ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

BALRAM S. RAJPUT
DONALD LOUIE
A. TORTRAT

Une loi de zéro-un pour une classe de mesures sur les groupes

Annales de l'I. H. P., section B, tome 17, nº 4 (1981), p. 331-336
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1981__17_4_331_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XVII, n° 4, 1981, p. 331-335.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Une loi de zéro-un pour une classe de mesures sur les groupes

par

Balram S. RAJPUT (*) et Donald LOUIE
Université de Tennessee Knoxville, Tennessee

et

A. TORTRAT
Laboratoire de Calcul de Probabilités,
tour 56, 3e étage, 4, place Jussieu, 75005 Paris-Ve
Laboratoire associé au C. N. R. S., n° 224, 85, rue de Paris, 92190 Meudon (France)

RÉSUMÉ. — Soit (E, $\mathbb{B}$) un groupe (non abélien) mesurable, α un homomorphisme mesurable sur E et μ une loi sur (E, $\mathbb{B}$) vérifiant $\mu = \mu_\alpha \nu_\alpha$ (μ_α image de μ par α, ν_α une loi sur (E, $\mathbb{B}$)). Sous des conditions concernant ν_α et le couple (α, G), G étant un sous-groupe normal de E, nous prouvons que $\mu(\mathrm{G}a) = 0$ ou 1 si $\mathrm{G}a \in \mathbb{B}_\mu$ tribu complétée de $\mathbb{B}$ pour μ. Ce résultat contient toutes les lois de zéro-un connues pour les lois stables ou semi-stables ou quasi stables, sauf une, de [*3*] (pour une large extension de cette dernière, cf. [*5*] et [*7*]), ainsi que de nouvelles telles lois pour d'autres classes de lois indéfiniment divisibles, dans les espaces vectoriels.

SUMMARY. — Let (E, $\mathbb{B}$) be a measurable (non abelian) group, α a measurable homomorphism on E and μ a law on (E, $\mathbb{B}$) satisfying $\mu = \mu_\alpha \nu_\alpha$ (with $\mu_\alpha = \mu \circ \alpha^{-1}$), for some law ν_α on (E, $\mathbb{B}$). Under some additional conditions on ν_α and (α, G), for a normal subgroup G of E, it is shown that if $\mathrm{G}a \in \mathbb{B}_\mu$ the μ-completion of $\mathbb{B}$ (and $a \in \mathrm{E}$), then $\mu(\mathrm{G}a) = 0$ or 1. As a corollary it is shown that this theorem yields all previously known

(*) Les travaux de cet auteur sont partiellement soutenus par l'Office de la recherche navale, contrat n° N0014-78-C-0468. Ce texte date de l'automne 1979. Un malentendu entre les auteurs a retardé sa soumission à ces annales.

0-1 laws for stable, semi-stable and quasi-stable laws, and new 0-1 laws for other classes of infinitely divisible laws on linear spaces, except one, of [3] (for a large improvement of this later, see [5] and [7]).

Le but principal de ce texte est de prouver le

THÉORÈME. — On suppose que (E, $\mathbb{B}$) est un groupe mesurable (non abélien) (: $\mathbb{B}$ est une tribu de parties de E telle que l'application $x \times x' - xx'^{-1}$ est $\mathbb{B} \times \mathbb{B} - \mathbb{B}$ mesurable) *ou* que (E, $\mathbb{B}$) est un groupe topologique séparé muni de sa tribu borélienne (en ce cas toutes les lois considérées sont supposées τ-régulières).

Soit α un homomorphisme mesurable de E dans E (: une application mesurable préservant l'opération du groupe), et μ une loi sur $\mathbb{B}$, $\mathbb{B}_\mu$ la tribu complétée pour μ, et μ_α l'image de μ par α.

On suppose que μ_α est un facteur à gauche de μ (sur $\mathbb{B}$ donc sur $\mathbb{B}_\mu$) et qu'*une* racine n-ième de μ (aussi bien de $\bar{\mu}$ image de μ pour $x \to x^{-1}$) existe, qui divise le cofacteur ν_α :

$$(1) \qquad \mu = \mu_\alpha \nu_\alpha, \qquad (1') \qquad \nu_\alpha = \mu^{1/n}\nu'_\alpha \quad \text{ou} \quad \nu_\alpha = \nu'_\alpha \mu^{1/n}.$$

Soit G un sous-groupe normal de E vérifiant

$$(2) \qquad \alpha(G) \subset G,\ \alpha(G)^c \subset G^c, \qquad (2') \qquad \alpha^n(x)x^{-1} \in G \Rightarrow x \in G,$$

pour tout entier $n = 1, 2, \ldots, \alpha^n$ étant le n-ième itéré de α (et $G^c = E - G$). Alors pour tout $a \in E$ on a

$$(3) \qquad Ga \in \mathbb{B}_\mu \Rightarrow \mu(Ga) = 0 \text{ ou } 1.$$

Si $G = \{ e \}$ (¹) et $a \in \mathbb{B}_\mu$ pour tout a de E, on peut, dans le cas topologique, remplacer (1') par

$$(1'') \qquad \lim_{n\to\infty} \alpha^n(x) = e, \text{ pour tout } x \text{ de E}.$$

Preuve. — Supposons $\mu(Ga) > 0$ et prouvons que $\mu(Ga) = 1$. Soit G_0 le groupe E/G, considéré (par exemple) comme celui des co-ensembles à droite Gx. (2) assure que α induit un homomorphisme injectif dans G_0,

---

(¹) Ce cas quand μ est indéfiniment divisible et E espace vectoriel en dualité séparante, rentre dans l'étude des atomes de ces lois faite dans [6], où l'extension des résultats de la tribu cylindrique à $\mathbb{B}$ est automatique si μ est τ-régulière.

que nous noterons encore α. Notons Gc par $\dot{c}$. Si $\dot{c} \in \mathbb{B}_\mu$, (1) et le théorème de Fubini donnent (avec $\nu = \nu_\alpha$)

$$(4) \qquad \mu(\dot{c}) = \int_E \mu \{ \alpha^{-1}(\dot{c}x^{-1}) \} (dx).$$

Dans (4) $\alpha^{-1}(\dot{c}x^{-1}) \in \mathbb{B}_\mu$ et $g(x) = \mu \{ \alpha^{-1}(\dot{c}x^{-1}) \}$ est $\mathbb{B}$-mesurable hors d'un $N \in \mathbb{B}$ avec $\nu N = 0$.

Soit $A = \{ \dot{c}_k = Gc_k : k = 1, \ldots, K \}$ l'ensemble fini des points de G_0 qui sont mesurables et de mesure maximum (parmi tous les Gx de $\mathbb{B}_\mu$). L'égalité (4) s'écrit, dans G_0 (avec la restriction dite ci-après)

$$(4') \qquad \mu(\dot{c}) = \Sigma \mu \{ \alpha^{-1}(\dot{c}\dot{b}_i) \} \nu(\dot{b}_i^{-1}).$$

Le caractère maximal de $\mu(\dot{c})$ ($\dot{c}$ étant un des $\dot{c}_k$) impose $\alpha^{-1}(\dot{c}_k\dot{b}_i) = \dot{c}_{ki} \in A$, avec des $\dot{c}_{k_i}$ distincts pour i fixé (on ne sait pas $\dot{b}_i^{-1}$ ν-mesurable, seulement la somme de ceux correspondant à une même valeur de $\mu \{ \alpha^{-1}(\dot{c}\dot{b}_i^{-1}) \}$).

Soit Δ l'ensemble symétrique de $\dot{c}_k\dot{c}_{k'}^{-1}$ distincts ($k \neq k'$), soit

$$\Delta = \{ \delta_l, l = 1, \ldots, L \}.$$

On a $L \geq 1$ si $K \geq 2$. Puisque

$$\dot{c}_k \neq \dot{c}_{k'} \Rightarrow \dot{c}_{ki} \neq \dot{c}_{k'i} \qquad \text{et} \qquad \alpha^{-1}(\dot{c}_k\dot{c}_{k'}^{-1}) = \alpha^{-1}(\dot{c}_k\dot{b}_i\dot{b}_i^{-1}\dot{c}_{k'}^{-1}) = \dot{c}_{k^i}\dot{c}_{k'_i}^{-1},$$

On a

$$\alpha^{-1}(\delta_l) = \delta_{l'} \in \Delta.$$

Ainsi α^{-1} (qui est injective) est une permutation dans Δ. Donc α^m a un point fixe dans Δ, soit b, pour un $m \leq L$. Cela s'écrit $\alpha^m(b) = gb$, $g \in G$, et (2') impose $b = \varepsilon$ unité de G_0 ce qui contredit $\varepsilon \notin \Delta$.

On a donc $K = 1$ et ν impropre (de Dirac) : $\nu = \delta(\dot{b}^{-1})$. Cela contredit (1') que nous avons *dû introduire* pour exclure cette éventualité :

Si $\mu^{1/n}$ ou $\bar{\mu}^{1/n}$ divise ν, ce facteur donc aussi μ (ou $\bar{\mu}$ donc μ) sont impropres, c'est bien que $\mu(Ga) = 1$.

Dans le cas $G = \{ e \}$, et pour remplacer (1') par (1'') nous noterons le

LEMME. — Soit G_0 un groupe topologique séparé d'unité ε, μ une loi (d'une v. a. X) sur la tribu borélienne $\mathbb{B}_0$ de G_0. On suppose μ τ-régulière (ou si G_0 est métrisable, que μ a un support non vide, hypothèse plus faible), et α donnée comme ci-dessus, de G_0 dans G_0. Alors les conditions

$$(5) \qquad \alpha(X) \overset{\text{loi}}{=} Xb, \qquad\qquad (1'') \qquad \alpha^n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} \varepsilon, \text{ tout } x,$$

nécessitent que μ soit impropre : $X \overset{\text{p.s.}}{=} a$, avec $\alpha(a) = ab$.

Preuve. — Soit V un voisinage symétrique de ε et $\mu(\mathrm{V}a) = \eta > 0$. (1″) équivaut à $\{ x : \alpha^n(x) \in \mathrm{V},\ \text{tout } n \geq m \} \uparrow \mathrm{G}_0$ lorsque $m \uparrow \infty$.

Mais (5) donne

$$\alpha^n(\mathrm{X}) \overset{\text{loi}}{=} \mathrm{X}b_n \qquad \text{avec} \qquad b_n = \alpha^{n-1}(b) \ldots \alpha(b)b.$$

On a donc

$$\mathrm{P}\{ \alpha^n(\mathrm{X})b_n^{-1} = \mathrm{X} \in \mathrm{V}b_n^{-1} \} = \mathrm{P}\{ \alpha^n(\mathrm{X}) \in \mathrm{V} \} \uparrow 1.$$

Ainsi $\mathrm{V}b_n^{-1}$ coupe V pour tout $n \geq n_0$ assez grand, soit $b_n^{-1} \in \overset{2}{\mathrm{V}}a$ et) on a

$$\mathrm{P}\{ \mathrm{X} \in \overset{3}{\mathrm{V}}a \} \geq \mathrm{P}\{ \mathrm{X} \in \mathrm{V}b_n^{-1} \} \uparrow 1.$$

Ainsi la τ-régularité de μ (ou l'hypothèse plus faible susdite) assure $\mathrm{X} = a$ p. s.

Remarque 1. — (5) exprime le cas $\mathrm{K} = 1$ dans la preuve du théorème. Même si E est un groupe topologique séparé, G non fermé (le cas intéressant) n'assure pas que G_0 soit un tel groupe. Il se peut alors fort bien que, enlevé l'unique point mesurable $\dot{a} = \dot{c}$, μ-positif de G_0, il reste un seul atome $\mathrm{G}_0 - \dot{a}$ pour une mesure μ nulle sur les points de G_0. En ce cas la relation $\alpha(\mathrm{X}) \overset{\text{loi}}{=} \mathrm{X}b$ est possible ([2]), n'impose pas $\mu\dot{a} = 1$ (les G-cylindres de E, de $\mathbb{B}_\mu$, hors Ga, se réduisent aux réunions dénombrables de classes qui ont la μ-mesure 0, et à leurs complémentaires, équivalents à l'atome susdit. L'hypothèse (1′) qui paraît artificielle lorsque μ n'est pas indéfiniment divisible, semble indispensable. La lever pose un problème intéressant et difficile, par exemple dans les cas vectoriel pour une homothétie de rapport α, envisagé maintenant.

Corollaire. — Soit E un espace vectoriel mesurable $(: x \times x' \to x + x'$ mesurable et $t \times x \to tx$, aussi, pour chaque t réel), ou topologique séparé.

Soit $0 < \alpha < 1$, $\alpha(.) = \alpha x$, Q_α le corps engendré dans R par α et G un sous-groupe additif. On suppose (1) et (1′) ((1) seulement pour $\mathrm{G} = \{ 0 \}$). Alors, pour $\mathrm{G}' = \mathrm{Q}_\alpha \mathrm{G}$ on a (en particulier si $\mathrm{G} \in \mathbb{B}$)

$$\mathrm{G}' + a \in \mathbb{B}_\mu \Rightarrow \mu(\mathrm{G}' + a) = 0 \text{ ou } 1.$$

Remarque 2. — Ceci s'applique aux lois quasi-stables et semi-stables de [*4*], et stables de [*2*], sans passer par la symétrisation ou le centrage des lois, mais non pour obtenir (6) $\mathrm{G} + a \in \mathbb{B}_\mu \Rightarrow \mu(\mathrm{G} + a) = 0$ ou 1, pour une loi stable. En fait pour α rationnel la condition (2′) ajoutée à $\alpha(\mathrm{G}) = \mathrm{G}$

([2]) $\mathrm{G}_0 - \dot{a}$ peut aussi, par exemple, consister en plusieurs atomes (non réduits à des points, ceux-ci étant nuls par hypothèse), égaux et échangés sous l'action de α.

(pour $\alpha(E) = E$ (2) se réduit à $\alpha(G) = G$) implique que G est un module sur le corps des rationnels (cf. [*8*]), et le théorème ci-dessus n'atteint pas G. (6) est vrai pour les lois gaussiennes même non centrables (alors elles ne sont pas 2-stables) si E contient l'espace autoreproduisant), et (cf. [*3*]) pour les lois stables convexement de Radon dans un espace vectoriel topologique. Pour une large extension de ce résultat (dans le cas vectoriel comme dans celui d'un groupe non abélien) cf. [*5*] et [*7*].

Autres exemples :

E étant vectoriel (topologique localement convexe complet) soit $\mu = P(M)$ une loi de Radon indéfinitivement divisible du type de Poisson et α un opérateur linéaire continu de E dans E, tel que l'image $M_\alpha = \alpha(M)$ de M ne charge pas 0. Alors la condition

$$\alpha(M) \leq \frac{n-1}{n} M \quad \text{pour un } n \text{ assez grand}$$

exprime (1) et (1') (cf. [*8*]). Mais la condition (2') est difficile à interpréter et à vérifier.

Lorsque α est une homothétie de rapport $0 < \alpha < 1$, on obtient des lois de 0-1 pour une certaine classe de lois auto-décomposables (cf. [*1*]) ainsi que pour des lois de la classe L étudiée par Urbanik (cf. [*9*]), et bien d'autres.

Remarque 3. — Lorsque μ se plonge dans un demi-groupe continu μ^t de lois de Radon, on obtient (3) (pour tout $G \in \mathbb{B}$) sous des conditions beaucoup plus générales. Cf. « Lois de zéro-un et lois semi-stables dans un groupe » *à paraître* dans les « Proceedings of the Conference on Probability measures on Groups VI » (Oberwolfach, June 1981).

RÉFÉRENCES

[*1*] DONG M. CHUNG, Characterization of self decomposible probability measures on L. C. T. V. S., *J. Korean Math. Soc.*, t. **15-2**, 1979, p. 139-148.

[*2*] R. M. DUDLEY and M. KANTER, zero-one laws for stable measures, *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. **45**, 1974, p. 245-252.

[*3*] W. KRAKOWIAK, Zero-one laws for stable and semi-stable measures on Banach spaces. *Bull. Acad. Polonaise des Sc. XXVII*, t. **12**, 1978, p. 1044-1049.

[*4*] D. LOUIE and BALRAM S. RAJPUT, *A zero-one dichotomy theorem for r-semi-stable laws on infinite dimensional linear spaces.* Sankhya, 1979 *(in press).*

[*5*] BALRAM RAJPUT et A. TORTRAT, Un théorème de probabilité zéro ou un dans un groupe mesurable ou topologique quelconque. *C. R. Acad. Sci., Paris*, t. **290**, 4 février 1980, p. 251-254.

[*6*] A. TORTRAT, Atomes et lois indéfiniment divisibles dans un espace vectoriel, *Ann. Inst. H. Poincaré*, XIV, t. **3**, 1978, p. 345-349.

[7] A. TORTRAT, Lois stables dans un groupe, *Ann. Inst. H. Poincaré*, XVII, t. **1**, 1981, p. 51-61.

[8] A. TORTRAT, *Lois de zéro-un pour des probabilités semi-stables ou plus générales, dans un espace vectoriel ou un groupe (abélien ou non)*. Colloque de Saint-Flour, 1980. Éditions du C. N. R. S.

[9] K. URBANIK, Levy's probability measures on Banach spaces, *Studia Mathematica*, t. **LXIII**, 1978, p. 283-308.

(Manuscrit reçu le 5 mai 1981)