

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN JACOD

JEAN MÉMIN

Sur la convergence des semimartingales vers un processus à accroissements indépendants

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 227-248

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__227_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA CONVERGENCE DES SEMIMARTINGALES VERS UN PROCESSUS

A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS

J. JACOD et J. MEMIN

1 - INTRODUCTION

Récemment Kabanov, Liptzer et Shiriyayev [4] ont présenté une application remarquable de la formule exponentielle de Doléans-Dade à l'étude des limites de processus ponctuels: pour chaque $n \in \overline{\mathbb{N}}$ on considère un processus ponctuel N^n de compensateur prévisible A^n sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega^n, \underline{F}^n, \underline{F}^n, P^n)$. Si A^∞ est déterministe et si

$$(1.1) \quad A_t^n \xrightarrow{\mathcal{L}} A_t^\infty \quad (\xrightarrow{\mathcal{L}} \text{ signifie: converge en loi})$$

$$(1.2) \quad \sum_{s \leq t} (\Delta A_s^n)^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} \sum_{s \leq t} (\Delta A_s^\infty)^2$$

pour tout $t \geq 0$, alors $(N_{t_1}^n, \dots, N_{t_m}^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (N_{t_1}^\infty, \dots, N_{t_m}^\infty)$ pour tous $t_1 < t_2 < \dots < t_m$. Lorsqu'en plus le processus A^∞ est continu, la condition (1.1) est suffisante (dans ce cas, le résultat était déjà connu: voir BROWN [1]).

L'article de Kabanov, Liptzer et Shiriyayev nous semble intéressant surtout pour deux raisons: d'une part par l'utilisation astucieuse des exponentielles de Doléans-Dade $\mathcal{E}(A^n)$; d'autre part par l'étude de la convergence des $\mathcal{E}(A^n)$ vers $\mathcal{E}(A^\infty)$: contrairement à ce qu'on pourrait penser a-priori, ce dernier point est assez délicat, et il faut travailler un peu pour obtenir que $\mathcal{E}(A^n)_t \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{E}(A^\infty)_t$ à partir de (1.1) et (1.2).

Nous nous proposons d'exposer ici la méthode de [4], dans un cadre plus général, celui de la convergence d'une suite de semimartingales X^n vers un processus à accroissements indépendants X^∞ : noter que ci-dessus, N^∞ est un processus à accroissements indépendants puisque A^∞ est déterministe.

Le théorème "général" de convergence des lois fini-dimensionnelles de X^n vers X^∞ est énoncé au §2 et démontré au §3: ce théorème s'exprime en termes de convergence en loi de certaines exponentielles de Doléans-

Dade de processus à variation finie. Nous indiquons aussi, sans démonstration, comment on peut renforcer légèrement les conditions de façon à obtenir la convergence des lois des X^n vers la loi de X^∞ , pour la topologie de Skorokhod.

Dans le §4 nous étudions en détails des conditions assurant que $\xi(A^n)$ converge vers $\xi(A^\infty)$ lorsque A^n et A^∞ sont des processus à variation finie: il s'agit d'une étude purement déterministe. Nous montrons notamment que l'application

$$a \mapsto \xi(a) \text{ définie par } \xi(a)_t = e^{a_t} \prod_{0 < s \leq t} (1 + \Delta a_s) e^{-\Delta a_s}$$

sur l'espace des fonctions croissantes continues à droite positives est continue pour la restriction à cet espace de la topologie de Skorokhod.

Enfin, les conditions assurant la validité du théorème "général" semblant a-priori difficiles à vérifier, nous consacrons le §5 à divers exemples pour lesquels les conditions ont une allure plus "concrète", mais qui néanmoins restent suffisamment généraux pour couvrir de nombreuses applications.

2 - LE THEOREME DE CONVERGENCE

Pour toutes les notions sur les martingales, semimartingales et mesures aléatoires, nous renvoyons à [2] et [7]. Rappelons cependant le concept de caractéristiques locales d'une semimartingale, concept qui occupe une place centrale dans ce qui suit.

Soit $X = (X^i)_{i \leq d}$ une semimartingale d-dimensionnelle sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \underline{F}, \underline{F}, P)$, et supposons que $X_0 = 0$. On associe d'abord à X la mesure aléatoire de ses sauts, définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ par

$$(2.1) \quad \mu(ds, dx) = \sum_{t > 0} I_{\{\Delta X_t \neq 0\}} \xi_{(t, \Delta X_t)}(ds, dx),$$

où ξ_a est la mesure de Dirac au point a . Soit

$$(2.2) \quad \check{X}_t = \sum_{s \leq t} \Delta X_s I_{\{|\Delta X_s| > 1\}}.$$

Le triplet (B, C, ν) des caractéristiques locales de X est alors défini comme suit:

- $B = (B^i)_{i \leq d}$ est l'unique processus prévisible à variation finie nul en 0 tel que $X - \check{X} - B$ soit une martingale locale d-dimensionnelle;

- $C = (C^{ij})_{i,j \leq d}$, avec $C^{ij} = \langle (X^i)^c, (X^j)^c \rangle$;
- ν est la mesure aléatoire sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, projection prévisible duale de μ .

Si W est une fonction sur $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, on note $W * \mu$ le processus $W * \mu_t = \int_{[0,t] \times \mathbb{R}^d} \mu(ds, dx) W(s, x)$, quand cette expression a un sens. On définit de même $W * \nu$. Si W est mesurable par rapport à $\underline{P} \otimes \underline{\mathbb{R}}^d$ (\underline{P} = tribu prévisible sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$), on note $W * (\mu - \nu)$ l'intégrale stochastique, lorsqu'elle existe, de W par rapport à la mesure aléatoire-martingale $\mu - \nu$: c'est l'unique martingale somme compensée de sauts telle que

$$\Delta[W * (\mu - \nu)]_s = \int \mu(\{s\} \times dx) W(s, x) - \int \nu(\{s\} \times dx) W(s, x).$$

Avec ces notations, remarquons qu'on a:

$$(2.3) \quad \check{X} = (x I_{\{|x| > 1\}}) * \mu \quad (\text{par abus de notation, on note } f(x) \text{ la fonction: } (\omega, t, x) \rightsquigarrow f(x) \text{ sur } \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$$

$$(2.4) \quad X = X^c + (x I_{\{|x| \leq 1\}}) * (\mu - \nu) + B + \check{X}$$

$$(2.5) \quad (|x|^2 \wedge 1) * \nu \text{ est un processus croissant prévisible fini}$$

$$(2.6) \quad \Delta B_s = \int \nu(\{s\} \times dx) x I_{\{|x| \leq 1\}}.$$

Terminons enfin ces préliminaires en rappelant que l'exponentielle $\mathcal{E}(Y)$ de la semimartingale réelle Y nulle en 0 est définie par

$$(2.7) \quad \mathcal{E}(Y)_t = \exp(Y_t - \frac{1}{2} \langle Y^c, Y^c \rangle_t) \prod_{s \leq t} [(1 + \Delta Y_s) e^{-\Delta Y_s}].$$

Après ces rappels, nous pouvons aborder le problème qui nous occupera dans le reste de cet article. Pour chaque $n \in \overline{\mathbb{N}}$ on considère un espace probabilisé filtré $(\Omega^n, \underline{F}^n, \underline{F}^n, P^n)$ muni d'une semimartingale d-dimensionnelle $X^n = (X^{n,i})_{i \leq d}$ telle que $X_0^n = 0$, et on note (B^n, C^n, ν^n) les caractéristiques locales de X^n . On introduit les processus suivants:

$$(2.8) \quad F^n = \sum_{i \leq d} [C^{n,ii} + V(B^{n,i})] + (|x|^2 \wedge 1) * \nu^n$$

$$(2.9) \quad A^n(\lambda, b) = \frac{1}{2} \sum_{i,j \leq d} \lambda^i \lambda^j C^{n,ij} + \sum_{i \leq d} \lambda^i B^{n,i} + (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x I_{\{|x| \leq 1\}}) I_{\{|x| \leq b\}} * \nu^n;$$

dans ces formules, $V(B^{n,i})$ désigne le processus variation de $B^{n,i}$, on a $b \in [1, \infty[$, $\lambda = (\lambda^i)_{i \leq d} \in \mathbb{R}^d$, et $\lambda x = \sum_{i \leq d} \lambda^i x^i$ si $x = (x^i)_{i \leq d}$.

Ces processus sont F^n -prévisibles réels, F^n est croissant et $A^n(\lambda, b)$ est à variation finie.

On considère aussi une partie dense D de \mathbb{R}_+ , fixée une fois pour toutes.

(2.10) HYPOTHESE: $(B^\omega, C^\omega, \nu^\omega)$ est déterministe, ce qui équivaut à dire que X^ω est un processus à accroissements indépendants sur l'espace $(\Omega^\omega, \underline{F}^\omega, \underline{F}^\omega, P^\omega)$. Dans ce cas, F^ω et $A^\omega(\lambda, b)$ sont déterministes.

(2.11) HYPOTHESE: Pour tous $t > 0$, $\varepsilon > 0$, on a

$$\lim_{b \uparrow \omega} \limsup_{n \uparrow \omega} P^n [I_{\{|x| > b\}} * \nu_t^n \geq \varepsilon] = 0.$$

(2.12) HYPOTHESE: Pour tout $t > 0$ il existe $K \in \mathbb{R}_+$ avec

$$\lim_{n \uparrow \omega} P^n [F_t^n \geq K] = 0.$$

(2.13) HYPOTHESE: Il existe une suite (b_q) de réels croissant vers $+\omega$, telle que pour tous $q \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}^d$, $t \in D$, on ait:

$$\xi(A^n(\lambda, b_q))_t \xrightarrow{\mathcal{Z}} \xi(A^\omega(\lambda, b_q))_t.$$

Nous nous proposons de montrer le théorème suivant:

(2.14) THEOREME: Sous les hypothèses (2.10), (2.11), (2.12) et (2.13), pour tous $t_1, \dots, t_m \in D$ on a: $(X_{t_1}^n, \dots, X_{t_m}^n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} (X_{t_1}^\omega, \dots, X_{t_m}^\omega)$.

L'un des avantages des hypothèses précédentes est qu'elles s'expriment entièrement en fonction des caractéristiques locales des X^n . Cependant il est intéressant de donner une condition équivalente à (2.11), dans le lemme suivant qui sera démontré au §3:

(2.15) LEMME: On a (2.11) si et seulement si pour tout $t > 0$, on a

$$\lim_{b \uparrow \omega} \limsup_{n \uparrow \omega} P^n [\exists s \leq t \text{ avec } |\Delta X_s^n| > b] = 0.$$

Si les hypothèses (2.10), (2.11) et (2.12) sont faciles à comprendre et en général à vérifier, il n'en est pas du tout de même de (2.13): nous verrons au §5 diverses conditions impliquant (2.13).

Introduisons enfin une dernière hypothèse.

(2.16) HYPOTHESE: Pour tout $n \in \overline{\mathbb{N}}$ il existe un processus croissant fini \mathbb{F}^n -prévisible G^n sur $(\Omega^n, \mathbb{F}^n, \mathbb{F}^n, P^n)$ tel que

- (i) $G^n - F^n$ est croissant;
- (ii) G^∞ est déterministe;
- (iii) on a: $t \in D \implies G_t^n \xrightarrow{\mathcal{L}} G_t^\infty$;
- (iv) ou bien G^∞ est continu, ou bien:

$$t \in D \implies \sum_{s \leq t} (\Delta G_s^n)^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} \sum_{s \leq t} (\Delta G_s^\infty)^2$$

(on peut montrer d'ailleurs que si on a (iii), la seconde condition de (iv) est impliquée par la première).

Remarquons que (2.16) \implies (2.12): prendre $K = G_t^\infty + 1$ par exemple. Dans les divers exemples traités au §5, nous aurons non seulement (2.12), mais aussi (2.16).

On peut alors montrer le théorème suivant:

(2.17) THEOREME: Sous les hypothèses (2.10), (2.11), (2.13) et (2.16), les processus X^n convergent en loi vers le processus X^∞ .

En fait, compte tenu de (2.14), ce théorème découle de ce que (2.11) et (2.16) impliquent la relative compacité de la suite de lois $\mathcal{L}(X^n)$, pour la topologie étroite des mesures associée à la topologie de Skorokhod sur l'espace $D([0, \infty[; \mathbb{R}^d)$: nous renvoyons à [3], où la relative compacité est montrée sous une condition bien plus générale.

3 - DEMONSTRATIONS DE (2.14) et (2.15)

Quitte à prendre le produit tensoriel des espaces filtrés $(\Omega^n, \mathbb{F}^n, \mathbb{F}^n, P^n)$, on peut supposer que tous les processus $(X^n)_{n \in \overline{\mathbb{N}}}$ sont définis sur le même espace $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{F}, P)$, espace sur lequel ils sont indépendants. Dans (2.13), les convergences sont alors des convergences en probabilité, puisque les limites sont déterministes.

§a - Le cas borné. Nous allons d'abord montrer (2.14) lorsque les hypothèses (2.11) et (2.12) sont remplacées par les hypothèses plus fortes suivantes:

- (3.1) Il existe $b \in [1, \infty[$ tel que $|\Delta X^n| \leq b$ pour tout $n \in \overline{\mathbb{N}}$, ce qui équivaut à: $I_{\{|x| > b\}} * \nu_\infty^n = 0$ pour tout $n \in \overline{\mathbb{N}}$.

(3.2) Il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $F_{\infty}^n \leq K$ pour tout $n \in \overline{\mathbb{N}}$.

Commençons par un calcul préliminaire. Soit X une semimartingale d -dimensionnelle nulle en 0 , à sauts bornés, de caractéristiques locales (B, C, ν) , la mesure associée à ses sauts par (2.1) étant notée μ . Soit $H = (H^i)_{i \leq d}$ un processus prévisible borné. On notera comme d'habitude $H \cdot X = (\sum_{i \leq d} H^i \cdot X^i)$ l'intégrale stochastique de H par rapport à X .

La semimartingale $Y = e^{H \cdot X}$ est localement bornée, donc spéciale. Une application simple de la formule d'Ito et des représentations (2.3) et (2.4) permet d'obtenir la décomposition canonique de Y :

$$(3.3) \quad Y = 1 + Y_- \cdot M + Y_- \cdot A,$$

avec

$$(3.4) \quad \begin{cases} M = H \cdot X^C + (e^{Hx} - 1) * (\mu - \nu) \\ A = \frac{1}{2} C(H) + H \cdot B + (e^{Hx} - 1 - Hx I_{\{|x| \leq 1\}}) * \nu, \end{cases}$$

où $C(H) = \sum_{i, j \leq d} (H^i H^j) \cdot C^{ij}$. On a d'après (3.4) et (2.6):

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \Delta A_s &= \sum_{i \leq d} H_s^i \Delta B_s^i + \int \nu(\{s\} \times dx) [e^{Hx} - 1 - Hx I_{\{|x| \leq 1\}}] \\ &= \int \nu(\{s\} \times dx) (e^{Hx} - 1). \end{aligned}$$

Comme $\nu(\{s\} \times \mathbb{R}^d) \leq 1$, il est facile d'en déduire que $1 + \Delta A > 0$ identiquement. La propriété caractéristique de l'exponentielle (2.7), et la relation (3.3), montrent que $Y = \mathcal{E}(M + A)$. Mais alors, comme $1 + \Delta A > 0$, on sait d'après [6] que

$$(3.6) \quad e^{H \cdot X} = L \mathcal{E}(A), \quad \text{avec } L = \mathcal{E}\left(\frac{1}{1 + \Delta A} \cdot M\right) \text{ est une martingale locale.}$$

Voici encore un lemme préliminaire, qui étend un résultat de [6]:

(3.7) LEMME: Soit \mathcal{N} une ensemble de martingales localement de carré intégrable, nulles en 0 . Si $\sup_{N \in \mathcal{N}} \langle N, N \rangle_{\infty} \leq K'$, où $K' \in \mathbb{R}_+$, la famille de variables $(\mathcal{E}(N))_t : t \geq 0, N \in \mathcal{N}$ est uniformément intégrable.

Démonstration. Soit $M = 2N + [N, N] - \langle N, N \rangle$. On a, d'après la formule de Yor et la formule de [6] déjà utilisée ci-dessus:

$$\mathcal{E}(N)^2 = \mathcal{E}(2N + [N, N]) = \mathcal{E}(M + \langle N, N \rangle) = \mathcal{E}\left(\frac{1}{1 + \Delta \langle N, N \rangle} \cdot M\right) \mathcal{E}(\langle N, N \rangle).$$

Il est facile de vérifier que $\frac{\Delta M}{1 + \Delta \langle N, N \rangle} > -1$, donc $Z^N = (\frac{1}{1 + \Delta \langle N, N \rangle} \bullet M)$ est une martingale locale positive, donc une surmartingale positive. Par ailleurs $|\xi(\langle N, N \rangle)| \leq \exp \langle N, N \rangle$, et on obtient la majoration

$$E[\xi(N)_t^2] \leq E(Z_t^N e^{K'}) \leq e^{K'},$$

d'où le résultat. ■

Soit $t_0 = 0$ et $t_1, \dots, t_m \in D$ avec $0 < t_1 < \dots < t_m$. Soit $t = t_m$. Soit enfin $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}^d$ et

$$(3.8) \quad H = \sum_{i=1}^m \lambda_i I_{]0, t_i]}]$$

qui est déterministe et borné par $a = m \sup_{(i)} |\lambda_i|$. On a

$$(3.9) \quad \exp(\sum_{i \leq m} \lambda_i X_{t_i}^n) = e^{H \bullet X_t}.$$

On associe alors aux processus X^n les processus $C^n(H)$, M^n , A^n , L^n , définis par (3.4) et (3.6).

(3.10) LEMME: (i) Il existe une constante K' telle que $|\xi(A^n)_s| \leq K'$ pour tous $n \in \overline{\mathbb{N}}$, $s \geq 0$.

(ii) La famille de variables $(L_s^n : s \geq 0, n \in \overline{\mathbb{N}})$ est uniformément intégrable.

Démonstration. (i) Comme $|H| \leq a$ il est facile de trouver $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $|e^{Hx} - 1 - Hx I_{\{|x| \leq 1\}}| \leq c(|x|^2 \wedge 1)$ si $|x| \leq b$. D'après (3.1), (3.2) et (3.4) il existe alors $K' \in \mathbb{R}_+$ tel que $V(A^n)_\infty \leq \text{Log } K'$ et (i) découle de ce que

$$|\xi(A^n)_s| \leq \xi(V(A^n))_s \leq \exp[V(A^n)_s] \leq K'.$$

(ii) Etant donnée la définition (3.4), on a facilement la majoration

$$\langle M^n, M^n \rangle_\infty \leq C^n(H)_\infty + (e^{Hx} - 1)^2 \ast_\infty^n.$$

Comme en (i), on peut trouver $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $(e^{Hx} - 1)^2 \leq c(|x|^2 \wedge 1)$ si $|x| \leq b$, donc en utilisant encore (3.1) et (3.2) on peut trouver $K' \in \mathbb{R}_+$ tel que $\langle M^n, M^n \rangle_\infty \leq K'$. Par ailleurs avec le fait que $|H| \leq a$ et (3.1), ainsi que (3.5), on voit que $1 + \Delta A^n \geq e^{-ab}$. Donc si $N^n = (1 + \Delta A^n)^{-1} \bullet M^n$ on a $\langle N^n, N^n \rangle_\infty \leq e^{ab} K'$ et le résultat découle du lemme (3.7). ■

(3.11) LEMME: Avec les hypothèses précédentes, on a

$$(X_{t_1}^n, \dots, X_{t_m}^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X_{t_1}^\infty, \dots, X_{t_m}^\infty).$$

Démonstration. D'après (3.6) et (3.10), les variables $\exp(H \cdot X_t^n)$ sont intégrables pour tout H de la forme (3.8). Etant donné (3.9), il nous suffit donc de montrer que pour tout H de la forme (3.8), on a

$$E[\exp(H \cdot X_t^n)] \longrightarrow E[\exp(H \cdot X_t^{\infty})].$$

Le lemme (3.10) implique que les processus L^n sont des martingales, donc $E(L_t^n) = 1$. D'après (3.6) et le fait que $\xi(A^{\infty})_t$ est déterministe, il vient alors

$$\begin{aligned} E[\exp(H \cdot X_t^n)] - E[\exp(H \cdot X_t^{\infty})] &= E[L_t^n \xi(A^n)_t] - E(L_t^{\infty}) \xi(A^{\infty})_t \\ &= E[L_t^n (\xi(A^n)_t - \xi(A^{\infty})_t)]. \end{aligned}$$

Une nouvelle application du lemme (3.10) montre que la suite de variables $(L_t^n (\xi(A^n)_t - \xi(A^{\infty})_t) : n \in \mathbb{N})$ est uniformément intégrable. Pour obtenir le résultat il suffit donc de montrer que $\xi(A^n)_t$ converge en probabilité vers $\xi(A^{\infty})_t$. Mais d'après (2.9) et (3.4), on a

$$A_s^n = \sum_{i=1}^m [A^n(\tilde{\lambda}_i, b_q)_{s \wedge t_i} - A^n(\tilde{\lambda}_i, b_q)_{s \wedge t_{i-1}}]$$

dès que $b_q \geq b$, et en posant $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i + \lambda_{i+1} + \dots + \lambda_m$. On en déduit que

$$\xi(A^n)_t = \prod_{i=1}^m \frac{\xi(A^n(\tilde{\lambda}_i, b_q))_{t_i}}{\xi(A^n(\tilde{\lambda}_i, b_q))_{t_{i-1}}}$$

et le résultat découle de l'hypothèse (2.13). ■

§b - Le cas général. Commençons par démontrer le lemme (2.15). Soit $\tau_b^n = \inf(t : |\Delta X_t^n| > b)$. La condition intervenant dans (2.15) s'écrit aussi: $\lim_{b \uparrow \infty} \limsup_{n \uparrow \infty} P(\tau_b^n \leq t) = 0$ pour tout $t > 0$. Le lemme (2.15) découle alors immédiatement du

(3.12) LEMME: Pour tous $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, $t > 0$, on a

$$\begin{aligned} P(\tau_b^n \leq t) &\leq \varepsilon + P(I_{\{|x| > b\}} * \nu_t^n \geq \varepsilon) \\ P(I_{\{|x| > b\}} * \nu_t^n \geq \varepsilon) &\leq \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) P(\tau_b^n \leq t). \end{aligned}$$

Démonstration. On considère les deux processus croissants $Z = I_{\{|x| > b\}} * \mu^n$ (où μ^n est associé à X^n par (2.1)) et $\tilde{Z} = I_{\{|x| > b\}} * \nu^n$. Pour tout temps d'arrêt T on a $E(Z_T) = E(\tilde{Z}_T)$. On a aussi $\{\tau_b^n \leq t\} = \{Z_t \geq 1\}$, et \tilde{Z} est prévisible. D'après le théorème de Lenglart [5] on a alors pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P(\tau_b^n \leq t) = P(Z_t \geq 1) \leq \varepsilon + P(\tilde{Z}_t \geq \varepsilon)$$

$$P(\tilde{Z}_t \wedge \tau_b^n \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} E(Z_t \wedge \tau_b^n) = \frac{1}{\varepsilon} P(\tau_b^n \leq t),$$

d'où le résultat. ■

Passons maintenant à la preuve de (2.14). Pour tout $b \geq 1$ on pose

$$X^n(b)_t = X_t^n - \sum_{s \leq t} \Delta X_s^n I_{\{|\Delta X_s^n| > b\}},$$

qui est une semimartingale de caractéristiques locales $(B^n, C^n, I_{\{|x| \leq b\}} \nu^n)$.

Soit $t_1 < t_2 < \dots < t_m = t$ des points de D . D'après (2.12) il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $P(F_t^n \leq K) \rightarrow 0$ et que $F_t^\infty \leq K$. Posons

$$\sigma^n = \inf\{s : F_s^n > K + 1\}$$

$$\bar{X}^n(b)_s = X^n(b)_s \wedge t / \sigma^n.$$

Par construction les semimartingales $\bar{X}^n(b)$ vérifient (3.1), et comme $\Delta F^n \leq d + 1$ ils vérifient (3.2) avec $K + 2 + d$ et on a

$$(3.13) \quad \lim_{n \uparrow \infty} P(\sigma^n \leq t) = 0,$$

et $\sigma^\infty > t$ car $F_t^\infty < K$. Remarquons aussi que $\bar{X}^n(b)$ vérifie l'hypothèse (2.10). Enfin si $\bar{A}^{n, b'}(\lambda, b)$ est associé à $\bar{X}^n(b')$ par (2.9), d'après la forme des caractéristiques locales de $X^n(b')$, donc de $\bar{X}^n(b')$, on a pour $1 \leq b' \leq b$:

$$\bar{A}^{n, b'}(\lambda, b)_s = A^n(\lambda, b')_s \wedge t / \sigma^n.$$

D'après (3.13) et (2.13), on a alors si $b_q \geq 1$:

$$\lambda \in \mathbb{R}^d, b \geq b_q, s \in D \implies \xi(\bar{A}^{n, b_q}(\lambda, b))_s \xrightarrow{\mathcal{L}} \xi(\bar{A}^{\infty, b_q}(\lambda, b))_s.$$

En d'autres termes, les processus $(\bar{X}^n(b_q))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient toutes les hypothèses du §a dès que $b_q \geq 1$, et on déduit du lemme (3.11) que

$$(3.14) \quad (\bar{X}^n(b_q)_{t_1}, \dots, \bar{X}^n(b_q)_{t_m}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (\bar{X}^\infty(b_q)_{t_1}, \dots, \bar{X}^\infty(b_q)_{t_m}).$$

Enfin d'après (3.12) et (3.13), et l'hypothèse (2.12), pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $q_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$(3.15) \quad n \geq n_0, q \geq q_0 \implies P(\sigma^n > t, \tau_{b_q}^n > t) \geq 1 - \varepsilon.$$

Comme $\bar{X}^n(b)_{t_i} = X_{t_i}^n$ pour tout $i \leq m$ sur l'ensemble $\{\sigma^n > t, \tau_b^n > t\}$, on déduit de (3.14) et de (3.15) que

$$(X_{t_1}^n, \dots, X_{t_m}^n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} (X_{t_1}^\infty, \dots, X_{t_m}^\infty),$$

ce qui achève de prouver le théorème (2.14).

4 - EXPONENTIELLES DE FONCTIONS CROISSANTES OU A VARIATION FINIE

Dans cette partie, nous abandonnons les probabilités pour ne considérer que des fonctions (déterministes!), que nous noterons cependant toujours A^n, B^n, \dots . On note \mathcal{V} (resp. \mathcal{V}^+) l'ensemble des fonctions: $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ nulles en 0, continues à droite, à variation finie (resp. croissantes). Si $A \in \mathcal{V}$ on note $V(A)$ sa fonction variation. On définit toujours "l'exponentielle" $\mathcal{Z}(A)$ par la formule (2.7), qui devient ici:

$$(4.1) \quad \mathcal{Z}(A)_t = e^{A_t} \prod_{s \leq t} [(1 + \Delta A_s) e^{-\Delta A_s}].$$

Si les A^n sont continus, on a bien-sûr $\mathcal{Z}(A^n)_t \rightarrow \mathcal{Z}(A^\infty)_t$ si et seulement si $A_t^n \rightarrow A_t^\infty$. Lorsque les A^n ne sont pas continus, la convergence de $\mathcal{Z}(A^n)_t$ vers $\mathcal{Z}(A^\infty)_t$ est bien plus difficile à établir. Nous allons en faire une étude relativement systématique.

§a - Un résultat général. On considère d'une part une suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{V} , d'autre part une partie dense D de \mathbb{R}_+ . Introduisons les hypothèses:

$$(4.2) \quad t \in D \implies A_t^n \rightarrow A_t^\infty.$$

$$(4.3) \quad \text{Il existe des } B^n \in \mathcal{V}^+ \text{ tels que } B^n - V(A^n) \in \mathcal{V}^+ \text{ et que: } t \in D \implies B_t^n \rightarrow B_t^\infty.$$

$$(4.4) \quad \text{Pour tout } t > 0 \text{ il existe une suite } (t(n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ telle que: } t(n) \rightarrow t, \Delta A_{t(n)}^n \rightarrow \Delta A_t^\infty, \text{ et } t \in D \implies t(n) \leq t.$$

(4.5) On a (4.4) et, si $\varepsilon > 0$, si t_1, \dots, t_m, \dots sont les instants successifs où $|\Delta A^\infty| > \varepsilon$, et si $(t_m(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite associée à t_m par (4.4), on a pour tout $t \geq 0$:

$$\limsup_{n \uparrow \infty} \sup_{s \leq t, s \neq t_1(n)} |\Delta A_s^n| \leq \varepsilon.$$

$$(4.6) \quad \text{LEMME: Si on a (4.2), (4.3), (4.5), alors: } t \in D \implies \mathcal{Z}(A^n)_t \rightarrow \mathcal{Z}(A^\infty)_t.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon \in]0, 1/2[$ et $t \in D$. D'après (4.5) et quitte à négliger les petites valeurs de n , on peut supposer que $|\Delta A_s^n| < 1$

pour tous $s \leq t, s \neq t_i(n), n \in \mathbb{N}$. On pose (avec les notations de (4.5)):

$$V_t^n = \prod_{i: t_i(n) \leq t} [(1 + \Delta A_{t_i(n)}^n) \exp -\Delta A_{t_i(n)}^n]$$

$$W_t^n = \sum_{s \leq t, s \neq t_i(n)} [\Delta A_s^n - \text{Log}(1 + \Delta A_s^n)].$$

Soit c une constante telle que $x - \text{Log}(1+x) \leq c \varepsilon |x|$ si $|x| \leq 3\varepsilon/2$ (on peut choisir c indépendamment de ε , si $\varepsilon < 1/2$). D'après (4.3) et (4.5) il vient

$$\limsup_{n \uparrow \infty} W_t^n \leq c \varepsilon B_t^\infty,$$

tandis que $W_t^n \geq 0$. Par ailleurs $\xi(A^n)_t = V_t^n \exp(A_t^n - W_t^n)$. D'après (4.4) on a $V_t^n \rightarrow V_t^\infty$. En utilisant (4.2) et le fait que ε est arbitrairement petit, on en déduit que $\xi(A^n)_t \rightarrow \xi(A^\infty)_t$. ■

(4.7) LEMME: Supposons que les $A^n \in \mathcal{V}^+$ vérifient (4.2). Si $s \in D, s' > s$, on a:

$$\limsup_{n \uparrow \infty} \sup_{s < r \leq s'} \Delta A_r^n \leq \sup_{s < r \leq s'} \Delta A_r^\infty.$$

Démonstration. Soit a et b les membres de droite et de gauche de l'inégalité à démontrer. Il existe une sous-suite (n') de \mathbb{N} et une suite $(t_{n'})$ de points de $]s, s']$ convergeant vers une limite $t \in [s, s']$, telle que $\Delta A_{t_{n'}}^{n'} \rightarrow b$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $u, v \in D$ avec $s \leq u \leq t < v$, et $u < t$ si $s < t$, et

$$A_v^\infty - A_u^\infty - \Delta A_t^\infty I_{\{t > s\}} \leq \varepsilon$$

On a $t_{n'} \in]u, v]$ si n' est assez grand. D'après (4.2) il vient

$$b = \lim_{(n')} \Delta A_{t_{n'}}^{n'} \leq \lim_{(n')} (A_v^{n'} - A_u^{n'}) = A_v^\infty - A_u^\infty \leq \varepsilon + \Delta A_t^\infty I_{\{t > s\}} \leq \varepsilon + a$$

et comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a $b \leq a$. ■

(4.8) COROLLAIRE: Si les $A^n \in \mathcal{V}^+$ vérifient (4.2) et (4.4), ils vérifient (4.5).

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. On utilise les notations de (4.5), et on pose

$$\bar{A}_t^n = A_t^n - \sum_{i: t_i(n) \leq t} \Delta A_{t_i(n)}^n$$

D'après (4.4), les $(\bar{A}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des éléments de \mathcal{V}^+ vérifiant (4.2). Comme $\Delta \bar{A}_s^\infty \leq \varepsilon$ par construction, il suffit d'appliquer le lemme (4.7). ■

Nous allons immédiatement en déduire deux résultats sur la convergence des exponentielles; seul le premier sera utilisé plus loin.

(4.9) PROPOSITION: Supposons que les $A^n \in \mathcal{V}$ vérifient (4.2) et (4.3), et que B^∞ soit continu. Alors: $t \in D \implies \mathcal{E}(A^n)_t \longrightarrow \mathcal{E}(A^\infty)_t$ (en fait, on peut montrer que dans ce cas, cette convergence a lieu pour tout $t \geq 0$).

Démonstration. Il est facile de vérifier que les hypothèses entraînent la continuité de A^∞ . Comme A^∞ et B^∞ sont continus, les suites (A^n) et (B^n) vérifient trivialement (4.4). De plus (B^n) vérifie (4.5) d'après le corollaire (4.8), de sorte que

$$\limsup_{n \uparrow \infty} \sup_{s \leq t} |\Delta A_s^n| \leq \limsup_{n \uparrow \infty} \sup_{s \leq t} \Delta B_s^n = 0$$

(en utilisant la continuité de B^∞ : donc $t_{1_i} = \infty$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $\varepsilon > 0$ dans (4.5)). Donc la suite (A^n) vérifie (4.5) et le résultat découle du lemme (4.6). ■

(4.10) PROPOSITION: L'application: $A \rightsquigarrow \mathcal{E}(A)$ de \mathcal{V}^+ dans l'espace \mathcal{V}_1^+ des fonctions croissantes continues à droite égales à 1 en 0, est continue pour la restriction de la topologie de Skorokhod sur $D([0, \infty[; \mathbb{R})$ à ces espaces.

Démonstration. On sait que la suite de fonctions A^n converge vers A^∞ dans \mathcal{V}^+ (resp. \mathcal{V}_1^+) pour la topologie de Skorokhod si et seulement si elle vérifie (4.2) et (4.4) pour une partie dense D de \mathbb{R}_+ (et dans ce cas, elle vérifie (4.2) et (4.4) avec $D = \{t : \Delta A_t^\infty = 0\}$). Si la suite (A^n) d'éléments de \mathcal{V}^+ vérifie (4.2) et (4.4), elle vérifie (4.5) d'après le corollaire (4.8), donc la suite $(\mathcal{E}(A^n))$ vérifie (4.2) d'après le lemme (4.6). Enfin comme $\Delta \mathcal{E}(A^n) = \mathcal{E}(A^n) \Delta A^n / (1 + \Delta A^n)$ il est facile d'en déduire que la suite $(\mathcal{E}(A^n))$ vérifie aussi (4.4), d'où le résultat. ■

§b - Le cas des fonctions croissantes. La condition (4.4) est difficile à vérifier a-priori. Nous allons donc donner des conditions équivalentes dans le cas où les A^n sont dans \mathcal{V}^+ . On note \mathcal{C} l'ensemble des fonctions $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui sont strictement convexes et vérifient: $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(0)$ existe et est fini. Soit la condition:

$$(4.11) \quad t \in D \implies \sum_{s \leq t} f(\Delta A_s^n) \longrightarrow \sum_{s \leq t} f(\Delta A_s^\infty).$$

(4.12) LEMME: Supposons que les $A^n \in \mathcal{V}^+$ vérifient (4.2). La suite (A^n) vérifie (4.4) si et seulement si elle vérifie (4.11) pour une fonction $f \in \mathcal{C}$, et dans ce cas elle vérifie (4.11) pour toute fonction $f \in \mathcal{C}$.

Démonstration. (a) Soit $f \in \mathcal{C}$, et supposons qu'on ait (4.11) pour f . Il est évident qu'on a (4.4) pour tout $t > 0$ tel que $\Delta A_t^\infty = 0$. Supposons donc que $\Delta A_t^\infty > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $u_m, v_m \in D$ avec

$$u_m < t \leq v_m, \quad t \in D \implies t = v_m, \quad A_{v_m}^\infty - A_{u_m}^\infty - \Delta A_t^\infty \leq 1/m.$$

Soit $F_m =]u_m, v_m]$. Il existe $r(m, n) \in F_m$ tel que $\Delta A_{r(m, n)}^n = \sup_{s \in F_m} \Delta A_s^n$. Soit $\underline{a}_m = \liminf_{(n)} \Delta A_{r(m, n)}^n$, $\bar{a}_m = \limsup_{(n)} \Delta A_{r(m, n)}^n$, $\underline{a} = \lim_{(m)} \uparrow \underline{a}_m$ et $\bar{a} = \lim_{(m)} \downarrow \bar{a}_m$. D'après (4.7) on a: $\bar{a} \leq \underline{a}_m \leq \Delta A_t^\infty$. Soit aussi $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) \leq Kx^2$ si $x \leq A_t^\infty$. D'après (4.11) on a

$$f(\Delta A_t^\infty) \leq \sum_{r \in F_m} f(\Delta A_r^\infty) = \lim_{(n)} \sum_{r \in F_m} f(\Delta A_r^n),$$

d'où

$$f(\Delta A_t^\infty) \leq K \underline{a}_m \limsup_{(n)} \sum_{r \in F_m} \Delta A_r^n \leq K \underline{a}_m (\Delta A_t^\infty + \frac{1}{m})$$

$$\begin{aligned} f(\Delta A_t^\infty) &\leq \liminf_{(n)} f(\Delta A_{r(m, n)}^n) + \limsup_{(n)} f(\sum_{s \in F_m, s \neq r(m, n)} \Delta A_s^n) \\ &\leq f(\underline{a}_m) + \limsup_{(n)} f(A_{v_m}^n - A_{u_m}^n - \Delta A_{r(m, n)}^n) \\ &\leq f(\underline{a}_m) + f(\Delta A_t^\infty + \frac{1}{m} - \underline{a}_m) \end{aligned}$$

(on applique la convexité, puis la croissance et la continuité de f). En passant à la limite en m , on obtient

$$f(\Delta A_t^\infty) \leq K \underline{a} \Delta A_t^\infty, \quad f(\Delta A_t^\infty) \leq f(\underline{a}) + f(\Delta A_t^\infty - \underline{a}).$$

Etant donnée la stricte convexité de f , la seconde inégalité n'est possible que si $\underline{a} = 0$ (ce que contredit la première inégalité), ou si $\underline{a} = A_t^\infty$. Comme on a vu que $\bar{a} \leq \Delta A_t^\infty$ on a donc $\underline{a} = \bar{a} = \Delta A_t^\infty$. Par suite pour tout $q \in \mathbb{N}$ il existe $k(q) \geq q$ tel que

$$\Delta A_t^\infty - \frac{1}{q} \leq \underline{a}_{k(q)} \leq \bar{a}_{k(q)} \leq \Delta A_t^\infty + \frac{1}{q}$$

et il existe $l(q) \geq q$ tel que $|\Delta A_t^\infty - \Delta A_{r(k(q), n)}^n| \leq 2/q$ pour tout $n \geq l(q)$. Il reste à poser $m(n) = \sup\{q : n \geq l(q)\}$ et $t(n) = r(k(m(n)), n)$ pour obtenir (4.4).

(b) Supposons inversement qu'on ait (4.4), et soit $f \in \mathcal{C}$. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. D'après (4.8) on sait que la suite (A^n) vérifie la condition (4.5), dont on utilise les notations. Il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) \leq Kx^2$ si $x \leq 1$. D'après (4.5) il vient pour $t \in D$:

$$\begin{aligned} \limsup_{(n)} \sum_{s \leq t} f(A_s^n) &\leq \lim_{(n)} \sum_{i: t_1(n) \leq t} f(\Delta A_{t_1}^n) + K \varepsilon \lim_{(n)} A_t^n \\ &= \sum_{i: t_1 \leq t} f(\Delta A_{t_1}^\infty) + K \varepsilon A_t^\infty \\ &\leq \sum_{s \leq t} f(\Delta A_s^\infty) + K \varepsilon A_t^\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \liminf_{(n)} \sum_{s \leq t} f(\Delta A_s^n) &\geq \lim_{(n)} \sum_{i: t_1(n) \leq t} f(\Delta A_{t_1}^n) \\ &= \sum_{i: t_1 \leq t} f(\Delta A_{t_1}^\infty) \geq \sum_{s \leq t} f(\Delta A_s^\infty) - K \varepsilon A_t^\infty \end{aligned}$$

et comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a (4.11) pour la fonction f . ■

(4.13) COROLLAIRE: Supposons que les $A^n \in \mathcal{V}^+$ vérifient (4.2) et

$$(4.14) \quad t \in D \longrightarrow \sum_{s \leq t} (\Delta A_s^n)^2 \longrightarrow \sum_{s \leq t} (\Delta A_s^\infty)^2.$$

On a alors: $t \in D \longrightarrow \mathcal{Z}(A^n)_t \longrightarrow \mathcal{Z}(A^\infty)_t$.

Ce corollaire découle immédiatement de (4.6), (4.8) et (4.12), car $f(x) = x^2$ est dans \mathcal{C} . Comme $f(x) = x - \text{Log}(1+x)$ est aussi dans \mathcal{C} , c'est aussi une conséquence directe de (4.12) et de la formule (4.1).

(4.15) REMARQUE: Le corollaire (4.13) est démontré par Kabanov, Liptzer et Shiriyayev [4], par une méthode un peu différente et un peu plus simple. Cependant la méthode utilisée ici donne quelques informations supplémentaires:

1) En utilisant l'équivalence (4.12), on voit que si les $A^n \in \mathcal{V}^+$ vérifient (4.2), on a $\mathcal{Z}(A^n)_t \longrightarrow \mathcal{Z}(A^\infty)_t$ pour tout $t \in D$ si et seulement si (4.14) est vérifié.

2) Le corollaire (4.13) reste valide si on remplace (4.14) par

$$t \in D \longrightarrow \sum_{s \leq t} (\Delta A_s^n)^\alpha \longrightarrow \sum_{s \leq t} (\Delta A_s^\infty)^\alpha$$

pour un réel $\alpha \geq 2$ quelconque. ■

§c - Le cas des fonctions à variation finie. Dans ce cas, nous allons nous contenter d'étudier une condition très particulière.

(4.16) PROPOSITION: On suppose que les $A^n \in \mathcal{V}$ vérifient (4.2), (4.3), et (4.11) avec les trois fonctions $f(x) = x^2$, $= x^3$, $= x^4$. Alors on a:
 $t \in D \longrightarrow \mathcal{Z}(A^n)_t \longrightarrow \mathcal{Z}(A^\infty)_t$.

(ces conditions impliquent aussi qu'on ait (4.11) pour toute fonction $f(x) = |x|^\alpha$, avec $\alpha \geq 2$).

Démonstration. Posons $C_t^n = \sum_{s \leq t} (\Delta A_s^n)^2$, $D_t^n = \sum_{s \leq t} (\Delta A_s^n)^3$ et $E_t^n = \sum_{s \leq t} (\Delta A_s^n)^4$. Les C^n sont dans \mathcal{V}^+ et vérifient (4.2) et (4.14), donc (4.4) et (4.5). Soit $t > 0$ et $(t(n))$ une suite telle que $t(n) \rightarrow t$, $(\Delta A_{t(n)}^n)^2 \rightarrow (\Delta A_t^\infty)^2$, et $t(n) \leq t$ si $t \in D$. Si $\Delta A_{t(n)}^n$ ne converge pas vers ΔA_t^∞ , quitte à prendre une sous-suite on peut supposer que $\Delta A_{t(n)}^n \rightarrow -\Delta A_t^\infty$.

On pose $\bar{C}_s^n = C_s^n - \Delta C_{t(n)}^n I_{\{t(n) \leq s\}}$, et on définit de même \bar{D}^n et \bar{E}^n , avec la convention $t(\infty) = t$. Il est clair que pour tout $s \in D$, on a: $\bar{C}_s^n \rightarrow \bar{C}_s^\infty$, $\bar{D}_s^n \rightarrow \bar{D}_s^\infty + 2(\Delta A_t^\infty)^3 I_{\{t \leq s\}}$, et $\bar{E}_s^n \rightarrow \bar{E}_s^\infty$. Par ailleurs on a $\bar{C}^n + \bar{E}^n - V(\bar{D}^n) \in \mathcal{V}^+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (car $|x^3| \leq x^2 + x^4$) et $\Delta \bar{C}_t^\infty = \Delta \bar{E}_t^\infty = 0$, donc on doit avoir $\Delta \bar{D}_t^\infty + 2(\Delta A_t^\infty)^3 = 0$. Comme on a aussi $\Delta \bar{D}_t^\infty = 0$ par construction, on arrive à une contradiction, sauf si $\Delta A_t^\infty = 0$.

En d'autres termes, on a montré que $\Delta A_{t(n)}^n \rightarrow \Delta A_t^\infty$. Enfin comme la suite (C^n) vérifie (4.5) on en déduit aisément que (A^n) vérifie également (4.5), et le résultat découle du lemme (4.6). ■

Voici maintenant deux résultats un peu différents, qui ne seront pas utilisés dans la suite et sont donc énoncés sans démonstration.

(4.17) PROPOSITION: On suppose que $A^n \in \mathcal{V}$ s'écrit $A^n = B^n - C^n$ avec $B^n, C^n \in \mathcal{V}^+$, et que les suites (A^n) , (B^n) , (C^n) vérifient (4.2) et (4.14). On a alors: $t \in D \implies \xi(A^n)_t \rightarrow \xi(A^\infty)_t$.

(4.18) PROPOSITION: On suppose que les $A^n \in \mathcal{V}$ vérifient (4.2), (4.3), (4.14), et que $\Delta B^\infty = |\Delta A^\infty|$. Alors: $t \in D \implies \xi(A^n)_t \rightarrow \xi(A^\infty)_t$.

§d - Retour aux probabilités. Revenons aux probabilités en considérant pour chaque $n \in \bar{\mathbb{N}}$ un espace probabilisé $(\Omega^n, \mathbb{F}^n, P^n)$ muni d'un processus A^n à trajectoires dans \mathcal{V} . Ce qui précède s'applique de la manière suivante aux convergences en loi: soit d'abord les conditions:

$$(4.19) \quad t \in D \implies A_t^n \xrightarrow{\mathcal{L}} A_t^\infty$$

(4.20) Pour chaque $n \in \bar{\mathbb{N}}$ il existe un processus croissant B^n sur

$(\Omega^n, \underline{F}^n, P^n)$ tel que $B^n - V(A^n)$ soit croissant et que
 $t \in D \implies B_t^n \xrightarrow{\mathcal{Z}} B_t^\infty$.

$$(4.21) \quad t \in D \implies \sum_{s \leq t} (\Delta A_s^n)^2 \xrightarrow{\mathcal{Z}} \sum_{s \leq t} (\Delta A_s^\infty)^2$$

$$(4.22) \quad t \in D \implies \sum_{s \leq t} (\Delta A_s^n)^3 \xrightarrow{\mathcal{Z}} \sum_{s \leq t} (\Delta A_s^\infty)^3$$

$$(4.23) \quad t \in D \implies \sum_{s \leq t} (\Delta A_s^n)^4 \xrightarrow{\mathcal{Z}} \sum_{s \leq t} (\Delta A_s^\infty)^4$$

Le théorème suivant résume alors ce dont nous aurons besoin dans la suite.

(4.24) THEOREME: On a: $t \in D \implies \mathcal{F}(A^n)_t \xrightarrow{\mathcal{Z}} \mathcal{F}(A^\infty)_t$ sous chacune des conditions suivantes:

- (i) On a (4.19), (4.20), A^∞ et B^∞ sont déterministes, B^∞ est continu.
- (ii) On a (4.19), (4.21), les A^n sont croissants, A^∞ est déterministes.
- (iii) On a (4.19), (4.20), (4.21), (4.22), (4.23), A^∞ et B^∞ sont déterministes.

Démonstration. Quitte à prendre le produit des espaces $(\Omega^n, \underline{F}^n, P^n)$, on peut supposer que tous ces processus sont définis sur le même espace $(\Omega, \underline{F}, P)$; les diverses limites étant déterministes, on a donc des convergences en probabilité. Si $t \in D$, pour montrer que $\mathcal{F}(A^n)_t \xrightarrow{\mathcal{Z}} \mathcal{F}(A^\infty)_t$ il suffit de montrer que de toute sous-suite (n') on peut extraire une sous-sous-suite (n'') pour laquelle il y a convergence presque-sûre. Quitte à restreindre D on peut supposer que D est dénombrable et contient encore t , donc de la sous-suite (n') on extrait une sous-sous-suite (n'') pour laquelle les convergences dans (4.19)-(4.23) sont presque-sûres. Il suffit alors d'appliquer (4.9) (resp. (4.13), resp. (4.16)) quand on a (i) (resp. (ii), resp. (iii)). ■

5 - QUELQUES EXEMPLES

Dans cette partie nous revenons à la situation du §2, et nous allons donner diverses conditions portant sur les caractéristiques locales des X^n et assurant qu'on a (2.11), (2.12), (2.13) ou (2.16). Pour simplifier, on supposera que les X^n sont des semimartingales réelles ($d=1$).

On verra intervenir des conditions du type: $K^n(dx) \xrightarrow{\mathcal{Z}} K^\infty(dx)$, où les $K^n(\omega, dx)$ sont des mesures aléatoires finies sur \mathbb{R} . Cela signifie

que pour toute fonction continue bornée f sur \mathbb{R} on a $K^n(f) \xrightarrow{\mathcal{L}} K^\omega(f)$. De manière équivalente, cela signifie aussi que les variables aléatoires K^n convergent en loi vers la variable K^ω , ces variables prenant leurs valeurs dans l'espace polonais des mesures bornées sur \mathbb{R} muni de la topologie de la convergence étroite: pour se rappeler ceci, on écrira: $K^n \xrightarrow{\mathcal{L}, \text{ét}} K^\omega$.

Signalons à ce propos que dans ce cas, si f est une fonction bornée sur \mathbb{R} , continue sauf en un nombre fini de points x_1, \dots, x_m , on a $K^n(f) \xrightarrow{\mathcal{L}} K^\omega(f)$ dès que $P[K^\omega(\{x_i\}) > 0] = 0$ pour tout $i \leq m$.

En particulier, on appliquera les remarques qui précèdent à des mesures K^n construites à partir des ν^n . Or, dans la définition même des caractéristiques locales on voit que les points $x=1$ et $x=-1$ jouent un rôle tout-à-fait particulier. Cela conduit à imposer parfois l'hypothèse suivante; lorsque (2.10) est vérifiée:

(5.1) HYPOTHESE: On a $\nu^\omega(\mathbb{R}_+ \times \{-1, 1\}) = 0$.

(5.2) REMARQUES: 1) L'hypothèse (5.1) peut sembler restrictive. En fait il n'en est rien car si elle n'est pas vérifiée on peut toujours choisir un $a > 1$ tel que $\nu^\omega(\mathbb{R}_+ \times \{-a, a\}) = 0$. On considère les processus $\bar{X}^n = X^n/a$, qui admettent les caractéristiques locales $\bar{B}^n = B^n/a + \frac{x}{a} I_{\{1 < |x| \leq a\}} * \nu^n$, $\bar{C}^n = C^n$, et $\bar{\nu}^n([0, t] \times A) = \int \nu^n([0, t] \times dx) I_A(\frac{x}{a})$. De plus $\bar{\nu}^\omega$ vérifie (5.1). Enfin la conclusion du théorème (2.14) (resp. (2.17)) est valable pour les X^n si et seulement si elle est valable pour les \bar{X}^n : on peut donc remplacer dans ce qui suit X^n par \bar{X}^n .

2) En fait l'introduction de l'hypothèse (5.1) est due à une définition des caractéristiques locales qui n'est pas adaptée à l'étude des convergences. Il serait plus judicieux ici (mais moins habituel) de modifier la définition (2.2) du processus \check{X} , donc la seconde caractéristique B , ainsi: on choisirait une fonction f continue telle que $f(x) = x$ si $|x| \geq 1$, $f(x) = 0$ si $|x| \leq 1/2$, et $|f(x)| \leq |x|$, et on poserait $\check{X}_t = \sum_{s \leq t} f(\Delta X_s)$. Il n'y aurait alors plus lieu de considérer l'hypothèse (5.1). ■

Terminons ces préliminaires par une dernière remarque: dans ce qui suit nous énonçons des résultats de convergence en loi, qui s'appuient sur le théorème (2.17), donc sur [3]. Mais rappelons que dans cet article, seule la convergence fini-dimensionnelle au sens du théorème (2.14) est montrée.

§a - Exemples où X^∞ est quasi-continu à gauche. Dans tout ce qui suit nous nous plaçons dans les conditions du §2, dont nous utilisons les notations. Commençons par un résultat simple.

(5.3) THEOREME: Supposons que chaque X^n soit croissant, que X^∞ soit quasi-continu à gauche, et qu'on ait (2.10). Les mesures aléatoires suivantes sur \mathbb{R}_+ sont finies et positives:

$$U_t^n(dx) = (B_t^n - xI_{\{|x| \leq 1\}} * \nu_t^n) \varepsilon_0(dx) + (x \wedge 1) * \nu^n([0, t] * dx)$$

et si: $t \in D \implies U_t^n \xrightarrow{\mathcal{L}, \text{ét}} U_t^\infty$, les processus X^n convergent en loi vers X^∞ .

Ce résultat est un cas particulier du théorème suivant:

(5.4) THEOREME: Supposons que $X^n - X^{n,c}$ soit à variation finie pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et qu'on ait (2.10). Les mesures aléatoires suivantes sur \mathbb{R}_+ sont finies (mais pas nécessairement positives):

$$V_t^n(dx) = (B_t^n - xI_{\{|x| \leq 1\}} * \nu_t^n) \varepsilon_0(dx) + (x \wedge 1 \vee (-1)) * \nu^n([0, t] * dx)$$

et si on a

(i) $t \in D \implies C_t^n \xrightarrow{\mathcal{L}} C_t^\infty$, $V_t^n \xrightarrow{\mathcal{L}, \text{ét}} V_t^\infty$;
 (ii) il existe des processus H^n tels que: $t \in D \implies H_t^n \xrightarrow{\mathcal{L}} H_t^\infty$, que H^∞ soit déterministe, et que $H^n - V(B^n - xI_{\{|x| \leq 1\}} * \nu^n) - (|x| \wedge 1) * \nu^n$ soit croissant;

(iii) H^∞ est continu,

alors les processus X^n convergent en loi vers X^∞ .

Remarquons que (iii) entraîne que $\nu^\infty(\{t\} * \mathbb{R}) = 0$, donc X^∞ est quasi-continu à gauche. Le fait que $X^n - X^{n,c}$ soit à variation finie entraîne de manière classique que $(|x| \wedge 1) * \nu_t^n < \infty$ p.s. pour tout $t < \infty$, donc la mesure V_t^n est finie, et le processus $B^n - xI_{\{|x| \leq 1\}} * \nu^n$ est bien défini, et continu d'après (2.6).

Si X^n est croissant, on a $C^n = 0$, $U^n = V^n$ et $B^n - xI_{\{|x| \leq 1\}} * \nu^n$ est croissant. Donc les hypothèses de (5.3) entraînent (i), (ii) avec $H^n = U^n(1)$, et (iii) car $H^\infty = U^\infty(1)$ est continu si X^∞ est quasi-continu à gauche.

Démonstration. On a $x^2 \wedge 1 \leq |x| \wedge 1$, et le processus

$$V(B^n - xI_{\{|x| \leq 1\}} * \nu^n) + (|x| \wedge 1) * \nu^n - V(B^n)$$

est croissant. Donc l'hypothèse (2.16) est satisfaite avec $G^n = 2H^n + C^n$.

Soit $\Lambda = \{b > 0 : \nu^{\infty}(\mathbb{R} \times \{-b, b\}) = 0\}$, qui est une partie dense de \mathbb{R}_+ .
Si $b \in \Lambda$, (i) implique que

$$I_{\{|x| > b\}} * \nu_t^n = V_t^n(I_{\{x > b\}} - I_{\{x < -b\}}) \xrightarrow{\mathcal{Z}} V_t^{\infty}(I_{\{x > b\}} - I_{\{x < -b\}}) \\ = I_{\{|x| > b\}} * \nu_t^{\infty}$$

et comme $\lim_{b \uparrow \infty} I_{\{|x| > b\}} * \nu_t^{\infty} = 0$ il est facile d'en déduire qu'on a (2.11).

Soit $b \in \Lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^{\lambda x} - 1}{x \wedge 1 \vee (-1)} I_{\{|x| \leq b\}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \lambda$.
cette fonction f est bornée et continue sauf en b et en $-b$. Un calcul simple montre que

$$A^n(\lambda, b)_t = \frac{\lambda^2}{2} C_t^n + V_t^n(f),$$

tandis que si $b \geq 1$ et si $c = \sup f(x)$, le processus

$$\frac{\lambda^2}{2} C_t^n + V(B^n - x I_{\{|x| \leq 1\}} * \nu^n) + c(|x| \wedge 1) * \nu^n - V[A^n(\lambda, b)]$$

est croissant. Donc $\lambda^2 C^n / 2 + (|\lambda| + c)H^n - V[A^n(\lambda, b)]$ est croissant.

D'après (4.24, i) et les hypothèses (i), (ii) et (iii), on en déduit que $\xi(A^n(\lambda, b))_t \xrightarrow{\mathcal{Z}} \xi(A^{\infty}(\lambda, b))_t$ si $t \in D$, $b \in \Lambda$, $b \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On a donc (2.13), d'où le résultat. ■

(5.5) THEOREME: Supposons qu'on ait (2.10) et (5.1) et que X^{∞} soit quasi-continu à gauche. Les mesures aléatoires suivantes sur \mathbb{R} sont finies et positives:

$$W_t^n(dx) = C_t^n \varepsilon_0(dx) + (x^2 \wedge 1) * \nu^n([0, t] \times dx),$$

et si

- (i) $t \in D \implies B_t^n \xrightarrow{\mathcal{Z}} B_t^{\infty}$, $W_t^n \xrightarrow{\mathcal{Z}, \text{ét}} W_t^{\infty}$;
- (ii) il existe des processus H^n tels que $H^n - V(B^n)$ soient croissants et que: $t \in D \implies H_t^n \xrightarrow{\mathcal{Z}} H_t^{\infty}$; et que H^{∞} soit déterministe;
- (iii) H^{∞} est continu,

alors les processus X^n convergent en loi vers X^{∞} .

Démonstration. L'hypothèse (2.16) est satisfaite avec $G^n = H^n + W^n(1)$ (noter que le processus: $t \rightsquigarrow W_t^n(1)$ est croissant fini). On définit Λ comme dans la preuve de (5.4) et on montre comme dans cette preuve que l'hypothèse (2.11) est satisfaite. (5.1) signifie que $1 \in \Lambda$. Soit $b \in \Lambda$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; on considère la fonction $f(x) = (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x I_{\{|x| \leq 1\}}) * I_{\{|x| \leq b\}} / (x^2 \wedge 1)$ pour $x \neq 0$ et $f(x) = \lambda^2 / 2$. Cette fonction est bornée par une constante c et est continue sauf en $\{-1, 1, -b, b\}$. On a

$$A^n(\lambda, b)_t = B_t^n + W_t^n(f)$$

et le processus

$$V(B^n) + cW^n(1) - V[A^n(\lambda, b)]$$

est croissant. D'après (4.24,i), les hypothèses (i), (ii), (iii), et la quasi-continuité à gauche de X^∞ (qui implique la continuité de: $t \rightsquigarrow W_t^\infty(1)$) entraînent que $\mathbb{E}(A^n(\lambda, b))_t \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathbb{E}(A^\infty(\lambda, b))_t$ si $t \in D$, $b \in \Lambda$, $b \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On a donc (2.13), d'où le résultat. ■

Terminons ce paragraphe par quelques commentaires sur ces divers théorèmes. Le théorème (5.4) implique que la partie martingale continue $X^{n,c}$ convergent en loi vers $X^{\infty,c}$, tandis que pour les processus $X^n - X^{n,c}$ il peut y avoir des "transferts" entre la partie "purement discontinue" et la partie "continue": cela couvre le cas où, par exemple, les processus croissants X^n purement discontinus convergent vers une processus croissant X^∞ continu (donc déterministe sous (2.10)).

Au contraire dans le théorème (5.5) il y a convergence de B^n vers B^∞ , mais il peut y avoir des transferts de la partie "purement discontinue" vers la partie martingale continue: cela couvre le cas bien connu où une suite de processus de Poisson converge vers un mouvement brownien.

Mais bien-sûr ces deux théorèmes n'épuisent pas les possibilités: on peut avoir des transferts simultanés entre $X^{n,c}$, B^n , et la partie "martingale purement discontinue". Par contre, le théorème (5.5) couvre le cas où, séparément, C^n (resp. B^n , resp. ν^n) converge vers C^∞ (resp. B^∞ , resp. ν^∞): nous laissons le lecteur écrire lui-même ce cas particulier.

Disons encore un mot de l'hypothèse (5.5,ii), qui peut sembler arbitrairement compliquée. On pourrait la remplacer par: $t \in D \implies V(B^n)_t \xrightarrow{\mathcal{L}} V(B^\infty)_t$, mais on ne couvrirait pas le cas élémentaire où les X^n sont déterministes continus (donc $C^n = 0$, $\nu^n = 0$, $B^n = X^n$), convergent vers $X^\infty = 0$, mais admettent une variation constante (en n) et non nulle. La même remarque s'applique à l'hypothèse (5.4,ii).

§b - Exemples où X^∞ n'est pas quasi-continu à gauche. Commençons par généraliser le théorème (5.3).

(5.6) THEOREME: Supposons que chaque X^n soit croissant et qu'on ait (2.10). Si, avec les notations de (5.3), on a

$$(i) \quad t \in D \implies U_t^n \xrightarrow{\mathcal{Z}, \text{ét}} U_t^\infty;$$

(ii) pour toute fonction continue f telle que $f/(x \wedge 1)$ soit bornée,
on a: $t \in D \implies \sum_{s \leq t} [v^n(\{s\}, f)]^2 \xrightarrow{\mathcal{Z}} \sum_{s \leq t} [v^\infty(\{s\}, f)]^2,$
alors les processus X^n convergent en loi vers X^∞ .

Démonstration. La seule chose à montrer est l'hypothèse (2.13). Soit toujours Λ l'ensemble introduit dans la preuve de (5.4). Soit $b \in \Lambda$, $b \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{e^{\lambda x} - 1}{x \wedge 1} I_{\{|x| \leq b\}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \lambda$. Cette fonction f est bornée et continue sauf en b et $-b$, et il est facile d'en déduire que la convergence dans (ii) est aussi valable pour $f(x)x \wedge 1$.

On a $A^n(\lambda, b)_t = U_t^n(f)$, donc d'après les hypothèses faites la suite de processus $(A^n(\lambda, b))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie les conditions de (4.24, ii). On a donc (2.13), d'où le résultat. ■

(5.7) REMARQUE: On retrouve les résultats de Kabanov, Liptzer et Shiriyev [4] comme cas particulier de ce théorème: soit en effet $X^n = N^n$ des processus ponctuels de compensateurs A^n . Il vient $C^n = 0$, $B^n = A^n$, $v^n(dt, dx) = dA_t^n \varepsilon_1(dx)$, de sorte que $U_t^n(dx) = A_t^n \varepsilon_1(dx)$. Il est facile de voir que les hypothèses de (5.6) se réduisent à (1.1) et (1.2) (et dans le cas où A^∞ est continu, celles de (5.3) se réduisent à (1.1)).

(5.8) THEOREME: Supposons que $X^n - X^{n,c}$ soit à variation finie pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et qu'on ait (2.10). Si on a (5.4, i), (5.4, ii) et

(iii') pour toute fonction f continue telle que $f/(x \wedge 1)$ soit bornée, on a

$$(5.9) \quad t \in D \implies \begin{cases} \sum_{s \leq t} v^n(\{s\}, f)^2 \xrightarrow{\mathcal{Z}} \sum_{s \leq t} v^\infty(\{s\}, f)^2 \\ \sum_{s \leq t} v^n(\{s\}, f)^3 \xrightarrow{\mathcal{Z}} \sum_{s \leq t} v^\infty(\{s\}, f)^3 \\ \sum_{s \leq t} v^n(\{s\}, f)^4 \xrightarrow{\mathcal{Z}} \sum_{s \leq t} v^\infty(\{s\}, f)^4, \end{cases}$$

alors les processus X^n convergent en loi vers X^∞ .

Démonstration. Il suffit de reprendre mot pour mot la preuve de (5.4), en remarquant que si $g(x) = (e^{\lambda x} - 1) I_{\{|x| \leq b\}}$ on a

$$A^n(\lambda, b)_t = v^n(\{t\}, g)$$

et que (5.9) est valable pour la fonction g si $b \in \Lambda$. En utilisant (4.24, iii) au lieu de (4.24, i), on obtient le résultat. ■

Enfin, on généralise de la même manière le théorème (5.5):

(5.10) THEOREME: Supposons qu'on ait (2.10) et (5.1). Si on a (5.5, i),

(5.5,ii), et

(iii') pour toute fonction f continue telle que $f/(x^2 \wedge 1)$ soit bornée, on a (5.9), alors les processus X^n convergent en loi vers X^∞ .

BIBLIOGRAPHIE

- 1 T. BROWN: A martingale approach to the Poisson convergence of simple point processes. Ann. Probab. 6, 615-628, 1978.
- 2 J. JACOD: Calcul stochastique et problèmes de martingales. Lect. Notes in Math. 714, Springer, 1979.
- 3 J. JACOD, J. MEMIN: Un nouveau critère de compacité relative pour une suite de processus. A paraître aux Sémin. de Proba. De Rennes, 1979.
- 4 I. KABANOV, R. LIPTZER, A. SHIRIAYEV: Some limit theorems for simple point processes (martingale approach). Preprint, 1979.
- 5 E. LENGART: Relations de domination entre deux processus. Ann. Inst. H. Poincaré (B), XIII, 171-179, 1977.
- 6 D. LEPINGLE, J. MEMIN: Sur l'intégrabilité uniforme des martingales exponentielles. Z. für Wahr. 42, 175-203, 1978.
- 7 P.A. MEYER: Un cours sur les intégrales stochastiques. Sémin. Proba. X, Lect. Notes Math 511, Springer, 1976.