ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN-PIERRE CAUBET

Sur les processus à valeurs dans le cube fondamental de Hilbert

Annales de l'I. H. P., section B, tome 5, nº 3 (1969), p. 245-254

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1969__5_3_245_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. V, n° 3, 1969, p. 245-254. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Sur les processus à valeurs dans le cube fondamental de Hilbert

par

Jean-Pierre CAUBET
Département de Mathématiques.
Faculté des Sciences de Poitiers.

RÉSUMÉ. — Classification des trajectoires d'un tel processus selon leurs discontinuités, et application à la classification des semi-groupes sous-markoviens stationnaires définis sur un espace dénombrable.

ABSTRACT. — Classification of the paths of such processes according to their discontinuities, and application to the classification of submarkovian stationary semigroups defined on a denumerable space of states.

I. PRÉLIMINAIRES

Soit X un espace muni d'une σ-algèbre $\mathscr{X}$, et T un ensemble quelconque. On pose $\Omega = X^T$, l'élément générique de Ω étant désigné par $\omega = \{ \omega_t, t \in T \}$. On désigne par $\mathscr{A}$ la σ-algèbre des parties de Ω engendrée par les ensembles cylindriques finis $C = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \{ \omega : \omega_{t_i} \in C_i \}$ où pour chaque indice i on a $C_i \in \mathscr{X}$. Enfin on suppose l'espace mesurable $(\Omega, \mathscr{A})$ muni d'une probabilité P, et l'on désigne par $\overline{\mathscr{A}}$ la complétée de $\mathscr{A}$ par P.

On appelle condition toute application $k : T \to \mathscr{X}$. Pour toute condition $k = \{ k_t, t \in T \}$ et pour toute partie $S \subset T$ on pose

$$\Omega_k^S = \{ \omega : \omega_t \in k_t \quad \forall t \in S \}$$

Ainsi, dès que S est dénombrable, l'événement Ω_k^S est dans $\mathscr{A}$. Pour toute condition k, il existe ainsi une partie dénombrable $S \subset T$ telle que $P(\Omega_k^S)$ soit la borne supérieure des nombres $P(\Omega_k^{S'})$ lorsque S' parcourt les parties dénombrables de T. Dans ces conditions, on a pour tout

$$t \in T \qquad P(\Omega_k^S - \Omega_k^{\{t\}}) = 0$$

et l'on dit que l'ensemble S détermine la condition k.

Soit maintenant $\mathscr{K} \subset \mathscr{X}$ une famille d'ensembles telle que $\mathscr{X} \in \mathscr{K}$ et de plus compacte au sens séquentiel suivant: pour toute suite (K_n) d'éléments de $\mathscr{K}$ d'intersection $\cap K_n = \emptyset$, il existe un entier m tel que

$$\bigcap_{n<m} K_n = \emptyset.$$

Toute condition $k: T \to \mathscr{K}$ sera appelée une $\mathscr{K}$-condition.

On peut alors établir [4] [5] les résultats suivants:

Lemme 1. — *Soit une suite (k_n) de $\mathscr{K}$-conditions déterminées respectivement par S_n. Alors l'ensemble*

$$N_* = \bigcup_n \{ \Omega_{k_n}^{S_n} - \Omega_{k_n}^T \}$$

a une probabilité intérieure nulle.

Proposition 1. — *Soit $\mathscr{A}_{\mathscr{K}}$ la famille des parties $A \subset \Omega$ pour lesquelles il existe $A' \in \mathscr{A}$ tel que la différence symétrique $A \Delta A'$ soit contenue dans un ensemble N_* ci-dessus. La famille $\mathscr{A}_{\mathscr{K}}$ constitue alors une σ-algèbre, et la probabilité P peut être prolongée d'une manière unique en une probabilité sur $\mathscr{A}_{\mathscr{K}}$ en posant $P(A) = P(A')$.*

En particulier, à tout ensemble N_* se trouve ainsi assigné une probabilité nulle, et l'on notera aussi que pour toute $\mathscr{K}$-condition k, l'ensemble Ω_k^T est dans $\mathscr{A}_{\mathscr{K}}$ puisque si S est un ensemble déterminant k, $\Omega_k^S - \Omega_k^T$ est un ensemble N_*, en sorte que $P(\Omega_k^T) = P(\Omega_k^S)$.

Soit maintenant X un espace métrisable de type dénombrable, et T un espace métrisable localement compact. Désignant par d une distance compatible avec la topologie de X, on appelle comme il est usuel diamètre d'une partie non vide A de X le nombre $\delta(A) = \sup_{x \in A, y \in A} d(x, y)$. Soit $\mathscr{K}$ la famille des ensembles fermés de X, qui est donc compacte au sens ci-dessus, et désignons par $\mathscr{F}$ une base dénombrable de $\mathscr{K}$. Enfin, soit $(F_{\varepsilon,m})$ une énumération de tous les éléments de $\mathscr{F}$ dont le diamètre est au plus égal à ε $(0 \leq \varepsilon \leq 1)$. Pour toute partie $S \subset T$, nous posons

$$\Omega(\varepsilon, S) = \bigcap_{s \in S} \bigcup_{U \text{ ouvert} \ni s} \bigcup_m \{ \omega : \omega_t \in F_{\varepsilon,m} \quad \forall t \in U \}$$

L'ensemble

$$C_t = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \downarrow \Omega(\varepsilon, \{t\})$$

est donc ainsi, quel que soit $t \in T$, dans la σ-algèbre $\mathscr{A}_{\mathscr{X}}$, en sorte que nous nous pouvons poser la définition suivante:

DÉFINITION. — *Sous les conditions précédentes, nous dirons que le processus* $\Omega = X^T$ *est continu presque sûrement lorsque pour tout* $t \in T$ *on a* $P(C_t) = 1$.

II. PROCESSUS A VALEURS DANS LE CUBE FONDAMENTAL DE HILBERT CONTINUS PRESQUE SUREMENT

Nous désignerons selon l'usage par Ω le premier nombre ordinal transfini de troisième classe, autrement dit le plus petit nombre ordinal indénombrable. Une même lettre désignera ainsi ce nombre ordinal et l'espace Ω des épreuves, mais le lecteur est assuré qu'il n'en résultera en fait aucune confusion. Le but de cette section est essentiellement de montrer les trois résultats suivants:

THÉORÈME 1. — *Soit le cube fondamental de Hilbert* $X = [0, 1]^{\mathfrak{m}}$ $(\mathfrak{m} \leq \aleph_0)$ *muni de la σ-algèbre $\mathscr{X}$ de ses parties boréliennes, et* T *un espace métrisable de type dénombrable et complet (polonais). Nous supposons l'espace mesurable* $(\Omega, \mathscr{A})$ *muni d'une probabilité complète* P *en sorte que le processus* $\Omega = X^T$ *soit continu presque sûrement.*

Alors les trajectoires $t \to X_t(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ *sont au sens presque sûr des fonctions analytiques de première classe, ou ce qui est ici équivalent, des fonctions* B *mesurables de classe 1.*

A toute épreuve $\omega \in \Omega$, nous associons l'ensemble $D(\omega) \subset T$ des points de discontinuité de la trajectoire $t \to X_t(\omega)$, puis nous désignons par $D^\alpha(\omega)$ $(1 \leq \alpha \leq \Omega)$ le dérivé d'ordre α de $D(\omega) = D^0(\omega)$. Nous définissons enfin les événements $\Omega^\alpha = \{\omega : D^\alpha(\omega) = \varnothing\}$.

THÉORÈME 2. — *Les ensembles* $\Omega^\alpha (0 \leq \alpha \leq \Omega)$ *sont* $\mathscr{A}_{\mathscr{X}}$*-mesurables.*

Étant donné maintenant un événement $A \in \mathscr{A}_{\mathscr{X}}$, nous désignons par trace de la probabilité P sur A la probabilité $P^A(.) = P(A \cap .)$ définie sur $\mathscr{A}_{\mathscr{X}}$. Convenant alors de dire que deux probabilités P' et P définies sur les σ-algèbres $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{A}$ sont dans la relation de dominance $P' \subset P$

dès que: 1° $\mathscr{A}' \subset \mathscr{A}$; 2° $P'(A) \leq P(A)$ pour tout $A \in \mathscr{A}'$, le résultat suivant devient dès lors immédiat:

THÉORÈME 3. — *Les traces de la probabilité* P *sur les événements* Ω^α *déterminent une suite transfinie monotone non décroissante* $\{P^\alpha, 0 \leq \alpha \leq \Omega\}$ *de probabilités dominées par* P *dont les processus associés sont ainsi continus presque sûrement. De plus, la limite* ${}_\Omega P = \lim\limits_{\alpha \uparrow \Omega} \uparrow P^\alpha$ *existe, et plus précisément il existe un plus petit nombre ordinal* $\alpha(\Omega) < \Omega$ *tel que* ${}_\Omega P = P^{\alpha(\Omega)}$, *en sorte que la famille des probabilités* P^α *définies ci-dessus sur la σ-algèbre* $\mathscr{A}_{\mathscr{X}}$ *et distinctes est au plus dénombrable.*

Désignant alors par A_1 l'ensemble des épreuves $\omega \in \Omega$ dont les trajectoires sont des fonctions analytiques de première classe, l'événement Ω se décompose canoniquement en la somme dénombrable

$$\Omega = (\Omega - A_1) + (A_1 - \Omega^\Omega) + (\Omega^\Omega - \Omega^{\alpha(\Omega)}) + \sum_{0 \leq \alpha \leq \alpha(\Omega)} (\Omega^{\alpha+1} - \Omega^\alpha)$$

Montrons maintenant le théorème 1, et pour cela montrons d'abord le résultat auxiliaire suivant, qui n'est qu'une transposition d'un résultat dû à J. Feldman [*2*]. Pour toute version du processus Ω, c'est-à-dire pour toute application $\bar{\mathscr{A}}$-mesurable $Z: \Omega \to \Omega$ pour laquelle, quel que soit $t \in T$ fixé, les variables aléatoires X_t et $X_t \circ Z$ soient équivalentes, nous posons $Im(Z) = \{Z(\omega), \omega \in \Omega\}$.

PROPOSITION 2. — *Soit* X *un espace métrisable de type dénombrable,* T *un espace métrisable localement compact. On désigne par* A_* *l'ensemble des* $\omega \in \Omega$ *dont les trajectoires ont un ensemble de discontinuité* $D(\omega)$ *de première catégorie. Alors pour toute version séparable* Z *du processus* Ω, *l'ensemble* $A_* \cap \mathrm{Im}(Z)$ *est dans la σ-algèbre* $\bar{\mathscr{A}}$.

Supposons, sans pour cela nuire à la généralité, que l'ensemble T est compact, et soit $S \subset T$ un ensemble dénombrable partout dense séparant la version Z. Nous désignons par $S_{n,m}$ une énumération de toutes les parties finies de S telles que tout point de T soit distant d'au moins un point de $S_{n,m}$ d'au plus $\frac{1}{n}$. D'autre part, soit

$$D_\varepsilon(\omega) = \{t : \forall \text{ l'ouvert } U \ni t, \exists\, r,\ t \in U \ t.\ q.\ d[X_r(\omega), X_s(\omega)] > \varepsilon\}$$

On a $D(\omega) = \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \uparrow D_\varepsilon(\omega)$, en sorte que pour que $D(\omega)$ soit de première catégorie, il faut et il suffit que chaque ensemble $D_\varepsilon(\omega)$ soit non dense, puisque $D_\varepsilon(\omega)$ est fermé. Et chaque ensemble $D_\varepsilon(\omega)$ sera non dense si et seulement si, pour tout entier $n \geq 1$, il existe un entier m tel que $D_\varepsilon(\omega) \subset S^c_{n,m}$. On a donc $A_* = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \downarrow \bigcap_n \bigcup_m \Omega(\varepsilon, S_{n,m})$ et comme chaque ensemble $\Omega(\varepsilon, S_{n,m}) \cap \mathrm{Im}(Z)$ est dans $\bar{\mathscr{A}}$, il en est bien finalement de même de

$$A_* \cap \mathrm{Im}(Z).$$

Revenons alors à la démonstration du théorème 1. Nous pouvons, sans nuire à la généralité, supposer que $X = [0, 1]$. Le processus Ω étant continu presque sûrement, il existe une version séparable Z' telle que pour tout $t \in T$ l'ensemble

$$N_t = \Omega - \{ X_t \circ Z' = \lim_{s \to t} X_s \circ Z' \}$$

soit P-négligeable. Soit alors $S \subset T$ l'ensemble dénombrable partout dense séparant Z'. La fonction aléatoire

$$Y_t = \liminf_{S \ni s \to t} X_t \circ Z'$$

est donc telle que l'application $Z : \Omega \to \Omega$ qui associe

$$Z(\omega) = \{ Y_t(\omega), t \in T \}$$

est une version séparable du processus Ω, d'ailleurs idempotente en ce sens que $Z \circ Z = Z$. Nous en déduisons que la probabilité extérieure de l'ensemble $\mathrm{Im}(Z)$ est égale à 1. Comme de plus, il résulte de la proposition précédente que $A_* \cap \mathrm{Im}(Z) = \mathrm{Im}(Z)$ est dans $\bar{\mathscr{A}}$, en sorte que $P[\mathrm{Im}(Z)] = 1$, et puisque $\mathrm{Im}(Z) \subset A_1$, on en déduit qu'*a fortiori* $P(A_1) = 1$ ce qui achève la démonstration.

Procédons maintenant à la démonstration du théorème 2, et pour cela supposons d'abord que $T = [0, 1]$. On a $\Omega^0 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \downarrow \Omega(\varepsilon, T)$ en sorte que Ω^0 est dans $\mathscr{A}_{\mathscr{K}}$. Par transport de structure, on en déduit d'ailleurs que pour tout intervalle fermé $T' \subset T$, l'ensemble

$$\Omega^0(T') = \{ \omega : D(\omega) \cap T' = \emptyset \}$$

est aussi dans $\mathscr{A}_{\mathscr{K}}$. Signalons que ce résultat est déjà démontré dans [*2*].

Procédons maintenant par induction. Soit $\mathscr{R}$ l'ensemble des fractions binaires de $T = [0, 1]$. A tout $r \in \mathscr{R}$ correspond une suite finie unique $\{\varepsilon_i, 1 \leq i \leq n\}$ de nombres réels $\varepsilon_i = 0$ ou 1 telle que:

$$1^\circ\ r = \sum_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i 2^{-i}; \qquad 2^\circ\ \varepsilon_n = 1.$$

Nous dirons d'une telle fraction qu'elle est de rang n. En outre, désignons par $T_r \subset T$ l'intervalle centré en r, de longueur $2^{1-\text{rang}(r)}$, fermé à gauche et de plus ouvert à droite ou fermé selon que $\prod_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i = 0$ ou 1. Il est immédiat que chaque ensemble $\Omega^0(T_r) = \{\omega : D(\omega) \cap T_r = \emptyset\}$ est dans $\mathscr{A}_{\mathscr{K}}$.

Supposons alors que le nombre ordinal α est de première espèce, en sorte qu'il possède un antécédent $\alpha - 1$. Nous supposons donc aussi avoir montré que $\Omega^{\alpha-1}$ est dans $\mathscr{A}_{\mathscr{K}}$, et que plus généralement il en est de même de $\Omega^{\alpha-1}(T_r) = \{\omega : D^{\alpha-1}(\omega) \cap T_r = \emptyset\}$ pour tout $r \in \mathscr{R}$. Ainsi l'ensemble $\Omega^\alpha(n, p)$ des $\omega \in \Omega$ qui appartiennent à tous les ensembles $\{\Omega^{\alpha-1}(T_r); \text{rang}(r) = n\}$ sauf à $p \leq 2^{n-1}$ d'entre eux au plus est dans $\mathscr{A}_{\mathscr{K}}$. Il en est donc encore de même de l'ensemble $\Omega^\alpha(p) = \lim_{n \uparrow \infty} \downarrow \Omega^\alpha(n, p)$ constitué des $\omega \in \Omega$ pour lesquels $D^\alpha(\omega)$ contient au plus p points en sorte que l'ensemble $\Omega^\alpha = \lim_{p \uparrow \infty} \uparrow \Omega^\alpha(p)$ est effectivement dans $\mathscr{A}_{\mathscr{K}}$.

Supposons maintenant le nombre ordinal $\alpha \subset \Omega$ de seconde espèce. On observera que dans ce cas $\Omega^\alpha = \lim_{\alpha' \uparrow \alpha} \uparrow \Omega^{\alpha'}$ en sorte que la $\mathscr{A}_{\mathscr{K}}$-mesurabilité de Ω^α est ici immédiate.

Pour montrer enfin la $\mathscr{A}_{\mathscr{K}}$-mesurabilité de l'ensemble $\Omega^\Omega = \Omega_1$, observons que son contraire Ω_1^c est constitué constitué des $\omega \in \Omega$ pour lesquels l'ensemble parfait $D^\Omega(\omega) = D_1(\omega)$ est non vide, ou ce qui est équivalent, pour lesquels le fermé $D^1(\omega)$ contient un ensemble parfait non vide. Ceci nous amène à définir d'abord un criblage de l'ensemble des ensembles parfaits non vides de $T = [0, 1]$. Pour cela, nous munissons $\mathscr{R}$ de la relation de pré-ordre « $r < r'$ si et seulement si: 1° rang $(r) <$ rang (r'); 2° $\varepsilon_i = \varepsilon_i'$ pour tout $1 \leq i \leq$ rang (r) ». Soit de plus φ une application qui à toute fraction $r \in \mathscr{R}$ fait correspondre soit l'intervalle fermé W_r centré en r et de longueur $2^{1-\text{rang}(r)}$, ou bien exclusivement l'ensemble vide, telle que de plus: 1° $\varphi(r') = \emptyset$ dès que $\varphi(r) = \emptyset$ et $r < r'$; 2° pour toute fraction $r \in \mathscr{R}$ telle que $\varphi(r) \neq \emptyset$, il existe $r' > r$ telle que $\varphi(r') \neq \emptyset$. Enfin, posons

$$P_n = \bigcup_{r : \text{rang}(r) = n} \varphi(r) \qquad \text{et} \qquad P = \lim_{n \uparrow \infty} \downarrow P_n.$$

Il résulte de sa définition même que l'ensemble P est fermé, mais il est aisé de démontrer le résultat suivant, qui exprime que l'ensemble P est dense en lui-même :

LEMME 2. — *Pour que P soit un ensemble parfait non vide, il faut et il suffit qu'en désignant par* $N(r, p)$ *le nombre d'intervalles* $\varphi(r')$ *non vides tels que :* 1° $r < r'$; 2° rang (r') = rang $(r) + p$, *et en posant*

$$N_{n,p} = \operatorname*{Inf}_{r:\mathrm{rang}(r)=n \,\mathrm{et}\, \varphi(r)\neq\emptyset} N(r, p)$$

on ait pour tout entier $n \geq 1$ $\lim\limits_{p\uparrow\infty} \uparrow N_{n,p} = \infty$.

Soit alors $\mathfrak{S}$ la famille des suites $S = \{ S_n, n \geq 1 \}$ d'ensembles $S_n \subset T$ telles que pour tout rang $n \geq 1$: 1° chaque S_n est l'une des $2^{2n} - 1$ réunions non vides d'intervalles de la famille $\{ W_r$: rang $(r) = n \}$; 2° $S_{n+1} \subset S_n$ et plus précisément pour tout $W_r \subset S_n$ (rang $(r) = n$), il existe

$$W_{r'} \subset S_{n+1} \ (\text{rang } (r') = n + 1)$$

tel que $W_{r'} \subset W_r$. A chaque suite $S \in \mathfrak{S}$ nous associons une application φ_S qui a toute fraction $r \in \mathscr{R}$ telle que rang $(r) = n$ fait correspondre $\varphi_S(r) = W_r$ si $W_r \subset S_n$ et $= \emptyset$ sinon. Reprenant alors les notations du lemme précédent, à toute suite $S \in \mathfrak{S}$ correspond une famille de nombres $N_{n,p}(S)$ déterminés par l'application φ_S. Enfin, pour tout rang $n \geq 1$, nous munissons l'ensemble $\mathfrak{S}$ de la relation d'équivalence $\mathscr{R}_n$ telle que : « $S_n \sim S'$ si et seulement si $S_m = S'_m$ pour tout rang m tel que $1 \leq m \leq n$ ».

A la famille $\mathfrak{S}$, nous associons donc la famille $\Omega_{\mathfrak{S}}$ des suites

$$\Omega_S = \{ \Omega_{S_n}, n \geq 1 \}$$

où chaque Ω_{S_n} est constitué des $\omega \in \Omega$ pour lesquels $W_r \cap D^1(\omega) \neq \emptyset$ dès que rang $(r) = n$ et $W_r \subset S_n$. A chaque classe $C_n \in \mathfrak{S}/\mathscr{R}_n$ est alors associé l'ensemble

$$\Omega(C_n) = \bigcap_{1 \leq m \leq n} \Omega_{S_m}$$

construit avec une suite arbitraire $S \in C_n$. Nous posons alors :

$$\Omega(n, m) = \bigcup_{p \geq 1} \ \bigcup_{C_{n+p} \ni S : N_{n,p}(S) \geq m} \Omega(C_{n+p})$$

L'ensemble $\bigcap\limits_{n \geq 1} \bigcap\limits_{m \geq 1} \Omega(n, m)$ est donc constitué des $\omega \in \Omega$ pour lesquels quels $D^1(\omega)$ contient un ensemble parfait non vide. Comme il est dans $\mathscr{A}_{\mathscr{K}}$, il en est donc de même de son contraire $\Omega_1 = \Omega^{\Omega}$, ce qui achève la démonstration dans le cas particulier où $T = [0, 1]$.

Le raisonnement ci-dessus s'étend dès lors immédiatement au cube fondamental de Hilbert $[0, 1]^{\mathfrak{m}}$ ($\mathfrak{m} \leq \aleph_0$), puis par relativisation, à tout G_δ contenu dans ce cube, ce qui achève la démonstration dans le cas général où T est métrisable de type dénombrable et complet.

III. CAS DES SEMI-GROUPES SOUS-MARKOVIENS STATIONNAIRES STANDARDS DÉFINIS SUR UN ESPACE D'ÉTAT DÉNOMBRABLE

Soit E un ensemble dénombrable non vide. Par un semi-groupe sous-markovien (resp. markovien) stationnaire standard défini sur E nous entendons une famille $P = \{P_t, t > 0\}$ de matrices sous-markoviennes (resp. markoviennes), c'est-à-dire *t.q.*: 1° $P_t(i, j) \geq 0$ pour tout couple $(i, j) \in E \times E$; 2° $\sum_{j \in E} P_t(i, j) \leq 1$ (resp. $= 1$) pour tout $i \in E$, cette famille satisfaisant à la relation de semi-groupe $P_s P_t = P_{s+t}$ pour tout couple $s, t > 0$ et à la relation de continuité $\lim_{t \downarrow 0} P_t(i, j) = I(i, j)$, où I désigne la matrice identité sur E.

On appellera loi d'entrée toute famille $f = \{f_t, t > 0\}$ de mesures positives et bornées définies sur E, telle que $f_{s+t} = f_s P_t$ lorsque $s, t > 0$. On observera qu'en particulier, pour tout $i \in E$ fixé, la famille $\{P_t(i, .), t > 0\}$ constitue une telle loi de sortie. Enfin, on supposera dans la suite sans nuire à la généralité que le semi-groupe donné P est markovien, et que les lois d'entrées $f = \{f_t, t > 0\}$ sont constituées de mesures de masse totale 1.

Supposons maintenant E plongé dans $X = [0, 1]$ de telle sorte que $E^1 = \{1\}$, où nous désignons par E^1 le dérivé de E dans X. Nous munissons l'espace $\Omega = X^T$ d'une probabilité P définie à une loi d'entrée f près en posant pour tout pavé mesurable $A = \prod_{t > 0} A_t (A_t \in \mathscr{X})$ où $A_t \equiv X$ sauf pour un nombre fini d'instants $t_1, \ldots, t_n$:

$$P(A) = \int_{A_{t_1}} f_{t_1}(d\omega_{t_1}) \int_{A_{t_2}} P_{t_2 - t_1}(\omega_{t_1}, d\omega_{t_2}) \ldots \int_{A_{t_n}} P_{t_n - t_{n-1}}(\omega_{t_{n-1}}, d\omega_{t_n})$$

où $P_{t-s}(\omega_s, d\omega_t) = P_{t-s}(i, j)$ dès que $i = \omega_s$, $j \in d\omega_t$ et 0 sinon.

Soit alors Z′ une version séparable du processus Ω. Nous savons [*1*] que dans ces conditions, l'ensemble $\lim_{s \to t} (X_t \circ Z')(\omega)$ n'a au sens presque sûr qu'un seul point dans E. Cette propriété entraîne que, S désignant un ensemble dénombrable partout dense dans T, la fonction aléatoire

$$Y_t = \liminf_{S \ni s \to t} X_s \circ Z'$$

est telle que l'application Z qui à $\omega \in \Omega$ associe $Z(\omega) = \{ Y_t(\omega), t > 0 \}$ soit en fait une version séparable du processus Ω, idempotente et de plus semi-continue inférieurement. Ainsi, quoique le processus Ω soit en fait seulement continu en probabilité du fait que le semi-groupe donné P est standard, nous sommes cependant ramenés à l'étude précédente.

Nous en déduisons d'abord que $P(A_1) = 1$. Posons alors $\overline{E}_1 = A_1 \cap \overline{E}^T$, où $\overline{E}$ désigne la fermeture de E dans X. Puisque $\overline{E}$ est fermé, l'ensemble $\overline{E}^T$ est dans la σ-algèbre $\mathscr{A}_{\mathscr{X}}$, en sorte que $\overline{E}_1 = A_1 \cap \overline{E}^T$ a une probabilité bien définie. On aura donc $P(\overline{E}_1) = P(A_1 \cap \overline{E}^T) = 1$. D'autre part, $\omega \in A_1$ si et seulement si l'ensemble des discontinuités de la trajectoire $t \to X_t(\omega)$ relativement à tout fermé de T est de première catégorie. Nous venons donc de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 4. — *Soit* $\{ P_t, t > 0 \}$ *un semi-groupe sous-markovien stationnaire standard défini sur un espace d'états dénombrable non vide* E. *Alors en désignant par* $\overline{E}$ *le compactifié de* E *d'après Alexandrov par adjonction d'un point* ∞, *les trajectoires* $t \to X_t(\omega)$ *ou* $\omega \in \overline{E}^T$ $(T =]0, \infty[)$ *ont au sens presque sûr et relativement à tout fermé de* T *un ensemble de discontinuité de première catégorie.*

Suivant J. Neveu [*6*], et étant donné deux semi-groupes P′ et P définis sur les ensembles dénombrables E′ et E respectivement, nous dirons que le semi-groupe P′ est dominé par le semi-groupe P lorsque : 1° $E' \subset E$; 2° $P'_t(i, j) \leq P_t(i, j)$ pour tout couple $(i, j) \in E \times E$ et quel que soit $t > 0$. Une application du théorème 3 donne alors les résultats suivants :

THÉORÈME 5. — *La probabilité* P *définie sur* $\Omega = X^T$ *à une loi d'entrée près détermine par ses traces sur* $\Omega^\alpha (0 \leq \alpha \leq \Omega)$ *une suite monotone non décroissante* $\{ P^\alpha, 0 \leq \alpha \leq \Omega)$ *de semi-groupes sous-markoviens stationnaires standards dominés par le semi-groupe* P. *De plus, la limite* ${}_\Omega P = \lim_{\alpha \uparrow \Omega} \uparrow P^\alpha$ *existe, et plus précisément il existe un plus petit nombre ordinal* $\alpha(\Omega) < \Omega$ *tel que* ${}_\Omega P = P^{\alpha(\Omega)}$, *en sorte que la famille des semi-groupes* P^α *définis ci-dessus et distincts est au plus dénombrable. Enfin,* $P^1 = P_{\min}$, *où* $P_{\min}$ *désigne le semi-groupe minimal défini par Feller.*

Le seul point restant à démontrer est que $\alpha(\Omega) < \Omega$ avec inégalité stricte. Or pour tout $t > 0$, il existe un plus petit nombre ordinal $\alpha_t < \Omega$ tel que

$P_t^\alpha t(i, j) = \lim_{\alpha \uparrow \Omega} \uparrow P_t^\alpha(i, j)$ pour tout couple $(i, j) \in E \times E$. En faisant parcourir à t un ensemble dénombrable S partout dense dans T, on met ainsi en évidence l'existence d'un plus petit nombre ordinal $\alpha_S < \Omega$ tel que $P_t^\alpha (i, j) = \lim_{\alpha \uparrow \Omega} \uparrow P_t^\alpha(i, j)$ pour tout $t \in S$ et tout couple $(i, j) \in E \times E$. On a donc $\alpha_S \leq \alpha(\Omega)$, et comme par ailleurs le semi-groupe $P^\alpha \subset P$ est standard, on a aussi $\alpha_S \geq \alpha(\Omega)$, ce qui achève la démonstration.

On peut enfin identifier la suite $\{ P^\alpha, 1 \leq \alpha \leq \alpha(\Omega) \}$ à la suite transfinie construite par J. Neveu [*6*] à partir du semi-groupe minimal en utilisant des formes de perturbation, le semi-groupe $P^{\alpha(\Omega)}$ étant ainsi le plus petit semi-groupe en relation de dominance absolue [*6*] avec le semi-groupe donné P.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] K. L. Chung, *Markov chains with stationary transition probabilities*. Springer, Berlin, 1960.

[*2*] J. Feldman, On the measurability of stochastic processes in product spaces. *Pacific J. Math.*, **14**, 1962, p. 113-120.

[*3*] C. Kuratowsky, *Topologie*, vol. 1, 4^e^ édition Warszawa, 1958.

[*4*] A. Mayer, *C. R. A. S.*, **248**, 1959, p. 3106.

[*5*] A. Mayer, *C. R. A. S.*, **249**, 1959, p. 2475.

[*6*] J. Neveu, *Lattice Methods. Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Berkeley and Los Angelès. University of California Press, **2**, 1961, p. 341-391.

Manuscrit reçu le 18 décembre 1968.