Xavier Fernique

Caractérisation de processus à trajectoires majorées ou continues

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 691-706
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__691_0>

Mai 1977.

CARACTERISATION DE PROCESSUS A TRAJECTOIRES MAJOREES OU CONTINUES

par

X. FERNIQUE

0. INTRODUCTION.

Nous avons présenté précédemment [1] une méthode d'étude des trajectoires de fonctions aléatoires gaussiennes stationnaires caractérisant leur continuité. Nous nous proposons ici de montrer que des techniques voisines permettent d'étudier la régularité des trajectoires de certaines fonctions aléatoires non gaussiennes ou gaussiennes non stationnaires. Les résultats obtenus utilisent les mêmes expressions que dans le cas gaussien stationnaire ; même s'ils sont partiels, ils laissent espérer l'existence de critères simples dans des cas très généraux. La rédaction présentée ici développe et précise mon exposé à la 2^{me} Conférence Internationale de Vilnius (juillet 1977).

La première partie de cette étude évalue en les majorant et les minorant les sommes de certaines séries aléatoires de type particulier, gaussiennes ou non ; elle généralise et précise des résultats précédents ([2],[3]) . La seconde partie caractérise la régularité des trajectoires de certains processus gaussiens et en particulier des processus non stationnaires sur $\mathbb{R}$ liés à une distance croissante.

1. EVALUATION DE CERTAINS TYPES DE PROCESSUS.

1.0 Construction de processus, notations.

Soit $(S_n, n \in \mathbb{N})$ une suite d'ensembles finis liés par une suite

$(\pi_n^m : S_m \to S_n, m \geq n, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N})$ d'applications des S_m sur les S_n ; on suppose :

$$n \le m \le k \Rightarrow \pi_n^k = \pi_n^m \circ \pi_m^k ,$$

$$\forall n \in \mathbb{N} , \forall s \in S_n , \pi_n^n(s) = s .$$

On note T la limite projective de la famille (S_n, π_n^m) ; muni de sa topologie et de sa métrique naturelles, T est un espace compact ultramétrique ; pour tout entier n , on note π_n la projection de T sur S_n . Soient de plus $(a_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de nombres positifs et $\Lambda = (\lambda(s), s \in \sum_{n=o}^{\infty} S_n)$ une suite de v.a. indépendantes isonomes ; on se propose d'évaluer la régularité des trajectoires du processus X défini sur T par :

$$X(t) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n \lambda \circ \pi_n(t) . \tag{1.0.1}$$

On supposera que la loi commune des λ est centrée symétrique et a une fonction de répartition continue et strictement croissante ; on supposera aussi que la série Σa_n est convergente de sorte que pour $t \in T$, la série (1.0.1) soit p.s. convergente. D'après ces hypothèses, il existe deux fonctions strictement décroissantes M et Φ sur $]0,1[$ telles que :

$$P\{\lambda \ge M(\mu)\} = \mu , \Phi(\mu) = \frac{1}{\mu} E\{\lambda I_{\lambda \ge M(\mu)}\} . \tag{1.0.2}$$

On remarquera que la fonction $\mu \Phi(\mu)$ est croissante sur $]0,\frac{1}{2}]$.
On notera $\mathcal{M}(T)$ l'ensemble des probabilités sur T ; pour tout $\mu \in \mathcal{M}(T)$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on notera μ_n la probabilité sur S_n image de μ par π_n .

1.1. Majoration de processus

THEOREME 1.1. - Pour que le processus X sur T ait p.s. des trajectoires majorées, il suffit qu'il existe une mesure de probabilité μ sur T telle que

$$\sup_{t \in T} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, \Phi \circ \mu_n\{\pi_n(t)\} < \infty \; ; \tag{1.1.1}$$

<u>on a alors</u> :

$$E\{\sup_T X\} \leq \sup_{t \in T} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \{2\Phi \circ \mu_n\{\pi_n(t)\} + \Phi(\tfrac{1}{2})\} \, . \tag{1.1.2}$$

<u>Il suffit aussi que l'on ait</u> :

$$\sup_{m \in \mathfrak{M}(T)} \int dm(t) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, \Phi \circ m_n\{\pi_n(t)\} \right\} < \infty \; ; \tag{1.1.3}$$

<u>on a alors</u> :

$$E\left\{\sup_T X\right\} \leq \sup_{m \in \mathfrak{M}(T)} \int dm(t) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, \Phi \circ m_n\{\pi_n(t)\} \right\} . \tag{1.1.4}$$

<u>Démonstration</u> : (a) Notons d'abord que pour que les trajectoires de X soient p.s. majorées, il suffit qu'il existe un nombre E tel que pour toute application mesurable $\tau : \omega \to \tau(\omega)$ de l'espace d'épreuves Ω dans T, on ait :

$$E\{X \circ \tau\} \leq E \, , \tag{1.1.5}$$

on aura alors aussi :

$$E\{\sup_T X\} \leq E \, .$$

Dans ces conditions, le théorème sera prouvé si nous montrons que le premier membre de (1.1.5) est majoré par le premier membre de (1.1.3) et si nous montrons aussi que pour tout élément μ de $\mathfrak{M}(T)$ le premier membre de (1.1.3) est majoré par le second membre de (1.1.2).

(b) Soit τ une application mesurable de Ω dans T et m sa loi qui est une probabilité sur T, on a :

$$E\{X \circ \tau\} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{s \in S_n} E\{\lambda(s) I_{\pi_n \circ \tau = s}\} \; ;$$

la liaison entre m et τ impliquant l'inégalité :

(1.1.6) $$E\{\lambda(s) I_{\pi_n \circ \tau = s}\} \leq m_n\{s\} \Phi \circ m_n\{s\} ,$$

on obtient donc :

(1.1.7) $$E\{X \circ \tau\} \leq \int dm(t) \{ \sum_{n=o}^{\infty} a_n \, \Phi \circ m_n\{\pi_n(t)\}\} .$$

(c) Soit alors μ une mesure de probabilité (vérifiant 1.1.1) ; les sens de variations de Φ et de $x\Phi$ (cf (1.0)) permettent de majorer le terme de droite de (1.1.6) par $\mu_n\{s\}\Phi \circ \mu_n\{s\}$ si $m_n\{s\} \leq \mu_n\{s\} \leq \frac{1}{2}$ et aussi par $m_n\{s\}\Phi \circ \mu_n\{s\}$ si $\mu_n\{s\} \leq m_n\{s\}$. Notant que pour tout entier n, il existe au plus un élément s de S_n tel que $\mu_n\{s\}$ soit supérieur à $\frac{1}{2}$, on en déduit :

$$E\{X \circ \tau\} \leq \sum_{n=o}^{\infty} a_n \Big[\Phi(\tfrac{1}{2}) + \sum_{s \in S_n} (m_n\{s\} + \mu_n\{s\}) \Phi \circ \mu_n\{s\} \Big] ,$$

(1.1.8) $$E\{X \circ \tau\} \leq \int (dm(t) + d\mu(t)) \Big(\sum_{n=o}^{\infty} a_n \Big[\tfrac{1}{2} \Phi \, (\tfrac{1}{2}) + \Phi \circ \mu_n\{\pi_n(t)\} \Big] \Big) .$$

La conclusion du théorème résulte alors de (1.1.7) et (1.1.8).

1.2. Minorations de processus.

Les propriétés présentées dans ce paragraphe nécessitent que X satisfasse aux hypothèses suivantes :

(1.2.1) $$\forall \, n \in \mathbb{N} , \; a_n = \frac{C}{q^n} , \; q > 1 ,$$

(1.2.2) $$0 < \alpha < \beta < 1 \Rightarrow \Phi(\tfrac{\alpha}{\beta}) \geq \Phi(\alpha) - \Phi(\beta) .$$

La seconde hypothèse signifie que $\Phi(e^{-x})$ est sous-linéaire ; elle exige que $E\{\exp(\alpha|\lambda|)\}$ soit fini pour α positif assez petit ; elle est réalisée si λ a une loi exponentielle ou gaussienne.

THEOREME 1.2. - Sous les hypothèses (1.2.1) et (1.2.2), si le processus X a presque sûrement des trajectoires majorées, on a :

$$\sup_{m \in \mathcal{M}(T)} \int dm(t) \{ \sum_{n=o}^{\infty} a_n \, \Phi \circ m_n\{\pi_n(t)\}\} \leq \frac{2q}{q-1} E\{\sup_T X\} < \infty . \tag{1.2.3}$$

De plus, il existe une mesure de probabilité μ sur T telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \ \forall\, t \in T, \ \mu_n\{\pi_n(t)\} > 0 ,$$

(1.2.4)

$$\sup_{t \in T} \sum_{n=o}^{\infty} a_n \, \Phi \circ \mu_n\{\pi_n(t)\} \leq \frac{2q}{q-1} E\{\sup_T X\} < \infty .$$

Démonstration : (a) Remarquons d'abord que les théorèmes d'intégrabilité des séries de v.a. indépendantes garantissent sous les hypothèses indiquées l'intégrabilité de $\sup_T X$, les deuxièmes membres de (1.2.3) et (1.2.4) sont donc bien finis. Notons aussi que l'hypothèse 1.2.2 implique l'intégrabilité de Φ sur $]0,1[$.

(b) Soient S un ensemble fini, m une probabilité sur S, $\{\lambda(s), s \in S\}$ une famille de v.a. indépendantes centrées symétriques de même loi ; on sait alors [2] construire une application $\tau_m : \omega \to \tau_m(\omega)$ de l'espace d'épreuves dans S, de loi m, $\{\lambda(s), s \in S\}$ - mesurable, telle que :

$$E\{\lambda \circ \tau_m\} \geq \frac{1}{2} \sum_{s \in S} m\{s\} \, \Phi \circ m\{s\} . \tag{1.2.5}$$

(c) Soit m une probabilité sur T ; supposons pour alléger que pour tout entier n et tout élément s de S_n, $m_n\{s\}$ soit strictement positif, sinon on devrait restreindre l'étude au support T_m de m dans T. Pour tout entier k et tout élément s de S_k, nous notons $m(k,s)$ la probabilité sur $(\pi_k^{k+1})^{-1}(s)$ définie par :

$$m(k,s)\{t\} = \frac{m_{k+1}(t)}{m_k(s)} ,$$

et nous lui associons l'application $\tau_{m(k,s)}$ définie en (b).

Nous construisons une application τ de l'espace d'épreuves dans T en posant :

$$\tau(\omega) = t \rightleftarrows \forall\ k \in \mathbb{N}\ ,\ \tau_{m(k,\pi_k(t))} = \pi_{k+1}(t)\ .$$

En utilisant les indépendances et (1.2.5), nous obtenons :

$$E\{X \circ \tau\} \geq \tfrac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C}{q^k} \sum_{s \in S_k} m_k(s)\, \Phi\left[\frac{m_k(s)}{m_{k-1}(\pi_{k-1}(s))}\right]\ ,$$

l'hypothèse (1.2.2) implique alors :

$$(1.2.6) \qquad E\{X \circ \tau\} \geq \frac{C}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q^k} \sum_{s \in S_k} m_k(s)\, \Phi \circ m_k(s)\ .$$

Ceci démontre le résultat (1.2.4).

(d) L'hypothèse (1.2.2) montre aussi qu'on peut définir une fonction θ sur $[0,1]$ en posant :

$$\theta(0) = 0\ ,\ \theta(x) = \int_0^x \Phi(u)\, du\ ,$$

cette fonction θ vérifiant (1.2.2) l'inégalité :

$$\theta(x) \leq x[\Phi(x) + \int_0^1 \Phi(u)\, du]\ ,$$

si bien que de l'inégalité (1.2.6), on déduit :

$$\frac{q}{q-1}\left[\frac{2}{C} E\{X \circ \tau\} + \int_0^1 \Phi(u) du\right] \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q^k} \sum_{s \in S_k} \theta \circ m_k(s)\ .$$

Pour tout entier n, la somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{q^k} \sum_{s \in S_k} \theta \circ m_k(s)$ définit une fonction continue de $m \in \mathcal{M}(T)$ compact ; il existe donc un ensemble $A(n)$ de probabilités sur T où cette fonction est maximale. Un calcul de dérivation, simple puisqu'il opère sur des sommes finies, montre que $A(n)$ est l'ensemble des probabilités m pour lesquelles $\sum_{k=o}^{n} \frac{1}{q^k} \Phi \circ m_k \circ \pi_k(s)$ est indépendant de s et donc égal à son intégrale ; on a alors :

$$\forall\, m \in A(n)\,,\ E[X \circ \tau] \geq \frac{C}{2}\left(1 - \frac{1}{q}\right) \sup_{t \in T} \sum_{k=o}^{n} \frac{1}{q^k} \Phi \circ m_k \circ \pi_k(t)\ .$$

Puisque l'ensemble $\mathcal{M}(T)$ est compact, on peut construire une suite extraite des $\{A(n), n \in \mathbb{N}\}$ convergeant vers une probabilité μ ; cette mesure vérifie les propriétés (1.2.4).

1.3. Caractérisation de la régularité de certains processus.

Soit (X,T) un processus construit suivant le schéma (1.0) et vérifiant (1.2.1) et (1.2.2) ; les théorèmes (1.1) et (1.2) permettent de caractériser la régularité de ses trajectoires.

THEOREME 1.3.1. (majoration des trajectoires). - Pour que X ait p.s. ses trajectoires majorées, il faut et il suffit que l'une des deux conditions suivantes soit réalisée :

(a) $$\sup_{\mu \in \mathcal{M}(T)} \int d\mu(t) \sum_{k=o}^{\infty} \frac{1}{q^k} \Phi \circ \mu_k \circ \pi_k(t) < \infty\ ,$$

(b) $$\exists\ \mu \in \mathcal{M}(T) :\ \sup_{t \in T} \sum_{k=o}^{\infty} \frac{1}{q^k} \Phi \circ \mu_k \circ \pi_k(t) < \infty\,.$$

THEOREME 1.3.2. (Continuité locale des trajectoires). - Soit t_o un élément de T ; pour que X ait presque sûrement ses trajectoires continues en t_o, il faut et il suffit que l'une des deux conditions suivantes soit réalisée :

(a) $$\lim_{n \to \infty} \sup_{\mu \in \mathcal{M}(T)} \int_{\{\pi_n(t) = \pi_n(t_o)\}} d\mu(t) \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{q^k} \Phi\left[\frac{\mu_k \circ \pi_k(t)}{\mu_n \circ \pi_n(t_o)}\right] = 0$$

(b) $$\exists\, \mu \in \mathcal{M}(T) : \lim_{n\to\infty} \sup_{\pi_n(t)=\pi_n(t_o)} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{q^k}\, \Phi \circ \mu_k \circ \pi_k(t) = 0 .$$

THEOREME 1.3.3. (Continuité globale des trajectoires). - Pour que X ait presque sûrement ses trajectoires continues sur T , il faut et il suffit qu'en tout point de T , X ait presque sûrement ses trajectoires continues ; il faut et il suffit aussi qu'il existe une probabilité μ sur T telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in T} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{q^k}\, \Phi \circ \mu_k \circ \pi_k(t) = 0 .$$

Nous omettons les démonstrations des théorèmes (1.3.1) et (1.3.3) ; nous démontrons le théorème (1.3.2) en utilisant les notations mises en évidence dans la démonstration du théorème (1.2).

(a) Supposons les trajectoires de X presque sûrement continues en t_o ; le théorème de convergence monotone et le centrage de $X(t_o)$ montrent que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n tel que :

$$E\{\sup_{\pi_n(t)=\pi_n(t_o)} X(t)\} \le \frac{\varepsilon}{2}\frac{C}{2}\left(1 - \frac{1}{q}\right) ;$$

le résultat (a) se déduit alors immédiatement de l'application du théorème 1.2 à la restriction de X à l'ensemble $\{t : \pi_n(t) = \pi_n(t_o)\}$ qui a la même structure que X sur T ; nous constatons en effet que pour toute probabilité m sur T , on a :

$$\int_{\{\pi_n(t)=\pi_n(t_o\}} dm(s) \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{q^k}\, \Phi\left[\frac{m_k \circ \pi_k(t)}{m_n \circ \pi_n(t_o)}\right] \le \frac{\varepsilon}{2} .$$

(b) Appliquons cette formule aux différents ensembles $A(p), p \ge n$, puis par passage à la limite à la probabilité μ construite à l'alinéa (d) de la démonstration du théorème 1.2 ; nous obtenons :

$$\pi_n(t) = \pi_n(t_o) \Rightarrow \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{q^k}\{\Phi \circ \mu_k \circ \pi_k(t) - \Phi \circ \mu_n \circ \pi_n(t_o)\} \le \frac{\varepsilon}{2} .$$

Par ailleurs, il existe un entier n_1 tel que :

$$\forall\, n > n_1 \;,\; \frac{1}{q^n}\, \Phi \circ \mu_n \circ \pi_n(t_o) \leq \frac{\varepsilon}{2}(q-1) \;.$$

On en déduit le résultat (b).

(c) Les preuves réciproques sont immédiates à partir du théorème 1.1.

1.4. Quelques remarques.

1.4.1. Comme dans le cas gaussien, aux processus (X,T) considérés ci-dessus, on peut associer les écarts d_X définis sur $T \times T$ par :

$$d_X^2(s,t) = E\{|X(s)-X(t)|^2\} \;.$$

L'écart d_X sera en fait une distance et on pourra, vu le caractère ultramétrique de T la caractériser par :

$$d_X^2(s,t) = \frac{C^2 E\{\lambda^2\}}{q^2-1} \cdot \frac{1}{q^{2n}} \rightleftarrows \pi_n(s) = \pi_n(t), \pi_{n+1}(s) \neq \pi_{n+1}(t) \;.$$

Les conditions énoncées dans les différents théorèmes peuvent alors s'exprimer à partir d'intégrales sur la fonction d_X ; la condition (1.3.1 (b)) s'écrit par exemple

$$(1.4.1) \qquad \exists\, \mu \in \mathcal{M}(T) : \sup_{t\in T} \int_o^\infty \Phi \circ \mu\{d(s,t) < u\}\, du < \infty$$

la condition étant significative au voisinage de $u = 0$. Sous cette forme, on constate bien la parenté du résultat avec celui qui concerne les processus gaussiens stationnaires.

1.4.2. Soit S un sous-ensemble mesurable de T ; pour que les trajectoires de X soient presque sûrement régulières sur S (majorées ou continues), il faut et il suffit qu'elles aient la même régularité sur la fermeture $\bar{S}$ de S dans T ; comme la restriction de X à $\bar{S}$ a la même structure que X sur T , on pourra caractériser cette régularité à partir des différents théorèmes (1.3) en utilisant les probabilités sur $\bar{S}$; les conditions (1.3.1.b), (1.3.2.b), (1.3.3.b) ne pourront en général se traduire à partir des seules probabilités portées par S au contraire des conditions (a).

1.4.3. Si la loi commune des λ est gaussienne centrée réduite, la relation (1.4.1) prend la forme équivalente :

$$(1.4.3) \qquad \exists\, \mu \in \mathcal{M}(T) : \sup_{t \in T} \int_0^\infty \sqrt{\log \frac{1}{\mu\{d(s,t)<u\}}}\, du < \infty .$$

Soient alors $(T_n, n \in \mathbb{N})$ une suite d'ensembles finis de cardinaux respectifs $(L_n, n \in \mathbb{N})$ et pour tout entier n, un élément particulier t_n de T_n. On peut construire sur $T = \sum_1^\infty T_n$ à partir d'un processus gaussien normal Λ sur T un processus gaussien du type $(1,0)$ en posant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in \sum_1^n T_k,\ \pi_n(t) = t ,$$

$$\forall\, t \in \sum_{n+1}^\infty T_k,\ \pi_n(t) = t_n ,$$

$$X(t) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \lambda \circ \pi_n(t) .$$

On vérifie facilement ([1], th. 2.1.2) que pour que X soit p.s. majoré, il faut et il suffit que $\sup_n \sup_{t \in T_n} \frac{1}{2^n} \lambda(t)$ le soit ; ceci est réalisé si et seulement si $\sup_n \frac{1}{2^n} \sqrt{\log L_n}$ est fini ; on construit d'ailleurs facilement dans ce cas une mesure μ sur T vérifiant (1.3.1.b) ; il n'est donc pas nécessaire que la série $\sum_n \frac{1}{2^n} \sqrt{\log L_n}$ soit convergente comme pourrait le laisser croire une extrapolation hâtive des conditions obtenues pour les processus gaussiens stationnaires à partir des cardinaux des recouvrements de T .

2. ETUDE DE CERTAINS PROCESSUS GAUSSIENS.

Nous avons signalé ci-dessus (1.4.3) que les résultats du paragraphe 1 s'appliquent quand la loi commune des λ est gaussienne. Le théorème de comparaison ([1], th. 2.1.2) permet de déformer ces processus gaussiens sans modifier la régularité des trajectoires, le comportement asymptotique de Φ permettant d'ailleurs (1.4.3) d'écrire les conditions sous forme plus concrète. Dans ce cas, on pourra écrire des conditions équivalentes à partir de représentations intégrales du processus ([1] th. 5.2.1 et th. 6.1.1).

2.1. Soient X un processus gaussien sur un ensemble T et d l'écart associé ; on suppose que T est d-séparable et d-quasi-compact et on note D son d-diamètre ; on suppose de plus que pour tout entier n positif il existe une famille finie S_n de parties de T de d-diamètres inférieurs ou égaux à $\frac{\delta}{2^n}$ et de distances mutuelles supérieures ou égales à $\rho \frac{\delta}{2^n}$ $(\delta > 0 , \rho > 0)$, ces parties recouvrant T ; notons π_n l'application de T dans S_n qui à un élément de T associe la partie qui le contient ; le théorème de comparaison montre que pour qu'il existe une version de X à trajectoires régulières (pour l'écart d), il faut et il suffit que le processus Y défini sur T à partir d'une famille gaussienne normale par :

$$Y(t) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{2^n} \lambda \circ \pi_n(t)$$

possède les mêmes propriétés de régularité (pour l'écart d_Y) ; les écarts d_Y et d_X sont en effet équivalents sur T ; ceci signifie :

THEOREME 2.1.1. - <u>Pour qu'un processus gaussien</u> X <u>satisfaisant aux conditions ci-dessus ait une version à trajectoires majorées (resp. d-continues), il faut et il suffit qu'il existe une mesure de probabilité</u> μ <u>sur</u> (T,d) <u>telle que</u>

$$(2.1.1) \qquad \sup_{t\in T} \int_0^\infty \sqrt{\log \frac{1}{\mu\{d(s,t)<u\}}}\, du < \infty$$

$$(\text{resp. } (2.1.1')) \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{t\in T} \int_0^\varepsilon \sqrt{\log \frac{1}{\mu\{d(s,t)<u\}}}\, du = 0) .$$

2.2. La situation décrite en (2.1) semble artificielle. Nous allons pourtant en déduire des résultats nouveaux caractérisant la régularité des trajectoires de certains processus gaussiens satisfaisant à des hypothèses plus naturelles que nous énonçons et analysons ci-dessous.

2.2.1. Soient $T = [0,1]$ et X un processus gaussien sur T définissant un écart $d_X = d$ croissant au sens suivant :

$$0 \le s \le s' \le t' \le t \Rightarrow d_X(s,t) \ge d_X(s',t') \ ;$$

c'est le cas par exemple si X peut se représenter à partir d'une suite normale $(\lambda_n, n\in \mathbb{N})$ et d'une suite $(f_n, n\in\mathbb{N})$ de fonctions croissantes sous la forme :

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n f_n(t) .$$

Pour étudier la régularité des trajectoires de X, il est raisonnable de supposer qu'il existe une version de X d-séparable ; il faut et il suffit pour cela ([1], th. 3.2.2) que $([0,1],d)$ soit lui-même séparable.

LEMME 2.2.1.a. - <u>Pour que</u> $([0,1],d)$ <u>soit séparable, il faut et il suffit que l'ensemble</u> $\{t\in[0,1] : \limsup_{s\to t} d(s,t) > 0\}$ <u>soit au plus dénombrable.</u>

Pour étudier la régularité des trajectoires de X sur $[0,1]$, nous étudierons celle des trajectoires de $\hat{X}$ prolongement de X au complété $\widehat{([0,1],d)}$ de $([0,1],d)$; on sait en effet que pour qu'il existe une version de X à trajectoires majorées ou continues sur $([0,1],d)$, il faut et il suffit que $\hat{X}$ possède les mêmes propriétés sur $\widehat{([0,1],d)}$. Nous utiliserons une construction de ce complété : pour tout élément t de $[0,1]$, nous posons $t^- = \lim_{s\uparrow t} s$,

$t^+ = \lim_{s \downarrow t} s$, nous confondons ces éléments avec t si $\limsup_{s \to t} d(s,t) = 0$; dans le cas contraire, nous les munissons du système de distance associé à leur construction ; on aura par exemple :

$$\forall\ (s,t) \in [0,1] \times [0,1]\ ,\ d(s^-,t^+) = \lim_{\substack{u \uparrow s \\ v \downarrow t}} d(u,v)\ .$$

Lemme 2.2.1.b. - L'espace $[0,1] \cup \{s^-, s \in [0,1]\} \cup \{s^+, s \in [0,1]\}$ muni de la distance associée est un espace complet U; on obtient une représentation du complété $\hat{T}$ de $([0,1],d)$ en ôtant de U les points isolés de ses deux dernières composantes.

THEOREME 2.2.2. - Supposons les hypothèses 2.2.1. réalisées ; dans ces conditions, pour qu'il existe une version de X à trajectoires majorées, il faut et il suffit qu'il existe une probabilité $\hat{\mu}$ sur $\hat{T}$ telle que :

$$\sup_{t \in T} \int_0^\infty \sqrt{\log \frac{1}{\hat{\mu}\{s \in \hat{T}, d(s,t) < u\}}}\, du < \infty\ .$$

De plus pour qu'il existe une version de X à trajectoires d-continues, il faut et il suffit qu'il existe une probabilité $\hat{\mu}$ sur $\hat{T}$ telle que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{t \in T} \int_0^\varepsilon \sqrt{\log \frac{1}{\hat{\mu}\{s \in \hat{T}, d(s,t) < u\}}}\, du = 0\ .$$

2.2.3. Démonstration du théorème : (a) la suffisance des conditions indiquées est classique, il nous suffit de prouver leur nécessité. S'il existe une version à trajectoires majorées, l'espace $([0,1],d)$ est pré-quasi-compact ; la distance étant croissante, on peut alors pour tout entier n construire une famille finie $(J_k^n, k \le k(n))$ d'intervalles successifs recouvrant $[0,1]$ dont le d-diamètre soit inférieur ou égal à $\frac{1}{2^n}$ et dont les d-distances mutuelles soient supérieures ou égales à $\frac{1}{2^n}$ s'ils ne sont pas conjoints. Nous posons :

$$T_n = \bigcup_{k \in 2\mathbb{N}} J_k^n\ ,\ T'_n = T \setminus T_n\ .$$

Soit $(\lambda_n, n \in \mathbb{N})$ une suite gaussienne normale indépendante de X ; on construit un processus auxiliaire Y sur T en posant :

$$Y(t) = X(t) + \Sigma\{\frac{1}{2^n} \lambda_n, t \in T_n\} .$$

Puisque les séries du dernier terme sont extraites d'une série p.s. absolument convergente, les trajectoires de Y sont majorées si et seulement si celles de X le sont ; de même les trajectoires de X sont d_X-continues si et seulement si celles de Y sont d_Y-continues.

(b) Soit $\hat{T}_Y$ le complété de T pour d_Y ; notons $\hat{Y}$ le prolongement de Y à $\hat{T}_Y$ et $\hat{d}_Y$ l'écart associé ; le processus $\hat{Y}$ a la même régularité que Y ; la construction de Y montre que $(\hat{T}_Y, \hat{d}_Y)$ vérifie les hypothèses (2.1) ; la régularité de $\hat{Y}$ est donc caractérisée par le théorème (2.1.1) : il existe une probabilité $\hat{\mu}_Y$ sur $\hat{T}_Y$, vérifiant la relation (2.1.1) si les trajectoires sont p.s. majorées et la relation (2.1.1') si elles sont p.s. $\hat{d}_Y$-continues, ces relations étant appliquées à $(\hat{T}_Y, \hat{d}_Y)$.

(c) Puisque d_Y est supérieure à d , il existe une application continue φ de $(\hat{T}_Y, \hat{d}_Y)$ dans le complété $\hat{T}$ de $([0,1],d)$ coïncidant avec l'application identique sur $[0,1]$ vérifiant de plus :

$$\forall\ (u,v) \in (\hat{T}_Y, \hat{d}_Y)\ ,\ \hat{d}_Y(u,v) \geq d(\varphi(u), \varphi(v))\ ,$$

notons $\hat{\mu}$ l'image de $\hat{\mu}_Y$ par φ ; c'est une probabilité sur $\hat{T}$ qui vérifie les propriétés annoncées.

2.2.4. <u>Remarques.</u> (a) Les lemmes (2.2.1) montrent que les probabilités $\hat{\mu}$ sur $\hat{T}$ se décomposent à partir d'une probabilité μ sur $[0,1]$ pour la tribu engendrée par les intervalles et d'une probabilité discrète portée par les t^-, t^+ . Dans le cas où d est continue pour la topologie usuelle, les probabilités $\hat{\mu}$ sur $\hat{T}$ sont des probabilités usuelles sur $[0,1]$; on notera de plus dans ce cas qu'il n'y a pas à distinguer entre l'existence de versions à trajectoires d-continues ou à trajectoires continues pour la topologie usuelle, ceci résulte de l'existence de versions d - séparées et d - séparables ([1] th. 3.2.2).

(b) Le théorème met en évidence une classe de processus gaussiens non stationnaires dont la régularité des trajectoires est déterminée par les mêmes critères que dans le cas stationnaire ; faute de contre-exemple, on peut conjecturer que c'est le cas général.

(c) Le schéma de démonstration du théorème (2.2.2) a un champ d'application très général qu'on peut décrire comme suit : Soit X un processus gaussien sur un ensemble T ; pour tout $\delta > 0$, soit $C(\delta)$ une partition de T par des ensembles de d_X - diamètre inférieur ou égal à δ ; on décompose $C(\delta)$ en sous-ensembles $(C_i(\delta), i \in I_\delta)$ de sorte que deux parties de T différentes appartenant à la même famille aient une d_X - distance supérieure ou égale à δ ; on pose :

$$\forall\ i \in I_\delta \quad T_i = \cup\{c : c \in C_i(\delta)\} \ ;$$

à partir d'une famille gaussienne normale Λ, on définit un processus auxiliaire Z sur T en posant :

$$Z(t) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{2^n} \{\lambda_i, i \in I_{1/2^n}, t \in T_i\} \ .$$

Alors si Z est régulier, la régularité de X est caractérisée comme en (2.2.2).

REFERENCES.

[1] X. FERNIQUE , régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes, Lecture notes in Mathematics, 480, 1975, p. 1-96.

[2] X. FERNIQUE , évaluation de processus gaussiens composés, Lecture notes in Mathematics, 526, 1976, p. 64-84.

[3] C. NANOPOULOS, P. NOBELIS Etude de la régularité des fonctions aléatoires et de leurs propriétés limites, preprint.

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
Laboratoire Associé au C.N.R.S.
Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG CEDEX