Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Xavier Fernique

Des résultats nouveaux sur les processus gaussiens

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 318-335

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__318_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités

1973/74

DES RESULTATS NOUVEAUX SUR LES PROCESSUS GAUSSIENS

par X. FERNIQUE

Sommaire : On précise les conditions nécessaires pour qu'un processus gaussien soit presque sûrement majoré. On généralise les conditions suffisantes. On montre que certaines conditions suffisantes sont aussi nécessaires lorsque le processus est stationnaire.

1. PRELIMINAIRES, NOTATIONS

Soient $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ un espace d'épreuves et T un ensemble ; soit $X = X(\omega, t)$, $\omega \in \Omega$, $t \in T$ un processus gaussien centré sur T. La fonction d sur $T \times T$ définie par :

$$d(s,t) = \sqrt{E\{|X(s)-X(t)|^2\}}$$

est un écart sur T. Les propriétés de X sont étroitement liées à la géométrie définie par d sur T.

Pour tout élément t de T et tout nombre $\delta > 0$, on notera $B(t,\delta)$ la d-boule ouverte centrée en t de rayon δ ; pour toute partie S de T, on notera $N(S,\delta)$ le nombre minimal de d-boules de rayon δ recouvrant S ; $M(S,\delta)$ désignera le nombre maximal de d-boules centrées dans S de rayon δ et disjointes dans T ; on notera $B(S,\delta)$ la réunion $\bigcup_{t \in S} B(t,\delta)$.

Pour tout élément t de T, tout nombre $\delta > 0$, tout nombre $q \geq 2$, tout entier n , on notera $K(t,\delta,n,q)$ le nombre maximal de d-boules disjointes dans T de rayon $\frac{\delta}{q^n}$ et centrées dans $B(t, \frac{\delta}{q^{n-1}})$. Pour toute partie S de T, on notera $K(S,\delta,n,q)$ la borne inférieure sur $B(S,\delta)$ de $K(t,\delta,n,q)$.

L'écart d définit sur T une topologie métrisable non nécessairement séparée. On munit T de la tribu $\mathcal{C}$ associée à cette topologie.

On dit que X est presque sûrement majoré sur T si l'une des deux propriétés équivalentes [4] est vérifiée :

$$P[\sup_{t\in T} |X(t)| < \infty] = 1,$$

ou

$$E[\sup_{t\in T} X(t)] < \infty . \tag{1}$$

Deux énoncés précisent les relations entre la géométrie de T et la majoration presque sûre de X : Dudley [2] a prouvé que si la série $\sum_n \frac{1}{2^n} \sqrt{\log N(T,\frac{1}{2^n})}$ est convergente, alors la propriété (1) est vérifiée. Dans l'autre sens, Sudakov [8] a montré que si la propriété (1) est vérifiée, alors la suite $\frac{1}{2^n} \sqrt{\log M(T,\frac{1}{2^n})}$ est bornée. Dans l'un et l'autre cas, ces résultats sont basés sur l'analyse d'un éparpillement global de T ; l'introduction des nombres $K(t,\delta,n,q)$ nous permettra ici d'analyser l'éparpillement local de T . Lorsque le processus est stationnaire, nous constaterons que cet éparpillement local est déterminé par l'éparpillement global. C'est la ligne générale des résultats présentés qui ne supposeront pas connus les deux résultats rappelés.

2. ENONCES DES RESULTATS

THEOREME 2.1. (Condition suffisante de majoration presque sûre).- On suppose qu'il existe une probabilité μ sur $(T,\mathcal{C})$ et un nombre $a>0$ tels que :

$$\sup_{t\in T}\int_0^a \sqrt{\log\left[1+\frac{1}{\mu[s : d(s,t)<u]}\right]}\, du = C < \infty .$$

On suppose de plus que le d-diamètre D de T est fini. Dans ces conditions, toute version séparable $\tilde{X}$ de X est presque sûrement majorée et on a

$$E\left\{\sup_{t\in T} \tilde{X}(t)\right\} \le 3D + 108 \sup_{t\in T}\int_0^D \sqrt{\log\left[1+\frac{1}{\mu[s : d(s,t)<u]}\right]}\, du .$$

THEOREME 2.2. (Condition suffisante de continuité presque sûre).- On suppose qu'il existe une mesure de probabilité μ sur $(T,\mathcal{C})$ telle que

$$\lim_{a\to 0}\sup_{t\in T}\int_0^a \sqrt{\log\left[1+\frac{1}{\mu[s : d(s,t)<u]}\right]}\, du = 0 .$$

Dans ces conditions, toute version séparable X de X est presque sûrement continue pour la d-topologie sur T et on a :

$$\forall\varepsilon>0, E\left\{\sup_{\substack{d(s,t)<\varepsilon\\ (s,t)\in T\times T}} |\tilde{X}(s)-\tilde{X}(t)|\right\} \le 6\,\varepsilon + 432 \int_0^\varepsilon \sqrt{\log\left[1+\frac{1}{\mu[s : d(s,t)<u]}\right]}\, du.$$

COROLLAIRE 2.3.- On suppose qu'il existe un nombre δ positif et un entier $q\ge 2$ tels que la série $\sum_n \frac{1}{q^n}\sqrt{\log N(T,\frac{\delta}{q^n})}$ soit convergente, dans ces conditions, toute version séparable $\tilde{X}$ de X est presque sûrement continue pour la d-topologie sur T.

THEOREME 2.4. (Condition nécessaire de majoration presque sûre).- Supposons que X soit presque sûrement majorée sur T ; dans ces conditions, pour toute partie S de T, tout nombre $\delta>0$, tout nombre $q\ge 2$, on a :

$$\frac{\delta}{2q^2\sqrt{\pi}}\left[\sqrt{\mathrm{Ent}[\log_2 M(S,\delta)]}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{q^n}\sqrt{\mathrm{Ent}[\log_2 K(S,\delta,n,q)]}\right]\le E\left\{\sup_{t\in T} X(t)\right\}$$

En particulier, toutes les séries du premier membre sont convergentes.

THEOREME 2.5. (Condition nécessaire et suffisante de majoration presque sûre).- <u>Supposons</u> X <u>séparable et stationnaire sur</u> $\mathbb{R}^n$. <u>Dans ces conditions, pour que</u> X <u>soit presque sûrement majorée sur toute partie bornée</u> T <u>de</u> $\mathbb{R}^n$, <u>il faut et il suffit qu'il existe un nombre</u> $\delta>0$ <u>et un nombre</u> $q\ge 2$, <u>un voisinage borné</u> V <u>de l'origine dans</u> $\mathbb{R}^n$ <u>pour la topologie usuelle tels que la série</u> $\sum_k \frac{1}{q^k}\sqrt{\log N(V,\frac{\delta}{q^k})}$ <u>soit convergente</u>.

<u>Remarques</u> :

2.6. Supposons $T=[0,1]$ et X stationnaire ; notons μ la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$, alors les hypothèses des théorèmes 2.1. et 2.2. sont équivalentes à la convergence de la seule intégrale $\int_0^a \sqrt{\log \frac{1}{\mu[s : d(s,0)<u]}}\, du$ si bien que les résultats des théorèmes 2.1. et 2.2. sont identiques dans ce cas particulier à des résultats de Marcus et Jain [7]. Par contre, dans le cas <u>non</u> stationnaire, les résultats de Dudley [2] ou Fernique [3] s'appuyent sur des convergences d'intégrales du genre $\int_0^a \sup_{t\in T} \sqrt{\log \frac{1}{\mu[s : d(s,t)<u]}}\, du$ pour certaines mesures μ ; la nouveauté des énoncés 2.1. et 2.2. réside essentiellement dans la permutation du symbole "sup" et du symbole intégral.

2.7. Le théorème 2.5. énonce une condition de majoration presque sûre pour les processus stationnaires, on pourrait facilement en déduire d'autres conditions équivalentes en terme de représentation intégrale au sens de [4] ou en termes de convergence d'intégrales [7] .

3. CONDITIONS SUFFISANTES, DEMONSTRATIONS

3.1. Nous commençons par démontrer le théorème 2.1. dans le cas où T est un ensemble fini. Cette démonstration s'appliquerait d'ailleurs directement, avec quelques précautions, aux versions $\mathcal{a} \otimes \mathcal{C}$- mesurables de X s'il en existe ; nous ne l'utiliserons pourtant pas dans ce cas.

Nous posons, pour tout élément t de T et tout entier positif k, $\mu(k,t) = \mu(k,t) = \mu[s : d(s,t) < \frac{D}{2^k}]$; nous notons ρ_k la fonction sur $T \times T$ définie par :

$$\rho_k(t,u) = \frac{1}{\mu(k,t)} \quad \text{si } d(t,u) \text{ est inférieur} \quad \text{à } \frac{D}{2^k},$$

$$\rho_k(t,u) = 0 \qquad \text{dans le cas contraire.}$$

Pour tout élément t de T, nous notons f_t la fonction sur $T \times T$ définie par :

$$f_t(u,v) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\rho_k(t,u)\rho_{k-1}(t,v) - \rho_{k-1}(t,u)\rho_k(t,v)\right]$$

Avec ces notations, on a immédiatement pour tout $t \in T$,

$$2\, X(\omega,t) = \iint_{d(u,v)\neq 0} \left[X(\omega,u) - X(\omega,v)\right] f_t(u,v)d\mu(u)d\mu(v) + U(\omega),$$

$$U(\omega) = 2 \int_T X(\omega,s)d\mu(s).$$

Nous majorons l'intégrale double en utilisant le calcul présenté dans [4] p. 311 ; elle est inférieure à :

$$6\,D \iint_{d(u,v)\neq 0} \left\{ \exp\left[\left(\frac{X(\omega,u)-X(\omega,v)}{2d(u,v)}\right)^2\right] - 1\right\} d\mu(u)d\mu(v)$$

$$+2\sqrt{2} \iint_{d(u,v)\neq 0} |d(u,v)f_t(u,v)| \sqrt{\log\left[1+ \frac{1}{6D}\,|\,d(u,v)f_t(u,v)|\right]}\ d\mu(u)d\mu(v) \ ;$$

la variable aléatoire U étant centrée et la covariance de $\frac{X(\omega,u)-X(\omega,v)}{d(u,v)}$ majorée par 1, on en déduit :

$$E\left\{\sup_{t\in T} X(t)\right\} \leq 6D(\sqrt{2}-1) + \ldots$$

$$\ldots + \sup_{t\in T} \iint |d(u,v)f_t(u,v)| \sqrt{\log\left[1+\frac{|d(u,v)f_t(u,v)|}{6D}\right]}\, d\mu(u)d\mu(v)\ ;$$

Cette dernière intégrale se majore facilement, les termes de la série définissant f_t étant à supports disjoints ; notons la J_t, on a :

$$J_t \leq 2\sum_1^\infty \mu_k(\mu_{k-1}-\mu_k)\,\frac{\frac{3D}{2^k}}{\mu_k\,\mu_{k-1}}\sqrt{\log\left[1+\frac{1}{6D}\,\frac{\frac{3D}{2^k}}{\mu_k\,\mu_{k-1}}\right]}\ ;$$

$$J_t \leq 6D\sum_1^\infty \frac{1}{2^k}\sqrt{\log\left(1+\frac{1}{\mu_k}\right)^2} \leq 36\int_0^D \sqrt{\log\left[1+\frac{1}{\mu[s:d(s,t)<u]}\right]}\, d\mu(u)\ .$$

Le résultat s'ensuit dans ce cas particulier.

3.2. Nous démontrons maintenant le théorème 2.1. dans le cas général à partir du cas précédent.

Notons d'abord que si l'hypothèse du théorème est vérifiée, alors on a :

$$\forall \eta > 0, \forall t \in T,\ \mu\{s : d(s,t) < \eta\} > \frac{1}{\exp\frac{c^2}{\eta^2} - 1}\ ,$$

si bien que le nombre maximal de boules de rayon η et disjointes dans T est fini. Soit $T(\eta)$ l'ensemble des centres d'une telle famille maximale, alors $\{B(t,2\eta), t\in T(\eta)\}$ est un recouvrement de T et on peut en déduire une partition $\{A_t, t\in T(\eta)\}$ de T telle que :

$$\forall t\in T(\eta)\ ,\ B(t,\eta)\subset A_t \subset B(t,2\eta)\ .$$

Nous notons μ_η la probabilité sur $T(\eta)$ définie par :

$$\mu_\eta = \sum_{t\in T(\eta)} \mu(A_t)\varepsilon_t\ .$$

On aura alors par construction :

$$\forall t\in T(\eta),\ \mu_\eta[s : d(s,t)<u] \geq \mu[s : d(s,t)\leq \eta] \text{ si } u\leq 2\eta ,$$

$$\mu_\eta[s : d(s,t)<u] \geq \mu[s : d(s,t)<u-2\eta\ ] \qquad \text{si } u>2\eta ,$$

et par suite :

$$\sup_{t\in T(\eta)}\int_0^D \sqrt{\log\left(1+\frac{1}{\mu_\eta[s:d(s,t)<u]}\right)}\,du \leq 3 \sup_{t\in T}\int_0^D\sqrt{\log\ 1+\frac{1}{\mu[s : d(s,t)<u]}}\ du$$

L'étude réalisée en 3.1. permet donc de majorer $E\left\{\sup_{t\in T(\eta)} X(t)\right\}$. La conclusion s'ensuit en faisant tendre η vers zéro et en utilisant la séparabilité.

3.3. Démonstration du théorème 2.2.

Supposons son hypothèse vérifiée et définissons sur $T\times T$ le processus gaussien Y par :

$$Y(\omega ; t,t') = X(\omega,t)-X(\omega,t') .$$

Il définit sur $T\times T$ un écart d' et le d'-diamètre D' de $T'= \{(t,t')\in T\times T : d(t,t')<\varepsilon\}$ est inférieur à 2ε. Sur ce sous-ensemble T', notons μ' la probabilité proportionnelle à la restriction de $\mu\otimes\mu$. On a immédiatement pour tout élément (t,t') de T' :

$$\mu'\left\{(s,s') : d'(s,s';t,t')<u\right\} \geq \mu\left\{s : d(s,t)<\frac{u}{2}\right\}\mu\left\{s : d(s,t')<\frac{u}{2}\right\} .$$

On en déduit

$$\sup_{(t,t')\in T'}\int_0^{D'}\sqrt{\log\left(1+\frac{1}{\mu'\{(s,s'):d'(s,s';t,t')<u\}}\right)}\,du\leq 4\sup_{t\in T}\int_0^{\varepsilon}\sqrt{\log\left(1+\frac{1}{\mu[s:d(s,t)<u]}\right)}\,du$$

Cette majoration permet l'application du théorème 2.1 au processus Y sur T' ; le résultat s'ensuit.

3.4. Démonstration du corollaire 2.3.

Supposons son hypothèse vérifiée et notons pour tout entier n, S_n la famille minimale des centres des boules de rayon $\frac{\delta}{q^n}$ recouvrant T. Définissons une probabilité μ sur T par :

$$\mu = \Sigma \frac{1}{2^n} \sum_{s \in S_n} \frac{1}{N(\frac{\delta}{q^n})} \epsilon_s .$$

On aura alors pour tout élément t de T et tout nombre entier n :

$$\frac{\delta}{q^{n+1}} < u \leq \frac{\delta}{q^n} \Rightarrow \mu\left[s : d(s,t) < u\right] \geq \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{N(\frac{\delta}{q^{n+1}})} ;$$

On en déduit :

$$\int_0^{\frac{\delta}{q^n}} \sup \sqrt{\log\left(1 + \frac{1}{\mu[s : d(s,t) < u]}\right)}\, du \leq \delta(q-1) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{q^k} \sqrt{\log\left(1 + 2^k N(\frac{\delta}{q^k})\right)} .$$

La série dont le reste d'ordre n figure au second membre est convergente par hypothèse ; la conclusion s'ensuit en application du théorème 2.2.

3.5. Remarque : Les résultats 2.1., 2.2. et 2.3. sont basés sur des majorations additives de $E\{\sup_{t \in T} \tilde{X}(t)\}$. Un schéma voisin permet d'établir des majorations multiplicatives presque sûres de $\sup_{t \in T} \hat{X}(t)$ où $\hat{X}$ est une version simple de X. On les trouvera dans mon cours à l'école de probabilité de Saint-Flour (Juillet 1974, chapitre 6, la méthode des mesures majorantes ([9])).

4. CONDITIONS NECESSAIRES, DEMONSTRATIONS

Elles seront essentiellement basées sur un lemme que l'analyse des travaux de Marcus et Shepp [6] et de Sudakov [8] sur les conditions nécessaires pour que la propriété (1) soit vérifiée m'avait permis de dégager dans une publication précédente [5] :

LEMME 4.1.- Soient X et Y deux processus gaussiens centrés séparables sur T ; on suppose

$$\forall (s,t) \in T \times T \ , \ d_Y(s,t) \leq d_X(s,t) \ .$$

On a alors :

$$E\left\{\sup_{t\in T} Y(t)\right\} \leq E\left\{\sup_{t\in T} X(t)\right\} \ .$$

4.2. Démonstration du lemme

Soit n un entier strictement positif, posons $T = [1,n]$. Soit de plus $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ un vecteur gaussien normal à valeurs dans $\mathbb{R}^T$; pour toute matrice carrée A sur $T \times T$, nous noterons X_A le vecteur gaussien $A\Lambda$ et $\Gamma_A = A\,{}^tA$ sa covariance. Si A est inversible, nous noterons G_A la matrice inverse de Γ_A et g_A la fonction sur $\mathbb{R}^T$ qui est la densité de la loi de X_A. Supposant toujours A inversible, pour tout couple (s,t) d'éléments de T différents, la probabilité $P[X_A(s) = X_A(t)]$ est nulle et nous pouvons définir p.s. une variable aléatoire σ_A par la relation :

$$\sigma_A = s \Leftrightarrow X(s) = \sup_{t\in T} X(t) \ ;$$

La matrice A étant toujours inversible, nous définissons une fonction J sur

$T \times T$ par les relations :

$$\forall (s,t) \in T \times T,\ s \neq t\ ,\ J_A(s,t) = J_A(t,s) = \int \frac{dx}{dx_s dx_t} \int_{x_s = x_t = \sup_T x = u} g_A(x)\ du$$

$$J_A(s,s) = -\sum_{t \neq s} J_A(s,t) \quad .$$

Dans la suite, nous omettons l'indice A s'il n'est pas indispensable.

Le résultat du lemme dans le cas où T est fini et où X et Y ont des matrices de variance inversibles repose essentiellement sur l'étude des variations de $E[X_B(\sigma_A)]$ au voisinage de $B = A$. Remarquons d'abord que la relation :

$$\frac{\partial g}{\partial x_t} = -(Gx)_t\ g$$

montre, par une intégration partielle, l'égalité :

$$\forall (s,t) \in T \times T,\ s \neq t\ ,\ E[(GX)_t I_{\sigma = s}] = -J(s,t)\ ;$$

comme $E[(GX)_t]$ est nulle, les ensembles $\{I_{\sigma = s}\}_{s \in T}$ formant partition, on en déduit la même égalité pour $s = t$. Par transformation linéaire, on obtient :

$$E[X_B(\sigma_A)] = \sum_{s \in T} \sum_{t \in T} \sum_{k \in T} (a_{sk} - a_{tk})(b_{sk} - b_{tk}) J_A(s,t),$$

$$E[\sup_T X_A] = \sum_{s \in T} \sum_{t \in T} d_A^2(s,t) J(s,t)\ .$$

Soit alors $A = A(\alpha)$, $\alpha \in [0,1]$, un chemin continûment différentiable dans l'ensemble des matrices inversibles passant par B ; la fonction : $\alpha \to E[X_B(\sigma_{A(\alpha)})]$ étant par définition maximale en B et les intégrales $J_{A(\alpha)}(s,t)$ étant continûment différentiables ([9]), on obtient au point B :

$$\sum_{s \in T} \sum_{t \in T} d_B(s,t)[d_B'(s,t) J_B(s,t) + d_B(s,t) J_B'(s,t)] = 0,$$

et on déduit alors :

$$\frac{d}{d\alpha}\left\{E\left[\sup_T X_A\right]\right\} = \sum_{s\in T}\sum_{t\in T} d_A(s,t)d'_A(s,t)J_A(s,t).$$

Soient alors, sur un ensemble T fini, deux vecteurs gaussiens X et Y vérifiant les hypothèses du lemme ; on peut construire une diagonalisation simultanée :

$$\Gamma_X = T\Delta_X {}^tT \quad , \quad \Gamma_Y = T\,\Delta_Y {}^tT \quad ,$$

des variances de X et de Y par une matrice T régulière et des matrices diagonales positives Δ_X et Δ_Y. Soit ϵ un nombre strictement positif, nous lui associons le chemin continument différentiable dans l'ensemble des matrices inversibles défini par :

$$\forall\ \alpha\in[0,1]\ ,\ A(\alpha) = T[\alpha\sqrt{\Delta_X+\epsilon I}+(1-\alpha)\sqrt{\Delta_Y+\epsilon I}\ ]\ ;$$

l'hypothèse du lemme montre que pour tout couple (s,t), $d'(s,t)$ est positif sur le chemin ; la fonction $E[\sup_T X_{A(\alpha)}]$ est donc croissante sur $[0,1]$; faisant tendre ϵ vers zéro, on en déduit le résultat du lemme dans le cas où T est fini. Le résultat dans le cas général s'obtient alors en utilisant la séparabilité.

4.3. Soit A un ensemble fini ; l'application : $f\to\sup_A f$ est une application convexe de $\mathbb{R}^A$ dans $\mathbb{R}$. Sa restriction à certains sous-espaces de $\mathbb{R}^A$ est linéaire : supposons par exemple le cardinal de A compris entre 2^p et 2^{p+1}, notons A' un sous-ensemble de A de cardinal 2^p et (φ_j), $1\le j\le p$, une famille de p fonctions sur A prenant uniquement les valeurs 0 et 1 et dont les restrictions à A' définissent une numération binaire de A'. Pour toute suite numérique (λ_j), $1\le j\le p$, on aura alors :

$$\sup_A\left[\sum_1^p \lambda_j\varphi_j\right] = \sum_1^p (\lambda_j)^+ .$$

4.4. Soient S une partie de T , δ un nombre positif, q un nombre supérieur ou égal à 2 ; nous considérons une suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de $B(S,\delta)$ construites par récurrence de la manière suivante :

- La partie S_0 est incluse dans S , les boules de rayon δ centrées dans S_0 sont disjointes dans T , S_0 a pour cardinal $M(S,\delta)$.

- Pour tout entier positif n , à tout élément s de S_{n-1} , on associe une famille de boules de rayon $\frac{\delta}{q^{2n}}$ disjointes dans T et centrées dans $B(s, \frac{\delta}{q^{2n-1}})$ de cardinal $K(S,\delta,2n,q)$; on note $S(n,s)$ la famille des centres de ces boules ; S_n est la réunion $\bigcup\limits_{s\in S_{n-1}} S(n,s)$.

Remarquons que si t appartient à $S(n,s)$, la boule $B(t,\frac{\delta}{q^{2n}})$ est incluse dans $B(s, \frac{\delta}{q^{2n-2}})$; on en déduit par récurrence que les boules $B(t,\frac{\delta}{q^{2n}})$, $t\in S_n$, sont disjointes. Il en résulte aussi qu'on peut construire une application Ψ^n_{n-1} de S_n dans S_{n-1} :

$$\Psi^n_{n-1}(t) = s \rightleftarrows t\in S(n,s) \quad .$$

Nous noterons Ψ^n_k l'application composée $\Psi^{k+1}_k \circ\ldots\circ \Psi^n_{n-1}$ de S_n dans S_k.

La construction est fabriquée pour qu'on puisse évaluer l'écart de deux éléments t,t' de S_n à partir des applications Ψ^n_k . Notons d'abord que $d(t,\Psi^n_{n-1}(t))$ étant inférieur ou égal à $\frac{\delta}{q^{2n-1}}$, $d(t,\Psi^n_k(t))$ sera inférieur ou égal par l'inégalité triangulaire à $\frac{2}{3}\frac{\delta}{q^{2k}}$. Supposons alors que $\Psi^n_k(t)$ et $\Psi^n_k(t')$ soient différents ; les boules $B(t, \frac{1}{3}\frac{\delta}{q^{2k}})$ et $B(t', \frac{1}{3}\frac{\delta}{q^{2k}})$ seront respectivement incluses dans les boules disjointes $B(\Psi_k^n(t), \frac{\delta}{q^{2k}})$ et $B(\Psi_k^n(t'), \frac{\delta}{q^{2k}})$; elles seront elles-mêmes disjointes si bien que $d(t,t')$ est supérieur à $\frac{1}{3}\frac{\delta}{q^{2k}}$.

4.5. Pour tout entier positif n, nous allons construire sur S_n par récurrence un processus gaussien Y_n :

- A S_0, nous associons l'entier p_0 immédiatement inférieur à $\mathrm{Log}_2[M[S,\delta]]$ et les fonctions (φ_j^0), $1 \le j \le p_0$, définies sur S_0 dans l'alinéa 4.3 ; soit (λ_j^0), $1 \le j \le p_0$, une suite de variables aléatoires gaussiennes normales indépendantes, on pose :

$$\forall t \in S_0 \ , \ Y_0(t) = c_0 \sum_{j=1}^{p_0} \varphi_j^0(t)\lambda_j^0 \ ,$$

$$c_0 = \frac{\delta}{q^2\sqrt{2\,p_0}} \ .$$

- Pour tout entier positif n, à tout élément s de S_{n-1}, nous associons l'entier p_n immédiatement inférieur à $\mathrm{Log}_2[K[S,\delta,2n,q]]$ et les fonctions (φ_j^s), $1 \le j \le p(s)$, définies sur $S(n,s)$ dans l'alinéa 4.3.; soit (λ_j^s), $1 \le j \le p_n$, $s \in S_{n-1}$, une suite de variables aléatoires gaussiennes normales indépendantes entre elles et indépendantes de Y_{n-1}, on pose :

$$\forall t \in S(n,s), \ Y_n(t) = Y_{n-1}(s) + c(s) \sum_{j=1}^{p_n} \varphi_j^s(t)\lambda_j^s \ ,$$

$$c_n = \frac{\delta}{q^{2n+2}\sqrt{2p_n}} \ .$$

On choisit ainsi les coefficients c_0, c_n pour pouvoir comparer Y_n et X sur S_n à partir du lemme 4.1. En effet, prenons deux éléments t et t'

de S_n et supposons que les $\Psi_j^n(t)$, $\Psi_j^n(t')$, $k \leq j \leq n$, soient différents et que k soit nul ou $\Psi_{k-1}^n(t) = \Psi_{k-1}^n(t')$; on aura alors, dans le second cas par exemple :

$$E|Y_n(t)-Y_n(t')|^2 \leq \sum_{j=k-1}^{n-1} c_n^2 \quad p(\Psi_j^n(t)) + \sum_{j=k-1}^{n-1} c_n^2 \; p(\Psi_j^n(t'))$$

La définition de c_n permet de majorer le second membre par $\frac{\delta^2}{q^{4k}} \frac{1}{q^4-1}$ lui-même majoré par $d^2(t,t')$ qui est en effet supérieur (alinéa 4.4) à $\frac{1}{9} \frac{\delta^2}{q^{4k}}$.

4.6. Nous calculons maintenant $E\left[\sup_{t \in S_n} Y_n(t)\right]$. L'indépendance des termes successifs définissant Y_n permet d'écrire :

$$E\left\{\sup_{t \in S_n} Y_n(t)\right\} = \iint \sup_{s \in S_{n-1}} \sup_{t \in S(n,s)} \left[Y_{n-1}(\omega,s)+(Y_n(t)-Y_{n-1}(s))(\omega')\right] dP(\omega)dP(\omega')$$

Ceci est supérieur à

$$\int\left[\sup_{s \in S_{n-1}} \left\{ Y_{n-1}(\omega,s) + \int \left[c_n \sup_{t \in S_{(n,s)}} \sum_{j=1}^{p_n} \varphi_j^s(t)\lambda_j^s(\omega')\right] dP(\omega')\right\}\right] dP(\omega)$$

Utilisant l'alinéa 4.3., on peut minorer par :

$$\int \sup_{s \in S_{n-1}} \left\{\{Y_{n-1}(\omega,s) + c_n \; p_n \; \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \right\} dP(\omega) \quad .$$

On a finalement :

$$E\left\{\sup_{t \in S_n} Y_n(t)\right\} \geq E\left\{\sup_{t \in S_{n-1}} Y_{n-1}(t)\right\} + \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \, c_n \, p_n \quad ,$$

et en itérant :

$$E\left\{\sup_{t \in S_n} Y_n(t)\right\} \geq \frac{\delta}{q^2\sqrt{\pi}} \left[\sqrt{\mathrm{Ent}[\mathrm{Log}_2 M(S,\delta)]} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \sqrt{\mathrm{Ent}\,[\mathrm{Log}_2 K(S,\delta,2k,q)]}\right]$$

4.7. Pour conclure, on utilise le lemme 4.1 et les conclusions 4.5 et 4.6 ; elles permettent de majorer les termes de rang pair des séries intervenant dans l'énoncé 2.4. par la moitié du second membre. Substituant alors à δ le nombre $\frac{\delta}{q}$, on majore les termes de rang impair et on obtient le résultat annoncé.

5. CAS PARTICULIER DES PROCESSUS STATIONNAIRES, DEMONSTRATIONS

5.1. Soit X un processus séparable et stationnaire sur $\mathbb{R}^n$, il est bien connu, et tout simple à démontrer en utilisant la compacité locale de $\mathbb{R}^n$ que pour que X soit presque sûrement majoré sur toute partie bornée T de $\mathbb{R}^n$, il faut et il suffit qu'il le soit sur un voisinage V de l'origine et on majorera alors très simplement $N(T,\delta)$ à partir de $N(V,\delta)$. Pour démontrer le théorème 2.5., il suffit donc de démontrer, tenant compte du corollaire 2.3., que si X est presque sûrement majoré sur un voisinage V de l'origine bien choisi, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que $\sum_k \frac{1}{4^k} \sqrt{\log N(V, \frac{\delta}{4^k})}$ soit convergente. En réduisant éventuellement la dimension, on peut d'ailleurs supposer que l'ensemble $\{x : d(0,x) = 0\}$ ne contient aucun sous-espace vectoriel différent de $\{0\}$.

Puisque X est stationnaire sur $\mathbb{R}^n$, les boules $B_{\mathbb{R}^n}(t,\delta)$ définies par d sur $\mathbb{R}^n$ sont stables par translation. Ce n'est pas nécessairement le cas pour les traces $B_V(t,\delta)$ de ces boules sur une partie V de $\mathbb{R}^n$. On peut pourtant énoncer :

LEMME 5.1.- Soit X un processus stationnaire sur $\mathbb{R}^n$; on suppose que $\{x : d(0,x) = 0\}$ ne contient aucun sous-espace vectoriel différent de zéro. Dans ces conditions, il existe deux nombres $\ell > 0$, $\delta_0 > 0$ tels que pour tout nombre $\delta \leq \delta_0$, les traces sur $[-\ell, +\ell]^n$ des boules $B(t,\delta)$ centrées dans $B\left(\left[-\frac{\ell}{8}, +\frac{\ell}{8}\right]^n, \delta_0\right) \cap [-\ell, +\ell]^n$ soient stables par translation.

Démonstration du lemme : L'ensemble $\{x : d(0,x) = 0\}$ est un sous-groupe additif fermé de $\mathbb{R}^n$; s'il ne contient aucun sous-espace vectoriel différent de $\{0\}$, alors $\{0\}$ y est isolé pour la topologie usuelle. Choisissons $\ell > 0$ tel que $[-2\ell, +2\ell]^n$ ne coupe $\{x : d(0,x) = 0\}$ qu'en $\{0\}$; alors l'écart d définit sur le compact $[-\ell, +\ell]^n$ une topologie séparée moins fine que la topologie usuelle et donc équivalente. Il existe donc un nombre $\delta_0 > 0$ tel que la trace de $B(0,\delta_0)$ sur $[-\ell, +\ell]^n$ soit incluse dans $[-\frac{\ell}{8}, +\frac{\ell}{8}]^n$. On vérifie facilement que le couple (ℓ, δ_0) possède les propriétés indiquées.

5.2. Nous démontrons maintenant le théorème 2.5. Choisissons un couple (ℓ, δ_0) vérifiant les conclusions du lemme 5.1. Posons $T = [-\ell, +\ell]^n$ et $S = [-\frac{\ell}{8}, +\frac{\ell}{8}]^n$. Ceci nous assure que pour tout $\delta \leq \delta_0$, les nombres $K(t,\delta,n,4)$ sont indépendants de t dans $B(S,\delta)$. Rappelons que $N(S,\delta)$ est le cardinal minimal d'une famille de boules de rayon δ recouvrant S.

Il est net que si les $B(s_i, \frac{\delta_0}{4^n})$ forment une famille maximale disjointe dans $B(t, \frac{\delta_0}{4^{n-1}})$, alors les $B(s_i, \frac{2\delta_0}{4^n})$ en vertu de la maximalité recouvrent $B(t, \frac{\delta_0}{4^{n-1}})$. On a donc les inégalités :

$$N\left[S, \frac{\delta_0}{4^{n-1}}\right] K(S,\delta_0,n,4) \geq N\left[S, \frac{2\delta_0}{4^n}\right],$$

$$N\left[S, \frac{2\delta_0}{4^n}\right] K(S,2\delta_0,n+1,4) \geq N\left[S, \frac{\delta_0}{4^n}\right] ;$$

On en déduit :

$$\mathcal{K}(S,\delta_0,n,4)\,\mathcal{K}\left(S,\frac{2\delta_0}{4},n,4\right) \geq \frac{N\left[S,\frac{\delta_0}{4^n}\right]}{N\left[S,\frac{\delta_0}{4^{n-1}}\right]} \quad .$$

Les conclusions du théorème 2.4. appliquées à $\delta = \delta_0$ et à $\delta = \frac{\delta_0}{2}$ impliquent alors la convergence de la série $\sum\limits_n \frac{1}{4^n}\sqrt{\log\frac{N(S,\delta_0/4^n)}{N(S,\delta_0/4^{n-1})}}$, puis par une transformation simple celle de la série $\sum\limits_n \frac{1}{4^n}\sqrt{\log N(S,\frac{\delta_0}{4^n})}$; on en déduit immédiatement la convergence de la série $\sum\limits_n \frac{1}{4^n}\sqrt{\log N\left[T,\frac{\delta_0}{4^n}\right]}$, d'où le résultat du théorème.

6. REMARQUES FINALES

L'alinéa 5.2 montre bien que si on peut caractériser à partir des nombres nombres N la majoration presque sûre des processus stationnaires, c'est essentiellement parce que dans ce cas, les éparpillements locaux sont stables et déterminent l'éparpillement global. Pour obtenir des caractérisations dans le cas non stationnaire, il semblerait donc utile d'analyser les variations des quantités $\mathcal{K}(t,\delta,n,q)$ en fonction de t pour construire des parties S de T où leurs variations soient petites.

REFERENCES

[1] BELYAEV, Yu.K. Local properties of the sample functions of stationnary gaussian processes.
Th. Prob. Appl. 5 (1960), pp. 117-120.

[2] DUDLEY, R.M. The sizes of compact subsets of Hilbert space and continuity of gaussian processes.
J. Functional Analysis, 1 (1967), pp. 290-330.

[3] FERNIQUE, X. Continuité de processus gaussiens.
C.R.Acad.Sc. Paris, 258 (1964), pp. 6058-6060.

[4] FERNIQUE, X. Régularité de processus gaussiens.
Inventiones Math. 12 (1971), pp. 304-320.

[5] FERNIQUE, X. Minorations de fonctions aléatoires gaussiennes.
Colloque International du CNRS, Strasbourg (1973), à paraître.

[6] MARCUS, M.B. et SHEPP, L.A.
Continuity of gaussian processes.
Trans. Amer. Math. Soc. 151 (1970), pp. 377-392.

[7] MARCUS, M.B. et JAIN, N.C.
Sufficient conditions for the continuity of stationnary gaussian processes and applications to random series of functions.
Colloque International du CNRS, Strasbourg (1973), à paraître.

[8] SUDAKOV Gaussian processes, Cauchy measures and ϵ-entropy.
Dokl. Akad. Nauk. SSSR 185, 1 (1969).

[9] FERNIQUE, X. Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes.
Ecole d'Eté, Calcul des Probabilités, St. Flour.
A paraître.