ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J.-P. DAURÈS

Version multivoque du théorème de Doob

Annales de l'I. H. P., section B, tome 9, nº 2 (1973), p. 167-176
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1973__9_2_167_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. IX, n° 2, 1973, p. 167-176.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Version multivoque du théorème de Doob

par

J.-P. DAURÈS (*)

SUMMARY. — In a first time, we prove that the conditional expectation of an integrable multifunction defined on a probability space with convex compact values in a separable Frechet space is an integrable multifunction with convex compact values. By using this result, we can introduce the notion of integrable multi-martingales taking their values in the convex compact sets of a separable Frechet space. In the second time, we give a generalisation of Doob's theorem for integrable multi-martingales taking theirs values in the convex compact sets of a reflexive Banach space. This generalisation is related to a very recent result of Neveu (Cf. this *Journal*).

INTRODUCTION

Le but final de ce travail qui est inspiré d'un article de Neveu [*10*] est de donner une généralisation du théorème de Doob [7] qui affirme que toute martingale réelle $(X_n, n \in \mathbb{N})$ vérifiant l'hypothèse $\sup_{n \in \mathbb{N}} E(|X_n|) < \infty$ converge presque partout (p. p.), au cas des martingales multivoques à caleurs dans les parties convexes compactes non vides d'un espace de Banach réflexif séparable. On démontrera au passage que l'espérance conditionnelle d'une multi-application intégrable à valeurs dans les parties convexes

(*) Institut de Mathématiques, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier.

compactes d'un espace de Fréchet séparable est une multi-application intégrable à valeurs convexes compactes.

Le résumé des résultats présentés ici a fait l'objet d'une note aux comptes rendus [*6*].

Notations et définitions

Soit (E, d) un espace polonais et $\mathscr{C}$ l'ensemble des parties compactes non vides de E. On rappelle [*1*] que $\mathscr{C}$ muni de la distance de Hausdorff δ définie par :

$$\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{C}, \quad \delta(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \sup \left[\sup_{x \in \mathrm{A}} d(x, \mathrm{B}), \sup_{y \in \mathrm{B}} d(y, \mathrm{A})\right]$$

est un espace polonais. Pour tout espace topologique X, on notera $\mathscr{B}(\mathrm{X})$ sa tribu borélienne. Soit F un espace de Fréchet séparable et $\mathscr{K}$ l'ensemble des parties convexes compactes non vides de F. Muni de la distance de Hausdorff δ, $\mathscr{K}$ est un espace polonais ; de plus la formule de Hörmander montre que l'on peut définir δ par la suite (δ_i) d'écarts finis donnés par

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{K}, \quad \delta_i(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \sup_{x' \in \mathrm{V}_i^0} |\varphi(x', \mathrm{A}) - \varphi(x', \mathrm{B})|$$

où $\varphi(x', \mathrm{A})$ désigne la fonction d'appui de A (i. e. $x' \in \mathrm{F}'$, $\varphi(x', \mathrm{A}) = \sup_{x \in \mathrm{A}} \langle x', x \rangle$) et V_i^0 est le polaire du voisinage V_i de l'origine dans F ; $(\mathrm{V}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ étant une suite décroissante de voisinages convexes équilibrés de l'origine dans F. Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace mesurable abstrait et Γ une multi-application $\mathscr{A}$-mesurable de Ω à valeurs dans l'ensemble des parties compactes non vides de E. On sait par [*1*] que la mesurabilité de Γ équivaut à la mesurabilité de l'application Γ de $(\Omega, \mathscr{A})$ dans $(\mathscr{C}, \mathscr{B}(\mathscr{C}))$. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé complet ; une multi-application $\mathscr{A}$-mesurable Γ de Ω à valeurs dans les parties convexes compactes non vides de F est dite P-intégrable si pour tout $i \in \mathbb{N}$, la fonction scalaire $\mathscr{A}$-mesurable

$$\omega \mapsto \Delta_i(\Gamma(\omega)) = \sup_{x' \in \mathrm{V}_i^0} |\varphi(x', \Gamma(\omega))|$$

est P-intégrable. Remarquons par ailleurs que la mesurabilité de Γ équivaut à la mesurabilité de toutes ses fonçtions d'appui en vertu du théorème 0.11 de [*11*]. L'intégrabilité des fonctions $\Delta_i(\Gamma(\cdot))$ implique que Γ est fortement P-intégrable au sens de [*4*] et [*5*]. Pour toute multi-application P-intégrable Γ de Ω dans les parties convexes compactes non vides de F et toute sous-tribu $\mathscr{B}$ de $\mathscr{A}$, on appelle *espérance conditionnelle de* Γ

par rapport à $\mathscr{B}$, notée $E^{\mathscr{B}}(\Gamma)$, la multi-application P-intégrable (quand elle existe) de Ω à valeurs dans les parties convexes compactes non vides de F qui vérifie

$$\forall x' \in F', \quad E^{\mathscr{B}}[\varphi(x', \Gamma(\cdot))] = \varphi(x', E^{\mathscr{B}}(\Gamma(\cdot))) \qquad \text{p. p.}$$

où $E^{\mathscr{B}}[\varphi(x', \Gamma(\cdot))]$ est l'espérance conditionnelle de $\varphi(x', \Gamma(\cdot))$ au sens de [9]. Dans la suite on notera « intégrable » au lieu de « P-intégrable ».

A) RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Les résultats suivants m'ont été suggérés par M. Valadier.

PROPOSITION. — *Soit* Φ *une application mesurable de* $(\Omega, \mathscr{A})$ *dans un espace mesurable* $(G, \mathscr{G})$ *et soit* f *une application de* Ω *dans un espace polonais* Q. *Pour que* f *soit* $\Phi^{-1}(\mathscr{G})$ *mesurable, il faut et il suffit qu'il existe une application mesurable* h *de* $(G, \mathscr{G})$ *dans* $(Q, \mathscr{B}(Q))$ *telle que* $f = h \circ \Phi$.

Démonstration. — Montrons la nécessité. Supposons que f soit dénombrablement étagée. On a $f(\omega) = x_i$ si $\omega \in A_i$, $i \in I$ dénombrable, $x_i \in Q$, $A_i \in \Phi^{-1}(\mathscr{G})$. Il existe donc $G_i \in \mathscr{G}$ tel que $A_i = \Phi^{-1}(G_i)$.

Posons $C_i = G_i - \bigcup_{p=1}^{i-1} G_p$. On a :

$$\Phi^{-1}(C_i) = \Phi^{-1}(G_i) - \bigcup_{p=1}^{i-1} \Phi^{-1}(G_p) = A_i - \bigcup_{1}^{i-1} A_p = A_i$$

et les C_i sont des éléments disjoints de $\mathscr{G}$.

Soit

$$h(y) = \begin{cases} x_i & \text{si} \quad y \in C_i \\ p \text{ quelconque}, & p \in Q \text{ ailleurs.} \end{cases}$$

Alors

$$(h \circ \Phi)(\omega) = \begin{cases} x_i & \text{si} \quad \omega \in A_i \\ p & \text{ailleurs} \end{cases}$$

donc puisque si $\omega \in A_i$, $\Phi(\omega) \in C_i$, $h \circ \Phi = f$.

Si f est mesurable, il existe une suite de fonctions dénombrablement étagées qui converge vers f. D'après ce qui précède, chacune d'elles est de la forme $h_n \circ \emptyset$.

Soit $H = \{ y \in G \mid \lim_{n \to \infty} h_n(y) \text{ existe} \}$. On a $H \supset \Phi(\Omega)$ car $\lim_{n \to \infty} h_n(\Phi(\omega))$

existe par construction. Si d est une métrique pour laquelle Q est complet, il vient :

$$\mathrm{H} = \bigcap_r \bigcup_n \bigcap_{p,q \geq n} \left\{ y \in \mathrm{G} \mid d(h_p(y), h_q(y)) \leq \frac{1}{r} \right\}.$$

Il suit alors de la continuité de l'application $(x, y) \mapsto d(x, y)$ de $\mathrm{Q} \times \mathrm{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et de la mesurabilité de $y \mapsto (h_p(y), h_q(y))$ de $(\mathrm{G}, \mathscr{G})$ dans $(\mathrm{Q} \times \mathrm{Q}, \mathscr{B}(\mathrm{Q} \times \mathrm{Q}))$ que $\mathrm{H} \in \mathscr{G}$. On pose alors

$$h(y) = \begin{cases} \lim\limits_n h_n(y) & \text{si} \quad y \in \mathrm{H} \\ q \in \mathrm{Q}, \quad q \text{ quelconque}, & \text{si} \quad y \notin \mathrm{H} \end{cases}$$

Alors $(h \circ \Phi)(\omega) = f(\omega)$; et h est mesurable de $(\mathrm{G}, \mathscr{G})$ dans $(\mathrm{Q}, \mathscr{B}(\mathrm{Q}))$.

Remarque. — Cette proposition généralise le théorème T 18 de [*8*].

THÉORÈME 0. — *Soit* $(\Omega, \mathscr{A})$ *un espace mesurable et* Γ *une application mesurable de* $(\Omega, \mathscr{A})$ *dans* $(\mathscr{C}, \mathscr{B}(\mathscr{C}))$. *Alors il existe un ensemble dénombrable dense* $(\sigma_i)_{i \in \mathrm{D}}$ *de sélections* $\mathscr{A}$*-mesurables de la multi-application* Γ, *une application mesurable* Φ *de* $(\Omega, \mathscr{A})$ *dans* $(\mathrm{E}^{\mathrm{D}}, \mathscr{B}(\mathrm{E}^{\mathrm{D}}))$ *et une application mesurable* H *de* $(\mathrm{E}^{\mathrm{D}}, \mathscr{B}(\mathrm{E}^{\mathrm{D}}))$ *dans* $(\mathscr{C}, \mathscr{B}(\mathscr{C}))$ *telle que :*

$$\Gamma = \mathrm{H} \circ \Phi$$

Démonstration. — D'après [*1*] la multi-application Γ de Ω dans les parties compactes non vides de E admet une famille dénombrable dense $(\sigma_i)_{i \in \mathrm{D}}$ de sélections mesurables. Soit Φ l'application mesurable de $(\Omega, \mathscr{A})$ dans $(\mathrm{E}^{\mathrm{D}}, \mathscr{B}(\mathrm{E}^{\mathrm{D}}))$ définie par

$$\Phi(\omega) = (\sigma_i(\omega))_{i \in \mathrm{D}} \qquad (\omega \in \Omega).$$

Alors la tribu $\Phi^{-1}(\mathscr{B}(\mathrm{E}^{\mathrm{D}}))$ contient les éléments de la forme :

$$\Gamma^{-}(\mathrm{U}) = \{ \omega \mid \Gamma(\omega) \cap \mathrm{U} \neq \emptyset \} = \bigcup_{i \in \mathrm{D}} \sigma_i^{-1}(\mathrm{U})$$

où U est ouvert dans E. On en déduit que Γ est une application mesurable de $(\Omega, \Phi^{-1}(\mathscr{B}(\mathrm{E}^{\mathrm{D}})))$ dans $(\mathscr{C}, \mathscr{B}(\mathscr{C}))$. En vertu de la proposition précédente il existe une application mesurable H de $(\mathrm{E}^{\mathrm{D}}, \mathscr{B}(\mathrm{E}^{\mathrm{D}}))$ dans $(\mathscr{C}, \mathscr{B}(\mathscr{C}))$ telle que :

$$\Gamma = \mathrm{H} \circ \Phi.$$

Remarque. — Ce résultat reste vrai si l'on remplace E par F et $\mathscr{C}$ par $\mathscr{K}$ parce que $\mathscr{K}$ muni de la distance de Hausdorff δ est polonais.

THÉORÈME 1. — *Pour toute sous-tribu $\mathscr{B}$ de $\mathscr{A}$, l'espérance conditionnelle d'une multi-application intégrable Γ de Ω dans les parties convexes compactes non vides de* F *est une multi-application intégrable de Ω dans les parties convexes compactes non vides de* F.

Démonstration. — Puisque Γ est mesurable, on peut appliquer les résultats et les notations du théorème 0. Il existe alors une application mesurable Φ de $(\Omega, \mathscr{A})$ dans $(F^D, \mathscr{B}(F^D))$ et une application mesurable H de $(F^D, \mathscr{B}(F^D))$ dans $(\mathscr{K}, \mathscr{B}(\mathscr{K}))$ telles que $\Gamma = H \circ \Phi$. Soit I l'injection mesurable de $(\Omega, \mathscr{A})$ dans $(\Omega, \mathscr{B})$. Puisque F^D est polonais, il existe en vertu du théorème de Jirina [*12*] une probabilité conditionnelle P^I_Φ de Φ par rapport à I. Posons :

$$\Sigma(\omega) = \int_{F^D} H(y) P^I_\Phi(dy \mid \omega)$$

La relation $\int_\Omega \Delta_i(\Gamma(\omega))dP(\omega) < \infty$ s'écrit $\int_\Omega \Delta_i[(H \circ \Phi)(\omega)]dP(\omega) < \infty$. Soit $P_{(\Phi,I)}$ la probabilité image de P par l'application mesurable (Φ, I). Alors, on a :

$$\int_\Omega \Delta_i[(H \circ \Phi)(\omega)]dP(\omega) = \int_\Omega \int_{F^D} \Delta_i(H(y)) P_{(\Phi,I)}(dy, d\omega) < \infty$$

ou

$$\int_\Omega \int_{F^D} \Delta_i(H(y)) P^I_\Phi(dy \mid \omega) P_I(d\omega) < \infty$$

en désignant par P_I l'image de P par l'injection I, donc

$$\int_{F^D} \Delta_i(H(y)) P^I_\Phi(dy \mid \omega) < \infty$$

p. p. sur $(\Omega, \mathscr{B}, P_I)$ et, $y \mapsto \Delta_i(H(y))$ est une application $P^I_\Phi(\,.\mid\omega)$ presque partout intégrable sur $(\Omega, \mathscr{B}, P_I)$, $\forall i$.

D'après le théorème 5 de [*2*] (cf. aussi [*3*]), $\Sigma(\omega)$ est pour presque tout ω un convexe compact de F et on a :

$$\forall x' \in F', \quad \varphi(x', \Sigma(\omega)) = \int_{F^D} \varphi(x', H(y)) P^I_\Phi(dy \mid \omega).$$

Par suite, d'après [*11*] Σ est $\mathscr{B}$-mesurable et P_I-intégrable. Or pour tout $B \in \mathscr{B}$, on a :

$$\begin{aligned}\int_B \varphi(x', \Sigma(\omega))dP(\omega) &= \int_\Omega \chi_B(\omega) \int_{F^D} \varphi(x', H(y)) P_{(\Phi,I)}(dy, d\omega) \\ &= \int_\Omega \chi_B(\omega)\varphi(x', \Gamma(\omega))dP(\omega) = \int_B \varphi(x', \Gamma(\omega))P(d\omega).\end{aligned}$$

D'où :

$$\varphi(x', \Sigma(\cdot)) = E^{\mathscr{B}}[\varphi(x', \Gamma(\cdot))].$$

Donc $E^{\mathscr{B}}(\Gamma)$ est égale à Σ, ce qui termine la démonstration.

Grâce au théorème 1, on peut maintenant introduire la définition suivante :

DÉFINITION. — *Étant donnée une suite $(\mathscr{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-tribu de $\mathscr{A}$, une suite $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de multi-applications de Ω à valeurs dans les parties convexes compactes non vides de F est appelée martingale intégrable si :*

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, Γ_n *est* $\mathscr{B}_n$ *mesurable et intégrable,*

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma_n = E^{\mathscr{B}_n}(\Gamma_{n+1})$.

B) THÉORÈME DE CONVERGENCE ET CONSÉQUENCE

Dans ce paragraphe, F est un espace de Banach réflexif séparable. Les formules données dans les notations s'écrivent :

$$\mathrm{K}, \mathrm{K}' \in \mathscr{K} \qquad \delta(\mathrm{K}, \mathrm{K}') = \sup_{\|x'\|\leq 1} |\varphi(x', \mathrm{K}) - \varphi(x', \mathrm{K}')|$$

$$\mathrm{K} \in \mathscr{K}, \qquad \Delta(\mathrm{K}) = \delta(\mathrm{K}, \{0\})$$

THÉORÈME 2. — *Les notations étant celles de la définition donnée dans le paragraphe* A, *soient $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale intégrable et* X *une multi-application $\mathscr{A}$-mesurable de Ω à valeurs dans les parties convexes compactes non vides de* F. *On suppose les hypothèses suivantes vérifiées :*

a) $$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int \Delta(\Gamma_n(\cdot))d\mathrm{P} < \infty$$

b) $$\forall x' \in \mathrm{F}', \quad \forall \omega \in \Omega, \quad \lim_{n\to\infty} \varphi(x', \Gamma_n(\omega)) \leq \varphi(x', \mathrm{X}(\omega))$$

Alors il existe une multi-application Γ_∞-intégrable de Ω à valeurs dans les parties convexes compactes non vides de F *telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \delta(\Gamma_n(\omega), \Gamma_\infty(\omega)) = 0 \qquad \text{p. p.}$$

Démonstration. — Soit $x' \in \mathrm{F}'$. La suite $\{\varphi(x', \Gamma_n(\cdot))\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale réelle intégrable. Le théorème de Doob [7] classique entraîne l'existence et l'intégrabilité des limites :

$$f(x')(\omega) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x', \Gamma_n(\omega))$$

en dehors d'un négligeable dépendant de x'. Soit D une partie dénombrable fortement dense dans la boule unité de F'. On a alors

$$\Delta(\Gamma_n(\cdot)) = \sup_{x' \in D} |\varphi(x', \Gamma_n(\cdot))|.$$

Donc $\Delta(\Gamma_n(\cdot))$ est une sous-martingale positive. L'hypothèse du théorème et le théorème de Doob classique entraînent l'existence et l'intégrabilité de

$$\omega \mapsto U(\omega) = \lim_{n \to \infty} \Delta(\Gamma_n(\omega)) \qquad \text{p. p.}$$

D'où

$$|f(x')(\cdot)| \leq \|x'\| U(\cdot)$$

Soit $U'(\omega)$ un représentant de U dans $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Posons :

$$\Omega_n = \{ \omega \mid n \leq U'(\omega) < n + 1 \}.$$

Sur chaque Ω_n, $f(x')(\omega)$ est essentiellement bornée. Soit $\psi(x')(\omega)$ le représentant de $f(x')(\omega)$ obtenu en appliquant le théorème de relèvement de Ionescu-Tulcea ([*8*], p. 195) à chaque Ω_n et en recollant les morceaux. La fonction $\psi(x')(\omega)$ vérifie alors les relations suivantes :

$$\begin{cases} \forall x', y' \in F', \quad \forall \omega \in \Omega, \quad \psi(x' + y')(\omega) \leq \psi(x')(\omega) + \psi(y')(\omega) \\ \forall x' \in F', \quad \forall \omega \in \Omega, \quad \forall \lambda \geq 0, \quad \psi(\lambda x')(\omega) = \lambda \psi(x')(\omega) \\ \forall x' \in F', \quad \forall \omega \in \Omega, \quad |\psi(x')(\omega)| \leq \|x'\| U'(\omega) \end{cases}$$

Par suite quels que soient x' et y' dans F' et ω dans Ω, on a :

$$|\psi(x')(\omega) - \psi(y')(\omega)| \leq \|x' - y'\| U'(\omega)$$

En modifiant U' sur un négligeable on peut supposer U' partout finie. On déduit de ce qui précède qu'il existe un convexe fermé borné non vide $\Gamma_\infty(\omega)$ tel que :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \forall x' \in F', \quad \psi(x')(\omega) = \varphi(x', \Gamma_\infty(\omega)).$$

On a alors :

$$\lim_{n \to \infty} \varphi(x', \Gamma_n(\omega)) = \varphi(x', \Gamma_\infty(\omega))$$

en dehors d'un négligeable $N_{x'}$. Soient x'_i une suite fortement dense dans F', $N_{x'_i}$ un négligeable en dehors duquel $\lim_{n \to \infty} \varphi(x'_i, \Gamma_n(\omega)) = \varphi(x'_i, \Gamma_\infty(\omega))$ et

$$N = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_{x'_i}.$$

D'après *b*), pour $\omega \notin N$, on a :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \varphi(x'_i, \Gamma_\infty(\omega)) \leq \varphi(x'_i, X(\omega)).$$

La suite x'_i étant fortement dense dans F′, on a :

$$\forall x' \in F', \quad \varphi(x', \Gamma_\infty(\omega)) \leq \varphi(x', X(\omega))$$

Donc

$$\Gamma_\infty(\omega) \subset X(\omega) \qquad \text{p. p.}$$

et $\Gamma_\infty(\omega)$ est compact dans F p. p. et, la multi-application Γ_∞ est intégrable par construction. Il nous reste à montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \delta(\Gamma_n(\omega), \Gamma_\infty(\omega)) = 0 \qquad \text{p. p.}$$

Or cette assertion résulte du lemme suivant (inspiré d'un résultat de Neveu [*10*]).

LEMME. — *Soit* $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une martingale intégrable à valeurs dans les convexes compacts non vides d'un espace de Fréchet séparable* F, *qui vérifie les deux propriétés suivantes :*

a) $$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \int \Delta_i(\Gamma_n(\cdot))dP < \infty$$

b) *il existe une multi-application intégrable* Γ_∞ *à valeurs dans les parties convexes compactes non vides de* F *telle que :*

$$\forall x' \in F', \quad \lim_{n\to\infty} \varphi(x', \Gamma_n(\omega)) = \varphi(x', \Gamma_\infty(\omega)) \qquad \text{p. p.}$$

Alors :

$$\lim_{n\to\infty} \delta(\Gamma_n(\omega), \Gamma_\infty(\omega)) = 0 \qquad \text{p. p.}$$

Démonstration. — Soit K un élément fixé de $\mathscr{K}$. Considérons les sous-martingales positives $\{ \mid \varphi(x', \Gamma_n(\cdot)) - \varphi(x', K) \mid, n \in \mathbb{N} \}$; les x' parcourant un sous-ensemble dénombrable dense D_i pour la topologie de la convergence compacte dans V_i^0. Puisque

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int \sup_{D_i} \mid \varphi(x', \Gamma_n(\cdot)) - \varphi(x', K) \mid dP \leq \Delta_i(K) + \sup_{n\in\mathbb{N}} \int \Delta_i(\Gamma_n(\cdot))dP$$

il suit du lemme 4 de Neveu [*10*] que la suite $\delta_i(\Gamma_n(\cdot), K)$ converge p. p. vers $\delta_i(\Gamma_\infty(\cdot), K)$. Puisque $\mathscr{K}$ est polonais, on peut trouver un événement négligeable Ω_0 en dehors duquel $\delta_i(\Gamma_n(\cdot), K)$ converge vers $\delta_i(\Gamma_\infty(\cdot), K)$ pour tout K appartenant à une partie dénombrable dense $\mathscr{L}$ de $\mathscr{K}$. Puisque $\Gamma_\infty(\omega) \in \mathscr{K}$, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe Q appartenant à $\mathscr{L}$ tel que

$$\delta_i(\Gamma_\infty(\omega), Q) \leq \varepsilon$$

Donc

$$\begin{aligned} \delta_i(\Gamma_\infty(\omega), \Gamma_n(\omega)) &\leq \delta_i(\Gamma_\infty(\omega), Q) + \delta_i(Q, \Gamma_n(\omega)) \\ &\leq \varepsilon + \delta_i(Q, \Gamma_n(\omega)) \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

pour n suffisamment grand. Puisque i est arbitraire, on a bien

$$\lim_{n\to\infty} \delta(\Gamma_n(\omega), \Gamma_\infty(\omega)) = 0 \qquad \text{p. p.}$$

COROLLAIRE. — *Avec les notations du théorème* 2, *si pour tout* $\omega \in \Omega$, $\Gamma_n(\omega) \subset \lambda_n(\omega)Q$ *où* Q *est un ensemble convexe compact équilibré non vide de* F *et où la suite* $(\lambda_n(\cdot))$ *est équi-intégrable, et si les* Γ_n *vérifient l'hypothèse* b), *on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \int \delta(\Gamma_n(\omega), \Gamma_\infty(\omega))dP(\omega) = 0.$$

Démonstration. — On a $\Delta(\Gamma_n(\omega)) \leq |\lambda_n(\omega)|\Delta(Q)$. Puisque $|\lambda_n(\cdot)|$ est équi-intégrable, elle est bornée dans L^1 donc il en est de même de $\Delta(\Gamma_n(\cdot))$. On en déduit que les Γ_n vérifient l'hypothèse *a*) du théorème 2. Par suite il existe une multi-application Γ_∞ intégrable de Ω à valeurs dans les parties convexes compactes non vides de F telle que

$$\lim_{n\to\infty} \delta(\Gamma_n(\omega), \Gamma_\infty(\omega)) = 0 \qquad \text{p. p.}$$

De plus $\delta(\Gamma_n(\omega), \Gamma_\infty(\omega)) \leq \Delta(\Gamma_n(\omega)) + \Delta(\Gamma_\infty(\omega))$. Donc puisque

$$\Delta(\lambda_n(\cdot)Q) = |\lambda_n(\cdot)|\Delta(Q)$$

est équi-intégrable, il en est de même de $\Delta(\Gamma_n(\cdot))$ et de $\delta(\Gamma_n(\cdot), \Gamma_\infty(\cdot))$. On déduit alors de ([9], p. 50) que

$$\lim_{n\to\infty} \int \delta(\Gamma_n(\cdot), \Gamma_\infty(\cdot))dP = 0.$$

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] Ch. CASTAING, *Sur les multi-applications mesurables.* Thèse, Faculté des Sciences de Caen, 1967.

[*2*] Ch. CASTAING, Quelques résultats de compacité liés à l'intégration. *C. R. Acad. Sci.* (Paris), série A, t. **270**, 1970, p. 1732-1735.

[*3*] Ch. CASTAING, *Quelques applications du théorème de Banach-Dieudonné à l'intégration.* Publication n° 67. Institut des Mathématiques. Université des Sciences et Techniques du Languedoc. Montpellier.

[*4*] J.-P. DAURÈS, *Opérateurs extrémaux et décomposables. Convergence des martingales multivoques.* Thèse 3e cycle. Institut des Mathématiques. Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier, 1972.

[*5*] J.-P. DAURÈS, Convergence presque sûre des martingales multivoques à valeurs dans les convexes compacts d'un espace de Fréchet séparable. *C. R. Acad. Sci.* (Paris), série A, t. **274**, 1972, p. 1735-1738.

[6] J.-P. DAURÈS, Version multivoque du théorème de Doob. *C. R. Acad. Sci.* (Paris), série A, t. **275**, 1972, p. 527-530.
[7] J.-L. DOOB, *Stochastic Processes*, Wiley, New York.
[8] P. A. MEYER, *Probabilités et Potentiel*, Hermann, Paris.
[9] J. NEVEU, *Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités*, Masson, Paris, 1964.
[10] J. NEVEU, Convergence presque sûre de martingales multivoques. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, Section B, Vol. VIII, n° 1, 1972, p. 1-7.
[11] M. VALADIER, *Contribution à l'Analyse Convexe*, Thèse, Faculté des Sciences de Paris, 1970.
[12] M. VALADIER, *Comparaison des trois théorèmes de désintégration.* Séminaire d'Analyse Convexe. Institut des Mathématiques. Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier, 1972.

(Manuscrit reçu le 14 décembre 1972).