SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

BERNARD HEINKEL

Théorèmes de dérivation du type de Lebesgue et continuité presque sûre de certains processus gaussiens

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 8 (1974), p. 155-171

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1974__8__155_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités

THEOREMES de DERIVATION du TYPE de CELUI de LEBESGUE et CONTINUITE PRESQUE SURE des TRAJECTOIRES de CERTAINS PROCESSUS GAUSSIENS.

par B. HEINKEL

§0. INTRODUCTION.

Depuis plusieurs années, on a cherché à caractériser les processus gaussiens possédant des versions à trajectoires presque sûrement continues en fonction du module de continuité de leur covariance. Les méthodes employées partent, suivant le cas, directement de la covariance, ou l'emploient de manière indirecte par la méthode d'$\mathcal{E}$-entropie.

A la suite de l'exposé que N.C. JAIN et M.B. MARCUS [6] ont fait au Colloque International du C.N.R.S. (Strasbourg, 1973), X. FERNIQUE m'a proposé d'étudier la continuité presque sûre des trajectoires d'un processus gaussien en employant l'idée qu'il a utilisée dans l'exemple du § 3 de [1] , c'est-à-dire le fait suivant :

Si l'on considère un processus gaussien $\{X(t), t \in [0,1]\}$ à trajectoires presque sûrement continues, on a pour tout $t \in [0,1]$ et tout $\omega \in \Omega$:

$$(1) \qquad X(t,\omega) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda\{B_r(t)\}} \int_{B_r(t)} X(y,\omega) d\lambda(y)$$

où $B_r(t)$ désigne la boule ouverte de $[0,1]$ de centre t et de rayon r (pour la topologie usuelle) et λ la mesure de Lebesgue.

Nous allons faire cette étude dans le cadre suivant : considérons un processus gaussien $\{X(t), t \in [0,1]\}$ de covariance Γ, continue. Nous supposerons de plus :

(2) $$X_t \neq X_s \quad \text{si} \quad t \neq s$$

et nous poserons :

$$\Delta(s,t) = (E(X_s - X_t)^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall\ (s,t) \in [0,1] \times [0,1] .$$

Δ définit ainsi une distance sur $[0,1]$.

Il est alors naturel d'essayer de trouver une formule de dérivation analogue à (1), mais où "on dérive le long d'ensembles du type $\{y : \Delta(x,y) < \varepsilon_n\}$ ", $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ étant une suite de nombres réels positifs décroissant vers 0. Mais comme nous ne connaissons pas la régularité des trajectoires du processus $\{X(t), t \in [0,1]\}$, nous ne pourrons pas établir directement une telle formule et nous serons obligés de passer par le développement de Karhunen-Loève du processus $\{X(t), t \in [0,1]\}$.

Rappelons brièvement le procédé de construction du développement de Karhunen-Loève du processus $\{X(t), t \in [0,1]\}$:

D'après le Théorème de Mercer, <u>il existe une suite de fonctions continues</u> $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\varphi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$$

<u>et une suite de nombres réels strictement positifs</u> $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, <u>telles que</u> :

(i) $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ <u>est un système orthonormal dans</u> $L^2([0,1],\mathcal{B},\lambda)$

(ii) $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in [0,1]$, <u>on a</u> :

$$\lambda_n \varphi_n(x) = \int_0^1 \Gamma(x,t)\varphi_n(t)d\lambda(t)$$

(iii) $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi_j(s)\varphi_j(t)$ <u>converge uniformément vers</u> $\Gamma(s,t)$ <u>sur</u> $[0,1] \times [0,1]$.

Soit maintenant une suite de v.a.r. $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, définies sur un espace probabilisé complet $(\Omega,\mathfrak{J},P)$ qui sera fixé dans toute la suite, gaussiennes, centrées, réduites et indépendantes. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in[0,1]$, on pose :

$$X_t^{(n)}(.) = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\lambda_j}\varphi_j(t)\theta_j(.) .$$

$\{X_t^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est appelé le développement de Karhunen-Loève du processus $\{X(t),t\in[0,1]\}$. Il est clair que la série de v.a. indépendantes $\sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j}\varphi_j(t)\theta_j$ converge presque sûrement pour tout $t\in[0,1]$ fixé, vers une v.a. de même loi que $X(t)$; nous préciserons cette v.a. lorsque nous nous servirons du développement de Karhunen-Loève.

Nous établirons l'existence d'une version du processus à trajectoires presque sûrement continues en nous servant du résultat de N.C. JAIN et G. KALLIANPUR [5], à savoir qu'un processus gaussien $\{Y(t),t\in K\}$, où (K,d) est un espace métrique compact, admet une version à trajectoires presque sûrement continues si et seulement si son développement de Karhunen-Loève est uniformément presque sûrement convergent.

Pour établir cette convergence uniforme presque sûre, nous allons montrer que si la covariance Γ vérifie certaines hypothèses intégrales, la suite $\{X_{(.)}^{(n)}(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue. Un raisonnement classique sur les suites équicontinues nous permettra alors d'en déduire la convergence uniforme presque sûre de la suite $\{X_t^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour établir cette équicontinuité, nous démontrerons d'abord directement une formule de dérivation du type de Lebesgue dans le cas des fonctions continues (cf. Lemme 5) car nous ne nous en servirons que pour les fonctions continues $X_{(.)}^{(n)}(\omega)$; nous démontrerons d'autre part cette formule de dérivation par des méthodes analogues à celles utilisées par C. PRESTON [7], [8] en prenant des hypothèses un peu moins restrictives que lui sur Δ, car nous nous servirons explicitement de la continuité des $\{X_{(.)}^{(n)}(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$, alors qu'il utilisait des résultats établis dans [7], dans le cas de fonctions intégrables.

Cette deuxième démonstration nous donnera en corollaire l'équicontinuité de la suite $\{X^{(n)}_{(.)}(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Enonçons maintenant les résultats que nous allons établir.

§1. RESULTATS.

Soit un processus gaussien $\{X(t), t\in[0,1]\}$ à covariance continue. Nous supposerons de plus :

$$X_t \neq X_s \quad \text{si} \quad t \neq s .$$

On notera :

$$\Delta(s,t) = (E(X_s - X_t)^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall\ (s,t) \in [0,1] \times [0,1] .$$

Le résultat essentiel que nous établirons est le suivant :

THEOREME 1. - <u>Supposons réalisée la condition suivante</u> :

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{x\in[0,1]} \int_0^\varepsilon \left(\mathrm{Log}\, \frac{1}{\lambda\{y : \Delta(x,y) < z\}}\right)^{\frac{1}{2}} d\lambda(z) = 0 \tag{3}$$

<u>où</u> λ <u>désigne la mesure de Lebesgue</u>.

<u>Alors</u> $\{X(t), t\in[0,1]\}$ <u>admet une version séparable à trajectoires presque sûrement continues</u>.

<u>Remarque</u> : En fait l'hypothèse : $X_s \neq X_t$ si $s \neq t$ est trop forte.

Nous montrerons que l'énoncé du Théorème 1 est encore vrai si l'on suppose seulement :

$$\exists\ \varepsilon > 0 \,|\, \forall\ (x,y) \in [0,1] \times [\,0,1] ,\ x \neq y \ \text{ avec : } |x-y| \leq \varepsilon \Rightarrow \Delta(x,y) \neq 0 .$$

Cette remarque nous permettra d'obtenir la condition suffisante pour la continuité presque sûre des trajectoires d'un processus gaussien stationnaire donnée par N.C.JAIN et M.B.MARCUS dans [6] comme corollaire du Théorème 1, c'est-à-dire que nous établirons le résultat suivant :

THEOREME 2. - Soit $\{X(t), t\in[0,1]\}$ un processus gaussien séparable, stationnaire, à covariance continue, avec : $X(0) = 0$. On pose :

$$E\{X(t+h - X(t)\}^2 = \sigma^2(|h|) .$$

Soit $\bar{\sigma}$ le réarrangement croissant de σ . Supposons réalisée la condition suivante :

(4)
$$I(\bar{\sigma}) = \int_0 \frac{\bar{\sigma}(u)}{u(\text{Log } \frac{1}{u})^{\frac{1}{2}}} d\lambda(u) < \infty .$$

Alors $\{X(t), t\in[0,1]\}$ possède une version séparable à trajectoires presque sûrement continues.

N.B. - Rappelons la définition de la fonction $\bar{\sigma}$.

Si l'on pose :

$$\mu(y) = \lambda\{h \in [0,1] : \sigma(h) < y\}$$

alors

$$\bar{\sigma}(h) = \sup\{y : \mu(y) < h\} .$$

Donnons maintenant la démonstration de ces deux théorèmes.

§2. DEMONSTRATION DU THEOREME 1 .

Avant de donner la démonstration de ce théorème, je vais rappeler quelques notions introduites par C. PRESTON dans [7] .

Supposons que Δ vérifie l'hypothèse (2) . Δ définit alors une distance sur $[0,1]$ et $([0,1]),\Delta)$ est un espace métrique compact. En effet :

Notons d la distance usuelle sur $[0,1]$. Alors l'application identique de $([0,1,d)$ dans $([0,1],\Delta)$ est une application continue d'un espace métrique compact sur un espace métrique ; c'est donc un homéomorphisme de $([0,1],d)$ sur $([0,1],\Delta)$ et de ce fait $([0,1],\Delta)$ est un espace compact.

Soit Ψ la fonction définie de la façon suivante :

$$\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto e^{\frac{x^2}{4}} .$$

Posons :

$$\mathfrak{F} = \{f : f \in L^1[0,1] \mid \exists\, \alpha > 0 \quad \text{avec} \quad : \int_0^1 \int_0^1 \exp \tfrac{1}{4} \{\tfrac{f(s)-f(t)}{\alpha\Delta(s,t)}\}^2 \, d\lambda(s)d\lambda(t) < \infty\}$$

$\mathfrak{F}$ est un espace de Banach muni de la norme suivante :

$$\|f\| = \|f\|_1 + \|\delta f\|_\Psi$$

où :

$$\|\delta f\|_\Psi = \inf\{\alpha > 0 : \int_0^1 \int_0^1 \exp \tfrac{1}{4}\{\tfrac{f(s)-f(t)}{\alpha\Delta(s,t)}\}^2 \, d\lambda(s)d\lambda(t) \leq 1\} .$$

Introduisons maintenant quelques notations techniques :

$D_r(x)$ sera la boule ouverte de centre x et de rayon r, pour la distance Δ. Pour toute fonction $f \in L^1[0,1]$, on posera :

$$f_r(x) = \frac{1}{\lambda\{D_r(x)\}} \int_{D_r(x)} f(y)d\lambda(y) .$$

De même, pour tout $A \in B[0,1]$, avec $\lambda(A) > 0$:

$$f_A = \frac{1}{\lambda(A)} \int_A f(y)d\lambda(y) .$$

Nous allons établir maintenant le Théorème 1 . Pour cela nous montrerons d'abord que les notions que nous venons d'introduire sont bien adaptées à l'étude du processus $\{X(t), t \in [0,1]\}$ vérifiant les hypothèses du Théorème 1 .

LEMME 1. - <u>Il existe un ensemble négligeable</u> $U \subset \Omega$, <u>tel que pour tout</u> $\omega \in U^c$ <u>et tout</u> $n \in \mathbb{N}$, $X^{(n)}_{(.)}(\omega) \in \mathfrak{F}$.

<u>Démonstration du Lemme 1</u> : En calculant $E\{\int_0^1 X_t^{(n)^2}(.)d\lambda(t)\}$ par le Théorème de Fubini, on voit qu'il existe un ensemble négligeable N, tel que pour tout $\omega \in N^c$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on ait : $X^{(n)}_{(.)}(\omega) \in L^1[0,1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$Y_n(s,t) = \frac{X_s^{(n)} - X_t^{(n)}}{\Delta(s,t)} \qquad \forall\ (s,t) \in [0,1] \times [0,1]\ ,\ s \neq t$$

et

$$Y_n(t,t) = 0 \qquad \forall\ t \in [0,1]\ .$$

Pour $s \neq t$, $Y_n(s,t)$ est une v.a. gaussienne centrée, d'écart-type ≤ 1 .

On remarque que la fonction :

$$(\omega, s, t) \mapsto Y_n(s,t)(\omega)$$

est mesurable de $(\Omega \times [0,1] \times [0,1], \mathcal{J} \times \mathcal{B}[0,1] \times \mathcal{B}[0,1])$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Par application des Théorèmes de Fubini et du transfert, on aura donc :

$$E \int_0^1 \int_0^1 \exp \tfrac{1}{4}\, (Y_n(s,t))^2 d\lambda(s) d\lambda(t) < \infty\ .$$

On en déduit que l'on a, pour presque tout $\omega \in \Omega$:

$$\int_0^1 \int_0^1 \exp \tfrac{1}{4} \left\{\frac{X_t^{(n)}(\omega) - X_s^{(n)}(\omega)}{\Delta(s,t)}\right\}^2 d\lambda(s) d\lambda(t) < \infty\ .$$

D'où le lemme 1 .

Etablissons maintenant le Théorème de dérivation dont nous aurons besoin ; sa démonstration est analogue à celle de certains résultats de C. PRESTON ; nous n'en donnerons donc qu'une rédaction succinte.

PROPOSITION 1. – Supposons que la condition suivante soit réalisée :

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{x \in [0,1]} \int_0^\varepsilon \left(\mathrm{Log} \frac{1}{\lambda\{y : \Delta(x,y) < z\}}\right)^{\frac{1}{2}} d\lambda(z) = 0\ .$$

Soit f une fonction continue, $f \in \mathcal{J}$. Posons :

$$\int_0^1 \int_0^1 \exp \tfrac{1}{4} \left\{\frac{f(s) - f(t)}{\Delta(s,t)}\right\}^2 d\lambda(s) d\lambda(t) \leq c < \infty\ .$$

Alors on a, pour tout $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$:

$$(5)\qquad |f(x)-f(y)|\le 20\sup_{z\in[0,1]}\int_0^{\Delta(x,y)}\left(\operatorname{Log}\frac{\sqrt{c}}{\lambda\{t:\Delta(z,t)<\frac{u}{2}\}}\right)^{\frac{1}{2}}d\lambda(u)\,.$$

Démonstration de la Proposition 1 : Elle nécessite l'établissement de plusieurs lemmes.

LEMME 2. - Soit $f\in\mathfrak{F}$, avec :

$$\int_0^1\int_0^1 \exp\frac{1}{4}\left\{\frac{f(s)-f(t)}{\Delta(s,t)}\right\}^2 d\lambda(s)d\lambda(t)\le c<\infty\,.$$

Soient F et $G\in\mathcal{B}[0,1]$, avec : $\lambda(F)\lambda(G)>0$. Alors, on a :

$$|f_F-f_G|\le 2\left(\operatorname{Log}\frac{c}{\lambda(F)\lambda(G)}\right)^{\frac{1}{2}}d_0$$

où : $d_0=\sup\{\Delta(x,y): x\in F, y\in G\}$.

Démonstration du Lemme 2 : On a :

$$\frac{1}{\lambda(F)\lambda(G)}\int_F\int_G \exp\frac{1}{4}\left\{\frac{f(s)-f(t)}{d_0}\right\}^2 d\lambda(s)d\lambda(t)\le\frac{c}{\lambda(F)\lambda(G)}\,.$$

Par utilisation de l'inégalité de Jensen, on arrive aisément à :

$$\left|\frac{1}{\lambda(F)\lambda(G)}\int_F\int_G (f(s)-f(t))d\lambda(s)d\lambda(t)\right|\le 2d_0\left(\operatorname{Log}\frac{c}{\lambda(F)\lambda(G)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ce qui est bien le résultat annoncé.

LEMME 3. - Soit $x\in[0,1]$ tel que :

$$\int_0^1\left(\operatorname{Log}\frac{\sqrt{c}}{\lambda\{y:\Delta(x,y)<u\}}\right)^{\frac{1}{2}}d\lambda(u)<\infty\,.$$

Alors, pour la fonction f considérée au Lemme 2, $\lim_{r\to 0} f_r(x)$ existe.

Démonstration du Lemme 3 : La démonstration est exactement la même que celle du Lemme 3 de [7] avec la simplification que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qu'on utilise est $r\,2^{-n}$. Je ne donnerai donc pas le détail de la rédaction.

Soit $x \in [0,1]$; on définit l'application β_x suivante :

$$\beta_x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$\beta_x(u) = \sqrt{2}\left(\mathrm{Log}\,\frac{\sqrt{c}}{\lambda\{y : \Delta(x,y) < \frac{u}{2}\}}\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Notons d'autre part $f_0(x)$ la limite définie au Lemme 3. On a le résultat suivant :

LEMME 4. - Supposons que pour tout $x \in [0,1]$, on ait :

$$\int_0^1 \beta_x(u)\,d\lambda(u) < \infty .$$

Alors, pour tout $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$:

$$|f_0(x)-f_0(y)| \leq 5 \int_0^{\Delta(x,y)} (\beta_x(u)+\beta_y(u))\,d\lambda(u) .$$

Là encore, je ne donnerai pas la démonstration, car elle est similaire à celle du Lemme 4 de [7].

Nous venons donc d'établir que pour tout $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$:

$$|f_0(x)-f_0(y)| \leq 20 \sup_{z \in [0,1]} \int_0^{\Delta(x,y)} \left(\mathrm{Log}\,\frac{\sqrt{c}}{\lambda\{t : \Delta(z,t) < \frac{u}{2}\}}\right)^{\frac{1}{2}} d\lambda(u) .$$

Pour achever la démonstration de la Proposition 1, il suffit d'établir maintenant que $f_0 = f$. C'est l'objet du Lemme 5.

LEMME 5. - Soit g une fonction continue, $g : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Soit d'autre part $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs décroissant vers 0. Alors on a :

$$\forall\, x \in [0,1] \quad \lim_{n\to\infty} g_{r_n}(x) = g(x) .$$

Démonstration du Lemme 5 : Montrons d'abord que : $\lim_{n\to\infty} \lambda\{D_{r_n}(x)\} = 0$.

La suite $\{D_{r_n}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \lambda\{D_{r_n}(x)\} = \lambda\{y : \Delta(x,y)=0\} = 0$$

(car on a supposé que : $s \neq t \Rightarrow X_s \neq X_t$).

Soit B_n la plus petite boule fermée (au sens de la topologie usuelle de $[0,1]$) de centre x , contenant $D_{r_n}(x)$. Soit s_n son rayon.

L'identité étant une application continue de $([0,1],\Delta)$ dans $([0,1],d)$, on a :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \eta > 0 \quad \Delta(x,y) < \eta \Rightarrow d(x,y) < \varepsilon \,.$$

D'où l'on déduit :

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 0 \,.$$

La continuité de g entraîne que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe α_n et β_n éléments de B_n , tels que :

$$\forall\, u \in B_n : g(\alpha_n) \le g(u) \le g(\beta_n) \,.$$

D'où : $g(\alpha_n) \le g_{r_n}(x) \le g(\beta_n)$.

On en déduit le Lemme 5 par passage à la limite sur n .

Ceci achève la démonstration de la Proposition 1 .

Notre but est maintenant d'appliquer la relation (5) aux fonctions continues $X^{(n)}_{(\cdot)}(\omega)$. Plus précisément, nous voulons mettre en évidence une v.a. positive presque sûrement finie B , telle que l'on ait, pour tout $\omega\in\Omega$ tel que $B(\omega)<\infty$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$|X_s^{(n)}(\omega)-X_t^{(n)}(\omega)| \le 20 \sup_{x\in[0,1]} \int_0^{\Delta(s,t)} \left(\mathrm{Log}\, \frac{B^{\frac{1}{2}}(\omega)}{\lambda\{y : \Delta(x,y) < \frac{u}{2}\}}\right)^{\frac{1}{2}} d\lambda(u) \,.$$

Pour avoir la continuité presque sûre des trajectoires d'une version du processus $\{X(t), t\in[0,1]\}$ du Théorème 1 , il suffira de faire un raisonnement d'équicontinuité montrant que la suite $\{X_t^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément presque sûrement convergente.

Démontrons donc ces 2 derniers résultats :

LEMME 6. - Soit B la v.a. définie de la manière suivante :

$$B(\omega) = \sup_n \int_0^1 \int_0^1 \exp \tfrac{1}{4} \left\{\frac{X_s^{(n)}(\omega)-X_t^{(n)}(\omega)}{\Delta(s,t)}\right\}^2 d\lambda(s)d\lambda(t)\,.$$

Alors B est presque sûrement finie et $E(B)<\infty$.

Démonstration du Lemme 6 : Elle est analogue à celle donnée par A.M. GARSIA dans [3] ou à celle de la Proposition 3.a) de [4] .

Nous allons quand même la donner car elle est intéressante.

Soient s et t , 2 éléments de $[0,1]$, fixés, avec $s \neq t$. On posera, comme précédemment :

$$Y_n(s,t) = \frac{X_s^{(n)}-X_t^{(n)}}{\Delta(s,t)} \qquad \forall\, n\in\mathbb{N}\,.$$

Soit :

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$
$$G(x) = e^{\frac{1}{8}x^2}\,.$$

Il est clair que les $\{G\{Y_n(s,t)\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ forment une sous-martingale ; de plus, les v.a. $Y_n(s,t)$ sont gaussiennes, centrées, d'écart-type ≤ 1 . On a donc :

$$E\{\max_{m\leq n} G^2\{Y_m(s,t)\}\} \leq 4E\{G^2\{Y_n(s,t)\}\} \leq 4\sqrt{2}\,.$$

Et cette relation est encore vraie pour $s = t$.

Par application du Théorème de Fubini, il vient :

$$E\left[\int_0^1 \int_0^1 \max_{m\leq n} G^2\{Y_m(s,t)\} d\lambda(s)d\lambda(t)\right] \leq 4\sqrt{2}\,.$$

En appliquant maintenant le Théorème de convergence monotone, on aura :

$$E\left[\int_0^1\int_0^1 \sup_n G^2\{Y_n(s,t)\}d\lambda(s)d\lambda(t)\right] \leq 4\sqrt{2}\,.$$

D'où également :

$$E\left[\sup_n \int_0^1\int_0^1 G^2\{Y_n(s,t)\}d\lambda(s)d\lambda(t)\right] \leq 4\sqrt{2}\,.$$

Ceci entraine bien le Lemme 6 .

Voici enfin le Lemme 7 qui terminera la démonstration du Théorème 1 :

LEMME 7. - <u>Il existe un ensemble mesurable</u> $\Omega_0 \subset \Omega$, <u>de probabilité 1 , tel que pour tout</u> $\omega \in \Omega_0$, <u>la suite</u> $\{X^{(n)}_{(.)}(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$ <u>converge uniformément sur</u> $[0,1]$.

<u>Démonstration du Lemme 7</u> : Là encore la démonstration est du même type que celle de A.M. GARSIA [3] et que celle de la Proposition 3.c) de [4] . Pour les mêmes raisons que précédemment, nous en donnerons quand même une rédaction succinte.

Les fonctions $X^{(n)}_{(.)}(\omega)$ étant continues et appartenant presque sûrement à $\mathfrak{F}$, le Lemme 6 et la Proposition 1 nous permettent d'écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour presque tout $\omega \in \Omega$:

$$(6)\qquad |X_s^{(n)}(\omega)-X_t^{(n)}(\omega)| \leq 20 \sup_{x\in[0,1]} \int_0^{\Delta(s,t)} \left(\mathrm{Log}\,\frac{B^{\frac{1}{2}}(\omega)}{\lambda\{y : \Delta(x,y) < \frac{u}{2}\}}\right)^{\frac{1}{2}} d\lambda(u)\,.$$

La série de v.a. indépendantes définie par $S(t,.) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n}\varphi_n(t)\theta_n(.)$ converge presque sûrement pour tout $t \in [0,1]$ fixé. L'équicontinuité pour presque tout $\omega \in \Omega$ de la suite $\{X^{(n)}_{(.)}(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$ (donnée par (6)) et le fait que $([0,1],d)$ est compact entraînent que pour presque tout $\omega \in \Omega$, la suite $\{X^{(n)}_{(.)}(\omega)\}$ converge uniformément vers une fonction continue $Y_{(.)}(\omega)$.

Le Lemme 7 est donc bien établi.

Soit $H(\Gamma)$ l'espace reproduisant associé à Γ . $H(\Gamma)$ étant isomorphe à $L^2(X_t, t\in[0,1])$, $\{X_t^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^2(\Omega,\mathfrak{J},P)$ vers X_t , pour tout $t \in [0,1]$ (cf. [5]).

D'après ce qui précède on aura donc :

$$\forall \ t \in [0,1] \qquad Y_t(\omega) = X_t(\omega)$$

presque sûrement ce qui achève la démonstration du Théorème 1 .

Remarque relative à la restriction des hypothèses faites sur Δ : Au lieu de supposer : $x = y \Leftrightarrow \Delta(x,y) = 0$ exigeons seulement :

$$\exists \ \varepsilon > 0 \,|\, |x-y| \leq \varepsilon \ \text{ et } \ x \neq y \Rightarrow \Delta(x,y) \neq 0$$

et montrons que la conclusion du Théorème 1 est encore valable. Pour cela, considérons le processus gaussien $\{Y(t), t \in [0,1]\}$ défini par :

$$Y(t) = X(\varepsilon t) \ .$$

D'après le raisonnement précédent, il admet une version séparable à trajectoires presque sûrement continues.

Le changement de temps : $\begin{aligned}[0,\varepsilon] &\to [0,1] \\ t &\to \frac{1}{\varepsilon} t\end{aligned}$

étant continu, $\{X(t), t \in [0,1]\}$ admet également une version séparable à trajectoires presque sûrement continues.

Le Théorème 1 est donc encore valable avec la restriction d'hypothèses que nous avons faite.

L'utilité essentielle de cette remarque est de nous permettre de montrer que le Théorème 2 dû à N.C. JAIN et M.B. MARCUS [6] est un corollaire du Théorème 1 .

§3. DEMONSTRATION DU THEOREME 2.

Considérons un processus gaussien stationnaire basé sur $\mathbb{R}$, tel que la restriction à $[0,1]$ de σ (défini plus haut) vérifie les hypothèses du Théorème 2 . Si $\sigma \equiv 0$ la conclusion du Théorème 2 est trivialement vérifiée ; nous supposerons donc $\sigma \not\equiv 0$.

Montrons tout d'abord que la covariance est du type précédent :

LEMME 8.

$$\exists\ \varepsilon > 0 \mid\ |x-y| \leq \varepsilon\ ,\ x \neq y \Rightarrow \sigma(|x-y|) \neq 0 .$$

Démonstration du Lemme 8 : La restriction de σ à $[0,1]$ étant continue, σ est continue. S'il existe $x \neq 0$ tel que $\sigma(x) = 0$, alors σ est périodique de période x . Supposons qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$, avec de plus : $\sigma(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors σ est périodique, continue, de période 0 ; donc $\sigma \equiv 0$.

Comme nous avons écarté ce cas nous pouvons en conclure :

Si σ est non périodique, $\varepsilon = 1$ vérifie la conclusion du Lemme 8 . Si σ est périodique de plus petite période positive p , $\varepsilon = \frac{p}{2}$ vérifie la conclusion du Lemme 8 .

Montrons maintenant que l'hypothèse intégrale de N.C. JAIN et M.B. MARCUS entraine celle du Théorème 1 :

LEMME 9 . –. L'hypothèse

$$I(\bar{\sigma}) = \int_0^{\varepsilon} \frac{\bar{\sigma}(u)}{u(\mathrm{Log}\ \frac{1}{u})^{\frac{1}{2}}}\, d\lambda(u) < \infty$$

entraine $\exists\ \alpha > 0$ tel que :

$$\int_0^{\alpha} (\mathrm{Log}\ \frac{1}{\lambda\{x : \sigma(x) < u\}})^{\frac{1}{2}} d\lambda(u) < \infty .$$

Démonstration du Lemme 9 : Soit I l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\alpha} \left(\operatorname{Log} \frac{1}{\lambda\{x : \sigma(x) < u\}}\right)^{\frac{1}{2}} d\lambda(u) .$$

On définit la v.a. X suivante :

$$([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda) \xrightarrow{X} ([0,1], \mathcal{B}[0,1])$$
$$x \mapsto \mu(x) .$$

Il est évident que la fonction de répartition de X est $\bar{\sigma}$.

Calculons maintenant l'intégrale I .

Elle est égale à l'espérance de la v.a. $Y = (\operatorname{Log} \frac{1}{X})^{\frac{1}{2}} I_{X \le X(\alpha)}$.
Pour calculer l'espérance de Y , on va appliquer le résultat classique suivant : soit une v.a.r. $Z \ge 0$, de fonction de répartition F , de loi P_Z ; alors, on a :

$$E(Z) = \int_0^{\infty} t \, d P_Z(t) = \int_0^{\infty} (1-F(t)) d\lambda(t) .$$

D'où :

$$E(Y) = \int_0^{\infty} \lambda\{h : (\operatorname{Log} \frac{1}{X(h)})^{\frac{1}{2}} I_{X(h) \le X(\alpha)} > t\} d\lambda(t) .$$

Or :

$$\lambda\{h : (\operatorname{Log} \frac{1}{X(h)})^{\frac{1}{2}} I_{X(h) \le X(\alpha)} > t\} = \lambda\left\{u : \begin{bmatrix} \mu(u) \le \mu(\alpha) \\ \mu(u) < e^{-t^2} \end{bmatrix}\right\}.$$

Ceci s'écrit encore :

$$\lambda\{h : (\operatorname{Log} \frac{1}{X(h)})^{\frac{1}{2}} I_{X(h) \le X(\alpha)} > t\} = \lambda\{u : \mu(u) \le \mu(\alpha) \; ; \; \mu(u) \le e^{-t^2}\}$$
$$= \bar{\sigma}\{\inf (\mu(\alpha) , e^{-t^2})\} .$$

Donc :

$$I = E(Y) = \int_0^\infty \bar{\sigma}\{\inf(\mu(\alpha), e^{-t^2})\}d\lambda(t)$$

$$= \int_0^{(\mathrm{Log}\,\frac{1}{\mu(\alpha)})^{\frac{1}{2}}} \bar{\sigma}(\mu(\alpha))d\lambda(t) + \int_{(\mathrm{Log}\,\frac{1}{\mu(\alpha)})^{\frac{1}{2}}}^\infty \bar{\sigma}(e^{-t^2})d\lambda(t) .$$

La première de ces intégrales est finie. Calculons la deuxième par changement de variable, en posant $e^{-t^2} = u$. Elle devient :

$$\int_0^{\mu(\alpha)} \frac{\bar{\sigma}(u)}{2u(\mathrm{Log}\,\frac{1}{u})^{\frac{1}{2}}} d\lambda(u) .$$

Cette intégrale est finie par hypothèse et ceci termine la démonstration du Lemme 9 .

Donc le Théorème 2 est bien un corollaire du Théorème 1 .

CONCLUSION

Le Théorème 1 peut être généralisé au cas de processus gaussiens basés sur des ensembles beaucoup plus généraux que $([0,1],d)$. Ainsi, X. FERNIQUE [2] a établi une condition suffisante de continuité presque sûre des trajectoires dans le cas d'un processus gaussien basé sur un espace probabilisé arbitraire $(T,\mathcal{T},\mu)$ dont la covariance vérifie une condition intégrale analogue à celle du Théorème 1 . Sa démonstration, radicalement différente de celle du Théorème 1 , utilise une méthode d'approximations finies du processus.

Strasbourg, le 20 Novembre 1973.

B. HEINKEL,

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE

Laboratoire Associé au C.N.R.S.
Université Louis-Pasteur
7, rue René Descartes

67084 STRASBOURG Cédex

REFERENCES

[1] X. FERNIQUE — Régularité des Processus Gaussiens. Inventiones Math., 12 (1971), P. 304-320.

[2] X. FERNIQUE — Des résultats nouveaux sur les Processus Gaussiens. Preprint.

[3] A.M. GARSIA — Continuity properties of multi-time-dimensional Gaussian Processes. Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. Univ. of California Press.

[4] B. HEINKEL — Une condition suffisante pour la continuité presque sûre des trajectoires de certains Processus Gaussiens. Lecture Notes, n° 321, "Séminaire de Probabilités n° VII", P. 77-94.

[5] N.C. JAIN et G. KALLIANPUR — A note on uniform convergence of stochastic processes. Ann. Math. Stat. Vol. n° 41-4 (1970), P. 1360-1362.

[6] N.C. JAIN et M.B. MARCUS — Sufficient conditions for the continuity of stationary Gaussian Processes and applications to random series of functions. Colloque international du C.N.R.S., Strasbourg (1973), à paraître.

[7] C. PRESTON — Banach spaces arising from some integral inequalities. Indiana Univ. Math. J (1971)(20), P. 997-1015.

[8] C. PRESTON — Continuity properties of some Gaussian Processes. Ann. Math. Stat. Vol. n° 43-1 (1972), P. 285-292.