ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

A. HANEN

Processus ponctuels stationnaires et flots spéciaux

Annales de l'I. H. P., section B, tome 7, nº 1 (1971), p. 23-30
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1971__7_1_23_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. VII, n° 1, 1971, p. 23-30. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Processus ponctuels stationnaires et flots spéciaux

par

A. HANEN
(Paris)

RÉSUMÉ. — On donne, en étendant un résultat d'Ambrose, une construction de la mesure de Palm associée à un processus ponctuel stationnaire. On en déduit quelques propriétés des processus ponctuels stationnaires ergodiques, en particulier le calcul de leur entropie.

SUMMARY. — We give, extending, an Ambrose's result, a construction of Palm's measure associated to a stationnary point process—some properties of ergodic stationnary point processes are then given, peculiarly the calculus of their entropy.

§ 1. INTRODUCTION ET NOTATIONS

Soit Ω l'ensemble des parties localement finies de R, vérifiant, pour tout $\omega \in \Omega$ $\sup \omega = +\infty$, $\inf \omega = -\infty$.

Soit $\mathcal{A}$ la σ algèbre initiale associée aux applications

$$A \to N_A(\omega) = \text{Cardinal de } (A \cap \omega),$$

A parcourant la σ algèbre β des Boréliens de R.

$\Omega_0 = \{ \omega : 0 \in \omega \}$; $\mathcal{A}_0 = \Omega_0 \cap \mathcal{A}$

$$\xi_0(\omega) = \inf_{\substack{x \in \omega \\ x \geq 0}} x \qquad \xi_n(\omega) = \inf_{\substack{x > \xi_{n-1}(\omega) \\ x \in \omega}} x \qquad \eta_n(\omega) = \xi_{n+1}(\omega) - \xi_n(\omega)$$

La suite $\xi_n(\omega)$ est donc une suite strictement croissante, qui tend vers $\pm\infty$ si n tend vers $\pm\infty$ et

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}\eta_n(\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty}\eta_n(\omega) = +\infty$$

Soit ϕ_t l'application de Ω dans Ω définie par $x \in \phi_t(\omega) \Leftrightarrow x - t \in \omega$; on notera $\omega + t$ l'élément $\phi_t(\omega)$ de Ω. On montre aisément le :

LEMME. — Les applications ξ_n et η_n sont $\mathcal{A}$-mesurables et $\Phi = (\Phi_t)_{t\in\mathrm{R}}$ forme un groupe de bijections bimesurables de $(\Omega, \mathcal{A})$, tel que l'application $(\omega, t) \to \phi_t(\omega)$ soit mesurable pour les σ-algèbres $\mathcal{A} \otimes \beta$ sur $\Omega \times \mathrm{R}$ et $\mathcal{A}$ sur Ω.

§ 2. FLOT SPÉCIAL ASSOCIÉ AU GROUPE $(\phi_t)_{t\in\mathrm{R}}$

THÉORÈME. — Soit $\overline{\Omega}$ le sous-ensemble de $\Omega_0 \times \mathrm{R}$ défini par la relation

$$\overline{\omega} \in \Omega \Leftrightarrow \overline{\omega} = (\omega_0, u) \quad , \quad 0 \leqslant u < \eta_{-1}(\omega_0)$$

1) L'application

$$\omega \to \tau(\omega) = (\omega - \xi_0(\omega),\ \xi_0(\omega))$$

est une bijection bimesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ sur $(\overline{\Omega}, \mathcal{A} \otimes \beta \cap \overline{\Omega})$.

2) L'application·S

$$\omega_0 \to \omega_0 + \eta_{-1}(\omega_0)$$

est une bijection bimesurable de $(\Omega_0, \mathcal{A}_0)$ sur $(\Omega_0, \mathcal{A}_0)$.

3) L'image par l'application τ du groupe ϕ_t est le flot spécial [*1*] [*4*] construit sur $(\Omega_0, \mathcal{A}_0, \eta_{-1}, \mathrm{S})$.

Démonstration

1) Il est clair tout d'abord que $\overline{\Omega}$ est un sous-ensemble mesurable de $(\Omega_0 \times \mathrm{R}^+, \mathcal{A}_0 \otimes \beta)$. D'autre part, $\omega - \xi_0(\omega)$ est bien un élément de Ω_0, car $0 \in \omega - \xi_0(\omega) \Leftrightarrow \xi_0(\omega) \in \omega$, ce qui a bien lieu. De plus

$$\eta_{-1}(\omega - \xi_0(\omega)) = \eta_{-1}(\omega) = \xi_0(\omega) - \xi_{-1}(\omega) > \xi_0(\omega)$$

Donc $(\omega - \xi_0(\omega), \xi_0(\omega)) \in \overline{\Omega}$. On vérifie aisément que l'application $\overline{\tau}$ de $\overline{\Omega}$ dans Ω, définie par $\overline{\tau}(\omega_0, u) = \omega_0 + u$ est l'application réciproque de τ; la bimesurabilité de τ est immédiate.

2) Il est clair que l'application S est une application de Ω_0 dans Ω_0, telle que

$$\eta_0(S\omega_0) = \eta_{-1}(\omega_0)$$

L'application $\omega_0 \to \omega_0 - \eta_0(\omega_0)$ est l'application réciproque de S, qui est donc une bijection dont on montre facilement la bimesurabilité. Remarquons d'autre part que

$$S(\omega - \xi_0(\omega)) = \omega - \xi_{-1}(\omega)$$

et plus généralement

$$\omega - \xi_j(\omega) = S^{-j}(\omega - \xi_0(\omega)).$$

De plus,

$$\eta_k(\omega) = \eta_k(\omega - \xi_0(\omega)) = \eta_{-1}(\omega - \xi_{k+1}(\omega)) = \eta_{-1}(S^{-(k+1)}(\omega_0)$$

(en posant $\omega_0 = \omega - \xi_0(\omega)$).

3) L'application $\eta_{-1}(\omega_0)$ vérifie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \eta_{-1}(S^n(\omega_0)) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \eta_n(\omega_0) = +\infty$$

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \eta_{-1}(S^n(\omega_0)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \eta_n(\omega_0) = +\infty$$

On peut donc [*1*] [*4*] définir le flot spécial T_t construit sur (Ω_0, η_{-1}, S).

Il reste à vérifier la commutativité du diagramme.

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\Phi_t} & \Omega \\ {\scriptstyle\tau}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tau} \\ \bar{\Omega} & \xrightarrow{T_t} & \bar{\Omega} \end{array}$$

ie $(T_t \circ \tau)(\omega) = (\tau_0\phi_t)(\omega)$

$(\tau_0\phi_t)(\omega) \quad = \tau(\omega + t) = (\omega + t - \xi_0(\omega + t), \xi_0(\omega + t))$

Soit $j = \inf\limits_{\xi_k(\omega) \geqslant -t} k$; on a $\xi_0(\omega + t) = \xi_j(\omega) + t$ et donc

$$\omega + t - \xi_0(\omega + t) = \omega - \xi_j(\omega) = S^{-j}(\omega - \xi_0(\omega)) = S^{-j}(\omega_0)$$

où

$$\omega_0 = \omega - \xi_0(\omega)$$

$$\xi_0(\omega + t) = \xi_j(\omega) + t = \xi_j(\omega) - \xi_0(\omega) + t + \xi_0(\omega)$$

Supposons $j \leqslant 0$

$$\xi_0(\omega + t) = \xi_0(\omega) + t - \sum_{k=j}^{k=-1} \eta_k(\omega) = \xi_0(\omega) + t - \sum_{k=j}^{k=-1} \eta_k(\omega_0)$$

$$= \xi_0(\omega) + t - \sum_{k=j}^{k=-1} \eta_{-1}(S^{-(k+1)}(\omega_0))$$

$$= \xi_0(\omega) + t - \sum_{k'=0}^{-j-1} \eta_{-1}(S^{k'}(\omega_0))$$

Donc, en posant $u = \xi_0(\omega)$, $j' = -j$

$$(\tau_0 \phi_t)(\omega) = (S^{j'}(\omega_0)), u + t - \sum_{k'=0}^{j'-1} \eta_{-1}(S^{k'}(\omega_0)) \tag{1}$$

$$(T_t \circ \tau)(\omega) = T_t(\omega - \xi_0(\omega), \xi_0(\omega)) = T_t(\omega_0, u) \tag{2}$$

D'après la définition d'un flot spécial (1) et (2) coïncident; la démonstration est analogue dans le cas $j > 0$; on a bien finalement

$$\tau \circ \phi_t = T_t \circ \tau, \quad \text{c. q. f. d.}$$

§ 3. MESURE DE PALM ASSOCIÉE A UN PROCESSUS PONCTUEL STATIONNAIRE

Rappelons [*5*] [*6*] qu'on appelle processus ponctuel stationnaire toute probabilité λ sur $(\Omega, \mathcal{A})$, invariante par le flot (ϕ_t).

En vertu du théorème précédent, la mesure image de λ par l'application τ, $\tau(\lambda)$, sera une mesure sur $(\overline{\Omega}, \mathcal{A} \otimes \beta \cap \overline{\Omega})$, invariante par le flot spécial (T_t).

THÉORÈME. — Soit λ un processus ponctuel stationnaire.

Il existe sur $(\Omega_0, \mathcal{A}_0)$ une mesure v_0 unique telle que

1) S soit un automorphisme de $(\Omega_0, \mathcal{A}_0, v_0)$

2) $\int_\Omega f d\lambda = \int_{\Omega_0} \left(\int_0^{\eta_{-1}(\omega_0)} f(\omega_0 + u) du \right) dv_0$, pour toute fonction mesurable positive définie sur $(\Omega_0, \mathcal{A}_0)$.

Démonstration. — Soit $\overline{\mathcal{A}}$ la complétée de $(\mathcal{A}_0 \otimes \beta) \cap \overline{\Omega}$ pour la mesure $\tau(\lambda)$, $\overline{m}$ la complétée de $\tau(\lambda)$; le flot T_t sur $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{m})$ vérifie les conditions suivantes :

1) T_t est un groupe d'automorphismes de $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{m})$,

2) l'application $(\bar{\omega}, t) \to T_t(\bar{\omega})$ est $\bar{\mathcal{A}} \hat{\otimes} \beta$ mesurable,

3) si $\bar{\omega} = (\omega_0, u)$, les applications $\bar{\omega} \to F(\bar{\omega}) = \eta_{-1}(\omega_0)$ et $\bar{\omega} \to G(\bar{\omega}) = u$ sont deux applications mesurables, à valeurs dans (R, β).

On peut montrer, si ces conditions sont vérifiées, l'existence sur Ω_0 d'une structure d'espace mesuré complet $(\tilde{\mathcal{A}}, m)$, telle que :

1) S soit un automorphisme de $(\Omega_0, \tilde{\mathcal{A}}, m)$,

2) $\bar{\mathcal{A}}$ est la complétée de $(\tilde{\mathcal{A}} \otimes \beta) \cap \bar{\Omega}$ pour la mesure produit $m \otimes dx$, restreinte à $\bar{\Omega}$, dx désignant la mesure de Lebesgue sur (R, β) et $\bar{m}$ coïncide avec la complétée de la restriction à $\bar{\Omega}$ de $m \otimes dx$.

$\tilde{\mathcal{A}}$ est définie ainsi :

$$A \in \tilde{\mathcal{A}} \Leftrightarrow (A \times R) \cap \bar{\Omega} \in \bar{\mathcal{A}}$$

m se définit d'abord sur les ensembles $A \times [o, c[$ contenus dans $\bar{\Omega}$ par la formule $m(A) = \frac{1}{c} \bar{m}(A \times [o, c[)$, dont on montre l'invariance lorsque c varie; ceci s'étend aisément ensuite aux éléments de $\tilde{\mathcal{A}}$; ce résultat est une extension de celui obtenu par Ambrose [*1*], dans le cas d'un flot spécial strict [*1*] [*4*].

Dans le cas qui nous intéresse, on a

$$A \in \mathcal{A}_0 \Rightarrow A \times R \cap \bar{\Omega} \in (\mathcal{A}_0 \otimes \beta) \cap \bar{\Omega} \subset \bar{\mathcal{A}},$$

et donc $A \in \tilde{\mathcal{A}}$; comme S laisse $\mathcal{A}_0$ invariante, la restriction v_0 de m à $\mathcal{A}_0$ est telle que S est un automorphisme de $(\Omega_0, \mathcal{A}_0, v_0)$.

D'autre part, la formule définissant m montre que $\tau(\lambda)$ et $v_0 \otimes dx$ coïncident sur $(\mathcal{A}_0 \otimes \beta) \cap \bar{\Omega}$, car si $A \in \mathcal{A}_0$, $A \times [o, c[\subset \bar{\Omega}$, alors

$$A \times [o, c[\in \mathcal{A}_0 \otimes \beta \cap \bar{\Omega}$$

et donc

$$\bar{m}(A \times [o, c[) = \tau(\lambda)(A \times [o, c[) = v_0(A) \times c = (v_0 \otimes dx)(A \times [o, c[);$$

On en déduit aisément qu'alors

$$\tau(\lambda) = v_0 \otimes dx \quad \text{sur} \quad (\mathcal{A}_0 \otimes \beta) \cap \bar{\Omega}$$

La relation (2) résulte alors immédiatement du théorème de Fubini et du théorème de transfert des mesures; on en déduit aisément l'unicité de la mesure v_0. La mesure v_0 s'appelle mesure de Palm associée au processus ponctuel stationnaire λ. Son existence et la relation (2) ont été montrées, par des méthodes différentes, par Ryll Nardzewski [*5*] et Neveu [*6*].

§ 4. RELATIONS ENTRE MESURE DE PALM ET LOI DES INTERVALLES

Soit $Y \subset (R^+)^Z$ la classe des suites bilatères positives définie ainsi

$$y \in Y \Leftrightarrow y = (y_n)_{n \in Z} \quad , \quad y_n > 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{-\infty}^{0} y_n = \sum_{0}^{+\infty} y_n = +\infty$$

$\mathcal{Y}$ la σ-algèbre canonique associée à Y, θ la translation définie sur $(Y, \mathcal{Y})$ par $(\theta(y))_n = y_{n+1}$.

Soit H l'application de Ω dans Y

$$\omega \to (\eta_n(\omega)),\ n \in Z$$

H est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(Y, \mathcal{Y})$, possédant les propriétés suivantes.

THÉORÈME. — La restriction de H à Ω_0 est une bijection bimesurable de $(\Omega_0, \mathcal{A}_0)$ sur $(Y, \mathcal{Y})$, rendant le diagramme commutatif.

$$\begin{array}{ccc} \Omega_0 & \xrightarrow{S^{-1}} & \Omega_0 \\ {\scriptstyle H}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H} \\ Y & \xrightarrow{\theta} & Y \end{array}$$

Démonstration. — On a les relations

$$\xi_n(\omega_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \eta_k(\omega_0) \qquad n > 0$$

$$\xi_0(\omega_0) = 0$$

$$\xi_n(\omega_0) = -\sum_{k=-1}^{k=n} \eta_k(\omega) \qquad n < 0$$

qui définissent les $\xi_n(\omega_0)$ et donc ω_0, en fonction des $(\eta_n(\omega_0))$, cela montre que l'application H est bijective.

D'autre part,

$$((\theta \circ H)(\omega_0))_n = (H(\omega_0))_{n+1} = \eta_{n+1}(\omega_0)$$

$$((H \circ S^{-1})(\omega_0))_n = \eta_n(S^{-1}(\omega_0)) = \eta_{n+1}(\omega_0)$$

Ce qui montre bien la commutativité du diagramme.

Soit v la mesure sur $(Y, \mathcal{Y})$ image de la mesure v_0 sur $(\Omega_0, \mathcal{A}_0)$ par l'application H.

THÉORÈME

1) La mesure v sur $(Y, \mathcal{Y})$ est θ invariante.

2) ϕ_t est λ ergodique $\Leftrightarrow$ S est v_0 ergodique $\Leftrightarrow$ θ est v ergodique.

3) Si la mesure v_0 est finie et si $v_0' = \dfrac{v_0}{v_0[\Omega_0]}$, $v' = \dfrac{v}{v(Y)}$.

a) $v(Y) = v_0(\Omega_0) = \alpha$,

b) si $\widehat{h}(\phi_t)$ (resp. $\widehat{h}(S), \widehat{h}(\theta)$) est l'entropie de l'automorphisme ϕ_t (resp. S, θ) sur $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ (resp. $(\Omega_0, \mathcal{A}_0, v_0')$, $(Y, \mathcal{Y}, v')$,

$$\widehat{h}(\phi_t) = \alpha \mid t \mid \widehat{h}(\theta) = \alpha \mid t \mid \widehat{h}(S)$$

Démonstration. — Le 1) résulte immédiatement de l'invariance de S par v_0 et de la commutativité du diagramme du théorème précédent. Il en résulte que les systèmes dynamiques $(\Omega_0, \mathcal{A}_0, v_0, S)$ et $(Y, \mathcal{Y}, v, \theta)$ sont spatialement isomorphes.

Le 2) vient d'un résultat d'Ambrose sur les flots mesurés spéciaux.

T_t est $\overline{m}$ ergodique $\Leftrightarrow$ S est m ergodique, T_t désignant le flot spécial mesuré associé à $(\Omega, \mathcal{A}, m, f, S)$.

Ici, ϕ_t est λ ergodique $\Leftrightarrow$ T_t est $\tau(\lambda)$ ergodique $\Leftrightarrow$ T_t est $\overline{m}$ ergodique $\Rightarrow$ S est m ergodique $\Rightarrow$ S est v_0 ergodique sur $(\Omega_0, \mathcal{A}_0)$.

Réciproquement, S v_0 ergodique sur $(\Omega_0, \mathcal{A}_0)$ $\Rightarrow$ S est $\widehat{v}_0$ ergodique sur $(\Omega_0, \widehat{\mathcal{A}}_0)$ ($\widehat{v}_0$ désignant la complétée de v_0 et $\widehat{\mathcal{A}}_0$ celle de $\mathcal{A}_0$ pour v_0) $\Rightarrow$ T_t est $\widehat{v}_0 \widehat{\otimes} dx \cap \overline{\Omega}$ ergodique $\Rightarrow$ T_t est $(v_0 \times dx) \cap \overline{\Omega}$ ergodique $\Rightarrow$ T_t est $\tau(\lambda)$ ergodique $\Leftrightarrow$ ϕ_t λ ergodique. L'isomorphisme spatial de $(\Omega_0, \mathcal{A}_0, v_0, S)$ et $(Y, \mathcal{Y}, v, \theta)$ donne S v_0 ergodique $\Leftrightarrow$ θ v ergodique, ce même isomorphisme spatial implique dans le 3), *a)* et le fait que $\widehat{h}(S) = \widehat{h}(\theta)$. D'autre part, d'après [*3*] [*4*]

$$\widehat{h}(\phi_t) = \mid t \mid \widehat{h}(\phi_1) = \frac{\mid t \mid \widehat{h}(S)}{E_{v_0'}(\eta^{-1}(\omega_0))}$$

mais

$$\lambda(\Omega) = \int_{\Omega_0} \eta^{-1}(\omega_0) dv_0 = 1 \Rightarrow \int_{\Omega_0} \eta_{-1}(\omega_0') dv_0' = \frac{1}{v_0(\Omega_0)} = \frac{1}{\alpha}$$

d'où le résultat :

$$\widehat{h}(\phi_t) = \alpha \mid t \,[\, \widehat{h}(S).$$

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] Ambrose et Kakutani, Structure and continuity of measurable flows, *Duke Math.*, t. **9**, 1952, p. 25-42.

[*2*] Ambrose, Representation of ergodic flows, *Ann. Math.*, t. **42**, 1941, p. 723-729.

[*3*] Abramov, On flux en tropy, *D. A. H. C C C P*, t. **128**, n° 5, 1959, p. 873-875.

[*4*] Totoki, Tim change of flows. *Memoirs of the Faculty of Sciences*, Kyushu University, Série A, vol. **20**, n° 1, 1966, p. 27-54.

[*5*] Neveu, CRAS 67 267, 1968, p. 561-564.

[*6*] Ryll-Nardzewski, Remarks on processes of calls, Proceedings IVth Berkeley Symposium, (6), 2, p. 455-463.

(Manuscrit reçu le 10 octobre 1970).