur* $\mathbb{R}^d$.

Démonstration. — Soit $g(t)$ = partie entière de $\frac{t}{1-t}$ si $t < 1$, et $g(t) = \infty$ si $t \geqslant 1$. On considère le processus $X_t = \chi I_{\{t \geqslant 1\}}$, et à chaque ligne $(X_{n,k})_{k \geqslant 1}$ on associe le processus

$$X_t^n = \Sigma_{1 \leqslant k \leqslant \sigma_n \wedge g(t)} X_{n,k},$$

qui est adapté à la filtration $\mathbf{F}_t^n = \mathbf{F}_{n,\sigma_n \wedge g(t)}$.

Il suffit alors d'appliquer (1.12) avec $D = \{ 1 \}$: on a (H3-*i*, *ii*, *iii*) avec $G(u)_1 = \gamma^u$. On a aussi (H3-*iv*) avec

$$G^n(u)_t = \Pi_{1 \leqslant k \leqslant \sigma_n \wedge g(t)} E(e^{iu.X_{n,k}} \mid \mathbf{F}_{n,k-1}) \quad , \quad M^n(u) = \frac{e^{iu.X^n}}{G^n(u)} I_{\{G^n(u) \neq 0\}}$$

(remarquer que $G^n(u)_1 = \gamma_n^u$, d'où (1.11)). ■

(1.16) Remarque. — Ce théorème peut évidemment se montrer directement, sans passer par l'intermédiaire de (1.12), et c'est alors un peu plus facile techniquement : voir Jakubowski [*13*].

Il existe bien sûr une version « fonctionnelle » pour le problème de limite ci-dessus (elle sera étudiée au § 2-*e*), il existe donc aussi une version fonctionnelle du théorème (1.15), pour laquelle le recours à (1.12) est nécessaire. ■

2. APPLICATION AUX SEMI-MARTINGALES

§ 2.*a*) Rappels sur les semi-martingales.

Pour toutes les notions qui ne sont pas rappelées ici, nous renvoyons à [*4*] et à [*10*]. Soit $Y = (Y^i)_{i \leqslant d}$ une semi-martingale d-dimensionnelle sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathbf{F}, F, P)$, c'est-à-dire la somme d'une martingale locale et d'un processus adapté cadlag à variation finie. On suppose que $Y_0 = 0$.

Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction fixée une fois pour toutes, avec

(2.1) f continue ; $f(x) = x$ si $|x| \leqslant \frac{1}{2}$, $f(x) = 0$ si $|x| \geqslant 1$; $|f| \leqslant 1$.

On pose

$$Y_t^e = \Sigma_{0 < s \leqslant t}[\Delta Y_s - f(\Delta Y_s)], \tag{2.2}$$

où $\Delta Y_s = Y_s - Y_{s-}$, ce qui définit un processus à variation finie adapté purement discontinu, avec un nombre fini de sauts sur tout compact (car

$\Delta Y^e_s = 0$ si $| \Delta Y_s | \leqslant 1/2$). $Y - Y^e$ est encore une semi-martingale, dont les sauts sont bornés par 1, et elle admet donc une décomposition unique en

$$(2.3) \qquad Y - Y^e = \tilde{B} + Y^c + Y^d$$

où $\tilde{B}$ est un processus prévisible à variation finie, Y^c est une martingale locale continue, Y^d est une martingale locale somme compensée de sauts, et $\tilde{B}_0 = Y^c_0 = Y^d_0 = 0$. On note $Y^{ci}, \ldots$, la $i^{\text{ème}}$ composante de $Y^c, \ldots$, et on pose

$$(2.4) \qquad C = (C^{ij})_{i,j \leqslant d} : \qquad C^{ij} = \langle Y^{ci}, Y^{cj} \rangle$$

(variation quadratique). Soit enfin $\nu = \nu(\omega; dt \times dx)$ la projection prévisible duale de la mesure des sauts de Y (système de Lévy de Y) : c'est l'unique mesure aléatoire positive sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ telle que

$$\nu(\omega; \{0\} \times \mathbb{R}^d) = \nu(\omega ; \mathbb{R}_+ \times \{0\}) = 0$$

et que pour tout A borélien de $\mathbb{R}^d$ situé à une distance strictement positive de l'origine, le processus $\nu^A_t(\omega) = \nu(\omega; [0, t] \times A)$ soit prévisible et

$$\Sigma_{0 < s \leqslant t} I_A(\Delta Y_s) - \nu^A_t$$

soit une martingale locale.

Le triplet $(\tilde{B}, C, \nu)$ s'appelle le *triplet des caractéristiques locales modifiées* de Y (« modifiées », car dans [*10*] on remplace $\tilde{B}$ par le processus défini de manière analogue, mais avec la fonction $f(x) = x I_{\{|x| \leqslant 1\}}$, qui n'est pas continue). On sait que pour tout $t > 0$ on a

$$(2.5) \qquad \int_{\mathbb{R}^d} \nu(\,.\,; [0, t] \times dx) \, | x |^2 \wedge 1 < \infty \text{ p. s.,}$$

tandis que $(C^{ij}_t(\omega) - C^{ij}_s(\omega))_{i,j \leqslant d}$ est une matrice symétrique non-négative si $s \leqslant t$.

Pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ on pose

$$(2.6) \quad A(Y, u)_t = iu.\tilde{B}_t - \frac{1}{2} \Sigma_{j,k \leqslant d} u^j C^{jk}_t u^k + \int_{\mathbb{R}^d} \nu([0, t] \times dx)(e^{iu.x} - 1 - iu.f(x)).$$

A cause de (2.1) et de (2.5), cette expression a bien un sens et définit un processus prévisible complexe à variation finie.

(2.7) LEMME. — *Il existe une martingale locale* $N(Y, u)$ *telle que*

$$e^{iu.Y_t} = 1 + \int_0^t e^{iu.Y_{s-}} [dN(Y, u)_s + dA(Y, u)_s].$$

Démonstration. — Appliquons la formule d'Ito à la fonction $e^{iu.x}$:

$$e^{iu.Y_t} = 1 + \int_0^t e^{iu.Y_{s-}}[\Sigma_{j\leqslant d} iu^j dY_s^j - \frac{1}{2}\Sigma_{j,k\leqslant d} u^j u^k dC_s^{jk}] + \Sigma_{0<s\leqslant t} e^{iu.Y_{s-}}[e^{iu.\Delta Y_s} - 1 - i\Sigma_{j\leqslant d} u^j \Delta Y_s^j].$$

On obtient le résultat en posant

$$N(Y, u)_t = iu.(Y_t^c + Y_t^d) + \Sigma_{0<s\leqslant t}[e^{iu.\Delta Y_s} - 1 - iu.f(\Delta Y_s)] - \int_{\mathbb{R}^d} \nu([0, t] \times dx)(e^{iu.x} - 1 - iu.f(x)). \quad \blacksquare$$

Rappelons enfin la définition de l'exponentielle de Doléans-Dade $\mathscr{E}(A)$ d'un processus à variation finie A :

$$(2.8) \qquad \mathscr{E}(A)_t = e^{A_t}\Pi_{0<s\leqslant t}[(1 + \Delta A_s)e^{-\Delta A_s}].$$

(2.9) LEMME. — *Le processus* $G(u) = \mathscr{E}[A(Y, u)]$ *vérifie :*

i) si $R = \inf(t : G(u)_t = 0)$, *on a* $G(u)_t = 0$ *pour* $t \geqslant R$;
ii) on a $R = \inf(t : \Delta A(Y, u)_t = -1)$;
iii) il existe une martingale locale $M(u)$ *sur* $[\![0, R[\![$ *avec* $M(u)_0 = 1$ *et*

$$(2.10) \qquad e^{iu.Y} = M(u)G(u) \qquad \text{sur} \qquad [\![0, R[\![.$$

Démonstration. — *i)* et *ii)* sont évidents. Remarquer que R est un temps prévisible, car $A(Y, u)$ est prévisible. Posons $A = A(Y, u)$, $N = N(Y, u)$, $X = e^{iu.Y}$, $G = G(u)$ et $Z = X/G$, avec la convention $a/0 = 0$. On sait que

$$(2.11) \qquad G_t = 1 + \int_0^t G_{s-} dA_s.$$

Pour obtenir *iii)* il suffit de vérifier que pour tout temps d'arrêt $S < R$, Z^S est une martingale locale (on posera alors $M(u) = Z$). D'après (2.7), (2.11) et la formule d'Ito, on a :

$$\begin{aligned} Z_t^S &= 1 + \int_0^{S\wedge t} \frac{1}{G_{s-}} dX_s - \int_0^{S\wedge t} Z_{s-} dA_s + \Sigma_{0<s\leqslant S\wedge t}\left[Z_s - Z_{s-} - \frac{\Delta X_s}{G_{s-}} + Z_{s-}\Delta A_s\right] \\ &= 1 + \int_0^{S\wedge t} Z_{s-} dN_s - \Sigma_{0<s\leqslant S\wedge t} Z_{s-} \frac{\Delta A_s}{1 + \Delta A_s} \Delta N_s. \end{aligned}$$

Les deux premiers termes ci-dessus sont des martingales locales. Le troisième, qu'on note F_t, définit un processus à variation finie. Si

$$\tilde{N}_t = \int_0^t \Delta A_s dN_s,$$

il s'écrit

$$\mathrm{F}_t = \int_0^{\mathrm{S} \wedge t} \mathrm{Z}_{s-} \frac{1}{1 + \Delta \mathrm{A}_s} d\tilde{\mathrm{N}}_s,$$

donc c'est une martingale locale, d'où le résultat. ■

(2.12) REMARQUE. — $\mathrm{G}(u)$ n'est pas l'unique processus prévisible à variation finie vérifiant *i*) et *iii*) ci-dessus; mais il est « maximal » au sens où, si $\mathrm{G}'(u)$ en est un autre et si $\mathrm{R}' = \inf(t : \mathrm{G}'(u)_t = 0)$, alors $\mathrm{R}' \leqslant \mathrm{R}$ et $\mathrm{G}'(u) = \mathrm{G}(u)$ sur $[\![0, \mathrm{R}'[\![$.

Revenons à l'hypothèse (H3) : si dans (H3-*iv*) on suppose que $\mathrm{G}^n(u)$ est prévisible à variation finie (et pas seulement $|\mathrm{G}^n(u)|$), (1.10) entraîne que X^n est une semi-martingale sur $[\![0, \mathrm{T}^n(u)[\![$: d'après ce qui précède, la décomposition (1.10) est alors « presque » unique (et même, il y a un seul choix raisonnable pour $\mathrm{G}^n(u)$, celui du lemme (2.9), car (1.11) et (H3-*iii*) impliquent que $\mathrm{T}^n(u)$ soit aussi grand que possible). ■

§ 2.*b*) Convergence de semi-martingales et de processus vers un PAI.

Revenons à la situation suivante (celle du § 1.*b*) :

(2.13) X^n et X sont des processus cadlag nuls en 0; $\mathbf{G} \subset \mathbf{F}$; F^n est une filtration telle que $\mathbf{G} \subset \mathbf{F}_0^n$ et à laquelle X^n est adapté; F est la plus petite filtration telle que $\mathbf{G} \subset \mathbf{F}_0$ et à laquelle X soit adapté; D est une partie de $\mathbb{R}_+$.

(2.14) THÉORÈME. — *Supposons que*

i) X *soit un PAI* **G**-*conditionnel le long de* D, *et* $\mathrm{G}(u)_t := \mathrm{E}(e^{iu.\mathrm{X}_t} \mid \mathbf{G})$ *ne s'annule pas, p. s., si* $t \in \mathrm{D}$;

ii) *pour chaque* $n \in \mathbb{N}$ *il existe une décomposition* $\mathrm{X}^n = \mathrm{Y}^n + \mathrm{Z}^n$, *où* Y^n *est une* F^n-*semi-martingale, et pour tous* $u \in \mathbb{R}^d$, $t \in \mathrm{D}$ *on ait*

$$e^{iu.\mathrm{Z}_t^n} \mathscr{E}[\mathrm{A}(\mathrm{Y}^n, u)]_t \xrightarrow{\mathrm{P}} \mathrm{G}(u)_t. \tag{2.15}$$

alors $\mathrm{X}^n \xrightarrow{\mathscr{L}f(\mathbf{G},\mathrm{D})} \mathrm{X}$.

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le théorème (1.12) : l'hypothèse (H3) est satisfaite avec

$$\mathrm{G}^n(u) = \exp iu.\mathrm{Z}^n \quad \mathscr{E}[\mathrm{A}(\mathrm{Y}^n, u)]$$

et

$$\mathrm{M}^n(u) = \exp iu.\mathrm{X}^n/\mathrm{G}^n(u) = \exp iu.\mathrm{Y}^n/\mathscr{E}[\mathrm{A}(\mathrm{Y}^n, u)],$$

d'après le lemme (2.9). ■

(2.16) REMARQUE. — On n'apas supposé ici que X^n (resp. X) est une F^n- (resp. F-) semi-martingale. Même si $Z^n = 0$, donc si X^n est une F^n-semi-martingale pour tout $n \in \mathbb{N}$, X n'est pas nécessairement une F-semi-martingale. ■

Ce théorème, en tant que tel, n'est pas vraiment intéressant car les processus $\mathscr{E}[A(Y^n, u)]$ ont une expression compliquée. Nous allons maintenant donner des résultats plus « concrets », lorsque X est une semi-martingale quasi-continue à gauche (dans la fin de cette section), puis dans le cas général (dans la section 3).

§ 2.*c*) Convergence vers un PAI-semi-martingale sans discontinuités fixes.

Dans tout ce paragraphe, nous allons faire l'hypothèse suivante.

HYPOTHÈSE (H4). — X est un PAI **G**-conditionnel le long de $\mathbb{R}_+$, et c'est une F-semi-martingale quasi-continue à gauche. ■

Si **G** est triviale, la F-quasi-continuité à gauche est exactement l'absence de temps de discontinuité fixe, pour le PAI X.

Rappelons (voir par exemple [*10*] que si X est une F-semi-martingale, alors c'est un PAI **G**-conditionnel si et seulement si ses caractéristiques locales modifiées, notées $(\tilde{B}^X, C^X, \nu^X)$, sont **G**-mesurables; dans ce cas $A(X, u)$ est aussi **G**-mesurable et, si $G(u)_t := E(\exp iu.X_t \mid \mathbf{G})$, on sait que

$$(2.17) \qquad G(u) = \mathscr{E}[A(X, u)]$$

(cela découle, par exemple, de la propriété immédiate que $e^{iu.X}/G(u)$ est une martingale sur l'ensemble $\{ G(u) \neq 0 \}$, et de (2.9) et (2.12)).

En outre, le PAI **G**-conditionnel et F-semi-martingale X est quasi-continu à gauche si et seulement si on peut trouver une version de ν^X qui vérifie $\nu^X(\{ s \} \times \mathbb{R}^d) = 0$ pour tout s, ce qui revient à dire que les $A(X, u)$ sont tous continus; dans ce cas, (2.17) entraîne que $G(u)$ ne s'annule pas, et en particulier (2.14, *i*) est vérifié.

Rappelons maintenant un résultat classique (voir par exemple Gnedenko et Kolmogorov [7]). Pour chaque $n \in \overline{\mathbb{N}}$ on considère

— $b^n \in \mathbb{R}^d$;
— c^n une matrice $d \times d$, symétrique non-négative;
— F^n une mesure positive sur $\mathbb{R}^d$, avec $F^n(\{ 0 \}) = 0$ et

$$\int F^n(dx) \mid x \mid^2 \wedge 1 < \infty.$$

Soit

$$(2.18)\quad \alpha^n(u) = iu.b^n - \frac{1}{2}\Sigma_{j,k\leq d}u^j c^{n,jk}u^k + \int F^n(dx)(e^{iu.x} - 1 - iu.f(x))$$

(f est toujours la fonction, fixée, figurant en (2.1)).

Soit aussi $\mathbf{C}$ l'espace des fonctions réelles sur $\mathbb{R}^d$, continues, admettant une limite à l'infini, et nulles sur un voisinage de 0.

Pour toute mesure $F(dx)$ et toute fonctions g, on écrira indifféremment $F(g)$ ou $\int F(dx)g(x)$, pour l'intégrale de g par rapport à F.

(2.19) LEMME. — *Pour que $\alpha^n(u) \to \alpha^\infty(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, il faut et il suffit que*

i) $b^n \to b^\infty$;

ii) $c^{n,jk} + F^n(f^j f^k) \to c^{\infty,jk} + F^\infty(f^j f^k)$;

iii) $F^n(g) \to F^\infty(g)$ *pour toute* $g \in \mathbf{C}$.

Dans la suite, si Y^n est une F^n-semi-martingale, on note $(\tilde{B}^{Y^n}, C^{Y^n}, \nu^{Y^n})$ le triplet de ses caractéristiques locales modifiées. Rappelons encore que

$$(2.20)\qquad \Delta\tilde{B}_t^{Y^n} = \nu^{Y^n}(\{t\} \times f).$$

Tout est prêt maintenant pour énoncer notre *théorème fondamental.*

(2.21) THÉORÈME. — *a) Supposons qu'on ait (2.13) et (H4), et que pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il existe une décomposition $X^n = Y^n + Z^n$, où Y^n est une F^n-semi-martingale, et que*

[β] $\quad \forall t \in D, \quad Z_t^n + \tilde{B}_t^{Y^n} \xrightarrow{P} \tilde{B}_t^X$;

[γ] $\quad \forall t \in D, \forall j, k \leq d$

$$C_t^{Y^n,jk} + \nu^{Y^n}([0, t] \times (f^j f^k)) - \Sigma_{s\leq t}\nu^{Y^n}(\{s\} \times f^j)\nu^{Y^n}(\{s\} \times f^k)$$
$$\xrightarrow{P} C_t^{X,jk} + \nu^X([0, t] \times (f^j f^k))$$

[δ] $\quad \forall t \in D, \forall g \in \mathbf{C}, \quad \nu^{Y^n}([0, t] \times g) \xrightarrow{P} \nu^X([0, t] \times g)$;

[UP] $\quad \forall t \in D, \forall \varepsilon > 0, \quad \sup_{s\leq t}\nu^{Y^n}(\{s\} \times \{x : |x| > \varepsilon\}) \xrightarrow{P} 0$

On a alors $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}f(G,D)} X$.

b) Considérons la condition

[sup β] $\quad \forall t > 0 \quad \sup_{s\leq t}|Z_s^n + \tilde{B}_s^{Y^n} - \tilde{B}_s^X| \xrightarrow{P} 0$;

si D *est dense dans* $\mathbb{R}_+$, *les conditions* [sup β], [γ], [δ] *entraînent que* X^n *converge en loi vers* X (convergence étroite des lois sur l'espace de Skorokhod $\mathbb{D}([0, \infty[; \mathbb{R}^d))$.

Voici quelques commentaires sur cet énoncé :

1) Il n'y a pas lieu d'être surpris par l'énoncé de b), dans lequel la condition [UP] a disparu : on verra que si D est dense dans $\mathbb{R}_+$ et si on a (H4), alors $[\delta] \Rightarrow$ [UP].

2) La condition [UP] est une condition « d'uniforme petitesse » des sauts *prévisibles* de Y^n : si J^n désigne le support prévisible de l'ensemble mince $\{ \Delta Y^n \neq 0 \}$, c'est-à-dire exactement l'ensemble

$$\{ (\omega, s) : \nu^{Y^n}(\omega; \{ s \} \times \mathbb{R}^d) > 0 \},$$

et si $m_t^n = \sup_{s \leqslant t} | \Delta Y_s^n | I_{J^n}(s)$, [UP] équivaut à : $\forall t \in D$, $m_t^n \xrightarrow{P} 0$.

3) Si, dans la décomposition (2.3) de Y^n, on pose $M^n = Y^{nc} + Y^{nd}$, le premier membre de $[\gamma]$ n'est autre que le crochet $\langle M^{nj}, M^{nk} \rangle$.

4) Les trois conditions $[\beta]$, $[\gamma]$, $[\delta]$ sont à comparer, dans le même ordre, aux trois conditions du lemme (2.19); en particulier elles s'y ramènent exactement lorsque X et les Y^n sont des PAI homogènes, avec **G** triviale et $D = \mathbb{R}_+$, en prenant

$$b^n = \tilde{B}_1^{Y^n} \quad , \quad b^\infty = \tilde{B}_1^X \quad , \quad c^n = C_1^{Y^n} \quad , \quad c^\infty = C_1^X \quad , \quad F^n = \nu^{Y^n}([0, 1] \times .)$$

et $F^\infty = \nu^X([0, 1] \times .)$.

Le théorème (2.21) est nouveau, sauf dans le cas où la limite X est un mouvement brownien, cas qui est dû à Liptcer et Shiryaev [*18*]. Par contre, la proposition suivante, qui sert d'étape pour prouver (2.21), était déjà plus ou moins connue (voir par exemple le théorème (5.5) de [*11*] pour un énoncé très semblable).

(2.22) PROPOSITION. — *Supposons qu'on ait (2.13) et (H4), et que pour chaque* $n \in \mathbb{N}$ *il existe une décomposition* $X^n = Y^n + Z^n$, *où* Y^n *est une* F^n*-semi-martingale, avec les conditions* $[\beta]$, $[\delta]$, [UP] *et*

$[\gamma']$ $\forall t \in D$, $\forall j, k \leqslant d$,

$$C_t^{Y^n, jk} + \nu^{Y^n}([0, t] \times (f^j f^k)) \xrightarrow{P} C_t^{X, jk} + \nu^X([0, t] \times (f^j f^k)) ;$$

$[\rho]$ $\forall t \in D$, $\qquad \Sigma_{s \leqslant t} | \Delta \tilde{B}_s^{Y^n} |^2 \xrightarrow{P} 0.$

On a alors $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}f(\mathbf{G}, D)} X$.

(2.23) REMARQUE. — Etant donné (2.20), il est clair que $[\gamma'] + [\rho] \Rightarrow [\gamma]$, donc les conditions de (2.22) sont *plus fortes* que celles de (2.21 *a*). Elles sont *strictement plus fortes*, ainsi que le montre l'exemple suivant.

Soit $(z_p^n)_{p \geqslant 1}$ des v. a. indépendantes uniformes sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$; soit

$$X_t^n = \Sigma_{1 \leqslant p \leqslant [n^2 t]} (-1)^p z_p^n \qquad \text{et} \qquad \mathbf{F}_t^n = \sigma(X_s^n : s \leqslant t),$$

où $[n^2t]$ désigne la partie entière du nombre n^2t. Il est facile de vérifier que

$$\tilde{B}_t^{X^n} = \Sigma_{1 \leqslant p \leqslant [n^2t]}(-1)^p \frac{1}{2n}, \qquad C^{X^n} = 0,$$

$$\nu^{X^n}(ds, dx) = \Sigma_{p \geqslant 1} n \left\{ \varepsilon_{2p/n^2}(ds) I_{[0,1/n]}(x)dx + \varepsilon_{(2p+1)/n^2}(ds) I_{[-1/n,0]}(x)dx \right\}$$

Soit $Y^n = X^n$ et $Z^n = 0$. On a [sup β] avec $\tilde{B}^X = 0$. On a $[\delta]$ avec $\nu^X = 0$, et [UP]. Il est facile de voir qu'on a $[\gamma]$ avec $C_t^X = t/12$, donc X^n tend en loi vers $W/\sqrt{12}$, où W est un mouvement brownien.

On a aussi $[\gamma']$ (avec $C_t^X = t/3$), mais $[\rho]$ n'est pas satisfaite (heureusement, sinon on aboutirait à une contradiction !) ; en effet

$$\Sigma_{s \leqslant t} | \Delta \tilde{B}_s^{X^n} |^2 = [n^2t]/4n^2t \to 1/4. \quad \blacksquare$$

Nous découpons la démonstration en plusieurs lemmes, qui permettent de reconnaître à quoi servent les différentes hypothèses. Rappelons la propriété suivante, d'usage constant dans la suite : pour que $\chi_n \xrightarrow{P} \chi$, où χ_n et χ sont à valeurs dans un espace métrique, il faut et il suffit que de toute sous-suite extraite de (χ_n) on puisse extraire une sous-sous-suite qui converge p. s. vers χ.

(2.24) LEMME. — *On a* $[\beta] + [\gamma'] + [\delta] \Rightarrow iu.Z_t^n + A(Y^n, u)_t \xrightarrow{P} A(X, u)_t$ *pour tous* $t \in D$, $u \in \mathbb{R}^d$.

Démonstration. — Soit $t \in D$. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que les convergences dans $[\beta]$, $[\gamma']$ et $[\delta]$ au point t, et dans $[\delta]$ pour toute $g \in C_0$ où C_0 est une suite dense dans C (qui est séparable pour la convergence uniforme), ont lieu pour tout ω n'appartenant pas à une partie négligeable N de Ω. On a alors $\nu^{Y^n}(\omega; [0, t] \times g) \to \nu^X(\omega; [0, t] \times g)$ pour tous $\omega \notin N$, $g \in C$. Le résultat est alors une conséquence immédiate du lemme (2.19), appliqué pour chaque $\omega \notin N$. $\blacksquare$

(2.25) LEMME. — *Si* $(a_p^n)_{p \geqslant 1}$ *sont des suites de nombres complexes, et si*

$$\lim_{(n)} \Sigma_{(p)} | a_p^n |^2 = 0,$$

on a

$$\lim_{(n)} \Pi_{(p)}(1 + a_p^n) \exp - a_p^n = 1.$$

Démonstration. — Elle est évidente, en passant au logarithme, et en remarquant que l'hypothèse implique que $\lim_{(n)} \sup_{(p)} | a_p^n | = 0$. $\blacksquare$

(2.26) LEMME. — *On a*

$$[\gamma'] + [\delta] + [\mathrm{UP}] + [\rho] \Rightarrow \Sigma_{s \leqslant t} \mid \Delta \mathrm{A}(\mathrm{Y}^n, u)_s \mid^2 \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$$

pour tous $t \in \mathrm{D}$, $u \in \mathbb{R}^d$.

Démonstration. — D'après (2.6) et (2.20) on a

$$\Delta \mathrm{A}(\mathrm{Y}^n, u)_s = \int \nu^{\mathrm{Y}^n}(\{s\} \times dx)(e^{iu.x} - 1) \tag{2.27}$$

Il existe une constante k_u telle que $| e^{iu.x} - 1 | \leqslant k_u | x | \wedge 1$ et

$$| e^{iu,x} - 1 - iu.f(x) | \leqslant k_u | x |^2 \wedge 1.$$

Posons

$$\mathrm{H}_s^n = \int \nu^{\mathrm{Y}^n}(\{s\} \times dx)(e^{iu.x} - 1 - iu.f(x)).$$

Quitte à prendre une sous-suite (comme dans la preuve de (2.24)), on peut supposer que dans $[\gamma']$, $[\delta]$, [UP], $[\rho]$ il y a convergence pour tout ω en dehors d'un ensemble négligeable N. On en déduit en particulier que

$$\left\{\begin{array}{l} \sup_{(n)} \Sigma_{s \leqslant t} \mid \mathrm{H}_s^n \mid \leqslant k_u \sup_n \nu^{\mathrm{Y}^n}([0, 1] \times (| x |^2 \wedge 1)) < \infty \\ \sup_{(n)} \nu^{\mathrm{Y}^n}([0, t] \times \{ x : | x | > \varepsilon \}) < \infty \\ \sup_{(n)} \Sigma_{s \leqslant t} \mid \Delta \tilde{\mathrm{B}}_s^{\mathrm{Y}^n} \mid^2 < \infty \end{array}\right. \tag{2.28}$$

car les quantités ci-dessus sont majorées par les premiers membres de $[\gamma']$, $[\delta]$ et $[\rho]$ (pour des fonctions g convenables; rappelons que

$$| x |^2 \wedge 1 \leqslant | f(x) |^2 + \mathrm{I}_{\{|x| > 1/2\}}.$$

On a $\Delta \mathrm{A}(\mathrm{Y}^n, u) = \Delta \tilde{\mathrm{B}}^{\mathrm{Y}^n} + \mathrm{H}^n$, donc

$$\Sigma_{s \leqslant t} \mid \Delta \mathrm{A}\,(\mathrm{Y}^n, u)_s \mid^2 \leqslant 2\Sigma_{s \leqslant t} \mid \Delta \tilde{\mathrm{B}}_s^{\mathrm{Y}^n} \mid^2 + 2(\Sigma_{s \leqslant t} \mid \mathrm{H}_s^n \mid)^2$$

et (2.28) entraîne que

$$\sup_{(n)} \Sigma_{s \leqslant t} \mid \Delta \mathrm{A}(\mathrm{Y}^n, u)_s \mid^2 < \infty, \tag{2.29}$$

On a aussi $| \Delta \mathrm{A}(\mathrm{Y}^n, u) |^2 \leqslant | \Delta \mathrm{A}(\mathrm{Y}^n, u) | \, [| \Delta \tilde{\mathrm{B}}^{\mathrm{Y}^n} | + | \mathrm{H}^n |]$, donc

$$\begin{aligned} \Sigma_{s \leqslant t} \mid \Delta \mathrm{A}(\mathrm{Y}^n, u)_s \mid^2 \leqslant{} & \sup_{s \leqslant t} \mid \Delta \mathrm{A}(\mathrm{Y}^n, u)_s \mid \Sigma_{s \leqslant t} \mid \mathrm{H}_s^n \mid \\ & + (\Sigma_{s \leqslant t} \mid \Delta \mathrm{A}(\mathrm{Y}^n, u)_s \mid^2)^{1/2} (\Sigma_{s \leqslant t} \mid \Delta \tilde{\mathrm{B}}_s^{\mathrm{Y}^n})^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Par ailleurs $| \Delta \mathrm{A}(\mathrm{Y}^n, u)_s | \leqslant k_u[\varepsilon + \nu^{\mathrm{Y}^n}(\{ s \} \times \{ x : | x | > \varepsilon \})]$, donc [UP] entraîne que $\sup_{s \leqslant t} | \Delta \mathrm{A}(\mathrm{Y}^n, u)_s | \to 0$. On déduit alors le résultat de l'inégalité ci-dessus, en utilisant (2.28), (2.29) et $[\rho]$. ∎

Démonstration de (2.22). — D'après (H4) on a (2.19) et (2.14, *i*). Etant donnée la forme de $\mathscr{E}[\mathrm{A}(\mathrm{Y}^n, u)]$, les lemmes (2.24), (2.25) et (2.26) entraînent qu'on a (2.15). Le théorème (2.14) entraîne alors le résultat. ∎

Démonstration de (2.21, a). — *i*) Pour chaque Y^n on a une décomposition (2.3) : $Y^n = Y^{ne} + Y^{nc} + Y^{nd} + \tilde{B}^{Y^n}$. On pose

$$Y'^n = Y^{ne} + Y^{nc} + Y^{nd}, \qquad Z'^n = Z^n + \tilde{B}^{Y^n} ;$$

on va montrer que les décompositions $X^n = Y'^n + Z'^n$ vérifient les hypothèses de (2.22), ce qui suffira pour obtenir le résultat.

Remarquons que l'objectif idéal serait de remplacer Y^n par Y'^n, de sorte que $\tilde{B}^{Y'^n} = 0$: dans ce cas on aurait immédiatement $[\rho]$ et le premier membre de $[\gamma]$ pour Y^n égalerait le premier membre de $[\gamma']$ pour Y'^n; malheureusement on n'arrive pas, en général, à satisfaire cet objectif, et l'essentiel de la démonstration ci-dessous consiste à montrer que $\tilde{B}^{Y'^n}$, bien que non nul, tend assez vite vers 0.

Pour simplifier les notations, on pose $B^n = \tilde{B}^{Y^n}$ et $N^n_s(dx) = \nu^{Y^n}(\{ s \} \times dx)$ On fixe $t \in D$ une fois pour toutes et on pose $M^n = \sup_{s \leqslant t} | \Delta B^n_s |$. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer qu'il y a convergence p. s. dans $[\delta]$ et dans [UP], ce qui entraîne notamment :

$$(2.30) \qquad \forall \eta > 0, \qquad \sup_{(n)} \nu^{Y^n}([0, t] \times \{ x : | x | > \eta \}) < \infty$$

$$(2.31) \qquad M^n \to 0.$$

ii) Soit $g \in \mathbf{C}$. On a $\Delta Y'^n = \Delta Y^n - \Delta B^n$ par construction, donc

$$\Sigma_{s \leqslant r} g(\Delta Y'^n_s) = \Sigma_{s \leqslant r} g(\Delta Y^n_s - \Delta B^n_s) I_{\{\Delta Y^n_s \neq 0\}} + \Sigma_{s \leqslant r} g(-\Delta B^n_s) I_{\{\Delta Y^n_s = 0\}}.$$

Le processus $(\nu^{Y'^n}([0, r] \times g))_{r \geqslant 0}$ est par définition la projection prévisible duale du processus ci-dessus, donc d'après le chapitre 3 de [*10*] on a

(2.32)

$$\nu^{Y'^n}([0, r] \times g) = \int_0^r \int_{\mathbb{R}^d} \nu^{Y^n}(ds, dx) g(x - \Delta B^n_s) + \Sigma_{s \leqslant r}[1 - N^n_s(\mathbb{R}^d)] g(-\Delta B^n_s).$$

Appliquons ceci à $g(x) = I_{\{|x| > \varepsilon\}}$; si $s \leqslant t$ on en déduit que

$$M^n \leqslant \varepsilon/2 \Rightarrow \nu^{Y'^n}(\{ s \} \times \{ x : | x | > \varepsilon \}) = \int N^n_s(dx) I_{\{|x - \Delta B^n_s| > \varepsilon\}}$$
$$\leqslant \nu^{Y^n}(\{ s \} \times \{ x : | x | > \varepsilon/2 \}).$$

Comme (Y^n) vérifie [UP], on déduit alors de (2.31) que (Y'^n) vérifie aussi [UP].

Supposons que $g \in \mathbf{C}$ soit nulle sur l'ensemble $\{ x : | x | \leqslant 2\delta \}$; g est uniformément continue, et on note $\eta(\theta)$ son module de continuité :

$$| x - y | \leqslant \eta(\theta) \Rightarrow | g(x) - g(y) | \leqslant \theta.$$

D'après (2.32),

$$\mathrm{M}^n \leqslant \delta \wedge \eta(\theta) \Rightarrow | \nu^{\mathrm{Y}^n}([0, t] \times g) - \nu^{\mathrm{Y}'^n}([0, t] \times g) |$$
$$\leqslant \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \nu^{\mathrm{Y}^n}(ds, dx) \, | g(x - \Delta \mathrm{B}_s^n) - g(x) | \leqslant \theta \nu^{\mathrm{Y}^n}([0, t] \times \{ x : | x | > \delta \}).$$

θ étant arbitrairement petit et (Y^n) vérifiant $[\delta]$, on déduit alors de (2.30) et (2.31) que (Y'^n) vérifie $[\delta]$.

iii) Calculons maintenant $\tilde{\mathrm{B}}^{\mathrm{Y}'^n}$. On a déjà vu que $\Delta \mathrm{Y}'^n = \Delta \mathrm{Y}^n - \Delta \mathrm{B}^n$, donc

$$\Delta \mathrm{Y}'^{ne} := \Delta \mathrm{Y}'^n - f(\Delta \mathrm{Y}'^n) = \Delta \mathrm{Y}^{ne} + f(\Delta \mathrm{Y}^n) - \Delta \mathrm{B}^n - f(\Delta \mathrm{Y}^n - \Delta \mathrm{B}^n).$$

Par suite $\mathrm{Y}'^{ne} = \mathrm{Y}^{ne} - \mathrm{F}^n$ avec

$$\mathrm{F}_r^n = \Sigma_{s \leqslant r} [\Delta \mathrm{B}_s^n + f(-\Delta \mathrm{B}_s^n)] \mathrm{I}_{\{\Delta \mathrm{Y}_s^n = 0\}}$$
$$- \Sigma_{s \leqslant r} [f(\Delta \mathrm{Y}_s^n) - \Delta \mathrm{B}_s^n - f(\Delta \mathrm{Y}_s^n - \Delta \mathrm{B}_s^n] \mathrm{I}_{\{\Delta \mathrm{Y}_s^n \neq 0\}}.$$

Par construction $\mathrm{Y}'^n - \mathrm{Y}'^{ne} - \mathrm{F}^n = \mathrm{Y}^{nc} + \mathrm{Y}^{nd}$ est une martingale locale, ce qui entraîne que $\tilde{\mathrm{B}}^{\mathrm{Y}'^n}$ est la projection prévisible duale de F^n, soit

$$(2.33) \quad \tilde{\mathrm{B}}_r^{\mathrm{Y}'^n} = \Sigma_{s \leqslant r} [1 - \mathrm{N}_s^n(\mathbb{R}^d)] [\Delta \mathrm{B}_s^n + f(-\Delta \mathrm{B}_s^n)]$$
$$- \int_0^r \int_{\mathbb{R}^d} \nu^{\mathrm{Y}^n}(ds, dx) [f(x) - \Delta \mathrm{B}_s^n - f(x - \Delta \mathrm{B}_s^n)].$$

Soit $\eta(\theta)$ le module d'uniforme continuité de f ; comme $f(x) = x$ si $| x | \leqslant 1/2$, on a

$$\mathrm{M}^n \leqslant \frac{1}{4} \wedge \theta \wedge \eta(\theta) \Rightarrow \int_0^t | d\tilde{\mathrm{B}}_s^{\mathrm{Y}'^n} | \leqslant 2\theta \nu^{\mathrm{Y}^n}([0, t] \times \{ x : | x | > 1/4 \}).$$

Comme θ est arbitrairement petit, on déduit de (2.30) et (2.31) que

$$(2.34) \qquad \int_0^t | d\tilde{\mathrm{B}}_s^{\mathrm{Y}'^n} | \xrightarrow{\mathrm{P}} 0.$$

Il est facile d'en déduire que (Y'^n) vérifie $[\rho]$. Comme $\mathrm{Z}'^n = \mathrm{Z}^n + \mathrm{B}^n$, et comme Z^n et B^n vérifient $[\beta]$, on en déduit aussi que Z'^n et $\tilde{\mathrm{B}}^{\mathrm{Y}'^n}$ vérifient $[\beta]$.

iv) Il reste à montrer que (Y'^n) vérifie $[\gamma']$. Fixons $j, k \leqslant d$, notons c^n le premier membre de $[\gamma]$, avec Y^n, et notons c'^n le premier membre de $[\gamma']$, avec Y'^n. Il suffit donc de montrer que $c^n - c'^n \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$. Mais d'après (2.32) et (2.20) on a

$$c^n - c'^n = \Sigma_{s \leqslant t} \left\{ \int \mathrm{N}_s^n(dx) [(f^j f^k)(x) - (f^j f^k)(x - \Delta \mathrm{B}_s^n)] - \Delta \mathrm{B}_s^{nj} \Delta \mathrm{B}_s^{nk} \right.$$
$$\left. - [1 - \mathrm{N}_s^n(\mathbb{R}^d)](f^j f^k)(-\Delta \mathrm{B}^n) \right\}.$$

Considérons la fonction

$$(2.35)\quad h^{jk}(x, y) = (f^j f^k)(x) - (f^j f^k)(x - y) + y^j y^k - y^j f^k(x) - y^k f^j(x).$$

On a alors

$$(2.36)\quad c^n - c'^n = \Sigma_{s \leqslant t} \Big\{ \int \mathrm{N}^n_s(dx) h^{jk}(x, \Delta \mathrm{B}^n_s) + \Delta \mathrm{B}^{nj}_s \Delta \mathrm{B}^{nk}_s - (f^j f^k)(- \Delta \mathrm{B}^n_s) + \mathrm{N}^n_s(\mathbb{R}^d)[(f^j f^k)(- \Delta \mathrm{B}^n_s) - \Delta \mathrm{B}^{nj}_s \Delta \mathrm{B}^{nk}_s] \Big\}.$$

On a $h^{jk}(x, y) = 0$ et $f(x) = x$ si $|x| \leqslant 1/4$ et $|y| \leqslant 1/4$, et il existe $\eta(\theta) > 0$ tel que si $|y| \leqslant \eta(\theta)$ on ait $|h^{jk}(x, y)| \leqslant \theta$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Par suite

$$\mathrm{M}^n \leqslant \frac{1}{4} \wedge \eta(\theta) \Rightarrow |c^n - c'^n| \leqslant \theta \nu^{\mathrm{Y}^n}([0, t] \times \{x : |x| > 1/4\}).$$

Comme θ est arbitrairement petit, (2.30) et (2.31) entraînent que

$$|c^n - c'^n| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0,$$

d'où le résultat. ■

Démonstration de (2.21, b). — On suppose D dense dans $\mathbb{R}_+$. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer qu'il y a convergence dans [δ] pour tout ω en dehors d'un ensemble négligeable, toute $g \in \mathbf{C}$ et tout t appartenant à une partie dénombrable $\mathrm{D}' \subset \mathrm{D}$ qui est encore dense dans $\mathbb{R}_+$. En particulier il existe une suite $\varepsilon_n \downarrow 0$ telle que

$$(2.37)\quad \nu^{\mathrm{Y}^n}([0, t] \times \{x : |x| > \varepsilon_p\}) \to \nu^{\mathrm{X}}([0, t] \times \{x : |x| > \varepsilon_p\})$$

pour tous $p \in \mathbb{N}$, $t \in \mathrm{D}'$ (on choisit les ε_p de sorte que

$$\nu^{\mathrm{X}}([0, t] \times \{x : |x| = \varepsilon_p\}) = 0$$

pour tout $t \in \mathrm{D}'$). Mais $t \rightsquigarrow \nu^{\mathrm{X}}([0, t] \times \{x : |x| > \varepsilon_p\})$ est une fonction continue d'après (H4), donc dans (2.34) la convergence est une convergence uniforme sur tout compact (en t) d'après des résultats classiques (voir par exemple [*12*]) : on a donc [UP].

D'après (2.21, *a*) on a alors convergence fini-dimensionnelle de X^n vers X, le long de D. Il reste à montrer que la suite des lois des X^n est relativement compacte pour la topologie de Skorokhod. Reprenons les notations Y'^n, Z'^n de la preuve précédente : la condition [sup β] entraîne que Z'^n tend en loi vers le processus $\tilde{\mathrm{B}}^{\mathrm{X}}$, qui est continu. Par suite, il reste à montrer que la suite des lois des Y'^n est relativement compacte : pour cela on applique le théorème (7.4) de [*12*] : on a la condition *b*) de ce théorème car Y'^n vérifie [δ]; on en a aussi la condition *c*), avec (C1) et

$$\mathrm{F}^n_t = \Sigma_{j \leqslant d} \left[\mathrm{C}^{\mathrm{Y}'^n, jj}_t + \int_0^t |d\tilde{\mathrm{B}}^{\mathrm{Y}'^n}_s| \right] + \int_{\mathbb{R}^d} \nu^{\mathrm{Y}'^n}([0, t] \times dx) |x|^2 \wedge 1,$$

qui converge en loi vers le processus continu

$$\Sigma_{j \leqslant d} C_t^{X,jj} + \int \nu^X([0, t] \times dx) \,|\, x \,|^2 \wedge 1$$

d'après (2.34) et le fait que (Y'^n) vérifie $[\gamma']$ et $[\delta]$. ■

(2.38) REMARQUE. — Le lemme (2.26) admet la « réciproque » suivante :

$$[\gamma'], [\delta], \Sigma_{s \leqslant t} \,|\, \Delta A(Y^n, u)_s \,|^2 \xrightarrow{P} 0 \; \forall t \in D, \; \forall u \in \mathbb{R}^d \Rightarrow [UP], [\rho]$$

(voir [*14*]). Cela permet de voir que, si on veut appliquer directement le théorème (2.14), les conditions de la proposition (2.22) sont « optimales » dans un certain sens. Cela montre aussi que, par rapport à cette proposition, le théorème (2.21) est plus qu'une amélioration de détail. ■

§ 2.*d*) Exemple : convergence vers une martingale gaussienne continue (le théorème de la limite centrale).

Dans ce paragraphe, on suppose qu'on a (2.13) avec **G** triviale, et en outre que X est une martingale gaussienne continue : cela entraîne (H4), avec $\tilde{B}^X = 0$ et $\nu^X = 0$. Le résultat suivant est dû à Liptcer et Shiryaev [*18*] :

(2.39) THÉORÈME. — *a) Supposons que* X *soit une martingale gaussienne continue, que* **G** *soit triviale, et que chaque* X^n *soit une semi-martingale. Si on a*

$[\beta'']$ $\quad \forall t \in D, \quad \tilde{B}_t^{X^n} \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$;

$[\gamma''_\varepsilon]$ $\quad \forall t \in D, \forall j, k \leqslant d, \quad C_t^{X^n,jk} + \int \nu^{X^n}([0, t] \times dx) x^j x^k I_{\{|x| \leqslant \varepsilon\}}$

$$- \Sigma_{s \leqslant t} \int \nu^{X^n}(\{ s \} \times dx) x^j I_{\{|x| \leqslant \varepsilon\}} \int \nu^{X^n}(\{ s \} \times dx) x^k I_{\{|x| \leqslant \varepsilon\}} \xrightarrow{\mathcal{L}} C_t^{X,jk} ;$$

$[\delta'']$ $\quad \forall t \in D, \forall \eta > 0, \quad \nu^{X^n}([0, t] \times \{ x : |\, x \,| > \eta \}) \xrightarrow{\mathcal{L}} 0,$

pour un $\varepsilon > 0$. *Alors on a* $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}f(D)} X$:

b) Si on remplace $[\beta'']$ *par*

$[\sup \beta'']$ $\quad \forall t > 0, \quad \sup_{s \leqslant t} |\, \tilde{B}_s^{X^n} \,| \xrightarrow{\mathcal{L}} 0,$

et si D *est dense dans* $\mathbb{R}_+$, *alors la suite* (X^n) *converge en loi vers* X.

Ce résultat est un corollaire immédiat de (2.21), appliqué avec $Z^n = 0$ et $Y^n = X^n$: on a $[\beta''] = [\beta]$, $[\delta''] = [\delta]$, $[\sup \beta''] = [\sup \beta]$, et clairement $[\delta''] \Rightarrow [UP]$ et $[\delta''] \Rightarrow ([\gamma] \Leftrightarrow [\gamma''_\varepsilon])$.

Signalons aussi que Liptcer et Shiryaev ont prouvé que si $D = \mathbb{R}_+$ et si on a $[\sup \beta'']$, alors $[\delta''] + [\gamma''_\varepsilon] \Leftrightarrow (X^n)$ tend en loi vers X.

§ 2.*e*) Exemple : convergence de tableaux triangulaires.

On se place dans la situation du § 1-*c*, avec les mêmes notations : $X_{n,k}$, $\mathbf{F}_{n,k}$, $\mathbf{G}$. Quitte à poser $X_{n,k} = 0$ et $\mathbf{F}_{n,k} = \mathbf{F}_{n,m_n}$ si $k > m_n$, on peut supposer que $m_n = \infty$.

On va s'intéresser à un théorème limite fonctionnel. A cet effet on considère pour tous $n \in \mathbb{N}$, $t \geqslant 0$ un $(\mathbf{F}_{n,k})_{k \geqslant 0}$-temps d'arrêt $\sigma^n(t)$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}}$, tels que $t \rightsquigarrow \sigma^n(t)$ soit un processus croissant, continu à droite, nul en 0, et n'ayant que des sauts unité. On associe le processus suivant à la $n^{\text{ième}}$ ligne du tableau :

(2.40) $$X_t^n = \Sigma_{1 \leqslant k \leqslant \sigma^n(t)} X_{n,k}.$$

Un exemple fréquent est celui où $\sigma^n(t) = [nt]$ (partie entière de nt) et

$$X_t^n = \Sigma_{1 \leqslant k \leqslant [nt]} X_{n,k}.$$

(2.41) THÉORÈME. — *a) Supposons qu'on ait (H4) et que pour tous $n, k \in \mathbb{N}$ il existe une décomposition $X_{n,k} = A_{n,k} + Y_{n,k}$, où $A_{n,k}$ et $Y_{n,k}$ sont $\mathbf{F}_{n,k}$-mesurables, et qui vérifie*

$[\beta_1]$ $\forall t \in D$, $\Sigma_{1 \leqslant k \leqslant \sigma^n[t]}[A_{n,k} + E(f(Y_{n,k}) \mid \mathbf{F}_{n,k-1})] \xrightarrow{P} \tilde{B}_t^X$;

$[\gamma_1]$ $\forall t \in D$, $\forall j, m \leqslant d$

$$\Sigma_{1 \leqslant k \leqslant \sigma^n(t)}\{ E[(f^j f^m)(Y_{n,k}) \mid \mathbf{F}_{n,k-1}] - E(f^j(Y_{n,k}) \mid \mathbf{F}_{n,k-1})E(f^m(Y_{n,k}) \mid \mathbf{F}_{n,k-1})\} \xrightarrow{P} C_t^{X,jm} + \nu^X([0,t] \times (f^j f^m))$$

$[\delta_1]$ $\forall t \in D$, $\forall g \in \mathbf{C}$, $\Sigma_{1 \leqslant k \leqslant \sigma^n(t)} E(g(Y_{n,k}) \mid \mathbf{F}_{n,k-1}) \xrightarrow{P} \nu^X([0,t] \times g)$;

$[UP_1)$ $\forall t \in D$, $\forall \varepsilon > 0$, $\sup_{1 \leqslant k \leqslant \sigma^n(t)} P(\mid Y_{n,k} \mid > \varepsilon \mid \mathbf{F}_{n,k-1}) \xrightarrow{P} 0$.

Si X^n est donné par (2.40), on a alors $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}f(\mathbf{G},D)} X$.

b) Considérons la condition

$[\sup \beta_1]$ $\forall t > 0$, $\sup_{s \leqslant t} \mid \Sigma_{1 \leqslant k \leqslant \sigma^n(s)}[A_{n,k} + E(f(Y_{n,k}) \mid \mathbf{F}_{n,k-1})] - \tilde{B}_s^X \mid \xrightarrow{P} 0$.

Si D est dense dans $\mathbb{R}_+$, les conditions $[\sup \beta_1]$, $[\gamma_1]$, $[\delta_1]$ entraînent que X^n converge en loi vers X (pour la topologie de Skorokhod).

Démonstration. — A chaque $n \in \mathbb{N}$ on associe la filtration $\mathbf{F}_t^n = \mathbf{F}_{n,\sigma^n(t)}$. Soit $\tau^n(k) = \inf(t : \sigma^n(t) \geqslant k)$. Comme σ^n n'a que des sauts unité, on a $\sigma^n(\tau^n(k)) = k$ si $\tau^n(k) < \infty$. Comme σ^n est un processus F^n-adapté par définition de F^n, $\tau^n(k)$ est un F^n-temps d'arrêt, et

$$\mathbf{F}^n_{\tau^n(k)} = \mathbf{F}_{n,\sigma^n(\tau^n(k))} \subset \mathbf{F}_{n,k}.$$

Par ailleurs $\{ \tau^n(k) > t \} = \{ \sigma^n(t) \leqslant k - 1 \}$, donc $\tau^n(k)$ est $\mathbf{F}_{n,k-1}$-mesurable. Il existe une suite $(\mathrm{T}_n(k, m))_{m \geqslant 1}$ de variables $\mathbf{F}_{n,k-1}$-mesurables croissant vers $\tau^n(k)$ et telle que $\mathrm{T}^n(k, m) < \tau^n(k)$ pour tout $m \geqslant 1$; par suite si $\mathrm{S}^n(k, m) = \mathrm{T}^n(k, m) \vee \tau^n(k - 1) \wedge m$, on a $\mathrm{S}^n(k, m) < \tau^n(k)$, $\lim_{(m)} \uparrow \mathrm{S}^n(k, m) = \tau^n(k)$, et les $\mathrm{S}^n(m, k)$ sont des F^n-temps d'arrêt. On en déduit que $\tau^n(k)$ est un F^n-temps prévisible, et comme $\sigma^n(\mathrm{S}^n(k, m)) = k - 1$ si $\tau^n(k - 1) < \infty$, les traces des tribus $\mathbf{F}^n_{\mathrm{S}^n(k,m)}$ et $\mathbf{F}_{n,k-1}$ sur $\{ \tau^n(k - 1) < \infty \}$ coïncident; comme $\mathbf{F}^n_{\tau^n(k)-} = \vee_{(m)} \mathbf{F}^n_{\mathrm{S}^n(k,m)}$ on en déduit que :

$$(2.42) \qquad \mathbf{F}^n_{\tau^n(k)-} \cap \{ \tau^n(k - 1) < \infty \} = \mathbf{F}_{n,k-1} \cap \{ \tau^n(k - 1) < \infty \}.$$

On pose alors

$$\mathrm{Y}_t^n = \Sigma_{1 \leqslant k \leqslant \sigma^n(t)} \mathrm{Y}_{n,k}, \qquad \mathrm{Z}^n = \mathrm{X}^n - \mathrm{Y}^n.$$

Comme σ^n n'a que des sauts unité, on a $\Delta \mathrm{Y}^n_{\tau^n(k)} = \mathrm{Y}_{n,k}$ si $\tau^n(k) < \infty$, et

$$\mathrm{Y}_t^n = \Sigma_{k : \tau^n(k) \leqslant t} \Delta \mathrm{Y}^n_{\tau^n(k)}.$$

Comme chaque $\tau^n(k)$ est F^n-prévisible et qu'on a (2.42), il est facile de déduire de ce qui précède que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathrm{B}}_t^{\mathrm{Y}^n} &= \Sigma_{1 \leqslant k \leqslant \sigma^n(t)} \mathrm{E}(f(\mathrm{Y}_{n,k}) \mid \mathbf{F}_{n,k-1}) \\ \mathrm{C}^{\mathrm{Y}^n} &= 0 \\ \nu^{\mathrm{Y}^n}([0, t] \times g) &= \Sigma_{1 \leqslant k \leqslant \sigma^n(t)} \mathrm{E}(g(\mathrm{Y}_{n,k}) \mid \mathbf{F}_{n,k-1}). \end{aligned}$$

Le résultat découle alors immédiatement du théorème (2.21). ■

(2.43) REMARQUE. — Ce théorème contient, par exemple, les résultats de Durrett et Resnick [*5*], ou ceux de Rootzen [*21*] et de Ganssler et Häusler [*6*]. En fait, par rapport aux résultats classiques, il y a amélioration sur deux points :

1) les $\mathrm{A}_{n,k}$ ne sont pas supposés prévisibles (i. e. $\mathbf{F}_{n,k-1}$-mesurables);
2) et surtout, $[\gamma_1]$ est remplacé habituellement par les deux conditions :

$$\begin{aligned} &\Sigma_{1 \leqslant k \leqslant \sigma^n(t)} \mathrm{E}[(f^j f^m)(\mathrm{Y}_{n,k}) \mid \mathbf{F}_{n,k-1}] \xrightarrow{\mathrm{P}} \mathrm{C}_t^{\mathrm{X},jm} + \nu^{\mathrm{X}}([0, t] \times (f^j f^m)) \\ &\Sigma_{1 \leqslant k \leqslant \sigma^n(t)} \mid \mathrm{E}(f(\mathrm{Y}_{n,k}) \mid \mathbf{F}_{n,k-1}) \mid^2 \xrightarrow{\mathrm{P}} 0, \end{aligned}$$

conditions qui sont strictement plus fortes que $[\gamma_1]$. ■

La partie *a*) de ce théorème admet une version « convergence de v. a. », qui généralise par exemple les résultats de Klopotowski et Slominski [*17*] : on revient à la situation du § 1.*c*, avec les temps d'arrêt σ_n et les variables χ_n. Soit χ une v. a. dont la loi **G**-conditionnelle est indéfiniment divisible, admettant la transformée de Fourier conditionnelle :

$$\text{(2.44)} \qquad E(e^{iu\cdot\chi} \mid \mathbf{G}) = e^{\alpha(u)},$$

où $\alpha(u, \omega)$ est donné par (2.18) avec $b^n = b(\omega)$, $c^n = c(\omega)$, $F^n(dx) = F(\omega, dx)$.

(2.45) THÉORÈME. — *Soit χ vérifiant (2.44). Supposons que pour tous $n, k \in \mathbb{N}$ il existe des décompositions $X_{n,k} = A_{n,k} + Y_{n,k}$ avec $A_{n,k}$ et $Y_{n,k}$ mesurables par rapport à $\mathbf{F}_{n,k}$. Supposons enfin que*

$[\beta_2]$ $\Sigma_{1\leqslant k\leqslant\sigma_n}[A_{n,k} + E(f(Y_{n,k}) \mid \mathbf{F}_{n,k-1})] \xrightarrow{P} b$

$[\gamma_2]$ $\Sigma_{1\leqslant k\leqslant\sigma_n}\{E[(f^jf^m)(Y_{nk}) \mid \mathbf{F}_{n,k-1}] - E(f^j(Y_{nk}) \mid \mathbf{F}_{n,k-1})E(f^m(Y_{nk}) \mid \mathbf{F}_{n,k-1})\}$
$$\xrightarrow{P} c^{jm} + \int F(dx)f^j(x)f^m(x)$$

$[\delta_2]$ $\forall g \in \mathbf{C}$, $\quad \Sigma_{1\leqslant k\leqslant\sigma_n}E(g(Y_{nk}) \mid \mathbf{F}_{n,k-1}) \xrightarrow{P} \int F(dx)g(x)$

$[UP_2]$ $\forall\varepsilon > 0$, $\sup_{1\leqslant k\leqslant\sigma_n} P(|Y_{nk}| > \varepsilon \mid \mathbf{F}_{nk-1}) \xrightarrow{P} 0.$

On a alors $E(g(\chi_n) \mid \mathbf{G}) \xrightarrow{P} E(g(\chi) \mid \mathbf{G})$ *pour toute g continue bornée sur* $\mathbb{R}^d$.

Démonstration. — On applique (2.41) avec $D = \{ 1 \}$, en choisissant d'une part un PAI **G**-conditionnel X tel que X_1 et χ aient même loi **G**-conditionnelle (c'est possible car la loi **G**-conditionnelle de χ est indéfiniment divisible), en choisissant d'autre part les $\sigma^n(t)$ de sorte que $\sigma^n(1) = \sigma_n$ (c'est possible par exemple ainsi : $\sigma^n(t) = \sigma_n \wedge g(t)$, où $g(t) =$ partie entière de $\frac{t}{1-t}$ si $t < 1$, $g(t) = \infty$ si $t \geqslant 1$). ■

Noter que la remarque (2.43) s'applique aussi à ce théorème.

3. CONVERGENCE VERS UN PAI-SEMI-MARTINGALE QUELCONQUE

§ 3.*a*) Énoncé du théorème.

Revenons à la condition (2.15), avec $G(u)$ donné par (2.17). Lorsque $A(X, u)$ est continu (i. e., sous l'hypothèse (H4)), le principe de la preuve de (2.22) consiste à montrer que $iu.Z^n + A(Y^n, u) \to A(X, u)$ (lemme (2.24)), et que la partie « produit infini » de $\mathscr{E}[A(Y^n, u)]$ tend vers 1 (lemmes (2.25) et (2.26)).

Lorsque $A(X, u)$ n'est plus continu, la transposition de cette méthode consiste encore à montrer que $iu.Z^n + A(Y^n, u) \to A(X, u)$, puis ensuite à montrer que la partie « produit infini » de $\mathscr{E}[A(Y^n, u)]$ converge vers la partie « produit infini » de $\mathscr{E}[A(X, u)]$.

Cette question est nettement plus difficile à traiter que dans le cas où $A(X, u)$ est continu; elle est encore plus difficile lorsque $\Delta A(X, u)$ peut égaler -1, car alors $G(u)$ peut s'annuler et on ne peut plus appliquer directement (2.14).

Nous donnons ci-dessous un résultat raisonnablement général : on remarquera qu'on y fait l'hypothèse, essentielle, que D est dense dans $\mathbb{R}_+$; on a donc un résultat de convergence fonctionnelle, et nous ne connaissons pas de résultat utilisant les mêmes conditions, mais avec D non dense (et s'appliquant donc, par exemple, à la convergence des v. a.).

(3.1) THÉORÈME. — *On suppose qu'on a (2.13), que* X *est un PAI* **G**-*conditionnel et une F-semi-martingale, et que* D *est dense dans* $\mathbb{R}_+$. *Pour chaque* $n \in \mathbb{N}$ *on se donne une décomposition* $X^n = Y^n + Z^n$, *où* Y^n *est une* F^n-*semi-martingale, et on considère les conditions :*

[β] $\quad \forall t \in D, \quad Z_t^n + \tilde{B}_t^{Y^n} \xrightarrow{P} \tilde{B}_t^X$;

[sup β] $\quad \forall t > 0, \quad \sup_{s \leqslant t} |Z_s^n + \tilde{B}_s^{Y^n} - \tilde{B}_s^X| \xrightarrow{P} 0$;

[γ] $\quad \forall t \in D, \forall j, k \leqslant d,$

$$C_t^{Y^n,jk} + \nu^{Y^n}([0, t] \times (f^j f^k)) - \Sigma_{s \leqslant t} \nu^{Y^n}(\{s\} \times f^j)\nu^{Y^n}(\{s\} \times f^k)$$
$$\xrightarrow{P} C_t^{X,jk} + \nu^X([0, t] \times (f^j f^k)) - \Sigma_{s \leqslant t} \nu^X(\{s\} \times f^j)\nu^X(\{s\} \times f^k) ;$$

[δ] $\quad \forall t \in D, \forall g \in \mathbf{C}, \quad \nu^{Y^n}([0, t] \times g) \xrightarrow{P} \nu^X([0, t[\times g)$

[$\delta 1$] $\quad \forall t \in D, \forall g \in \mathbf{C}, \quad \Sigma_{s \leqslant t} \nu^{Y^n}(\{s\} \times g)^2 \xrightarrow{P} \Sigma_{s \leqslant t} \nu^X(\{s\} \times g)^2$.

a) Sous [β], [γ], [δ], [$\delta 1$], *on a* $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}_f(G,D)} X$.

b) Sous [sup β], [γ], [δ], [$\delta 1$], *les* X^n *convergent en loi vers* X (pour la topologie de Skorokhod sur $\mathbb{D}([0, \infty[; \mathbb{R}^d))$.

Ce théorème sera démontré au § 3.*c*.

(3.2) REMARQUES. — Les conditions [β], [sup β], [δ] sont identiques dans ce théorème et dans (2.21); la condition [γ] également : en effet, si X vérifie (H4), on a $\nu^X(\{s\} \times .) = 0$ pour tout s.

2) Lorsque D est dense dans $\mathbb{R}_+$, le théorème (2.21) est un cas particulier de (3.1). En effet le premier (resp. second) membre de [$\delta 1$] égale la

somme des carrés des sauts du processus figurant au premier (resp. second) membre de [δ]; comme sous (H4) le second membre de [δ] est continu en t, il est classique (voir par exemple [*11*]) que [δ] $\Rightarrow$ [δ1].

3) D'après [*11*] encore, le couple [δ] + [δ1] est équivalent à la condition suivante : $\forall g \in \mathbf{C}$ les processus $(\nu^{Y^n}([0, t] \times g))_{t \geq 0}$ convergent en probabilité vers le processus $(\nu^X([0, t] \times g))_{t \geq 0}$, ces processus étant considérés comme des v. a. à valeurs dans l'espace $\mathbb{D}([0, \infty[; \mathbb{R})$ muni de la topologie de Skorokhod.

4) Nous comparerons dans le § 3.*d* ce théorème avec les résultats de même type (mais beaucoup moins bons) obtenus en [*11*]. ■

On va maintenant, à titre d'exemple, écrire ce théorème dans le cadre des processus ponctuels. On dit que X (resp. X^n) est un processus ponctuel si c'est un processus croissant à valeurs dans $\mathbb{N}$ et n'ayant que des sauts égaux à 1. Lorsqu'en outre X est un PAI **G**-conditionnel, c'est un processus de Poisson doublement stochastique avec (éventuellement) des temps de sauts fixes ou **G**-mesurables. Le résultat suivant est dû à Kabanov, Liptcer et Shiryaev [*15*], et partiellement à T. Brown [*3*].

(3.3) COROLLAIRE. — *On suppose que* X^n *et* X *sont des processus ponctuels de compensateurs prévisibles* A^n *et* A, *par rapport à* F^n *et* F, *respectivement. On suppose en outre que* X *est un PAI* **G**-*conditionnel et que* D *est dense dans* $\mathbb{R}_+$. *Si*

$$\forall t \in D, \quad A_t^n \xrightarrow{P} A_t \qquad \text{et} \qquad \Sigma_{s \leq t}(\Delta A_s^n)^2 \xrightarrow{P} \Sigma_{s \leq t}(\Delta A_s)^2,$$

on a $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}f(G,D)} X$ *et* X^n *tend en loi vers* X.

Démonstration. — Il est facile de vérifier que $\tilde{B}^{X^n} = \tilde{B}^X = 0$, $C^{X^n} = C^X = 0$, $\nu^{X^n}([0, t] \times g) = g(1)A_t^n$ et $\nu^X([0, t] \times g) = g(1)A_t$. En prenant $Z^n = 0$ et $Y^n = X^n$, on voit tout de suite que les hypothèses entraînent la validité des conditions [sup β], [γ], [δ], [δ1]. ■

§ 3.*b*) Une généralisation du théorème (2.14).

Dans (3.1) on ne fait pas l'hypothèse que $E(\exp iu.X_t \mid \mathbf{G})$ ne s'annule pas. Dans ce paragraphe nous allons donc donner une version du théorème (2.14) dans laquelle on s'affranchit de cette hypothèse : on la remplace par une autre qui paraît très compliquée et artificielle, mais qui en définitive se révélera assez aisément vérifiable sous les hypothèses de (3.1).

HYPOTHÈSE (H5). — X est un PAI **G**-conditionnel. Pour chaque $u \in \mathbb{R}^d$ il existe une suite $(R(u, m))_{m \geq 1}$ strictement croissante et tendant vers l'infini de temps **G**-mesurables, telle que si

$$X'(u)_t = X_t - \Sigma_{(m)} \Delta X_{R(u,m)} I_{\{R(u,m) \leq t\}}$$

et si $G'(u)_t = E(\exp iu . X'(u)_t \mid \mathbf{G})$, alors $G'(u)_t$ ne s'annule pas, p. s. ∎

Nous ne savons pas si cette hypothèse est automatiquement satisfaite dès que X est un PAI **G**-conditionnel. Mais nous verrons qu'elle l'est dès que X est un PAI **G**-conditionnel *et* une F-semi-martingale.

(3.4) THÉORÈME. — *Supposons qu'on ait (H5), que* D *soit dense dans* $\mathbb{R}_+$ *et que chaque* X^n *soit une* F^n*-semi-martingale. Supposons qu'il existe des suites strictement croissantes* $(R^n(u, m))_{m \geq 1}$ *de* F^n*-temps prévisibles telles que si*

$$X'^n(u)_t = X^n_t - \Sigma_{(m)} \Delta X^n_{R^n(u,m)} I_{\{R^n(u,m) \leq t\}}$$

on ait :

i) $R^n(u, m) \xrightarrow{P} R(u, m)$;

ii) si $t \in D$, $\lim_{(n)} P\{ R(u, m) = t < R^n(u, m) \} = 0$;

iii) $E[\exp iu . \Delta X^n_{R^n(u,m)} \mid \mathbf{F}^n_{R^n(u,m)-}] \xrightarrow{P} E[\exp iu . \Delta X_{R(u,m)} \mid \mathbf{G}]$ *sur l'ensemble* $\{ R(u, m) < \infty \}$.

iv) pour tout $t \in D$ *on a*

(3.5) $$\mathscr{E}[A(X'^n(u), u)]_t \xrightarrow{P} G'(u)_t.$$

On a alors $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}f(\mathbf{G},D)} X$.

Démonstration. — *a*) Exactement comme dans la preuve de (1.12), on va démontrer (1.8) par récurrence sur q, en supposant qu'on a (1.13). En reprenant les notations du début de la preuve de (1.12), on a des

$$\zeta_n \in \mathbf{F}^n_{t_{q-1}}, \ \zeta \in \mathbf{F}_{t_{q-1}}$$

bornés par 1 et vérifiant

(3.6) $$E(\zeta_n \mid \mathbf{G}) \xrightarrow{P} E(\zeta \mid \mathbf{G})$$

et, si $\chi_n = X^n_{t_q} - X^n_{t_{q-1}}$ et $\chi = X_{t_q} - X_{t_{q-1}}$, il faut montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ on a

(3.7) $$E(\zeta_n e^{iu.\chi_n} \mid \mathbf{G}) \xrightarrow{P} E(\zeta e^{iu.\chi} \mid \mathbf{G}).$$

Si (Ω_p) est une partition **G**-mesurable de Ω, il suffit de montrer (3.7) sur chaque Ω_p séparément, ce qui revient à supposer que $\Omega = \Omega_p$ successivement pour chaque p. Par suite on peut supposer, et on supposera, qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ tels qu'on ait identiquement

(3.8)
$$| G'(u)_{t_q} | > \varepsilon, \quad R(u, \mu) \leq t_{q-1} < R(u, \mu + 1), \quad R(u, \nu) \leq t_q < R(u, \nu + 1).$$

Soit $\rho = \nu - \mu$: on a $\rho \geqslant 0$. On pose

$$\begin{aligned}
&\sigma_0 = \sigma_0(n) = t_{q-1}, && \sigma_{\rho+1} = \sigma_{\rho+1}(n) = t_q \\
&\sigma_j = \mathrm{R}(u, \mu+j), && \sigma_j(n) = \mathrm{R}^n(u, \mu+j) \wedge t_q \vee t_{q-1} \\
&\alpha_j = \mathrm{E}(\exp iu.\Delta \mathrm{X}_{\sigma_j} \mid \mathbf{G}), && \alpha_j^n = \mathrm{E}(\exp iu.\Delta \mathrm{X}^n_{\sigma_j(n)} \mid \mathbf{F}^n_{\sigma_j(n)-})
\end{aligned} \Bigg\} \text{ si } 1 \leqslant j \leqslant \rho$$

$$\alpha_{\rho+1} = \alpha^n_{\rho+1} = 1.$$

Quitte à diminuer D on peut supposer que D est dénombrable, dense dans $\mathbb{R}_+$, et contient t_{q-1} et t_q. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que dans les hypothèses *i)*-*iv)* il y a convergence simple en dehors d'un ensemble négligeable N; l'hypothèse *ii)* se traduit alors ainsi : si $\mathrm{R}(u, m) \in \mathrm{D}$, on a $\mathrm{R}^n(u, m) \leqslant \mathrm{R}(u, m)$ pour tout n assez grand. En particulier si $1 \leqslant j \leqslant \rho$ on a $\sigma_j(n) = \mathrm{R}^n(u, \mu + j)$ pour tout n assez grand. De plus comme $\mathrm{R}^n(u, m)$ est F^n-prévisible, $\mathrm{A}(\mathrm{X}'^n(u), u)$ est continu en $\mathrm{R}^n(u, m)$, tandis que $\mathrm{G}'(u)$ est continu en $\mathrm{R}(u, m)$. En utilisant la densité de D dans $\mathbb{R}_+$ on déduit alors de *i)*-*iv)* qu'en dehors de N,

(3.9) $\qquad 1 \leqslant i \leqslant \rho + 1 \Rightarrow \alpha_i^n \to \alpha_i$

(3.10) $\qquad 0 \leqslant i \leqslant \rho + 1 \Rightarrow \mathscr{E}[\mathrm{A}(\mathrm{X}'^n(u), u)]_{\sigma_i(n)} \to \mathrm{G}'(u)_{\sigma_i}$.

b) Pour simplifier on écrit

$$\mathrm{G}_t^n = \mathscr{E}[\mathrm{A}(\mathrm{X}'^n(u), u)]_t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{M}_t^n = e^{iu.\mathrm{X}'^n(u)_t}/\mathrm{G}_t^n$$

$\left(\text{avec la convention } \frac{a}{0} = 0\right)$. Soit

$$\mathrm{T}^n = \inf(t : \mathrm{G}_t^n = 0) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S}^n = \inf(t : |\, \mathrm{G}_t^n \,| \leqslant \varepsilon).$$

D'après le lemme (2.9), M^n est une F^n-martingale locale sur $[\![0, \mathrm{T}^n[\![$, et on montre comme dans la preuve de (1.12) que $|\, \mathrm{G}^n \,|$ et $|\, \mathrm{G}'(u) \,|$ sont décroissants : d'après (3.5) et (3.8) on en déduit alors que

(3.11) $$\mathrm{P}(\mathrm{S}^n \leqslant t_q) \to 0.$$

Posons aussi

$$\tilde{\mathrm{G}}_t^n = \begin{cases} \mathrm{G}_t^n & \text{si } t < \mathrm{S}^n \\ \mathrm{G}^n_{(\mathrm{S}^n)-} & \text{si } t \geqslant \mathrm{S}^n \end{cases} \qquad \tilde{\mathrm{M}}_t^n = \begin{cases} \mathrm{M}_t^n & \text{si } t < \mathrm{S}^n \\ \mathrm{M}^n_{(\mathrm{S}^n)-} & \text{si } t \geqslant \mathrm{S}^n. \end{cases}$$

On a $|\, \tilde{\mathrm{G}}^n \tilde{\mathrm{M}}^n \,| = 1$ et $\varepsilon \leqslant |\, \tilde{\mathrm{G}}^n \,| \leqslant 1$ par construction, donc $1 \leqslant |\, \tilde{\mathrm{M}}^n \,| \leqslant 1/\varepsilon$; comme S^n est prévisible et $\mathrm{S}^n \leqslant \mathrm{T}^n$, on en déduit que $\tilde{\mathrm{M}}^n$ est une F^n-martingale bornée. Posons enfin

$$\begin{aligned}
&\gamma_i = \mathrm{G}'(u)_{\sigma_i}/\mathrm{G}'(u)_{\sigma_{i-1}} && \text{si } 1 \leqslant i \leqslant \rho\,; && \gamma_{\rho+1} = \mathrm{G}'(u)_{t_q}/\mathrm{G}'(u)_{\sigma_\rho}\,; \\
&\gamma_i^n = \tilde{\mathrm{G}}^n_{\sigma_i(n)-}/\tilde{\mathrm{G}}^n_{\sigma_{i-1}(n)} && \text{si } 1 \leqslant i \leqslant \rho\,; && \gamma^n_{\rho+1} = \tilde{\mathrm{G}}^n_{t_q}/\tilde{\mathrm{G}}^n_{\sigma_\rho(n)}
\end{aligned}$$

$$\beta_i^n = \begin{cases} \tilde{M}^n_{\sigma_i(n)-}/M^n_{\sigma_{i-1}(n)} & \text{si} \quad \sigma_{i-1}(n) < \sigma_i(n) \\ 1 & \text{si} \quad \sigma_{i-1}(n) = \sigma_i(n) \end{cases} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant \rho\,;$$

$$\beta^n_{\rho+1} = \tilde{M}^n_{t_q}/\tilde{M}^n_{\sigma_\rho(n)}.$$

D'après ce qui précède, ces expressions sont bornées, et γ_i^n et β_i^n sont $\mathbf{F}^n_{\sigma_i(n)-}$-mesurables pour $1 \leqslant i \leqslant \rho$. Comme $\tilde{M}^n$ est une martingale et $\sigma_i(n)$ est prévisible, on a

$$\text{(3.12)} \qquad E(\beta_j^n \mid \mathbf{F}^n_{\sigma_{j-1}(n)}) = 1 \quad \text{si} \quad 1 \leqslant j \leqslant \rho + 1.$$

Enfin si $1 \leqslant i \leqslant \rho$, $\tilde{G}^n$ est continu en $\sigma_j(n)$ dès que $\sigma_j(n) = R^n(u, \mu + j)$, donc pour tout n assez grand. On déduit alors de (3.10) et (3.11) que

$$\text{(3.13)} \qquad \gamma_j^n \xrightarrow{P} \gamma_j \quad \text{si} \quad 1 \leqslant j \leqslant \rho + 1.$$

c) On a

$$e^{iu.\chi_n} = \prod_{j=1}^{\rho+1} \gamma_j^n \beta_j^n \exp \sum_{j=1}^{\rho} iu.\Delta X^n_{\sigma_j(n)}$$

sur l'ensemble $\{ \sigma_{\rho-1}(n) < t_q < S^n \}$. D'après (3.11) et le fait que $\sigma_{\rho-1}(n) < t_q$ pour tout n assez grand, il suffit donc de montrer que

$$E\left[\zeta_n\left(\prod_{j=1}^{\rho+1}\gamma_j^n\beta_j^n\right)\exp\sum_{j=1}^{\rho} iu.\Delta X^n_{\sigma_j(n)} \mid \mathbf{G}\right] \xrightarrow{P} E\left(\zeta\prod_{j=1}^{\rho+1}\gamma_j\alpha_j \mid \mathbf{G}\right)$$

pour obtenir (3.7) : en effet le second membre ci-dessus et celui de (3.7) sont égaux car X est un PAI $\mathbf{G}$-conditionnel.

Soit

$$\zeta(n, m) = \zeta_n\left(\prod_{j=1}^{m}\gamma_j^n\beta_j^n\right)\exp\sum_{j=1}^{\rho\wedge m} iu.\Delta X^n_{\sigma_j(n)} \quad \text{et} \quad \zeta(m) = \prod_{j=1}^{m}\gamma_j\alpha_j.$$

Il faut donc montrer que

$$\text{(3.14)} \qquad E[\zeta(n, m) \mid \mathbf{G}] \xrightarrow{P} E[\zeta(m) \mid \mathbf{G}]$$

pour $m = \rho + 1$. On va montrer (3.14) par récurrence sur m : pour $m = 0$, c'est exactement l'hypothèse (3.6). Supposons qu'on ait (3.12) pour $m - 1$. D'après la définition de α_n^m et (3.12), on a

$$\begin{aligned} E[\zeta(n, m) \mid \mathbf{G}] - E[\zeta(m) \mid \mathbf{G}] = {} & E[\zeta(n, m-1)\gamma_m^n\beta_m^n(\alpha_m^n - \alpha_m) \mid \mathbf{G}] \\ & + \alpha_m E[\zeta(n, m-1)\beta_m^n(\gamma_m^n - \gamma_m) \mid \mathbf{G}] \\ & + \alpha_m\gamma_m E[\zeta(n, m-1) - \zeta(m-1) \mid \mathbf{G}]. \end{aligned}$$

D'après (3.9), (3.13) et l'hypothèse de récurrence (3.14) pour $m - 1$, respectivement, on voit que chacun des trois termes du second membre ci-dessus tend vers 0 en probabilité. On a donc (3.14) pour m : il s'ensuit que (3.14) est vrai pour tout m, donc en particulier pour $m = \rho + 1$, ce qui achève la preuve du théorème. ■

§ 3.*c*) **Démonstration du théorème (3.1).**

De même que (2.22) constituait une étape pour montrer (2.21), de même nous allons d'abord démontrer ici la

(3.15) PROPOSITION. — *On suppose qu'on a (2.13), que* X *est un PAI* **G**-*conditionnel et une F-semi-martingale, et que* D *est dense dans* $\mathbb{R}_+$. *On suppose que chaque* X^n *est une* F^n-*semi-martingale, et que* $Y^n = X^n$ *et* $Z^n = 0$ *vérifient les conditions* $[\beta]$, $[\gamma']$ (voir (2.22)), $[\delta]$, $[\delta 1]$, *et*

$$[\rho 1] \qquad \forall t \in D, \quad \Sigma_{s \leqslant t} \,|\, \Delta \tilde{B}_s^{X^n} \,|^2 \xrightarrow{P} \Sigma_{s \leqslant t} \,|\, \Delta \tilde{B}_s^{X} \,|^2 .$$

On a alors $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}f(G,D)} X$.

Dans toute la suite on suppose, sans le répéter dans les énoncés, que D est dense dans $\mathbb{R}_+$. De plus, on s'intéresse à la convergence fini-dimensionnelle le long de D, donc on peut toujours diminuer D de façon à le rendre dénombrable, en gardant les points qui nous intéressent : en d'autres termes on supposera que D *est dense et dénombrable.*

On va commencer par une série de lemmes; dans les deux premiers, F^n (pour $n \in \overline{\mathbb{N}}$) est une fonction à valeurs réelles ou complexes, nulle en 0, continue à droite et à variation finie. Considérons les conditions :

$$(3.16) \qquad \forall t \in D, \qquad F_t^n \to F_t^\infty .$$

$$(3.17) \qquad \forall t \in D, \quad \Sigma_{s \leqslant t} \,|\, \Delta F_s^n \,|^2 \to \Sigma_{s \leqslant t} \,|\, \Delta F_s^\infty \,|^2 .$$

(3.18) $\forall t > 0$ il existe une suite (t_n) telle que :

— $t_n \to t$

— $t \in D \Rightarrow t_n \leqslant t$

— $\Delta F_{t_n}^n \to \Delta F_t^\infty$.

(3.19) On a (3.18); si $0 < t_1 < \ldots < t_m < \ldots$ et si pour chaque $m \geqslant 1$ on considère une suite $(t_m(n))_{n \geqslant 1}$ vérifiant les conditions de (3.18) relativement à t_m, alors pour tous $r, t \in D$,

$$\limsup_{(n)} \sup_{r < s \leqslant t, s \neq t_m(n)} \,|\, \Delta F_s^n \,| \leqslant \sup_{r < s \leqslant t, s \neq t_m} \,|\, \Delta F_s^\infty \,| . \quad ■$$

(3.20) LEMME. — *Si les* F^n *sont croissantes et vérifient (3.16), alors* (3.17) $\Leftrightarrow$ (3.18) *et* (3.17) $\Rightarrow$ (3.19).

Ce lemme est montré dans [*11*], lemmes (4.8) et (4.12).

(3.21) LEMME. — *Si les* F^n *vérifient (3.16), (3.17) et (3.19), on a* $\mathscr{E}(F^n)_t \to \mathscr{E}(F^\infty)_t$ *pour tout* $t \in D$.

Démonstration. — Soit $t \in D$. Soit

$$\varepsilon \in]0, 1/2[, \quad t_0 = 0, \ldots, t_{m+1} = \inf(t > t_m : | \Delta F_t^\infty | > \varepsilon),$$

auxquels on associe les $t_m(n)$ par la condition (3.19). Soit aussi $t_m(\infty) = t_m$ et

$$\begin{aligned} U_t^m(\varepsilon) &= \Sigma_{s \leqslant t, s \neq t_m(n)} | \Delta F_s^n |^2 \\ V_t^n(\varepsilon) &= \Pi_{m : t_m(n) \leqslant t}[(1 + \Delta F_{t_m(n)}^n) \exp - \Delta F_{t_m(n)}^n] \\ W_t^n(\varepsilon) &= \Sigma_{s \leqslant t, s \neq t_m}[\Delta F_s^n - \mathrm{Log}\,(1 + \Delta F_s^n)]. \end{aligned}$$

Remarquons que, d'après (3.19), il existe n_0 tel que si $n \geqslant n_0$ on a

$$\sup_{s \leqslant t, s \neq t_m(n)} | \Delta F_s^n | \leqslant 2/3,$$

donc $W_t^n(\varepsilon)$ est bien défini. Il existe une constante c telle que

$$| x - \mathrm{Log}\,(1 + x) | \leqslant c \, | x |^2$$

si $| x | \leqslant 2/3$, donc $W_t^n(\varepsilon) \leqslant c U_t^n(\varepsilon)$ pour tout n assez grand. D'une part $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} U_t^\infty(\varepsilon) = 0$; d'autre part (3.17) et (3.19) entraînent que

$$\lim_{(n)} U_t^n(\varepsilon) = U_t^\infty(\varepsilon)$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Donc

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{(n)} | W_t^n(\varepsilon) | = 0.$$

D'après (3.19) on a aussi $\lim_{(n)} V_t^n(\varepsilon) = V_t^\infty(\varepsilon)$. Comme

$$\mathscr{E}(F^n)_t = V_t^n \exp\,[F_t^n + W_t^n(\varepsilon)],$$

on déduit le résultat de (3.16). ■

Dans la suite, on affectera parfois de l'exposant « ∞ » les quantités relatives à X, par exemple $X = X^\infty$, afin d'homogénéiser les notations. Soit h la fonction $h(x) = | x | \wedge 1$. On pose

$$\text{(3.22)} \qquad N_t^n(dx) = \nu^{X^n}(\{ t \} \times dx)$$

$$\text{(3.23)} \qquad V = \{ \varepsilon > 0 : P[N_t^\infty(h) \neq \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad t > 0] = 1 \}.$$

Comme pour chaque ω, l'ensemble des t tels que $N_t^\infty(\omega, \mathbb{R}^d) > 0$ est dénombrable, l'ensemble V est bien défini, et son complémentaire dans $\mathbb{R}_+$ est au plus dénombrable. On pose aussi

$$\text{(3.24)} \qquad T_0^n(\varepsilon) = 0, \qquad T_{m+1}^n(\varepsilon) = \inf\,(t > T_m^n(\varepsilon) : N_t^n(h) > \varepsilon).$$

(3.25) LEMME. — *Si la suite* (X^n) *vérifie* $[\delta]$ *et* $[\delta 1]$, *pour tous* $m \geqslant 1$, $\varepsilon \in V$ *on a*

i) $T_m^n(\varepsilon) \xrightarrow{P} T_m^\infty(\varepsilon)$;

ii) $\lim_{(n)} P(T_m^\infty(\varepsilon) \in D, T_m^\infty(\varepsilon) < T_m^n(\varepsilon)) = 0$;

iii) $N^n_{T_m^n(\varepsilon)}(g) \xrightarrow{P} N^\infty_{T_m^\infty(\varepsilon)}(g)$ *sur l'ensemble* $\{ T_m^\infty(\varepsilon) < \infty \}$ *pour toute fonction g continue bornée sur* $\mathbb{R}^d$, *nulle en* 0.

Démonstration. — *a)* On fixe $\varepsilon \in V$ et on fait une démonstration par récurrence sur m. Supposons le résultat vrai pour tout $m \leqslant q - 1$; soit $\tilde{X}_t^n = X_t^n - X^n_{t \wedge T^n_{q-1}(\varepsilon)}$; l'hypothèse de récurrence implique clairement que la suite $(\tilde{X}^n)$ vérifie encore [δ] et [δ1]. De plus si on note $\tilde{N}_t^n$ et $\tilde{T}_m^n(\varepsilon)$ les quantités associées à $\tilde{X}^n$ par (3.22) et (3.24), on voit que $\tilde{T}_1^n(\varepsilon) = T_q^n(\varepsilon)$ et $\tilde{N}^n_{\tilde{T}_1^n(\varepsilon)}(dx) = N^n_{T_q^n(\varepsilon)}(dx)$. Quitte à changer les notations, il suffit donc de montrer le résultat pour $m = 1$. Pour simplifier on pose

$$T^n = T_1^n(\varepsilon), \qquad T = T^\infty.$$

Quitte à prendre une sous-suite on peut (comme dans la preuve de (2.24)) supposer que pour tout ω en dehors d'un ensemble négligeable N, on a convergence dans [δ] et [δ1] pour tous $t \in D$, $g \in C$, et qu'on a $N_t^\infty(h) \neq \varepsilon$ pour tout $t > 0$. Il suffit donc, pour $\omega \notin N$ fixé, de prouver que

(3.26) $T^n \to T$; si $T \in D$, on a $T^n \leqslant T$ pour tout n assez grand;

(3.27) $N^n_{T^n}(g) \to N^\infty_T(g)$ si $T < \infty$, pour g continue bornée nulle en 0.

b) Il existe $\eta > 0$ tel que $T + \eta < T_2^\infty(\varepsilon)$ et $T + \eta \in D$, si $T < \infty$. On a

$$\varepsilon' := \sup_{s \leqslant T+\eta, s \neq T} N_s^\infty(h) < \varepsilon.$$

Soit $F^n(g)_t = \nu^{X^n}([0, t] \times g)$. Remarquer que $\Delta F^n(g)_t = N_t^n(g)$. Fixons $g \in C$ avec $0 \leqslant g \leqslant 1$, donc $gh \in C$ également. D'après [δ] et [δ1], la suite de fonctions croissantes $\{ F^n(gh) \}_{n \in \overline{\mathbb{N}}}$ vérifie (3.16) et (3.17), donc aussi (3.19) d'après le lemme (3.20). On en déduit d'abord l'existence d'une suite $(S^n(g))$ telle que $S^n(g) \to T$, $S^n(g) \leqslant T$ si $T \in D$, et $N^n_{S^n(g)}(gh) \to N^\infty_T(gh)$ si $T < \infty$. On en déduit aussi :

$$\lim\sup_{(n)} \sup_{s \leqslant T+\eta, s \neq S^n(g)} N_s^n(gh) \leqslant \varepsilon' \tag{3.28}$$

$$\lim_{\rho \downarrow 0} \lim\sup_{(n)} \sup_{T-\rho \leqslant s \leqslant T+\rho, s \neq S^n(g)} N_s^n(gh) = 0. \tag{3.29}$$

Si $g \in C$ avec $0 \leqslant g \leqslant 1$, et $g(x) = 1$ pour $|x| \geqslant \varepsilon - \varepsilon'$, on a

$$N_s^n(h) - N_s^n(gh) \leqslant \varepsilon - \varepsilon'$$

pour tout $n \in \overline{\mathbb{N}}$ et tout $s > 0$. Donc $N^n_{S^n(g)}(gh) \to N^\infty_T(gh) > \varepsilon'$ si $T < \infty$. Si on compare à (3.28) et à la définition de $T^n = T_1^n(\varepsilon)$ on en déduit que pour tout n assez grand on a $T^n = S^n(g)$ si $T < \infty$, et $T^n = \infty$ si $T = \infty$: cela démontre en particulier (3.26).

Soit $g \in \mathbf{C}$ avec $0 \leqslant g \leqslant 1$ et supposons que $T < \infty$. Si $N_T^\infty(gh) = 0$ on déduit aisément de (3.29) et de ce que $N^n_{S^n(g)}(gh) \to 0$, que $N^n_{T^n}(gh) \to 0$. Si $N_T^\infty(gh) > 0$, comme $N^n_{S^n(g)}(gh) \to N_T^\infty(gh)$, on déduit encore de (3.29) que nécessairement $T^n = S^n(g)$ pour tout n assez grand : donc

$$N^n_{T^n}(gh) \to T_T^\infty(gh).$$

Le même résultat reste évidemment vrai pour toute $g \in \mathbf{C}$.

c) Il reste à montrer (3.27) pour g continue bornée sur $\mathbb{R}^d$, nulle en 0. Soit g une telle fonction. Pour $q \in \mathbb{N}$, soit $g_q \in \mathbf{C}$ avec $0 \leqslant g_q \leqslant 1$, $g_q(x) = 1$ si $1/q \leqslant |x| \leqslant q$, $g_q(x) = 0$ si $|x| \geqslant 2q$. La fonction $(gg_q)/h$ est dans $\mathbf{C}$, donc d'après ce qu'on a vu dans la partie *b*) ci-dessus, si $T < \infty$ on a

$$N^n_{T^n}(gg_q) \to N_T^\infty(gg_q).$$

Soit par ailleurs

$$\rho(q) = \sup_{|x| \leqslant 1/q} |g(x)| \qquad \text{et} \qquad \rho(\infty) = \sup |g(x)|.$$

Si $1/q \leqslant |x| \leqslant q$, on a $g(x)g_q(x) = g(x)$; si $|x| \leqslant 1/q$ on a $|g(x)g_q(x)| \leqslant \rho(q)$ et si $|x| \geqslant q$ on a $|g(x)g_q(x)| \leqslant \rho(\infty)$. Donc

$$\begin{aligned} |N^n_{T^n}(gg_q) - N^n_{T^n}(g)| &\leqslant 2\rho(q) + 2\rho(\infty)N^n_{T^n}(\{x : |x| \geqslant q\}) \\ &\leqslant 2\rho(q) + 2\rho(\infty)\nu^{X^n}([0, T + \eta] \times \{x : |x| \geqslant q\}) \end{aligned}$$

dès que $T^n \leqslant T + \eta$. On a aussi $\rho(\infty) < \infty$ et $\lim_q \rho(q) = 0$, donc d'après (3.26) et [δ] le membre de droite ci-dessus tend vers 0 quand $q \uparrow \infty$, uniformément en n. On en déduit donc (3.27). ∎

(3.30) LEMME. — *Si la suite* (X^n) *vérifie* [γ'], [δ], [$\delta 1$] *et* [$\rho 1$], *on a pour tout* $t \in D$:

$$\Sigma_{s \leqslant t} |\Delta A(X^n, u)_s|^2 \xrightarrow{P} \Sigma_{s \leqslant t} |\Delta A(X, u)_s|^2.$$

Démonstration. — Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que les convergences dans [γ'], [δ], [$\delta 1$], [$\rho 1$], ont lieu pour tous $t \in D$, $g \in \mathbf{C}$ en dehors d'un ensemble négligeable N. Posons

$$H_s^n = \int N_s^n(dx)(e^{iu.x} - 1 - iu.f(x))$$

Il existe une constante k_u telle que $|e^{iu.x} - 1 - iu.f(x)| \leqslant k_u(|x|^2 \wedge 1)$. Comme $f(x) = x$ si $|x| \leqslant 1/2$, il vient d'après [γ'] et [δ] :

$$\begin{aligned} (3.31) \quad & \sup_{(n)} \Sigma_{s \leqslant t} |H_s^n| \\ &\leqslant k_u\{\nu^{X^n}([0, t] \times |f|^2) + \nu^{X^n}([0, t] \times \{x : |x| > 1/2\})\} < \infty. \end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon \in]0, \infty]$ on pose

$$\alpha^n(\varepsilon)_t = \Sigma_{s \leqslant t, s \neq T^n_m(\varepsilon)} | \Delta A(X^n, u)_s |^2$$

$$\beta^n(\varepsilon)_t = \Sigma_{s \leqslant t, s \neq T^n_m(\varepsilon)} | \Delta \tilde{B}^{X^n}_s |^2,$$

avec la convention $T^n_m(\infty) = \infty$ pour $m \geqslant 1$. [ρ1] s'écrit alors

$$(3.32) \qquad t \in D \Rightarrow \beta^n(\infty)_t \xrightarrow{P} \beta^\infty(\infty)_t,$$

et la formule qu'on veut montrer est la suivante :

$$(3.33) \qquad t \in D \Rightarrow \alpha^n(\infty)_t \xrightarrow{P} \alpha^\infty(\infty)_t.$$

Étant donné (2.20) et le fait que f est continue bornée sur $\mathbb{R}^d$ et nulle en 0, on déduit de (3.25) que

$$(3.34) \qquad t \in D,\ \varepsilon \in V \Rightarrow \beta^n(\infty)_t - \beta^n(\varepsilon)_t \xrightarrow{P} \beta^\infty(\infty)_t - \beta^\infty(\varepsilon)_t.$$

Quitte à prendre encore une sous-suite, et à choisir une suite $\varepsilon_p \in V$ avec $\lim_{(p)} \varepsilon_p = 0$, on peut supposer que dans (3.34) on a convergence pour tout $t \in D$, tout $\varepsilon = \varepsilon_p$, et tout ω n'appartenant pas à un ensemble négligeable. Par ailleurs $\beta^n(\varepsilon) \leqslant \beta^n(\infty)$, et comme

$$\cup_{\varepsilon > 0, m \geqslant 1} [\![T^n_m(\varepsilon)]\!] = \{(\omega, t) : N^n_t(\omega, \mathbb{R}^d) > 0\}$$

on a $\lim_{(p)} \beta^\infty(\varepsilon_p)_t = 0$. De (3.32) et (3.34) on déduit alors que si $t \in D$, on a presque sûrement

$$(3.35) \qquad \sup_{n,\varepsilon} \beta^n(\varepsilon)_t < \infty, \qquad \lim_{(p)} \lim_{(n)} \beta^n(\varepsilon_p)_t = 0.$$

D'après (2.20) et (2.27), on a $\Delta A(X^n, u) = \Delta \tilde{B}^{X^n} + H^n$, donc

$$\alpha^n(\varepsilon)_t \leqslant 2\beta^n(\varepsilon)_t + 2[\Sigma_{s \leqslant t} | H^n_s |]^2,$$

et (3.31) et (3.35) entraînent que

$$(3.36) \qquad \sup_{n,\varepsilon} \alpha^n(\varepsilon)_t < \infty.$$

Il existe une constante k'_u telle que $| e^{iu.x} - 1 | \leqslant k'_u(| x | \wedge 1)$. Donc si $s \neq T^n_m(\varepsilon)$ on a $| \Delta A(X^n, u)_s | \leqslant \varepsilon k'_u$ d'après (2.27). Donc

$$\Delta\alpha^n(\varepsilon)_s \leqslant k'_u | H^n_s | + [\Delta\alpha^n(\varepsilon)_s \Delta\beta^n(\varepsilon)_s]^{1/2},$$

ce qui entraîne

$$\alpha^n(\varepsilon)_t \leqslant \varepsilon k'_u \Sigma_{s \leqslant t} | H^n_s | + \alpha^n(\varepsilon)_t^{1/2} \beta^n(\varepsilon)_t^{1/2}.$$

D'après (3.36), (3.31) et (3.35) on en déduit que $\lim_{(p)} \lim\sup_{(n)} \alpha^n(\varepsilon_p)_t = 0$ pour tout $t \in D$. Par ailleurs, comme $e^{iu.x} - 1$ est continue bornée sur $\mathbb{R}^d$ et nulle en 0, (3.25) entraîne que $\alpha^n(\infty)_t - \alpha^n(\varepsilon)_t \xrightarrow{P} \alpha^\infty(\infty)_t - \alpha^\infty(\varepsilon)_t$ pour tous $t \in D$, $\varepsilon \in V$. On en déduit facilement (3.33), et le lemme est démontré. ■

Démonstration de (3.15). — Nous allons montrer que les hypothèses du théorème (3.4) sont satisfaites. Soit $u \in \mathbb{R}^d$, et $k_u \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$| e^{iu.x} - 1 | \leqslant k_u(| x | \wedge 1).$$

Soit $\varepsilon \in V$ tel que $\varepsilon < 1/2k_u$. On pose $R^n(u, m) = T^n_m(\varepsilon)$, avec les notations (3.24). Soit $X'^n(u)$ défini par la formule de l'énoncé de (3.4). Comme chaque $R^n(u, m)$ est F^n-prévisible, on a aussi

$$(3.37) \quad A(X'^n(u), u)_t = A(X^n, u)_t - \Sigma_{(m)}\Delta A(X^n, u)_{R^n(u,m)} I_{\{R^n(u,m) \leqslant t\}}.$$

Étant donné que $\varepsilon < 1/2k_u$, il est facile de voir que

$$\left| \int N^n_s(dx)(e^{iu.x} - 1) \right| \leqslant 1/2$$

si $s \neq R^n(u, m)$ pour tout $m \geqslant 1$. Donc $| \Delta A(X'^n(u), u) | \leqslant 1/2$ pour $n \in \overline{\mathbb{N}}$.

En particulier, $| \Delta A(X'^\infty(u), u) | \leqslant 1/2$, donc $G'(u) = \mathscr{E}[A(X'^\infty(u), u)]$ ne s'annule pas. Comme d'après (2.19) on a aussi

$$E(\exp iu.X'^\infty(u)_t \mid \mathbf{G}) = G'(u)_t,$$

on a l'hypothèse (H5) avec $R(u, m) = R^\infty(u, m)$.

D'après (3.25, *i*, *ii*), on a (3.4, *i*, *ii*). On a aussi

$$E[(\exp iu.\Delta X^n_{R^n(u,m)}) - 1 \mid \mathbf{F}^n_{R^n(u,m)-}] = \int N^n_{R^n(u,m)}(dx))e^{iu.x} - 1),$$

qui d'après (3.25, *iii*) converge vers

$$\int N^\infty_{R^\infty(u,m)}(dx)(e^{iu.x} - 1),$$

qui est égal à $E[(\exp iu.\Delta X_{R(u,m)}) - 1 \mid \mathbf{G}]$. On a donc (3.4, *iii*).

D'après le lemme (2.24), qui n'utilise pas la quasi-continuité à gauche de X, on a $A(X^n, u)_t \xrightarrow{P} A(X, u)_t$ si $t \in D$. D'après (3.25) on a aussi

$$\Delta A(X^n, u)_{R^n(u,m)} \xrightarrow{P} \Delta A(X, u)_{R(u,m)}.$$

Étant donnés (3.37) et (3.30), on a :

$$t \in D \Rightarrow \begin{cases} A(X'^n(u), u)_t \xrightarrow{P} A(X'^\infty(u), u)_t \\ \Sigma_{s \leqslant t} | \Delta A(X'^n(u), u)_s |^2 \xrightarrow{P} \Sigma_{s \leqslant t} | \Delta A(X'^\infty(u), u)_s |^2. \end{cases}$$

Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que les convergences ci-dessus ont lieu presque sûrement, ainsi que celles du lemme (3.25). Mais alors on déduit facilement de ce dernier lemme que les fonctions à variation finie $\{ A(X'^n(u), u) \}_{n \in \overline{\mathbb{N}}}$ vérifient également (3.19) presque sûrement (appliquer (3.25, *iii*) à la fonction $e^{iu.x} - 1$, et ε' aussi petit qu'on le désire dans V). Mais alors (3.21) implique (3.4, *iv*), ce qui achève la démonstration. ■

Démonstration de (3.1, a). — On va décomposer la démonstration en un certain nombre d'étapes.

1) Le principe de la démonstration va être le même que celui de (2.21, *a*) : on pose $Y'^n = Y^{ne} + Y^{nc} + Y^{nd} = Y^n - \tilde{B}^{Y^n}$. On écrit aussi $Y^\infty = X$ et on pose $Y'^\infty = Y^{\infty e} + Y^{\infty c} + Y^{\infty d} = X - \tilde{B}^X$. On va montrer que les (Y'^n) et Y'^∞ vérifient les hypothèses de (3.15) : on en déduira que $Y'^n \xrightarrow{\mathscr{L}f(\mathbf{G},\mathbf{D})} Y'^\infty$. Comme on a $[\beta]$ et comme $X^n = Y'^n + (Z^n + \tilde{B}^{Y^n})$ et $X = Y'^\infty + \tilde{B}^X$, on en déduira que $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}f(\mathbf{G},\mathbf{D})} X$.

Pour $n \in \overline{\mathbb{N}}$ on pose $B^n = \tilde{B}^{Y^n}$ (donc $B^\infty = \tilde{B}^X$) et $N_t^n(dx) = \nu^{Y^n}(\{t\} \times dx)$. On note V_0 une partie dénombrable dense dans $\mathbb{R}_+$ telle que pour tout $\varepsilon \in V_0$ on ait $P\{N_t^\infty(h) \neq \varepsilon \text{ pour tout } t > 0\} = 1$, où $h(x) = |x| \wedge 1$. Enfin les $T_n^m(\varepsilon)$ sont associés aux Y^n par (3.24).

Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer qu'en dehors d'un ensemble négligeable N on a pour tous $t \in D$, $\varepsilon \in V_0$:

$$(3.38) \qquad \forall g \in \mathbf{C}, \quad \nu^{Y^n}([0, t] \times g) \to \nu^{Y^\infty}([0, t] \times g)$$

$$(3.39) \quad \begin{cases} T_m^n(\varepsilon) \to T_m^\infty(\varepsilon)\,; \quad T_m^\infty(\varepsilon) \in D \Rightarrow T_m^n(\varepsilon) \leqslant T_m^\infty(\varepsilon), \text{ pour } n \text{ assez grand}\,; \\ N^n_{T_m^n(\varepsilon)}(g) \to N^\infty_{T_m^\infty(\varepsilon)}(g) \quad \text{si} \quad T_m^\infty(\varepsilon) < \infty, \text{ pour } g \text{ continue bornée nulle en } 0. \end{cases}$$

(on utilise $[\delta]$ appliqué à (Y^n) pour (3.38); comme les (Y^n) vérifient $[\delta]$ et $[\delta 1]$, on obtient (3.39) grâce au lemme (3.25)).

2) On remarque d'abord que B^∞ est **G**-mesurable, donc Y'^∞ est un PAI **G**-conditionnel.

Le même calcul que dans la preuve de (2.21, *a*) montre que $\nu^{Y'^n}$ est donné par (2.32), pour tout $n \in \overline{\mathbb{N}}$ (y compris $n = \infty$: on n'a pas $B^\infty = 0$ ici). Cette formule s'écrit aussi

$$(3.40) \quad \nu^{Y'^n}([0, t] \times g) = \int_0^t \int \nu^{Y^n}(ds, dx)[g(x - \Delta B_s^n) - g(-\Delta B_s^n)] + \Sigma_{s \leqslant t}\, g(-\Delta B_s^n).$$

De même, $\tilde{B}^{Y'^n}$ est donné par (2.33).

D'après (2.20) et (3.39), on a pour $\varepsilon \in V_0$:

$$(3.41) \qquad \Delta B^n_{T_m^n(\varepsilon)} \to \Delta B^\infty_{T_m^\infty(\varepsilon)} \qquad \text{si} \qquad T^\infty(\varepsilon) < \infty.$$

On pose $J^n(\varepsilon) = \cup_{m \geqslant 1} [\![T_m^n(\varepsilon)]\!]$.

Soit $g \in \mathbf{C}$ avec $g(x) = 0$ si $|x| \leqslant 2\delta$; soit $\eta(\theta)$ le module d'uniforme continuité de g : $|x - y| \leqslant \eta(\theta) \Rightarrow g(x) - g(y)| \leqslant \theta$. Posons

$$\begin{aligned}
\alpha^n(\varepsilon)_t &= \Sigma_{s \in J^n(\varepsilon), s \leqslant t} g(-\Delta B^n_s) \\
\beta^n(\varepsilon)_t &= \Sigma_{s \in J^n(\varepsilon), s \leqslant t} N^n_s(g) \\
\gamma^n(\varepsilon)_t &= \Sigma_{s \in J^n(\varepsilon), s \leqslant t} \int N^n_s(dx)[g(x - \Delta B^n_s) - g(-\Delta B^n_s)].
\end{aligned}$$

Si $s \notin J^n(\varepsilon)$, on a $|\Delta B^n_s| \leqslant \varepsilon$. Donc si $\varepsilon \leqslant 2\delta$ on a $g(-\Delta B^n_s) = 0$ pour $s \notin J^n(\varepsilon)$. Donc (3.40) entraîne que

$$\begin{aligned}
\gamma^{Y'^n}([0, t] \times g) = \alpha^n(\varepsilon)_t + \gamma^n(\varepsilon)_t - \beta^n(\varepsilon)_t + \nu^{Y^n}([0, t] \times g) \\
+ \int_0^t \int \nu^{Y^n}(ds, dx) I_{J^n(\varepsilon)^c}(s)[g(x - \Delta B^n_s) - g(x)].
\end{aligned}$$

Comme $g(x) = 0$ si $|x| \leqslant 2\delta$, si $\varepsilon \leqslant \delta \wedge \eta(\theta)$ on a donc

$$(3.42) \quad \begin{aligned}
&| \nu^{Y'^n}([0, t] \times g) - \alpha^n(\varepsilon)_t - \gamma^n(\varepsilon)_t + \beta^n(\varepsilon)_t - \nu^{Y^n}([0, t] \times g) | \\
&\qquad \leqslant \theta \nu^{Y^n}([0, t] \times \{ x : |x| > \delta \})
\end{aligned}$$

pour $n \in \overline{\mathbb{N}}$. Si $\varepsilon \in V_0$ et $t \in D$, (3.39) et (3.41) entraînent que $\alpha^n(\varepsilon)_t \to \alpha^\infty(\varepsilon)_t$ et $\beta^n(\varepsilon)_t \to \beta^\infty(\varepsilon)_t$. Comme $x \rightsquigarrow g(x - \Delta B^n_s) - g(-\Delta B^n_s)$ est continue nulle en 0, (3.39) et (3.41) entraînent aussi que $\gamma^n(\varepsilon)_t \to \gamma^\infty(\varepsilon)_t$. Enfin (3.38) entraîne que $\sup_{n \in \overline{\mathbb{N}}} \nu^{Y^n}([0, t] \times \{ x : |x| > \delta \})$ est fini. Par ailleurs pour tout $\theta > 0$ on peut trouver $\varepsilon \in V_0$ tel que $0 < \varepsilon < \delta \wedge \eta(\theta)$, donc (3.42) entraîne que

$$t \in D \Rightarrow \nu^{Y'^n}([0, t] \times g) \to \nu^{Y'^\infty}([0, t] \times g).$$

Autrement dit, les (Y'^n) vérifient $[\delta]$.

3) Si $F^n(g)_t = \nu^{Y'^n}([0, t] \times g)$, on vient de voir que pour toute $g \in \mathbf{C}$ la suite $(F^n(g))_{n \in \overline{\mathbb{N}}}$ vérifie (3.16). Le fait que (Y'^n) satisfasse à $[\delta 1]$ revient à dire que la suite $(F^n(g))_{n \in \overline{\mathbb{N}}}$ vérifie (3.17). Quitte à faire la décomposition $g = g^+ - g^-$, il suffit d'ailleurs de montrer ceci pour $g \in \mathbf{C}$, $g \geqslant 0$. Mais alors le lemme (3.20) entraîne qu'il suffit de montrer que la suite $(F^n(g))_{n \in \overline{\mathbb{N}}}$ vérifie (3.18).

Si $\Delta F^\infty(g)_t = 0$ il est clair qu'on peut trouver une suite $t_n \to t$, $t_n \leqslant t$, avec $\Delta F^n(g)_{t_n} = 0$. Supposons que $\Delta F^\infty(g)_t > 0$. Il existe alors $\varepsilon \in V_0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $t = T^\infty_m(\varepsilon)$. D'après (3.40) on a

$$\Delta F^n(g)_s = \int N^n_s(dx)[g(x - \Delta B^n_s) - g(-\Delta B^n_s)] + g(-\Delta B^n_s)$$

et d'après (3.39) et (3.41) on en déduit que $\Delta F^n(g)_{T^n_m(\varepsilon)} \to \Delta F^\infty(g)_{T^\infty_m(\varepsilon)}$. On a donc le résultat cherché (avec $t_n = T^n_m(\varepsilon)$), et la suite (Y'^n) vérifie $[\delta 1]$.

4) D'après (2.33) d'une part, (2.20) et (3.40) d'autre part, on a

(3.43)
$$\Delta\tilde{B}^{Y'^n} = \begin{cases} (1-N_t^n(\mathbb{R}^d))(\Delta B_t^n + f(-\Delta B_t^n)) - \int N_t^n(dx)[f(x)-\Delta B_t^n - f(x-\Delta B_t^n)] \\ f(-\Delta B_t^n) + \int N_t^n(dx)[f(x-\Delta B_t^n) - f(\Delta B_t^n)]. \end{cases}$$

Posons
$$\delta^n(\varepsilon)_t = \Sigma_{s\in J^n(\varepsilon), s\leqslant t} \mid \Delta\tilde{B}_s^{Y'^n} \mid^2$$
$$\rho^n(\varepsilon)_t = \Sigma_{s\notin J^n(\varepsilon), s\leqslant t} \mid \Delta\tilde{B}^{Y'^n} \mid.$$

Soit $\eta(\theta)$ le module d'uniforme continuité de f. On a $f(x) = x$ si $\mid x \mid \leqslant 1/2$ et $\mid \Delta B_s^n \mid \leqslant \varepsilon$ si $s \notin J^n(\varepsilon)$, donc en utilisant la première formule (3.43) on voit que si $\varepsilon \leqslant \eta(\theta) \wedge \theta \wedge \frac{1}{4}$ on a $\mid \Delta\tilde{B}_s^{Y'^n} \mid \leqslant 2\theta N_s^n(\{ x : \mid x \mid \geqslant 1/4 \})$. Donc

(3.44) $\quad \varepsilon \leqslant \eta(\theta) \wedge \theta \wedge \frac{1}{4} \Rightarrow \rho^n(\varepsilon)_t \leqslant 2\theta\nu^{Y^n}([0, t] \times \{ x : \mid x \mid \geqslant 1/4\}).$

En utilisant la seconde formule (3.43), et (3.39) et (3.41), on voit que $\delta^n(\varepsilon)_t \to \delta^\infty(\varepsilon)_t$ si $t \in D$, $\varepsilon \in V_0$. Enfin
$$\mid \Sigma_{s\leqslant t} \mid \Delta\tilde{B}_s^{Y'^n} \mid^2 - \delta^n(\varepsilon)_t \mid \leqslant [\rho^n(\varepsilon)_t]^2.$$

Comme $\theta > 0$ est arbitrairement petit, on déduit alors de (3.44) et de (3.38) que
$$\Sigma_{s\leqslant t} \mid \Delta\tilde{B}_s^{Y'^n} \mid^2 \to \Sigma_{s\leqslant t} \mid \Delta\tilde{B}_s^{Y'^\infty} \mid^2$$
si $t \in D$, et la suite (Y'^n) vérifie $[\rho 1]$.

De même, si
$$\hat{\delta}^n(\varepsilon)_t = \Sigma_{s\in J^n(\varepsilon), s\leqslant t} \Delta\tilde{B}_s^{Y'^n},$$
on a $\hat{\delta}^n(\varepsilon)_t \to \hat{\delta}^\infty(\varepsilon)_t$ pour $t \in D$, $\varepsilon \in V_0$. Le même raisonnement que ci-dessus, basé sur la majoration $\mid \tilde{B}_t^{Y'^n} - \hat{\delta}^n(\varepsilon)_t \mid \leqslant \rho^n(\varepsilon)_t$, prouve que $\tilde{B}_t^{Y'^n} \to \tilde{B}_t^{Y'^\infty}$ si $t \in D$, donc la suite (Y'^n) vérifie $[\beta]$.

5) Fixons $j, k \leqslant d$ et $t \in D$. Notons c^n (resp. c^∞) le premier (resp. second) membre de $[\gamma]$, avec Y^n et $Y^\infty = X$; notons c'^n (resp. c'^∞) le premier (resp. second) membre de $[\gamma']$, avec Y'^n et Y'^∞. Par hypothèse $c^n \xrightarrow{P} c^\infty$. Pour prouver que $c'^n \xrightarrow{P} c'^\infty$, c'est-à-dire que (Y'^n) vérifie $[\gamma']$, il suffit donc de montrer que $c^n - c'^n \xrightarrow{P} c^\infty - c'^\infty$.

Le même calcul que dans la preuve de (2.21, a) montre que $c^n - c'^n$ est donné par (2.36), avec h^{jk} défini par (2.35), pour tout $n \in \overline{\mathbb{N}}$: on a donc
$$c^n - c'^n = \Sigma_{s\leqslant t} d_s^n,$$

avec d_s^n donné par l'une des deux formules :

$$(3.45)\quad d_s^n = \begin{cases} \int N_s^n(dx)h^{jk}(x, \Delta B_s^n) + \Delta B_s^{nj}\Delta B_s^{nk} - (f^j f^k)(-\Delta B_s^n) \\ \qquad + N_s^n(\mathbb{R}^d)[(f^j f^k)(-\Delta B_s^n) - \Delta B_s^{nj}\Delta B_s^{nk}] \\ \int N_s^n(dx)[(f^j f^k)(x) - (f^j f^k)(x - \Delta B_s^n) + (f^j f^k)(-\Delta B_s^n)] \\ \qquad - \Delta B_s^{nj}\Delta B_s^{nk} - (f^j f^k)(-\Delta B_s^n). \end{cases}$$

Posons

$$\chi^n(\varepsilon) = \Sigma_{s\in J^n(\varepsilon), s\leqslant t} d_s^n, \qquad \widehat{\chi}^n(\varepsilon) = \Sigma_{s\notin J^n(\varepsilon), s\leqslant t} d_s^n.$$

Soit $\eta(\theta)$ tel que $|y| \leqslant \eta(\theta) \Rightarrow |h^{jk}(x, y)| \leqslant \theta$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Si $\varepsilon \leqslant \eta(\theta) \wedge \frac{1}{4}$ et $s \notin J^n(\varepsilon)$, on a $|d_s^n| \leqslant \theta N_s^n(\{x : |x| \geqslant 1/4\})$ (car $f(x) = x$ si $|x| \leqslant 1/2$ et $|\Delta B_s^n| \leqslant \varepsilon$), en utilisant la première formule (3.45). Donc

$$|\widehat{\chi}^n(\varepsilon)| \leqslant \theta\nu^{Y^n}([0, t] \times \{x : |x| \geqslant 1/4\}).$$

Par ailleurs en utilisant la seconde formule (3.45), et (3.39) et (3.41), on voit que si $\varepsilon \in V_0$ on a $\chi^n(\varepsilon) \to \chi^\infty(\varepsilon)$. Comme $c^n - c'^n = \chi^n(\varepsilon) + \widehat{\chi}^n(\varepsilon)$, et comme θ est arbitrairement petit, on en déduit (comme dans la fin de la partie 4) ci-dessus) que $c^n - c'^n \to c^\infty - c'^\infty$. On en déduit que la suite (Y'^n) vérifie $[\gamma']$, ce qui achève la démonstration. ■

Avant de passer à la démonstration de (3.1, *b*), nous allons prouver deux lemmes. Pour tout processus cadlag Z on notera $\mathscr{L}(Z)$ sa loi, c'est-à-dire l'image de P par l'application : $\Omega \xrightarrow{Z} \mathbb{D}([0, \infty[\,; \mathbb{R}^d)$; cet espace est muni de la topologie de Skorokhod, et l'ensemble des probabilités sur cet espace de la topologie de la convergence étroite correspondante.

(3.46) LEMME. — *Sous les hypothèses de (3.1, b), et si* $Y'^n = Y^n - \widetilde{B}^{Y^n}$, *la suite* $(\mathscr{L}(Y'^n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est relativement compacte.*

Démonstration. — On va appliquer le théorème (7.4) de [*12*] : on a les conditions *a*) et *b*) de ce théorème, car $Y_0'^n = 0$ et que les (Y'^n) vérifient $[\delta]$ d'après la preuve précédente. Soit

$$F_t^n = \Sigma_{j\leqslant d}\left[C_t^{Y'^n,jj} + \int_0^t |d\widetilde{B}_s^{Y'^n,j}|\right] + \int \nu^{Y'^n}([0, t] \times dx)\,|x|^2 \wedge 1.$$

On va montrer qu'on a aussi la condition *c*) du théorème (7.4) de [*12*], avec (C3), ou plutôt (C'3) (qui entraîne (C3) d'après [*12*]-(5.3)) : il s'agit donc de montrer l'existence de processus croissants F^n-prévisibles G^n tels que

(3.47) $\qquad t \in D \Rightarrow G_t^n \xrightarrow{P} G_t^\infty, \qquad \Sigma_{s \leqslant t}(\Delta G_s^n)^2 \xrightarrow{P} \Sigma_{s \leqslant t}(\Delta G_s^\infty)^2,$

que G^∞ soit $\mathbf{G}$-mesurable, et que $G^n - F^n$ soit croissant si $n \in \mathbb{N}$.

Quitte à prendre une sous-suite on supposera, comme dans la preuve précédente, qu'il y a convergence presque sûre dans [sup β], [γ], [δ], [δ1] et en particulier qu'on a (3.38) et (3.39). On prend pour $n \in \overline{\mathbb{N}}$:

$$G_t^n = \Sigma_{j \leqslant d}[C_t^{Y'^n,jj} + \nu^{Y'^n}([0, t] \times (f^j)^2)] + \Sigma_{s \leqslant t} \mid \Delta\tilde{B}_s^{Y'^n} \mid + \nu^{Y'^n}([0, t] \times g)$$

où $g \in \mathbf{C}$ vérifie $0 \leqslant g \leqslant 1$ et $g(x) = 1$ si $\mid x \mid \geqslant 1/2$. Il est clair que G^∞ est $\mathbf{G}$-mesurable, que les G^n sont F^n-prévisibles, et que $G^n - F^n$ est croissant.

On sait que les (Y'^n) vérifient [γ'], [δ], [δ1], et on montre comme dans la partie 4) de la preuve précédente (en remplaçant $\mid \Delta\tilde{B}_s^{Y'^n} \mid^2$ par $\mid \Delta\tilde{B}_s^{Y'^n} \mid$ dans la définition de $\delta^n(\varepsilon)_t$) que

$$t \in D \Rightarrow \Sigma_{s \leqslant t} \mid \Delta\tilde{B}_s^{Y'^n} \mid \to \Sigma_{s \leqslant t} \mid \Delta\tilde{B}_s^{Y'^\infty} \mid .$$

On en déduit donc que $G_t^n \xrightarrow{P} G_t^\infty$ si $t \in D$. Quitte à prendre encore une sous-suite, on peut supposer qu'on a $G_t^n \to G_t^\infty$ p. s. pour $t \in D$. D'après le lemme (3.20), pour montrer qu'on a (3.47) il suffit alors de montrer que les G^n vérifient (3.17) en dehors d'un ensemble négligeable.

Si $\Delta G_t^\infty = 0$, il est clair qu'il existe $t_n \to t$, avec $t_n \leqslant t$ et $\Delta G_{t_n}^n = 0$. Supposons que $\Delta G_t^\infty > 0$. Il existe alors $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in V_0$, $m \in \mathbb{N}$, tels que $t = T_m^\infty(\varepsilon)$. Comme on a, avec les notations de la preuve précédente, et si $g' = g + \Sigma_{j \leqslant d}(f^j)^2$:

$$\Delta G_s^n = \int N_s^n(dx)[g'(x - \Delta B_s^n) - g'(-\Delta B_s^n)] + g'(-\Delta B_s^n)$$
$$+ \left| \int N_s^n(dx)[f(x - \Delta B_s^n) - f(-\Delta B_s^n)] + f(-\Delta B_s^n) \right|,$$

(3.39) et (3.41) entraînent que $\Delta G^n_{T_m^n(\varepsilon)} \to \Delta G^\infty_{T_m^\infty(\varepsilon)}$. On a donc le résultat cherché, avec $t_n = T_m^n(\varepsilon)$. ■

(3.48) LEMME. — *Supposons que pour chaque $q \in \mathbb{N}$ il existe un processus cadlag V^q tel que $\mid \Delta V^q \mid \leqslant 1/q$ et que la suite $(\mathscr{L}(X^n + V^q))_{n \in \mathbb{N}}$ soit relativement compacte. Alors la suite $(\mathscr{L}(X^n))_{n \in \mathbb{N}}$ est également relativement compacte.*

Démonstration. — Pour tous $N \in \mathbb{N}$, $\theta > 0$, $x \in \mathbb{D}([0, \infty[; \mathbb{R}^d)$ on pose

$$w^N(x, \theta) = \inf \{ \max_{i \leqslant r} \sup_{t_i \leqslant s < t < t_{i+1}} \mid x(t) - x(s) \mid : r \geqslant 1,$$
$$0 = t_0 < \ldots < t_r = N, \inf_{0 \leqslant i \leqslant r-1} \mid t_{i+1} - t_i \mid \geqslant \theta \}$$

$$w'^N(x, \theta) = \sup_{s \leqslant t \leqslant s+\theta \leqslant N} \mid x(s) - x(t) \mid .$$

Rappelons que la suite $(\mathscr{L}(X^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte si et seulement si on a les deux conditions suivantes (voir par exemple [*12*]) :

(3.49) $\forall N \in \mathbb{N},\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in \mathbb{R}_+, \limsup_{(n)} P(\sup_{t \leqslant N} | X_t^n | > a) \leqslant \varepsilon;$

(3.50) $\forall N \in \mathbb{N},\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0, \exists \theta > 0, \limsup_{(n)} P(w^N(X^n, \theta) > \eta) \leqslant \varepsilon.$

Pa hypothèse, les $(X^n + V^q)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient (3.49), donc aussi les (X^n). Par ailleurs, comme $| \Delta V^q | \leqslant 1/q$, il est facile de voir que

(3.51) $\forall N \in \mathbb{N},\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall \eta > \dfrac{1}{q}, \exists \theta > 0, \quad P(w'^N(V^q, \theta) > \eta) \leqslant \varepsilon.$

D'autre part on vérifie aisément que $w^N(x + y, \theta) \leqslant w'^N(y, 2\theta) + w^N(x, \theta)$. Par hypothèse, chacune des suites $(X^n + V^q)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (3.50), donc d'après (3.51) on a :

$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0, \exists q > \dfrac{2}{\eta}, \exists \theta > 0, \quad$ avec $\quad P\left(w'^N(V^q, 2\theta) > \dfrac{\eta}{2}\right) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$

et

$$\limsup_{(n)} P\left(w^N(X^n + V^q, \theta) > \frac{\eta}{2}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit que $\limsup_{(n)} P(w^N(X^n, \theta) > \eta) \leqslant \varepsilon$, ce qui achève la démonstration. ■

Démonstration de (3.1, b). — Pour chaque $q \in \mathbb{N}$ on considère une fonction $f_q : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, continue, telle que $f^q(x) = x$ si $| x | \leqslant 1/2q$, que $f_q(x) = 0$ si $| x | > 1/q$, et que $| f_q | \leqslant 1/q$. Notons $\tilde{B}^{Y^n}(f_q)$ la « première caractéristique locale » modifiée de Y^n, lorsqu'on remplace f par f_q dans la définition de Y^{ne}. Il est facile de vérifier que

(3.52) $$\tilde{B}^{Y^n}(f_q)_t = \tilde{B}_t^{Y^n} + \nu^{Y^n}([0, t] \times (f_q - f)).$$

Les conditions [δ] et [δ1] ne dépendent pas de f. Par contre, [sup β] et [γ] en dépendent. Mais, comme $f_q - f \in C$, on déduit facilement de [δ], [δ1] et (3.52) que les conditions [sup β] et [γ], qui par hypothèses sont satisfaites pour la fonction f, le sont aussi pour chaque fonction f_q. Par ailleurs tout ce qui précède, et en particulier le lemme (3.46), ne fait intervenir que les propriétés suivantes de f : elle est continue, bornée, égale à l'identité sur un voisinage de 0, et nulle en dehors d'un autre voisinage de 0. Par conséquent tout s'applique aux fonctions f_q. En particulier, si

$$Y'^n(f_q) = Y^n - \tilde{B}^{Y^n}(f_q),$$

le lemme (3.46) implique que la suite $(\mathscr{L}(Y'^n(f_q)))_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte pour chaque q.

Soit $V^q = -\tilde{B}^X(f_q)$. On a

$$X^n + V^q = Y^n + Z^n + V^q = Y'^n(f_q) + [Z^n + \tilde{B}^{Y^n}(f_q) - \tilde{B}^X(f_q)].$$

D'après [sup β] appliqué à f_q, les processus $Z^n + \tilde{B}^{Y^n}(f_q) - \tilde{B}^X(f_q)$ tendent en loi vers le processus nul, pour chaque q. Comme la suite $(\mathscr{L}(Y'^n(f_q))$ est relativement compacte, on en déduit que la suite $(\mathscr{L}(X^n + V^q)))_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi relativement compacte pour chaque q. D'autre part $|f_q| \leqslant 1/q$, donc $|\Delta V^g| \leqslant 1/q$. Le lemme (3.48) entraîne alors que $(\mathscr{L}(X^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte. Comme d'après (3.1, *a*) il y a convergence fini-dimensionnelle le long de D de X^n vers X, et comme D est dense, on en déduit que X^n converge en loi vers X. ■

§ 3.*d*) Comparaison des méthodes utilisant transformées de Fourier ou transformées de Laplace.

Plaçons-nous dans la situation du § 1.*a* : dans (H1) ou (H2), on pourrait penser à remplacer γ^u par $\tilde{\gamma}^p = E(e^{p\cdot\chi} \mid \mathbf{G})$, pour $p \in \mathbb{R}^d$ (donc $p \rightsquigarrow \tilde{\gamma}^p$ est la transformée de Laplace **G**-conditionnelle) :

— l'inconvénient en serait qu'il faudrait supposer χ bornée (ou, au moins, $e^{p\cdot\chi}$ intégrable pour tout $p \in \mathbb{R}^d$);

— l'avantage en serait que, comme $e^{p\cdot\chi} > 0$ identiquement, l'hypothèse (H2-*iii*) serait automatiquement satisfaite.

Dans *[11]* par exemple, on utilise cette méthode des « transformées de Laplace », par opposition à la méthode des « transformées de Fourier » utilisée dans le présent article. Formellement les deux méthodes sont identiques et conduisent aux mêmes calculs; les différences portent exclusivement sur les deux points suivants :

1) Dans la méthode des transformées de Fourier, on a un théorème (2.14) simple lorsque $G(u)_t$ ne s'annule pas; par contre si $G(u)_t$ s'annule, on a besoin du théorème (3.4), qui est plutôt compliqué.

2) Dans la méthode des transformées de Laplace, il n'y a pas lieu de distinguer deux cas. Par contre, la démonstration de l'équivalent de (2.14) est un peu plus compliquée, car il faut « borner » les processus et il s'introduit une hypothèse supplémentaire, qui s'énonce comme suit (dans le cas où $Y^n = X^n$ et $Z^n = 0$ pour simplifier) : si

$$F_t^n = \Sigma_{j\leqslant d}\left[C_t^{X^n,jj} + \int_0^t |d\tilde{B}_s^{X^n,j}|\right] + \nu^{X^n}([0,t] \times (|x|^2 \wedge 1)),$$

on a :

(3.53) $\lim_{a\to\infty} \limsup_{(n)} P(F_t^n > a) = 0$ si $t \in D$. ∎

Si on veut démontrer le théorème (3.1), on vérifie facilement à l'aide de (3.25) que l'hypothèse (3.53) est vérifiée (pas par les X^n, mais par les Y'^n introduites au § 3.*c*; en fait, cela découle immédiatement de la convergence des processus G^n qu'on a considérés dans la preuve de (3.1, *b*)). La méthode des transformées de Laplace est donc plus simple que celle des transformées de Fourier, dans la mesure où on évite (3.4) au prix d'une petite complication supplémentaire de (2.14).

Si par contre on veut démontrer le théorème (2.21) dans le cas où D *n'est pas dense* (par exemple, D est réduit à un point), l'utilisation de la méthode des transformées de Laplace conduit à imposer *en plus* l'hypothèse (3.53), qui n'est pas impliquée par les hypothèses de (2.21, *a*).

C'est la raison essentielle pour laquelle nous avons dans cet article utilisé les transformées de Fourier; secondairement, cela simplifie l'exposé dans la section 1, tout en se rapprochant plus des méthodes « classiques ».

§ 3.*e*) Exemple : convergence de tableaux triangulaires.

A titre d'exercice (élémentaire) nous transcrivons le théorème (3.1) dans le cadre des tableaux triangulaires. On se place dans la situation du § 2.*e*, avec les mêmes notations : $X_{n,k}$, $\mathbf{F}_{n,k}$, $\mathbf{G}$, les temps d'arrêt $\sigma^n(t)$, et X^n donné par (2.40).

(3.54) THÉORÈME. — *On suppose que* X *est un PAI* **G**-*conditionnel et une* F-*semi-martingale, et que* D *est dense dans* $\mathbb{R}_+$; *pour tous* $n, k \in \mathbb{N}$, *soit une décomposition* $\mathbf{F}_{n,k}$-*mesurable* $X_{n,k} = A_{n,k} + Y_{n,k}$. *On considère les conditions :*

$[\beta_1]$ $\quad \forall t \in D,\ \Sigma_{1\leqslant k\leqslant\sigma^n(t)}[A_{nk} + E(f(Y_{nk}) \mid \mathbf{F}_{n,k-1})] \xrightarrow{P} B^X$.

$[\sup \beta_1]$ $\quad \forall t > 0,\ \sup_{s\leqslant t} | \Sigma_{1\leqslant k\leqslant\sigma^n(t)}[A_{nk} + E(f(Y_{nk}) \mid \mathbf{F}_{n,k-1})] - \tilde{B}_s^X | \xrightarrow{P} 0$.

$[\gamma_1]$ $\quad \forall t \in D,\ \forall j, m \leqslant d$,

$$\Sigma_{1\leqslant k\leqslant\sigma^n(t)} \{ E[(f^j f^m)(Y_{nk}) \mid \mathbf{F}_{n,k-1}] - E(f^j(Y_{nk}) \mid \mathbf{F}_{n,k-1})E(f^m(Y_{nk}) \mid \mathbf{F}_{n,k-1}) \}$$
$$\xrightarrow{P} C_t^{X,jm} + \nu^X([0,t] \times (f^j f^m)) - \Sigma_{s\leqslant t}\nu^X(\{s\} \times f^j)\nu^X(\{s\} \times f^m).$$

$[\delta_1]$ $\quad \forall t \in D,\ \forall g \in \mathbf{C},\ \Sigma_{1\leqslant k\leqslant\sigma^n(t)} E(g(Y_{nk}) \mid \mathbf{F}_{n,k-1}) \xrightarrow{P} \nu^X([0,t] \times g)$.

$[\delta 1_1]$ $\quad \forall t \in D,\ \forall g \in \mathbf{G},\ \Sigma_{1\leqslant k\leqslant\sigma^n(t)} E(g(Y_{nk}) \mid \mathbf{F}_{n,k-1})^2 \xrightarrow{P} \Sigma_{s\leqslant t}\nu^X(\{s\} \times g)^2$.

a) *Sous* $[\beta_1]$, $[\gamma_1]$, $[\delta_1]$, $[\delta 1_1]$, *on a* $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}f(\mathbf{G},D)} X$.

b) *Sous* $[\sup \beta_1]$, $[\gamma_1]$, $[\delta_1]$, $[\delta 1_1]$, *les* X^n *convergent en loi vers* X.

La démonstration est la même que celle de (2.41), mais on utilise cette fois le théorème (3.1). Remarquer que, par contre, on n'a pas de généralisation du théorème (2.45).

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. M. BROWN, Martingale central limit theorems. *Annals Math. Statistics*, t. **42**, 1971, p. 59-66.

[2] B. M. BROWN, G. K. EAGLESON, Martingale convergence to infinitely divisible laws with finite variances. *Trans. A. M. S.*, t. **162**, 1971, p. 449-453.

[3] T. BROWN, A martingale approach to the Poisson convergence of simple point processes. *Ann. Probab.*, t. **6**, 1978, p. 615-628.

[4] C. DELLACHERIE, P. A. MEYER, *Probabilités et potentiel* (2d éd.), 2e partie, Hermann, Paris, 1980.

[5] R. DURRETT, S. I. RESNICK, Functional limit theorems for dependent variables. *Ann. Probab.*, t. **6**, 1978, p. 829-846.

[6] P. GANSSLER, E. HAUSLER, Remarks on the functional central limit theorem for martingales. *Z. W.*, t. **50**, 1979, p. 237-243.

[7] B. W. GNEDENKO, A. N. KOLMOGOROV, *limit distributions for sums of independent random variables*. Addison-Wesley: Cambridge (Mass.), 1954.

[8] B. GRIGELIONIS, R. MIKULEVICIUS, *On stably weak convergence of semimartingales and point processes*. A paraître, 1981.

[9] P. HALL, Martingale invariance principles. *Annals of Probability*, t. **5**, 1977, p. 875-887.

[10] J. JACOD, Calcul stochastique et problèmes de martingales. *Lecture Notes in Math.*, t. **714**, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1979.

[11] J. JACOD, J. MÉMIN, Sur la convergence des semimartingales vers un processus à accroissements indépendants. Sém. Proba. XIV, *Lecture Notes in Math.*, t. **784**, 1980, p. 227-248.

[12] J. JACOD, J. MÉMIN, M. MÉTIVIER, *Stopping times and tightness*. A paraître, 1980.

[13] A. JAKUBOWSKI, On limit theorems for sums of dependent Hilbert space valued random variables. *Lecture Notes in Stat.*, t. **2**, 1978 (Conference in Wisla), 1980.

[14] A. JAKUBOWSKI, A. KŁOPOTOWSKI, *Quelques remarques sur les démonstrations de théorèmes limite pour des vecteurs* d-*dimensionnels aléatoires non indépendants*. Sém. Proba. Rennes, 1980.

[15] I. KABANOV, R. LIPTCER, A. SHIRYAEV, Some limit theorems for simple point processes (martingale approach). *Stochastics*, t. **3**, 1980, p. 203-216.

[16] A. KŁOPOTOWSKI, Limit theorems for sums of dependent random vectors in $\mathbb{R}^d$. *Dissert. Math. CLI*, 1-62, PWN, Warszawa, 1977.

[17] A. KŁOPOTOWSKI, L. SŁOMINSKI, *Limit theorems for random sums of dependent* d-*dimensional random vectors*. A paraître, 1980.

[18] R. LIPTCER, A. SHIRYAEV, Théorème central limite fonctionnel pour les semimartingales. *Th. Proba. Appl.*, t. **XXV**, 1980, p. 683-703.

[19] D. L. MCLEISH, An extended martingale invariance principle. *Ann. Probab.*, t. **6**, 1978, p. 144-150.

[20] R. REBOLLEDO, Central limit theorems for local martingales. *Z. W.*, t. **51**, 1980, p. 269-286.

[21] H. ROOTZEN, On the functional central limit theorem for martingales II, *Z. W.*, t. **51**, 1980, p. 79-94.

(Manuscrit reçu le 11 juin 1981)