DANIEL REVUZ

Application d'un théorème de Mokobodzki aux opérateurs potentiels dans le cas récurrent

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 4 (1970), p. 208-215
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1970__4__208_0>

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
Laboratoire Associé au C.N.R.S.
Rue René Descartes
STRASBOURG

1969-70

- Séminaire de Probabilités -

APPLICATION D'UN THEOREME DE MOKOBODZKY AUX OPERATEURS POTENTIELS DANS LE CAS RECURRENT

par

D. REVUZ

Dans {4}, M. DUFLO a montré comment on pouvait étendre aux chaînes de Markov quelconques, puis aux processus récurrents la théorie des chaînes normales développée par KEMENY et SNELL ({8}) dans le cas discret. Sa méthode s'appuie sur les résultats d'OREY, JAIN et JAMISON ({10}, {5}, {6}) relatifs aux chaînes récurrentes au sens de Harris. Nous voulons montrer ici comment on peut obtenir les mêmes résultats pour les processus à résolvante fortement fellerienne, à partir du théorème de MOKOBODZKY ({9}) ; les raisonnements ainsi employés trouvent d'ailleurs des applications dans d'autres situations et peuvent même s'étendre aux processus récurrents quelconques.

Je remercie P. PRIOURET des remarques utiles qu'il a faites sur ce travail.

I. NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES.

Dans tout cet exposé nous considérerons un processus de Markov

$$X = \{\Omega, \mathcal{F}\, (\mathcal{F}_t)_{t\in \mathbb{R}_+}, (P_x)_{x\in E}, (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, (\theta_t)_{t\in\mathbb{R}_+}\}$$

à valeur dans un espace $LCD(E,\mathcal{E})$; nos notations seront celles de {3} . Nous supposerons que la résolvante U^α envoie les fonctions boréliennes bornées dans les fonctions continues. Enfin nous supposerons le processus récurrent (cf. {1}, {2}) et nous appellerons μ la mesure invariante par P_t (on suppose que E est une seule classe récurrente) qui dans ce cas est une mesure de Radon. Soient $a, b \in b\mathcal{E}_+$; on pose

$$A_t = \int_0^t a(X_s)ds \quad , \quad B_t = \int_0^t b(X_s)\, ds \quad ,$$

et

$$W^a f(x) = E_x \int_0^t e^{-A_t} f(X_t)\, dt \ , \ W^b f(x) = E_x \int_0^\infty e^{-B_t} f(X_t)\, dt \quad ;$$

on a alors la proposition suivante énoncée par HUNT dans {7} .

<u>Proposition</u> : <u>Si</u> a, b <u>sont telles que</u> $\int_0^\infty \{b(X_s)-a(X_s)\}\, ds = +\infty$ p. s.,

$$W^a f(x) - W^b f(x) = W^b((b-a)W^a f)(x) = W^a((b-a)W^b f)(x) .$$

Soit τ_t^a le changement de temps associé à A_t , et V_A^α la résolvante correspondante ; on a

$$V_A^\alpha f(x) = W^{\alpha a}(af)(x) .$$

Il n'est pas difficile de montrer en utilisant la proposition ci-dessus <u>que le noyau</u> V_A^α <u>envoie</u> $b\mathcal{E}$ <u>dans</u> $c(E)$, autrement dit, <u>que la résolvante</u> V_A^α <u>est fortement fellerienne</u>. C'est à cette résolvante que nous allons appliquer le théorème de Mokobodzky. Précisons encore une notation : si K est un compact, et $a = 1_K$, nous noterons W^K et V_K^α les noyaux correspondants, et nous abrègerons V_K^1 en V_K . Rappelons que la restriction μ_K de μ à K est invariante par le semi-groupe P_{τ_t} ; dans la suite nous supposerons toujours μ_K normalisée ($\mu_K(K) = 1$).

II. <u>CHARGES NULLES. OPERATEUR POTENTIEL</u>

II. 1 - <u>Définition</u> : On dira qu'une fonction f est une <u>charge</u> si la limite

$\lim\limits_{\alpha \to 0} U^{\alpha}f(x)$ existe. Cette limite sera appelée le potentiel de f.

Dans ce qui suit nous allons définir les processus normaux pour lesquels il y a suffisamment de charges et construire un opérateur potentiel transformant ces charges en potentiels.

II. 2 Nous aurons besoin du

Lemme : Si P est une fonction de transition ayant une mesure invariante ν finie et normalisée $(\nu(E) = 1)$, on a

$$\sup_{x} ||P^n(x,.) - \nu(.)|| \leq \frac{1}{2^{n-1}} (\sup_{x,y} ||P(x,.)-P(y,.)||)^n .$$

Démonstration : UENO ({11}) a montré que

$$\sup_{x,y} ||P^n(x,.)-P^n(y,.)|| \leq \frac{1}{2^{n-1}} (\sup_{x,y} ||P(x,.)-P(y,.)||)^n .$$

Soit alors E^+ et E^- les ensembles de la décomposition de JORDAN-HAHN de $P^n(x,.)-\nu(.)$; on a

$$||P^n(x,.)-\nu(.)|| = P^n(x,E^+)-\nu(E^+)-P^n(x,E^-)+ \nu(E^-),$$

et comme ν est invariante, ceci est égal à

$$\int_E \nu(dy)(P^n(x,E^+)-P^n(y,E^+)-P^n(x,E^-)+P^n(y,E^-)) ;$$

on a donc finalement

$$\begin{aligned} ||P^n(x,.)-\nu(.)|| &\leq \int_E \nu(dy)(\sup_y |P^n(x,E^+)-P^n(y,E^+)-P^n(x,E^-)+P^n(y,E^-)|) \\ &\leq \nu(E)(\sup_y ||P^n(x,.)-P^n(y,.)||) \leq \sup_{x,y} ||P^n(x,.)-P^n(y,.)|| \\ &\leq \frac{1}{2^{n-1}} (\sup_{x,y} ||P(x,.)-P(y,.)||)^n ; \end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme.

II. 3- Soit K un compact récurrent. On appelle $\mathcal{N}^K$ l'ensemble des fonctions de $b\mathcal{E}$ nulles hors de K et d'intégrale nulle $(f \in \mathcal{N}^K \Rightarrow \int f \, d\mu = 0)$, puis on pose $\mathcal{N} = \bigcup\limits_{K} \mathcal{N}^K$.

Théorème : Soit K un compact récurrent.

1) Il existe une constante M_K telle que

$$\forall f \in \mathcal{P}^K \ \forall \alpha > 0 \quad |U^\alpha f| \leq M_K ||f|| ,$$

2) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Pour toute fonction f de $\mathcal{P}^K$, la limite $\lim_{\alpha \to 0} U^\alpha f$ existe.

ii) Pour tout x de E et tout $\Gamma \in \mathcal{E}$, $\alpha U^\alpha V_K(x, \Gamma)$ converge lorsque α tend vers zéro.

iii) A tout compact K chargé par μ on peut associer une mesure λ_K telle que pour toute fonction $g \in b\mathcal{E}$

$$\lim_{\alpha \to 0} \alpha U^\alpha V_K g(x) = \int g(x) \lambda_K(dx) .$$

Démonstration : Les mesures $V_K(x,.)$ sont équivalentes ({1}, prop. I. 6) ; le théorème de Mokobodzky ({9}) entraîne alors qu'il existe une constante $k < 1$ telle que

$$\frac{1}{2} \sup_{x, y \in K} ||V_K(x,.) - V_K(y,.)|| \leq k .$$

En effet, dans le cas contraire, la fonction continue $x \times y \to ||V_K(x,.)-V_K(y,.)||$ serait égale à 2 pour un couple $(x, y) \in K \times K$ ce qui contredit le fait que $V_K(x,.)$ et $V_K(y,.)$ sont équivalentes.

En appliquant le lemme II. 2 on a donc

$$\sup_{x \in K} ||V_K^n (x,.) - \mu_K(.) || \leq 2k^n$$

où V_K^n est le nième itéré du noyau V_K, et par suite il existe une constante M_K telle que

$$\sum_0^\infty \sup ||V_K^n (x,.) - \mu_K (.)|| \leq M_K/2 < \infty .$$

Soit alors $f \in \mathcal{P}^K$, comme $< \mu_K, f > = 0$, l'expression $g(x) = \sum_0^\infty V_K^n f(x)$ converge et définit une fonction continue bornée sur K ; prolongeons g par zéro hors de K, cette fonction vérifie alors

$$(V_K - I)\, g(x) = -f(x)$$

pour tout x de E (on rappelle que $V_K(x,.)$ est portée par K), et $\|g\| \leq M_K \|f\|/2$.

D'autre part, comme $\mu(K) < \infty$, il résulte du théorème de BIRKHOFF ({1}) que $\int_0^t 1_K(X_s)\, ds/t$ converge presque sûrement vers zéro dans le cas nul ($\mu(E) = \infty$) ce qui entraîne que $\alpha t - \int_0^t 1_K(X_s)\, ds$ converge vers $+\infty$, et vers $\mu(K)$ dans le cas positif ($\mu(E) = 1$) ce qui entraîne que $\int_0^t 1_K(X_s)\, ds - \alpha t$ converge vers l'infini pour $\alpha < \mu(K)$. Donc dans tous les cas pour α assez petit on peut utiliser la proposition du paragraphe I avec $a = \alpha$, $b = 1_K$, ce qui donne

$$W^K g - U^\alpha g = U^\alpha\{(\alpha - 1_K)\, W^K g\} ;$$

soit encore, comme $1_K g = g$,

$$U^\alpha\{1_K (V_K - I) g\} = - V_K g + \alpha\, U^\alpha V_K g ,$$

$$U^\alpha f = V_K g - \alpha\, U^\alpha V_K g .$$

Il est alors clair que $|U^\alpha f| \leq M_K \|f\|$; d'autre part cette formule montre clairement l'équivalence de i) et ii) de 2).

L'équivalence de ii) et de iii) résulte la positivité de la limite et du fait que les limites des αU^α sont invariantes donc constantes.

<u>Remarque</u> : Si E est compact on peut travailler directement sur l'équation résolvante ordinaire.

II. 4. - <u>Définition</u> : Un processus vérifiant les trois conditions équivalentes du théorème sera dit <u>normal.</u>

Les résultats de {1} prouvent que tout processus positif (i. e. tel que $\mu(E) < \infty$) est normal.

<u>Définition.</u> On appellera <u>opérateur potentiel</u> un opérateur U transformant les

fonctions d'intégrale nulles à support compact en fonctions continues bornées et tel que pour toute f de

$$U f - U^{\alpha} f - \alpha U^{\alpha} U f = 0 .$$

Si le processus est normal $U f = \lim_{\alpha \to 0} U^{\alpha} f$ est un opérateur potentiel comme il est facile de le voir en faisant tendre β vers zéro dans l'équation résolvante $U^{\alpha} f - U^{\beta} f + (\alpha - \beta) U^{\alpha} U^{\beta} f = 0$.

Le théorème précédent dit que pour les processus normaux il y a "suffisam- -ment" de charges. A partir de celles-ci on peut en construire d'autres ; ainsi si f est une charge $\beta U^{\beta} f$ est une charge quelque soit β . Pour toute fonction g de $\mathcal{L}^{\infty} \cap \mathcal{L}^{1}$, la fonction $g - U^{\beta} g$ est une charge, d'après les résultats de {1} . Cela entraîne en particulier que les fonctions de l'image du générateur infinitésimal faible sont des charges, puisque $-\tilde{A}\, U^{1} f = U^{1} f - f$ (il faut considérer que P_t opère sur $\mathcal{L}^{\infty} \cap \mathcal{L}^{1}$ muni de la norme $\| \|_{\infty} + \| \|_{1}$) .

II. 5- Supposons le processus normal ; nous avons vu qu'alors

$$|U f(x)| = |\lim_{\alpha \to 0} U^{\alpha} f(x)| \leqq M_K \|f\| \qquad \forall f \in \mathcal{P}^K .$$

Soit maintenant $C_K(E)$ l'espace des fonctions continues à support compact ; nous remarquons que $\mathcal{P} \cap C_K(E)$ est de co-dimension 1 dans $C_K(E)$. Choisissons une fonction f_0 de $C_K(E)$ telle que $< \mu, f_0 > = 1$; soit K_0 son support. Pour toute fonction f de $C_K(E)$, la fonction $f - < \mu, f > f_0$ est dans $\mathcal{P}$ et par suite la limite

$$\lim_{\alpha \to 0} U^{\alpha}(f - < \mu, f > f_0)$$

existe. Pour toute fonction f à support dans K , on a

$$|\lim_{\alpha \to 0} U^{\alpha}(f - < \mu, f > f_0)| \leqq M_{K \cup K_0} (1 + \mu(K) \|f_0\|) \|f\| .$$

Si l'on pose alors pour toute fonction f de $C_K(E)$,

$Uf(x) = \lim_{\alpha \to 0} U^{\alpha}(f - < \mu, f > f_0)(x)$, ceci coïncide avec $\lim_{\alpha \to 0} U^{\alpha}f(x)$ pour $f \in \mathcal{N}$, et pour tout x de E l'application $f \to Uf(x)$ est une mesure de Radon. On a donc le théorème suivant :

Théorème : Il existe un noyau U sur E tel que :

1) Pour tout x de E, $U(x,.)$ est une mesure de Radon sur E ;

2) U transforme les fonctions continues à support compact en fonctions continues bornées ;

3) Pour toute fonction f de $\mathcal{N}$, $Uf(x)$ est égal à $\lim_{\alpha \to 0} U^{\alpha}f(x)$.

Remarque : Un tel noyau n'est évidemment pas unique ; on peut lui ajouter le noyau $\varphi \otimes \mu(.)$ où φ est une fonction continue bornée sans en changer les propriétés.

{1} AZEMA J., DUFLO M., REVUZ D. : Mesure invariante sur les classes récurrentes des processus de Markov.
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 8, p. 157-181 (1967).

{2} AZEMA J., DUFLO M., REVUZ D. : Mesure invariante des processus de Markov récurrents.
Sém. Cal. Prob. Fac. Sci. Strasbourg III.
Lectures Notes in Math. Springer Verlag (1967).

{3} BLUMENTHAL R.M., GETOOR R.K. : Markov Processes and Potential Theory.
Academic Press - 1968.

{4} DUFLO M. : Opérateurs potentiels des chaînes et des processus de Markov irréductibles.
A paraître.

{5} JAIN N.C. : Some limit theorems for a general Markov process.
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 8, 41-48 (1967).

{6} JAMISON B et OREY S : Tail σ-field of Markov processes recurrent in the sense of Harris.
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 6, 206-223 (1966).

{7} HUNT G.A. : La théorie du potentiel et les processus récurrents.
Ann. Inst. Fourier 15 (1), 3-12 (1965).

{8} KEMENY J., SNELL J et KNAPP A. : Denumerable Markov Chains.
Van Nostrand - 1966.

{9} MEYER P.A. : Les résolvantes fortement felleriennes d'après Mokobodzky.
Séminaire de Probabilités II, Springer-Verlag 1968.

{10} OREY S. : Recurrent Markov chains.
Pacific J. Math. 9, 805-827 (1959).

{11} UENO T. : Some limit theorems for temporally discrete Markov processes.
J. Fac. Sci. Univ. Tokyo sect. I.7 (1957).

Daniel REVUZ (*)
20, rue de Rome
78 - LES ESSARTS LE ROI

(*) Equipe de Recherche n° 1 "Processus stochastiques et applications", dépendant de la section n° 2 "Théories physiques et probabilités" associée au C.N.R.S.