

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN JACOD

JEAN MÉMIN

Un théorème de représentation des martingales pour les ensembles régénératifs

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 10 (1976), p. 24-39

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1976__10__24_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités

UN THEOREME DE REPRESENTATION DES MARTINGALES POUR
LES ENSEMBLES REGENERATIFS

par J. JACOD⁽¹⁾ et J. MEMIN⁽¹⁾

Le texte ci-dessous tire son origine d'une question posée par A.N. Shiryaev: soient (W_t) un mouvement brownien et $\bar{M} = \{t: W_t = 0\}$ l'ensemble de ses "zéros"; quelle est la forme des martingales relatives à la famille des tribus associées à \bar{M} ? Bien entendu, il n'est pas plus difficile de traiter le même problème lorsque \bar{M} est un ensemble régénératif quelconque; en réalité, lorsqu'on dispose d'un théorème de représentation des martingales pour un processus à accroissements indépendants, il s'agit même d'un problème très facile à résoudre. Comme corollaire, nous en déduisons une expression explicite du temps local de l'ensemble régénératif.

1- INTRODUCTION, ENONCE DU THEOREME DE REPRESENTATION

a) Ensembles régénératifs. Pour tout ce qui concerne les ensembles régénératifs, nous renvoyons à Meyer [7] et Maisonneuve [6], en ne donnant ici que le strict minimum nécessaire en matière de rappels.

On considère un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) muni de
-un semi-groupe de translations $(\theta_t)_{t \geq 0}$,
-un fermé aléatoire homogène mesurable \bar{M} , c'est-à-dire une partie \bar{M} de $\Omega \times [0, \infty[$ appartenant à la tribu $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0, \infty[)$, vérifiant identiquement $1_{\bar{M}}(\omega, t+s) = 1_{\bar{M}}(\theta_t(\omega), s)$, et dont toutes les coupes $\bar{m}(\omega)$ sont fermées dans $[0, \infty[$.

La formule $U_t(\omega) = t - \sup(s \leq t, s \in \bar{m}(\omega))$ (avec la convention $\sup(\emptyset) = 0$) définit un processus mesurable, continu à droite et pourvu de limites à gauche, en "dents de scie" (cf. [7]). On note $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la plus petite famille de tribus, continue à droite et rendant (U_t) adapté (donc bien-mesurable); c'est aussi la plus petite famille de tribus rendant \bar{M} bien-mesurable. Par ailleurs M désigne le fermé droit minimal d'adhérence \bar{M} , c'est-à-dire l'ensemble tel que chaque coupe $m(\omega)$ soit

⁽¹⁾ I.R.I.S.A. (Laboratoire associé n° 227), et Université de Rennes.

le plus petit fermé pour la topologie droite de $[0, \infty[$, dont la fermeture au sens usuel soit $\bar{m}(\omega)$.

DEFINITION: Le terme $(\Omega, \mathcal{F}_t, \bar{M}, P)$ est un ensemble régénératif si

(i)- $P(0 \in \bar{M}) = 1$,

(ii)- pour tout (\mathcal{F}_t) -temps d'arrêt T dont le graphe est contenu dans M et pour tout $A \in \mathcal{F}_\infty$, on a

$$(1) \quad P(\theta_T^{-1}(A) | \mathcal{F}_T) = P(A).$$

Pour simplifier la discussion, on supposera que P -presque chaque coupe $\bar{m}(\omega)$ n'est pas bornée. On peut alors distinguer quatre types d'ensembles régénératifs:

I- On a $\bar{m}(\omega) = [0, \infty[$ P -ps.

II- $\bar{m}(\omega)$ ne comporte P -ps que des points isolés; si $X_n(\omega)$ désigne la longueur du $n^{\text{ème}}$ intervalle contigu à $\bar{m}(\omega)$, les (X_n) sont alors indépendantes et de même loi (autrement dit, \bar{M} est constitué d'un processus de renouvellement).

III- $\bar{m}(\omega)$ est constitué P -ps d'une suite d'intervalles de longueurs successives $Y_n(\omega)$; si $X_n(\omega)$ est défini comme ci-dessus, les variables $(X_n, Y_n, n \geq 1)$ sont mutuellement indépendantes, les Y_n suivent la même loi exponentielle, et les X_n suivent la même loi quelconque.

IV- $\bar{m}(\omega)$ est P -ps un ensemble parfait d'intérieur vide.

Par exemple si $(\Omega, \mathcal{G}_t, W_t, P)$ est un mouvement brownien, l'ensemble $\bar{M} = \{(\omega, t) : W_t(\omega) = 0\}$ des zéros de W est régénératif de type IV (il vérifie d'ailleurs (1) pour ses tribus propres \mathcal{F}_t , et aussi pour les tribus \mathcal{G}_t).

b) La mesure aléatoire associée à \bar{M} . Comme (U_t) est un processus continu à droite et pourvu de limites à gauche, on peut lui associer une mesure de transition positive (mesure aléatoire) $\mu(\omega; dt, dx)$ de (Ω, \mathcal{F}) dans $(]0, \infty[^2, \mathcal{B}(]0, \infty[^2))$ par

$$(2) \quad \mu(\omega; dt, dx) = \sum_{s: \Delta U_s(\omega) \neq 0} \varepsilon_{(s, -\Delta U_s(\omega))}(dt, dx)$$

(ΔU_s) désigne le saut de (U_t) à l'instant s ; on a nécessairement $\Delta U_s \leq 0$. Remarquons que la mesure μ détermine entièrement \bar{M} : en effet \bar{M} est la fermeture de l'ensemble $\{(\omega, t) : U_t(\omega) = 0\}$, et (U_t) étant en dents de scie est déterminée par ses sauts.

Soit B un borélien de $]0, \infty[$ situé à une distance strictement positive de 0 . Le processus $(\mu(]0, t[\times B))_{t \geq 0}$ est croissant et localement intégrable (il est fini pour tout $t < \infty$, adapté, et ses sauts sont d'amplitude unité); il admet donc une projection prévisible duale A^B unique (à un ensemble P -nul près), et il n'est pas difficile de voir que si B et B' sont disjoints, $A_t^B + A_t^{B'} = A_t^{B \cup B'}$ P -ps. On en déduit alors l'existence d'une mesure aléatoire positive $\nu(\omega; dt, dx)$ unique (à un ensemble P -nul près) telle que pour tout borélien B de $]0, \infty[$ avec $d(0, B) > 0$,

$$(3) \quad \begin{cases} - \nu(]0, t[\times B) \text{ est un processus croissant prévisible;} \\ - \mu(]0, t[\times B) - \nu(]0, t[\times B) \text{ est une martingale locale.} \end{cases}$$

(voir par exemple [3] pour plus de détails). On appelle ν la projection prévisible duale de μ .

c) L'intégrale stochastique par rapport à $(\mu - \nu)$. Au vu de la seconde propriété (3), on pressent qu'il est possible d'intégrer certaines fonctions sur $\Omega \times]0, \infty[\times]0, \infty[$ par rapport à la mesure $\mu - \nu$, de façon à obtenir des martingales. C'est ce que nous allons faire ici, en renvoyant à [4] pour toutes les démonstrations.

Voici d'abord quelques notations:

\mathcal{M} = ensemble des martingales continues à droite, uniformément intégrables,

\mathcal{M}^2 = ensemble des martingales continues à droite, de carré intégrable,

\mathcal{V} = ensemble des processus à variation intégrable (i.e. $A \in \mathcal{V}$ si $E(\int |dA_s|) < \infty$),

$\tilde{\Omega} = \Omega \times]0, \infty[\times]0, \infty[$, muni de la tribu $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(]0, \infty[)$, où \mathcal{P} désigne la tribu prévisible de $\Omega \times]0, \infty[$.

Commençons d'abord par le cas où le processus (U_t) est quasi-continu à gauche, ce qui équivaut à dire que $\nu(\omega; \{t\} \times]0, \infty[) \equiv 0$ en dehors d'un ensemble P -nul. Soient \mathcal{G}^1 (resp. \mathcal{G}^2) l'ensemble des fonctions $\tilde{\mathcal{F}}$ -mesurables W sur $\tilde{\Omega}$ telles que $E[\int |W(s, x)| \nu(ds, dx)] < \infty$ (resp. $E[\int W^2(s, x) \nu(ds, dx)] < \infty$). Lorsque $W \in \mathcal{G}^1$ on a également $E[\int |W(s, x)| \mu(ds, dx)] < \infty$ et on peut donc définir un processus $W * (\mu - \nu)$ par

$$(4) \quad W * (\mu - \nu)_t(\omega) = \int W(s, x) 1_{\{s \leq t\}} \mu(ds, dx) - \int W(s, x) 1_{\{s \leq t\}} \nu(ds, dx);$$

il est facile de voir que $W_*(\mu - \nu) \in \mathcal{M} \cap \mathcal{V}$. Lorsque $W \in \mathcal{G}^2$, on peut l'approcher (au sens de la semi-norme de \mathcal{G}^2) par une suite (W_n) d'éléments de $\mathcal{G}^1 \cap \mathcal{G}^2$; la méthode classique de définition des intégrales stochastiques permet alors de définir un élément $W_*(\mu - \nu)$ de \mathcal{M}^2 comme limite des $W_n^*(\mu - \nu)$ dans \mathcal{M}^2 (car si $W_n \in \mathcal{G}^1 \cap \mathcal{G}^2$, il est facile de voir que $W_n^*(\mu - \nu) \in \mathcal{M}^2 \cap \mathcal{V}$).

Cette construction est tout à fait élémentaire (voir par exemple Skorokhod [8]). Par contre dans le cas où (U_t) n'est pas quasi-continu à gauche, il convient de prendre quelques précautions. Soit $J = \{(\omega, t) : \nu(\omega, \{t\} \times]0, \infty[) > 0\}$, qui n'est plus P-évanescent; \mathcal{G}^1 est l'ensemble des fonctions $\tilde{\mathcal{P}}$ -mesurables W telles que

$$E \left[\int_{J^c} (t) |W(t, x)| \nu(dt, dx) + \sum_{t \in J} \left| \int_{\{\Delta U_t \neq 0\}} W(t, -\Delta U_t) - \int \nu(\{t\}, dx) W(t, x) \right| \right] < \infty$$

et \mathcal{G}^2 est l'ensemble des fonctions $\tilde{\mathcal{P}}$ -mesurables W telles que

$$E \left[\int_{J^c} (t) W^2(t, x) \nu(dt, dx) + \sum_{t \in J} \left\{ \int \nu(\{t\}, dx) W^2(t, x) - \left[\int \nu(\{t\}, dx) W(t, x) \right]^2 \right\} \right] < \infty$$

(bien entendu, les deux définitions de \mathcal{G}^1 coïncident dans le cas quasi-continu à gauche).

Lorsque $W \in \mathcal{G}^1$, la formule (4) n'a plus nécessairement un sens; cependant le lecteur se convaincra aisément qu'on peut définir $W_*(\mu - \nu)$ "trajectoire par trajectoire" comme un élément de $\mathcal{M} \cap \mathcal{V}$, et par la procédure standard on définit un élément $W_*(\mu - \nu)$ de \mathcal{M}^2 pour tout $W \in \mathcal{G}^2$.

d) Le théorème de représentation des martingales. Nous avons (enfin) tous les concepts nécessaires à l'énoncé du théorème de représentation.

DEFINITION: On dit qu'on a la propriété de représentation des martingales (sous-entendu: relativement à $(\mu - \nu)$) si pour tout $M \in \mathcal{M}^2$, il existe $W \in \mathcal{G}^2$ tel que

$$(5) \quad M_t = E(M_0) + W_*(\mu - \nu)_t \quad \text{P-ps.}$$

THEOREME 1: Tout ensemble régénératif de type I, II ou IV possède la propriété de représentation des martingales; aucun ensemble régénératif de type III ne possède cette propriété.

Lorsque la propriété de représentation est satisfaite, tout élément de $\mathcal{M} \cap \mathcal{V}$ se met également sous la forme (5), avec $W \in \mathcal{G}^1$; de même toute martingale locale est représentée par une formule du type (5), où l'intégrale stochastique $W*(\mu - \nu)$ est définie pour une classe de W plus large que \mathcal{G}^1 ou \mathcal{G}^2 (cf. [5] pour plus de détails).

Quand l'ensemble régénératif \bar{M} est de type I, le théorème est trivial, puisqu'alors tout $A \in \mathcal{F}_\infty$ vérifie $P(A) = 0$ ou 1 (donc toute martingale continue à droite est P-ps constante). Si \bar{M} est de type II, ce théorème est bien connu ([3], ou Chou-Meyer [1]). Si \bar{M} est de type III, le théorème est également trivial; en effet la variable Y_1 est un temps d'arrêt totalement inaccessible, et toute martingale $W*(\mu - \nu)$ est continue en Y_1 , donc la formule (5) ne saurait donner toutes les martingales.

Il nous reste à montrer le théorème pour un ensemble de type IV. Mais auparavant nous allons donner une expression explicite de la projection prévisible duale ν .

2- CALCUL DE LA PROJECTION PREVISIBLE DUALE

Il se trouve que le calcul de ν est exactement le même lorsque \bar{M} est régénératif, ou lorsque \bar{M} est un fermé aléatoire quelconque. Supposons donc, au début de ce paragraphe, que \bar{M} soit un fermé aléatoire (pas nécessairement régénératif). Pour tout $x > 0$, on pose

$$T_1^x = \inf(t: U_t > x), S_n^x = \inf(t > T_n^x: t \in \bar{M}), T_{n+1}^x = \inf(t > S_n^x: U_t > x),$$

ce qui définit par récurrence deux suites (T_n^x) et (S_n^x) de temps d'arrêt.

LEMME 1: Soit T un temps d'arrêt. Soient $x > 0$ et $n \geq 1$. Il existe alors une variable positive $\mathcal{F}_{T_n^x}$ -mesurable R_n^x telle que $T \wedge S_n^x = (T_n^x + R_n^x) \wedge S_n^x$ sur $\{T_n^x \leq T\}$.

Démonstration: Pour tout $s > 0$ on pose $F_s = \{T_n^x + s < S_n^x\}$. La tribu $\mathcal{F}_{(T_n^x + s)-}$ est engendrée par les ensembles de la forme $D = \{U_r \in A\} \cap \{t < T_n^x + s\}$, où $r \leq t$ et $A \in \mathcal{B}([0, \infty[)$. Mais si $D' = [\{U_r \in A\} \cap \{r < T_n^x\} \cap \{t < T_n^x + s\}] \cup [\{x + r - T_n^x \in A\} \cap \{T_n^x \leq r\} \cap \{t < T_n^x + s\}]$, on voit d'une part que $D' \in \mathcal{F}_{T_n^x}$, et d'autre part que $D \cap F_s = D' \cap F_s$.

Par suite $\mathcal{F}_{(T_n^x+s)-} \cap \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_{T_n^x} \cap \mathcal{F}_s$. Quand $s \downarrow t$, on a $\mathcal{F}_s \uparrow \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{F}_{(T_n^x+s)-} \downarrow \mathcal{F}_{T_n^x+t}$, et on en déduit que $\mathcal{F}_{T_n^x+t} \cap \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{T_n^x} \cap \mathcal{F}_t$.

Il s'ensuit l'existence, pour tout $t > 0$, de $G_t \in \mathcal{F}_{T_n^x}$ tel que $G_t \cap \mathcal{F}_t = \{T < T_n^x + t\} \cap \mathcal{F}_t$. Il suffit alors de vérifier que la variable aléatoire R_n^x définie par la formule $\{R_n^x < t\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}, r < t} G_r$ répond à la question. ■

Sur l'ensemble $\{T_n^x < \infty\}$ on peut définir une version régulière $G_n^x(\omega, dy)$ de la loi de la variable aléatoire $S_n^x - T_n^x + x$ conditionnellement par rapport à la tribu $\mathcal{F}_{T_n^x}$ (comme \bar{M} est P-ps borné, on a $G_n^x(\omega,]x, \infty[) = 1$).

THEOREME 2: Pour tous $t > 0$ et $x > 0$ on a P-ps

$$(6) \quad \nu(]0, t] \times]x, \infty[) = 0 \quad \text{si } t \leq T_1^x,$$

$$= \nu(]0, T_n^x] \times]x, \infty[) + \int \frac{G_n^x(du)}{G_n^x(]u, \infty[)} 1_{\{x < u \leq x - T_n^x + t \wedge S_n^x\}} \quad \text{si } T_n^x \leq t \leq T_{n+1}^x.$$

Ce théorème nous donne donc une version explicite de la projection prévisible duale ν de μ .

Démonstration: Soit A^x le processus croissant défini par le second membre de (6). D'une part A^x est $\mathcal{F}_{T_n^x}$ -mesurable et $S_{n-1}^x < T_n^x$; d'autre part si $T_n^x \leq t < T_{n+1}^x$, A^x s'écrit comme $A_t^x = A_{T_n^x}^x + B_t \wedge S_n^x$, où B est un processus croissant \mathcal{F}_x -mesurable; il est facile d'en déduire que A^x est prévisible, et il suffit alors de montrer que pour tout temps d'arrêt T on a $E(A_T^x) = E[\nu(]0, T] \times]x, \infty[)]$.

Mais un calcul simple montre que, si R_n^x est la variable intervenant au lemme 1, on a

$$E \left[1_{\{T_n^x \leq T\}} \left(A_{(T_n^x + R_n^x) \wedge S_n^x}^x - A_{T_n^x}^x \right) \right] = E \left[1_{\{T_n^x \leq T, S_n^x \leq T_n^x + R_n^x, S_n^x < \infty\}} \right]$$

(ce calcul est laissé au lecteur; il est fait explicitement dans [3]; voir également Dellacherie [2]). L'addition pour tous $n \geq 1$ des deux membres de la relation ci-dessus conduit au résultat cherché. ■

Revenons maintenant aux ensembles régénératifs, pour lesquels nous allons encore rappeler quelques propriétés tirées de Maisonneuve [6]. On peut d'abord construire une "fonctionnelle additive", c'est-à-dire

un processus croissant L vérifiant identiquement $L_{t+s} = L_t + L_s \circ \theta_t$, jouissant des propriétés suivantes:

- (7) $\left\{ \begin{array}{l} \text{-on a } E(\int e^{-t} dL_t) = 1; \\ \text{-le "support" de } L_s(\omega) \text{ est } \bar{m}(\omega) \text{ pour P-presque tout } \omega; \\ \text{-si } \bar{M} \text{ est de type II (resp. I, III ou IV), } L \text{ est purement dis-} \\ \text{continu (resp. continu).} \end{array} \right.$

L s'appelle le temps local de \bar{M} . Soit alors τ l'inverse de L , défini par $\tau_t = \inf\{s: L_s > t\}$. Maisonneuve a montré que le processus τ est un subordonateur (i.e. un processus à accroissements positifs, indépendants et homogènes). Si de plus a et F désignent respectivement le drift et la mesure de Lévy de τ , on sait que

- (8) $\left\{ \begin{array}{l} \bar{M} \text{ de type I} \iff a > 0, F = 0 \\ \bar{M} \text{ de type II} \iff a = 0, F(]0, \infty[) < \infty \\ \bar{M} \text{ de type III} \iff a > 0, F(]0, \infty[) < \infty \\ \bar{M} \text{ de type IV} \iff F(]0, \infty[) = \infty. \end{array} \right.$

Enfin on peut choisir pour version de $G_n^x(\omega, \cdot)$ la probabilité

$$G_n^x(\omega, dy) = \frac{F(dy)}{F(]x, \infty[)} \mathbf{1}_{\{y > x\}} \quad \text{si } T_n^x(\omega) < \infty$$

(lorsque \bar{M} est de type II ou III, cela vient de ce que $\frac{F(dy)}{F(]0, \infty[)}$ est la loi commune des variables X_n ; lorsque \bar{M} est de type IV, cela vient de la propriété forte de Markov de (U_t) et de l'expression du semi-groupe de transition de ce processus, donnée dans [6]).

On a alors le

COROLLAIRE: Lorsque \bar{M} est un ensemble régénératif, on a P-ps

- (9) $\nu(]0, t[\times]x, \infty[) = 0 \quad \text{si } t \leq T_1^x$
 $= \nu(]0, T_n^x[\times]x, \infty[) + \int \frac{F(du)}{F(]u, \infty[)} \mathbf{1}_{\{x < u \leq x - T_n^x + t \wedge S_n^x\}} \quad \text{si } T_n^x \leq t < T_{n+1}^x$
 pour tout $x > 0$ (et tout $x \geq 0$ si \bar{M} n'est pas de type IV).

3- REPRESENTATION DES ELEMENTS DE $\mathcal{M} \cap \mathcal{V}$ LORSQUE \bar{M} N'A PAS DE POINT ISOLE.

Dans ce paragraphe nous supposons que \bar{M} est un ensemble régénératif sans point isolé. Tout élément de $\mathcal{M} \cap \mathcal{V}$ se transforme par changement de temps en une martingale du subordonateur τ , pour lequel on dispose

d'une propriété de représentation des martingales; en opérant le changement de temps inverse, on peut ainsi déterminer la structure des éléments de $\mathcal{M} \cap \mathcal{V}$.

Plus précisément soit $(\hat{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}$ la plus petite famille de tribus continue à droite et rendant τ adapté. On note $\hat{\mathcal{M}}$ (resp. $\hat{\mathcal{M}}^2$) l'ensemble des $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ -martingales continues à droite, uniformément intégrables (resp. de carré intégrable).

LEMME 2: -(a)- Pour tout $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ -temps d'arrêt T , τ_T est un (\mathcal{F}_t) -temps d'arrêt et $\hat{\mathcal{F}}_T \subset \mathcal{F}_{\tau_T}$.

-(b)- Pour tout (\mathcal{F}_t) -temps d'arrêt T , L_T est un $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ -temps d'arrêt et $\mathcal{F}_T \subset \hat{\mathcal{F}}_{L_T}$.

Démonstration: On sait que τ_t est un (\mathcal{F}_t) -temps d'arrêt et que $\hat{\mathcal{F}}_t \subset \mathcal{F}_{\tau_t}$, d'où la partie (a). On a $\{L_t \leq s\} = \{t \leq \tau_s\}$, donc L_t est un $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ -temps d'arrêt; de plus $U_s = s - \tau_{(L_s)-}$ est $\hat{\mathcal{F}}_{L_s}$ -mesurable, donc $\mathcal{F}_t \subset \hat{\mathcal{F}}_{L_t}$ et on en déduit la partie (b). ■

LEMME 3: Soient $M \in \mathcal{M}$ (resp. \mathcal{M}^2) et $\hat{M}_t = M_{\tau_t}$. On a alors $M_t = E(\hat{M}_{L_t} | \mathcal{F}_t)$ et $\hat{M} \in \hat{\mathcal{M}}$ (resp. $\hat{\mathcal{M}}^2$).

Démonstration: Comme τ_{L_t} est un (\mathcal{F}_t) -temps d'arrêt plus grand ou égal à t , la première assertion est triviale. Une application du lemme 2-(b) à $T = \tau_t$, qui satisfait $L_T = t$, montre que \hat{M}_t est $\hat{\mathcal{F}}_t$ -mesurable. D'après le lemme 2-(a), la famille $(\hat{M}_T: T \text{ } (\hat{\mathcal{F}}_t)\text{-temps d'arrêt})$ est uniformément intégrable, et pour tout $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ -temps d'arrêt T on a $E(\hat{M}_T) = E(M_{L_T}) = E(M_0) = E(\hat{M}_0)$. Par suite $\hat{M} \in \hat{\mathcal{M}}$. Enfin il est évident que $\hat{M} \in \hat{\mathcal{M}}^2$ lorsque $M \in \mathcal{M}^2$. ■

Pour tout t on pose $D_t = \inf\{s > t: s \in \bar{M}\}$. On a alors le

THEOREME 3: Soit $M \in \mathcal{M} \cap \mathcal{V}$. Il existe une fonction $\tilde{\mathcal{P}}$ -mesurable W sur $\tilde{\Omega}$ telle que

$$-(i)- E[\int ds F(dx) | W(\tau_s, x) |] < \infty,$$

$$-(ii)- W(\omega, s, x) = W(\omega, D_s(\omega), x) \text{ identiquement,}$$

et que M soit donnée par la formule

$$(10) \quad M_t = E(M_0) + \sum_{s \leq t, \Delta U_s \neq 0} W(s, -\Delta U_s) - \int_0^t dL_s \int F(dx) W(s, x) + 1_{\{U_t > 0\}} \frac{1}{F(\int U_t, \infty[)} \int F(dy) W(t, y) 1_{\{y > U_t\}}$$

(L et F ont été définis au paragraphe 2; remarquons que le second membre de (10) est continu à droite).

L'outil principal pour la démonstration de (10) est constitué du théorème de représentation des martingales d'un processus à accroissements indépendants, tel qu'il est démontré par exemple dans [5]. Soient $\hat{\mu}$ la mesure associée au processus τ par

$$\hat{\mu}(\omega; dt, dx) = \sum_{s: \Delta\tau_s(\omega) \neq 0} \varepsilon_{(s, \Delta\tau_s(\omega))}(dt, dx),$$

et $\hat{\nu}$ la mesure $\hat{\nu}(\omega; dt, dx) = dt F(dx)$. Il est bien connu que $\hat{\nu}$ est la projection prévisible duale de $\hat{\mu}$ (au sens du paragraphe 1-b) relativement à la famille de tribus (\mathcal{F}_t) . On désigne par $\hat{\mathcal{G}}^1$ (resp. $\hat{\mathcal{G}}^2$) l'ensemble des fonctions $\hat{\mathcal{P}} \otimes \mathcal{B}(]0, \infty[)$ -mesurables \hat{W} sur $\tilde{\Omega}$ ($\hat{\mathcal{P}}$ est la tribu (\mathcal{F}_t) -prévisible) telles que $E[\int dt F(dx) |\hat{W}(t, x)|] < \infty$ (resp. $E[\int dt F(dx) \hat{W}^2(t, x)] < \infty$). Si $\hat{W} \in \hat{\mathcal{G}}^1$ on définit un élément $\hat{W} * (\hat{\mu} - \hat{\nu})$ de $\hat{\mathcal{M}} \cap \mathcal{V}$ par la formule (4); si $\hat{W} \in \hat{\mathcal{G}}^2$, on définit $\hat{W} * (\hat{\mu} - \hat{\nu}) \in \hat{\mathcal{M}}^2$ par le procédé standard.

On a alors le

THEOREME 4 [5]: Si $\hat{M} \in \hat{\mathcal{M}} \cap \mathcal{V}$ (resp. $\hat{\mathcal{M}}^2$), il existe $\hat{W} \in \hat{\mathcal{G}}^1$ (resp. $\hat{\mathcal{G}}^2$) tel que $\hat{M} = E(\hat{M}_0) + \hat{W} * (\hat{\mu} - \hat{\nu})$.

Démonstration du théorème 3: Posons $\hat{M}_t = M_{\tau_t}$. Comme $\int |d\hat{M}_t| \leq \int |dM_t|$, on a $\hat{M} \in \hat{\mathcal{M}} \cap \mathcal{V}$, et il existe $\hat{W} \in \hat{\mathcal{G}}^1$ tel que $\hat{M} = E(\hat{M}_0) + \hat{W} * (\hat{\mu} - \hat{\nu})$. La fonction $W(\omega, s, x) = \hat{W}(\omega, L_s(\omega), x)$ vérifie les conditions (i) et (ii) de l'énoncé. Montrons que W est $\tilde{\mathcal{P}}$ -mesurable: en utilisant un argument de classe monotone, il suffit de montrer que si $\hat{V}(\omega, t, x) = f(x) 1_{\{t \leq T(\omega)\}}$, où f est borélienne et T est un (\mathcal{F}_t) -temps d'arrêt, alors $V(\omega, t, x) = \hat{V}(\omega, L_t(\omega), x)$ est $\tilde{\mathcal{P}}$ -mesurable; or $V(\omega, t, x) = f(x) 1_{\{t \leq \tau_T(\omega)\}}$ et il suffit d'appliquer le lemme 2-(a).

Considérons l'expression

$$\hat{M}_{L_t} = E(\hat{M}_0) + \sum_{s \leq L_t, \Delta\tau_s \neq 0} \hat{W}(s, \Delta\tau_s) - \int_0^{L_t} ds \int F(dx) \hat{W}(s, x).$$

On remarque d'abord que $\Delta\tau_s > 0$ si et seulement si $\Delta U_t < 0$, avec $s = L_t$ et $t = \tau_s$, et alors $\Delta\tau_s = -\Delta U_t$; on peut appliquer la "formule du changement de variable" au dernier terme de l'expression ci-dessus; comme $\hat{W}(s, x) = W(\tau_s, x)$ et $D_t = \tau_{L_t}$, il vient

$$\hat{M}_{L_t} = E(\hat{M}_0) + \sum_{s \leq D_t, \Delta U_s \neq 0} W(s, -\Delta U_s) - \int_0^{D_t} dL_s \int F(dx) W(s, x).$$

Or $L_{D_t} = L_t$; en utilisant le fait que $\hat{M}_0 = M_0$ et le lemme 3, on voit que

$$M_t = E(M_0) + \sum_{s \leq t, \Delta U_s \neq 0} W(s, -\Delta U_s) - \int_0^t dL_s \int F(dx) W(s, x) + 1_{\{t < D_t\}} E(W(D_t, -\Delta U_{D_t}) | \mathcal{F}_t).$$

Mais d'après Maisonneuve [6], on a d'une part $P(t \in \bar{M} - M) = 0$, donc $1_{\{t < D_t\}} = 1_{\{U_t > 0\}}$ P-ps; d'autre part la loi de $-\Delta U_{D_t}$ conditionnellement par rapport à \mathcal{F}_t est $\frac{F(dy)}{F(\int U_t, \infty[)} 1_{\{y > U_t\}}$, sur l'ensemble $\{U_t > 0\}$. Comme $W(\omega, D_t(\omega), x) = W(\omega, t, x)$ est $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\int 0, \infty[)$ -mesurable, on en déduit que

$$1_{\{t < D_t\}} E(W(D_t, -\Delta U_{D_t}) | \mathcal{F}_t) = 1_{\{U_t > 0\}} \frac{1}{F(\int U_t, \infty[)} \int F(dy) W(t, y) 1_{\{y > U_t\}}. \blacksquare$$

4- DEMONSTRATION DU THEOREME 1.

Il nous reste maintenant à montrer le théorème 1, dans le seul cas non encore examiné, celui où \bar{M} est de type IV.

Soit donc $M \in \mathcal{M}^2$. D'après [4] on dispose d'un résultat de "décomposition" de M . Plus précisément, M se met sous la forme

$$M = M_0 + W * (\mu - \nu) + M' + M'',$$

où $W \in \mathcal{G}^2$ et où M' et M'' sont des éléments de \mathcal{M}^2 nuls en 0 et tels que: $-M'$ n'a aucun saut commun avec (U_t) ,

$-M''$ est une somme compensée de sauts, ne sautant qu'aux instants de saut de (U_t) , et vérifiant pour tous $x > 0$ et $n \geq 1$:

$$(11) \quad E[\Delta M'' | \mathcal{F}_{S_n^x} - \sqrt{\sigma(\Delta U_{S_n^x})}] = 0.$$

Il s'agit de montrer que $M' = M'' = 0$, et que $M_0 = E(M_0)$.

a) On a $M_0 = E(M_0)$: comme $\tau_0 = L_0 = 0$, on a $\mathcal{F}_0 = \hat{\mathcal{F}}_0$ et on sait (loi 0-1 pour τ) que $P(A) = 0$ ou 1 si $A \in \hat{\mathcal{F}}_0$, d'où le résultat.

b) On a $M'' = 0$: Fixons $x > 0$ et $n \geq 1$. D'après (11), le processus $N_t = \Delta M''_{S_n^x} 1_{\{t \geq S_n^x\}}$ est un élément de $\mathcal{M} \cap \mathcal{V}$, donc il lui correspond une fonction \mathcal{F} -mesurable V satisfaisant les conditions du théorème 3. Un calcul élémentaire sur la formule (10) prouve que

$$(12) \quad \Delta N_t = V(t, -\Delta U_t) - \frac{1}{F(\int -\Delta U_t, \infty[)} \int F(dy) V(t, y) 1_{\{y \geq -\Delta U_t\}} \text{ si } U_t > 0.$$

Mais pour tout temps d'arrêt T , $V(T, x)$ est $\mathcal{F}_{T-} \otimes \mathcal{B}(\int 0, \infty[)$ -mesurable, donc $\Delta N_{S_n^x}$ est $\mathcal{F}_{S_n^x} - \sqrt{\sigma(\Delta U_{S_n^x})}$ -mesurable. En appliquant encore une fois

(11), on en déduit que $\Delta N_{S_n^x} = \Delta M''_{S_n^x} = 0$ P-ps. Comme les sauts de (U_t) sont épuisés par les temps d'arrêt $(S_n^{1/p}, n \geq 1, p \geq 1)$, on voit que M'' ne saute pas lorsque (U_t) saute, donc est nul.

c) On a $M' = 0$: Considérons $\hat{M}'_t = M'_t$, qui appartient à $\hat{\mathcal{M}}^2$. D'après le théorème 4 il existe $\hat{W} \in \hat{\mathcal{G}}^2$ tel que $\hat{M}' = \hat{W} * (\hat{\mu} - \hat{\nu})$. Posons $R_n^x = L_{S_n^x}$.

LEMME 4: Pour tous $n \geq 1$, $x > 0$, on a P-ps sur $\{R_n^x < \infty\}$.

$$(13) \quad \hat{W}(R_n^x, \Delta\tau_{R_n^x}) - \frac{1}{F([\Delta\tau_{R_n^x}, \infty[)} \int F(dy) \hat{W}(R_n^x, y) 1_{\{y \geq \Delta\tau_{R_n^x}\}} = 0.$$

Démonstration: Pour tout $p \geq 1$ on pose $\hat{W}^p(\omega, s, x) = \hat{W}(\omega, s, x) 1_{\{s \leq p, x > 1/p\}}$, $W^p(\omega, s, x) = \hat{W}^p(\omega, L_s(\omega), x)$, $\hat{M}^p = \hat{W}^p * (\hat{\mu} - \hat{\nu})$ et $M_t^p = E(\hat{M}_t^p | \mathcal{F}_t)$.

Remarquons en premier lieu que $\hat{W} \in \hat{\mathcal{G}}^2$ implique $\hat{W}^p \in \hat{\mathcal{G}}^1$, donc $\hat{M}^p \in \hat{\mathcal{M}} \cap \mathcal{V}$. Mais alors, d'après la preuve du théorème 3, qu'on peut recopier ici, M^p et W^p sont reliés par la formule (10). On a donc d'après (12)

$$\Delta M_{S_n^x}^p = \hat{W}^p(R_n^x, \Delta\tau_{R_n^x}) - \frac{1}{F([\Delta\tau_{R_n^x}, \infty[)} \int F(dy) \hat{W}^p(R_n^x, y) 1_{\{y \geq \Delta\tau_{R_n^x}\}}$$

sur $\{R_n^x < \infty\}$, et cette expression égale le premier membre de (13) dès que $p > 1/x$ et $p > R_n^x$.

Par ailleurs $E[\int ds F(dx) \{\hat{W}(s, x) - \hat{W}^p(s, x)\}^2] \rightarrow 0$, donc \hat{M}^p tend vers \hat{M}' dans $\hat{\mathcal{M}}^2$, et par suite M^p tend vers M' dans \mathcal{M}^2 . Donc $\Delta M_{S_n^x}^p$ tend vers $\Delta M'_{S_n^x} = 0$ dans L^2 , et (13) s'ensuit. ■

LEMME 5: Soient $\alpha > 0$ et f une fonction telle que $\int F(dx) |f(x)| 1_{\{x > \alpha\}}$ soit fini. Si $f(x) = \frac{1}{F([\alpha, \infty[)} \int F(dy) f(y) 1_{\{y \geq x\}}$ pour F-presque tout x sur l'intervalle $]\alpha, \infty[$, alors f est F-pp constante sur cet intervalle.

(par suite si $\alpha < \beta$ et si $F([\beta, \infty[) > 0$, on a $f(x) = \frac{1}{F([\beta, \infty[)} \int F(dy) f(y) 1_{\{y \geq \beta\}}$ F-pp sur $]\alpha, \infty[$).

Démonstration: Posons $g(x) = F([\alpha, \infty[)$ et $h(x) = \frac{1}{g(x)} \int F(dy) f(y) 1_{\{y \geq x\}}$ (avec la convention $\frac{0}{0} = 0$). Comme $h = f$ F-pp sur $]\alpha, \infty[$, on a $h(x) = \frac{1}{g(x)} \int F(dy) h(y) 1_{\{y \geq x\}}$ pour tout $x > \alpha$. La fonction g est décroissante, et la fonction $k(x) = \int F(dy) h(y) 1_{\{y \geq x\}}$ est à variation finie sur $]\alpha, \infty[$, donc h est à variation finie sur tout intervalle $]\alpha, y]$ tel que $g(y) > 0$; de plus g , h et k sont continues à gauche et pourvues de limites à droite sur un tel intervalle.

La formule d'intégration par parties donne alors $dk(u) = h(u)dg(u) + g(u+)dh(u)$ sur $]\alpha, y]$ (car $k = gh$); comme par ailleurs $dk(u) = -h(u)F(du)$ et $F(du) = -dg(u)$, la mesure $g(u+)dh(u)$ est nulle sur $]\alpha, y]$. Or $g(u+) \geq g(y) > 0$ sur cet intervalle, donc la mesure $d'h(u)$ est nulle et h est constante sur $]\alpha, y]$. Par suite f est F-pp constante sur tout intervalle $]\alpha, y]$ tel que $g(y) > 0$, donc F-pp sur $]\alpha, \infty[$. ■

Nous pouvons maintenant montrer que $M' = 0$. Choisissons $\beta > 0$ tel que $F(]1\beta, \infty[) > 0$ et posons $\tilde{W}_s(\omega) = \frac{1}{F(]1\beta, \infty[)} \int F(dy) \hat{W}(\omega, s, y) 1_{\{y \geq \beta\}}$ (avec la convention $\tilde{W}_s = \infty$ si cette intégrale n'est pas définie). On définit ainsi un processus $\hat{\mathcal{P}}$ -mesurable \tilde{W} .

Soient $0 < x < \beta$ et $n \geq 1$; pour simplifier les notations, on pose $R = R_n^x$ et $X = \Delta\tau_{R_n^x}$. On sait que R , instant du $n^{\text{ème}}$ saut de τ d'amplitude plus grande que x , est P-ps fini, et que la variable X est indépendante de R et suit la loi $\frac{F(dy)}{F(]x, \infty[)} 1_{\{y > x\}}$; de plus $\Delta M_R^1 = \hat{W}(R, X)$ est intégrable. En utilisant (13), on voit alors que pour P-presque tout ω on a

$$\begin{cases} \int F(dy) |\hat{W}(\omega, R(\omega), y)| 1_{\{y > x\}} < \infty \\ \hat{W}(\omega, R(\omega), z) = \frac{1}{F(]z, \infty[)} \int F(dy) \hat{W}(\omega, R(\omega), y) 1_{\{y \geq z\}} \quad \text{F-pp en } z \text{ sur }]x, \infty[. \end{cases}$$

D'après le lemme 5 on a donc $\hat{W}(\omega, R(\omega), z) = \tilde{W}_R(\omega)$ F-pp en z sur $]x, \infty[$, donc finalement $\hat{W}(R, X) = \tilde{W}_R$ P-ps.

Or les sauts de τ sont épuisés par la suite $(R_n^{1/p}, n \geq 1, p > 1/\beta)$. Donc en dehors d'un ensemble P-nul on a $\hat{W}(t, \Delta\tau_t) = \tilde{W}_t$ pour tout t tel que $\Delta\tau_t > 0$. Comme $\hat{W} \in \hat{\mathcal{G}}^2$ et comme \tilde{W} est $\hat{\mathcal{P}}$ -mesurable, on a

$$E \left[\int ds F(dx) \tilde{W}_s^2 \right] = E \left[\int \hat{\mu}(ds, dx) \tilde{W}_s^2 \right] = E \left[\int \hat{\mu}(ds, dx) \hat{W}^2(s, x) \right] = E \left[\int ds F(dx) \hat{W}^2(s, x) \right]$$

qui est fini. Mais $F(]0, \infty[) = \infty$ donc le premier terme ci-dessus ne peut prendre que les valeurs 0 et $+\infty$, donc il prend la valeur 0 (c'est là qu'intervient le fait que l'ensemble régénératif est de type IV, et non de type III). Par suite $E \left[\int ds F(dx) \hat{W}^2(s, x) \right] = 0$ et la martingale $\hat{M}' = \hat{W} * (\hat{\mu} - \hat{\nu})$ est nulle, ce qui implique $M' = 0$.

La démonstration est enfin achevée.

5-REMARQUES SUR LE THEOREME 1.

a) Supposons l'ensemble régénératif de type III. On n'a pas la propriété de représentation des martingales relativement à $(\mu - \nu)$. Cependant un tel ensemble est entièrement décrit par les temps d'arrêt T_n^0 et S_n^0 , et il a donc une structure très simple, permettant de donner la forme générale des éléments de \mathcal{M}^2 .

Plus précisément les processus croissants $N_t = \sum 1_{\{S_n^0 \leq t\}}$ et $N_t' = \sum 1_{\{T_n^0 \leq t\}}$ admettent respectivement pour projection prévisible duale les processus $A_t = \nu([0, t] \times]0, \infty[)$ (donné par la formule (9)) et $A_t' = b \int_0^t 1_{\bar{M}}(s) ds$ (où b est relié aux caractéristiques a et F du subordonateur τ par $b = \frac{F(]0, \infty[)}{a}$). D'après [3] on sait alors que tout $M \in \mathcal{M}^2$ s'écrit comme

$$(14) \quad M_t = E(M_0) + \int_0^t V_s (dN_s - dA_s) + \int_0^t V_s' (dN_s' - dA_s')$$

où V et V' sont des processus prévisibles vérifiant $E[\int_0^t V_s^2 dA_s - \sum_{(s)} (V_s \Delta A_s)^2] < \infty$ et $E[\int_0^t V_s'^2 dA_s'] < \infty$, les intégrales intervenant dans (14) pouvant être calculées trajectoire par trajectoire. Il y a d'ailleurs identité entre les martingales $W * (\mu - \nu)$ où $W \in \mathcal{G}^2$, et les martingales $\int_0^t V_s (dN_s - dA_s)$, où V satisfait les conditions ci-dessus.

b) On sait d'après [5] que la propriété de représentation des martingales est liée à l'unicité de la probabilité P "faisant de ν la projection prévisible duale de μ ".

Soyons plus précis: soient Ω l'ensemble de tous les fermés de $[0, \infty[$ et \bar{M} le fermé aléatoire canonique sur Ω ; les termes \mathcal{U}_t , \mathcal{F}_t , μ sont définis comme au paragraphe 1; F étant une mesure positive sur $]0, \infty[$ telle que $\int (x \wedge 1) F(dx) < \infty$, on définit la mesure aléatoire ν par la formule (9). On désigne par \underline{P} l'ensemble des solutions au "problème des martingales associé à ν ", c'est-à-dire l'ensemble des probabilités P sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ telles que, pour P , ν soit la projection prévisible duale de μ . Alors si \underline{P} ne comporte qu'un seul élément P , la propriété de représentation des martingales est satisfaite pour cette probabilité.

Mais, sauf dans le cas trivial où $F=0$ (donc $\nu=0$), \underline{P} comporte plusieurs éléments: en effet pour tout $a \geq 0$ il existe un subordonateur (X_t) de drift a et de mesure de Lévy F ; il lui correspond une probabilité $P_a \in \underline{P}$, qui est la "loi" de l'ensemble régénératif $\bar{M} = \{X_t; t \geq 0\}$,

et si $a \neq a'$, on a $P_a \neq P_{a'}$, (\underline{P} contient d'ailleurs d'autres probabilités, pour lesquelles \bar{M} n'est pas un ensemble régénératif).

Cependant \underline{P} est toujours un ensemble convexe, et on peut montrer que si $P \in \underline{P}$, la propriété de représentation des martingales est satisfaite par P si et seulement si P est un élément extrémal de \underline{P} . Le théorème 1 s'interprète donc ainsi:

- si $F(]0, \infty[) = +\infty$, tout $P \in \underline{P}$ faisant de \bar{M} un ensemble régénératif est extrémal (\bar{M} est alors de type IV);
- si $0 < F(]0, \infty[) < +\infty$, parmi tous les $P \in \underline{P}$ faisant de \bar{M} un ensemble régénératif (nécessairement de type II ou III), seule celle qui fait de \bar{M} un ensemble de type II est extrémale.

Lorsque $0 < F(]0, \infty[) < +\infty$, il est d'ailleurs très facile de construire tous les éléments extrémaux (et même tous les éléments) de \underline{P} . En fait à toute famille $H_n(\omega, dx)$ ($n \geq 1$) de probabilités de transition de $(\Omega, \mathcal{F}_{S_n^0})$ dans $[0, \infty]$ (avec, par convention, $S_0^0 = 0$) correspond un élément $P \in \underline{P}$ et un seul, pour lequel H_n représente la loi conditionnelle de $T_n^0 - S_{n-1}^0$ par rapport à $\mathcal{F}_{S_{n-1}^0}$. Les $P \in \underline{P}$ extrémaux correspondent aux H_n de la forme $H_n(\omega, dy) = \xi_{Y_n(\omega)}(dy)$, où chaque Y_n est une fonction $\mathcal{F}_{S_{n-1}^0}$ -mesurable: en particulier \bar{M} est régénératif de type II si $H_n(\omega, dy) = \xi_0(dy)$; par contre \bar{M} est régénératif de type III si $H_n(\omega, dy) = be^{-by} dy$.

6- UNE EXPRESSION EXPLICITE POUR LE TEMPS LOCAL L.

Lorsque \bar{M} est de type I, II ou III il est très facile de donner explicitement le temps local L . A titre de rappel, signalons que si \bar{M} est de type I, on a évidemment $L_t = t$; si \bar{M} est de type II, on a

$$L_t = \frac{\int e^{-x} F(dx)}{\int (1 - e^{-x}) F(dx)} \sum_{(n)} 1_{\{S_n^0 \leq t\}}.$$

Enfin si \bar{M} est de type III, on a

$$L_t = \frac{a + \int (1 - e^{-x}) F(dx)}{F(]0, \infty[)} \int_0^t 1_{\bar{M}}(s) ds$$

(dans ce dernier cas, il suffit d'écrire que L est de la forme $L_t = \beta \int_0^t 1_{\bar{M}}(s) ds$, et de calculer β de sorte que $E(\int_0^t e^{-t} dL_t) = 1$).

Supposons maintenant que \bar{M} soit de type IV. Le rapprochement des théorèmes 1 et 3 indique qu'on doit pouvoir calculer L à partir de ν ; autrement dit, le temps local dépend explicitement de F , mais non de a . Nous allons dans ce qui suit procéder à ce calcul.

Pour cela, nous nous appuyons essentiellement sur les résultats de [4]. On désigne par \mathcal{G}_{loc}^2 l'ensemble des fonctions $\tilde{\mathcal{P}}$ -mesurables W sur $\tilde{\Omega}$ pour lesquelles il existe une suite (R_n) de temps d'arrêt croissant P -ps vers $+\infty$, et telle que chaque fonction $W_n(\omega, t, \mathbf{x}) = W(\omega, t, \mathbf{x}) 1_{\{t \leq R_n(\omega)\}}$ appartienne à \mathcal{G}^2 ; dans ce cas $W_n^*(\mu - \nu)$ est une martingale "arrêtée" en R_n , et $W_n^*(\mu - \nu) = W_{n+1}^*(\mu - \nu)$ sur $[0, R_n]$: on peut donc définir un processus $W^*(\mu - \nu)$ en posant $W^*(\mu - \nu)_t = W_n^*(\mu - \nu)_t$ si $t \leq R_n$, et $W^*(\mu - \nu)$ appartient à l'espace \mathcal{M}_{loc}^2 des martingales qui sont localement de carré intégrable.

Ces préliminaires étant faits, on peut énoncer le

THEOREME 5: Supposons \bar{M} de type IV. Soient $x > 0$ tel que $F([x, \infty[) > 0$
et

$$(15) \quad U(\omega, t, y) = F([x, \infty[) \left[1_{\{y < x\}} \frac{1}{F([y, \infty[)} + \frac{F(\{U_{t-}(\omega)\})}{1_{\{U_{t-}(\omega) < x\}} F([U_{t-}(\omega), \infty[) F(]U_{t-}(\omega), \infty[)} \right].$$

Alors $U \in \mathcal{G}_{loc}^2$ et le temps local L est donné par la formule

$$(16) \quad L_t = U^*(\mu - \nu)_t + \sum_{s \leq t} 1_{\{\Delta U_s \leq -x\}} \frac{1}{F([x, \infty[)} + 1_{\{U_t > 0\}} \frac{F(]U_t, \infty[) F([x, \infty[)}{F(]U_t, \infty[) F([x, \infty[)}.$$

Le lecteur pourra vérifier que (contrairement aux apparences !) le second membre de (16) est continu; de plus il ne dépend pas de x .

Démonstration: Posons $\hat{W}(\omega, t, y) = 1_{\{y \geq x\}}$ et $W(\omega, t, y) = \hat{W}(\omega, L_t(\omega), y)$ (= $1_{\{y \geq x\}}$ également). Comme $E(\int ds F(dx) 1_{\{s \leq t\}} |\hat{W}(s, x)|) < \infty$, le processus $\hat{M}_s^t = \hat{W}^*(\mu - \nu)_{s \wedge t}$ est un élément de $\hat{\mathcal{M}} \cap \mathcal{V}$. Donc si M est le processus défini à partir de W par (10), $(M_s \wedge L_t)_{s \geq 0}$ est un élément de \mathcal{M} pour tout $t < \infty$; comme $L_t \uparrow +\infty$ si $t \uparrow +\infty$, M est donc une martingale locale relativement à la famille (\mathcal{F}_t) .

Pour simplifier les notations, on pose $g(x) = F([x, \infty[)$. A l'aide de (12) il est facile de vérifier que si $V(\omega, t, y) = -1_{\{y < x\}} \frac{g(x)}{g(y)}$, on a $\Delta M_t = V(t, -\Delta U_t)$ dès que $\Delta U_t < 0$, et V est $\tilde{\mathcal{P}}$ -mesurable. D'autre part (9) implique que

$$\nu(\{t\}, dy) = \frac{F(\{U_{t-}\})}{g(U_{t-})} \varepsilon_{U_{t-}}(dy).$$

Donc

$$\int \nu(\{t\}, dy) V(t, y) = -1_{\{U_{t-} < x\}} \frac{g(x)F(\{U_{t-}\})}{g(U_{t-})^2}$$

et si $a_t = \nu(\{t\} \times]0, \infty[)$ on a $a_t < 1$ et

$$V(t, y) + \frac{1}{1-a_t} 1_{\{a_t < 1\}} \int \nu(\{t\}, dy) V(t, y) = -U(t, y).$$

D'autre part il est facile de vérifier que $|U| \leq 2$. Il découle alors de [6, théorème (4-1) et proposition (5-1)] que $U \in \mathcal{G}_{loc}^2$, et d'après la propriété de représentation des martingales on a $M = -U*(\mu - \nu)$.

Il suffit maintenant d'écrire que $-U*(\mu - \nu)$ égale le second membre de (10), en remarquant que $\int_0^t dL_s \int F(dy) W(s, y) = g(x) L_t$, pour obtenir la formule (16). ■

BIBLIOGRAPHIE

- 1 CHOU C.S., MEYER P.A.: Sur la représentation des martingales comme intégrales stochastiques dans les processus ponctuels. Sémin. Strasbourg IX, Lect. Notes 465, 1975, Springer.
- 2 DELLACHERIE C.: Un exemple de la théorie générale des processus. Sémin. Strasbourg IV, Lect. Notes 124, 1970, Springer.
- 3 JACOD J.: Multivariate point processes: predictable projection, Radon-Nikodym derivatives, representation of martingales. Z. Wahr. 31, pp 235-253, 1975.
- 4 JACOD J.: Un théorème de représentation pour les martingales discontinues. A paraître au Z. Wahr.
- 5 JACOD J., MEMIN J.: Caractéristiques locales et conditions de continuité absolue pour les semi-martingales. A paraître.
- 6 MAISONNEUVE B.: Ensembles régénératifs, temps locaux et subordinateurs. Sémin. Strasbourg V, Lect. Notes 191, 1971, Springer.
- 7 MEYER P.A.: Ensembles régénératifs d'après Hoffman-Jørgensen. Sémin. Strasbourg IV, Lect. Notes 124, 1970, Springer.
- 8 SKOROKHOD A.V.: Studies in the theory of random processes. 1965, Addison-Wesley.