SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CLAUDE DELLACHERIE

Temps d'arrêt totalement inaccessibles

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 7 (1973), p. 36-37
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1973__7__36_0>

Séminaire de Probabilités
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université de Strasbourg Année 1971/72

TEMPS D'ARRÊT TOTALEMENT INACCESSIBLES

C. Dellacherie

Dans le volume IV du séminaire, nous avions montré que, si (X_t) est un processus de Hunt et T est le temps d'entrée dans un ensemble presque-borélien B, alors on a p.s. $X_{T-} \notin B$ sur $\{X_T \neq X_{T-}, T < +\infty\}$. Et la démonstration faisait intervenir un argument typiquement "processus de Markov"(approximation d'un temps d'entrée par des temps d'entrée dans des ouverts). Nous allons démontrer ici un résultat plus fort et plus général, dans le cadre de la théorie générale des processus.

On désigne par $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ un espace probabilisé complet, et par $(\underline{\underline{F}}_t)$ une famille croissante de tribus vérifiant les conditions habituelles. Les références à [*] renvoient à ma monographie "Capacités et Processus stochastiques", parue récemment chez Springer.

THÉORÈME.- Soit H un ensemble accessible, et soit T un temps d'arrêt totalement inaccessible. Alors, pour presque tout ω tel que $T(\omega)$ appartienne à la coupe $H(\omega)$, le point $T(\omega)$ est un point de condensation à gauche de $H(\omega)$.

DÉMONSTRATION.- D'abord quelques rappels. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $E \subset \mathbb{R}$. On dit que x est un point de condensation de E si $]x-\epsilon,x+\epsilon[\cap E$ est non-dénombrable pour tout $\epsilon > 0$. On définit de même la notion de point de condensation à gauche (resp droite) en remplaçant $]x-\epsilon,x+\epsilon[$ par $]x-\epsilon,x]$ (resp $[x,x+\epsilon[$). Un argument simple de recouvrement montre que l'ensemble des points de E qui ne sont pas de condensation pour E est au plus dénombrable. D'autre part il est facile de voir que tout point de condensation est limite de points de condensation à la fois à droite et à gauche, et donc que l'ensemble des points de condensation de E qui ne sont pas de condensation des deux côtés est aussi au plus dénombrable. Ceci étant, pour tout $t \geq 0$, nous désignerons par D_t le temps de pénétration dans $A \cap ([t,+\infty[\times \Omega)$, i.e.

$$D_t(\omega) = \inf \{s : s \text{ est de condensation pour } A(\omega) \cap [t,+\infty[\}$$

On sait que les D_t sont des temps d'arrêt (cf [*]-VI-T22). D'autre part, il est clair que (D_t) est un processus à trajectoires croissantes et continues à droite. Nous allons utiliser maintenant un argument inspiré d'AZÉMA (cf l'exposé de MEYER), qui remplace avantageusement ma première démonstration. Inversons (D_t) : posons

$$A_t(\omega) = \inf \{s : D_s(\omega) > t\}$$

Alors (A_t) est un processus continu à droite, à trajectoires croissantes, et adapté (les D_t étant des t.d'a.). Et l'on a $A_t(\omega) \leqq t$ pour tout t et tout ω, avec égalité pour $t > 0$ si et seulement si t est un point de condensation de $H(\omega)$. Posons alors $(B_t) = (A_{t-})$: (B_t) est un processus prévisible, et l'on a $B_t(\omega) \leqq t$ pour tout t et tout ω, avec égalité pour $t > 0$ si et seulement si t est un point de condensation à gauche de $H(\omega)$. L'ensemble $H \cap \{(t,\omega) : B_t(\omega) < t \text{ ou } t = 0\}$ est donc l'ensemble des points de H qui ne sont pas de condensation à gauche : c'est un ensemble accessible à coupes dénombrables, et il résulte de [*]-VI-T33 qu'il est la réunion d'une suite de graphes de t.d'a. accessibles. D'où le théorème.