ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

HENRI MASCART

Sur quelques opérateurs linéaires différentielles

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 24 (1960), p. 5-75
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1960_4_24__5_0>

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

POUR LES SCIENCES MATHEMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES.

INTRODUCTION

Les opérateurs linéaires, qui font correspondre une fonction analytique à une fonction analytique et qui sont permutables avec la dérivation ont fait l'objet de nombreuses études, parmi lesquelles il faut citer en particulier celles de Hilb [4], von Koch [5], Muggli [6], Monsieur Perron [7], Ritt [10]. Dans ce travail on se propose de présenter plus simplement certains résultats de Monsieur Sikkema [11], [12], [13], lorsque les opérateurs sont applicables aux fonctions entières de croissance donnée; par ailleurs, en complétant sur un point un important article de Valiron [14], on est conduit à une formule donnant la transformée, par un opérateur donné, d'une fonction holomorphe dans un cercle centré à l'origine.

Le chapitre II a pour but de montrer que cette formule est vraie pour des opérateurs linéaires d'un type très général; ceux-ci avaient été étudiés par Bourlet [2] et Pincherle [8], [9], puis par Flamant [3]; mais cette formule, que nous croyons nouvelle, conduit à des propriétés topologiques intéressantes de ces opérateurs; ceci permet en particulier de généraliser un théorème sur la continuité dû à Monsieur Boas [1] dans le cas des opérateurs permutables avec la dérivation et applicables aux fonctions de type exponentiel donné. Il faut remarquer aussi que plusieurs résultats peuvent être étendus aux opérateurs, qui font correspondre une fonction analytique de p variables à une fonction analytique de n variables.

Dans le chapitre III on considère les opérateurs, qui transforment l'une dans l'autre deux puissances entières de la dérivation. On s'est attaché en particulier au problème de l'inversion dans le cas des fonctions entières de croissance donnée avec un ordre inférieur à 1.

Le chapitre suivant traite des opérateurs satisfaisant à une égalité fonctionnelle, importante, à savoir ceux qui transforment l'un dans l'autre deux opérateurs connus; des propriétés des solutions de cette égalité sont indiquées dans le cas où l'on connaît une solution particulière, surtout si celle-ci admet un inverse unique à droite et à gauche pour les fonctions considérées; des exemples simples illustrent ces résultats et permettent de résoudre certaines égalités importantes.

Une étude plus détaillée d'un cas particulier et des remarques sur les résultats généraux forment le chapitre V; on considère surtout les opérateurs, qui transforment en une puissance de la dérivation un opérateur différentiel d'Euler, où les exposants qui affectent la dérivation sont supérieurs à ceux portant sur le produit par la variable.

Le chapitre VI traite des opérateurs permutables avec certains de ces opérateurs d'Euler; mais son but principal est d'étudier quelques égalités, où intervient un opérateur inconnu et qui se déduisent simplement les unes des autres en multipliant les deux membres de la précédente par une puissance du produit par la variable ou de la dérivation; on compare les solutions de ces égalités; certaines d'entre elles peuvent être prévues, mais pour les obtenir toutes il faut le plus souvent refaire à chaque fois une étude particulière.

Ces résultats sont complétés dans le chapitre VII; on y envisage les opérateurs permutables avec un opérateur d'Euler, où les sommes des exposants des puissances de la dérivation et du produit par la variable sont égales. Enfin on généralise la notion d'opérateurs permutables avec une puissance de la dérivation, introduits au chapitre III, en cherchant les opérateurs permutables avec un opérateur donné, lui-même permutable avec la dérivation; ce dernier ne peut être quelconque, si l'on veut obtenir des conclusions simples.

CHAPITRE I

OPÉRATEURS PERMUTABLES AVEC LA DÉRIVATION

Dans ce qui suit, sauf au chapitre IV, les *espaces vectoriels E de fonctions analytiques* considérés sont des espaces vectoriels sur le corps K des complexes de fonctions holomorphes à l'origine; ils sont tels que, si la fonction

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{z^m}{m!}$$

appartient à E, il en est de même des sommes partielles

$$s_n(z) = \sum_{m=0}^{n} a_m \frac{z^m}{m!}$$

du développement en série entière de $f(z)$ autour de l'origine.

Un opérateur linéaire L *sera dit applicable aux fonctions de* E, si L applique l'espace E sur un espace E′ de fonctions holomorphes en un point donné, qui sera en général l'origine, et si dans un voisinage de ce point on a les égalités

$$\mathrm{L}\,(f+g) = \mathrm{L}\,(f) + \mathrm{L}\,(g) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{L}\,(af) = a\,\mathrm{L}\,(f),$$

où $f(z)$ et $g(z)$ appartiennent à E et a à K.

Si E est fermé par dérivation, considérons un opérateur linéaire L, *permutable avec la dérivation* et appliquant E sur un espace de fonctions holomorphes à l'origine. On a

$$\mathrm{L}\left(\frac{z^n}{n!}\right) = \sum_{q=0}^{n} l_q \frac{z^{n-q}}{(n-q)!} \qquad (n = 0, \ldots),$$

où les quantités l_q sont constantes (*cf.* par exemple [1]). Supposons en outre que, pour toute fonction $f(z)$ de E, L vérifie

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{L}\,(s_n) = \mathrm{L}(f) \tag{1}$$

en chaque point d'un voisinage d' de l'origine, d' pouvant dépendre de $f(z)$; la fonction

$$\mathrm{L}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathrm{L}\left(\frac{z^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{q=0}^{n} l_q \frac{z^{n-q}}{(n-q)!}\right) \tag{2}$$

ainsi définie dans d' doit donc être holomorphe à l'origine pour la suite infinie $\{l_q\}$ considérée.

On se propose de faire l'étude de certains ensembles remarquables de tels opérateurs.

REMARQUE. — Si $f(z)$ est un polynôme, $\mathrm{L}(f)$ se met sous la forme $\sum l_n f^{(n)}(z)$; si z_0 est une constante et si on pose $f(z) = g(z-z_0)$, on a aussi

$$\mathrm{L}(f) = \Sigma\, l_n\, g^{(n)}(z-z_0);$$

en particulier on remarque que

$$\mathrm{L}\left(\frac{z^n}{n!}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{L}\left[\frac{(z-z_0)^n}{n!}\right]$$

sont des polynômes en z et $z-z_0$ respectivement, définis par les *mêmes coefficients.*

1. *PRODUIT D'OPÉRATEURS.*

Soient σ et τ deux nombres positifs, finis, non nuls.

THÉORÈME. — Si E *est l'espace des fonctions entières de croissance* (σ, τ) *(ne dépassant pas le type* τ *de l'ordre de* σ*), on a*

$$l = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(n!^{1-1/\sigma}|l_n|)^{1/n} < (\sigma\tau)^{-1/\sigma} \qquad (3);$$

réciproquement des quantités $\{l_n\}$ *vérifiant* (3) *définissent un opérateur* L *applicable aux fonctions de E, et pour l'une de celles-ci on a*

$$\mathrm{L}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n f^{(n)}(z) \qquad (4),$$

où la série converge absolument en tout point à distance finie et uniformément dans tout domaine borné.

En effet, si (3) n'est pas vérifiée, on peut extraire de la suite $\{l_n\}$ une suite infinie $\{l_\nu\}$ de quantités non nulles, telles que

$$\lim_{\nu\to\infty}(\nu!^{1-1/\sigma}|l_\nu|)^{1/\nu} \geqslant (\sigma\tau)^{-1/\sigma};$$

lorsque $n \to \infty$, $\mathrm{L}(s_n)$ ne converge pas à l'origine pour la fonction de E

$$f(z) = \sum \frac{1}{l_\nu}\frac{z^\nu}{\nu!}.$$

Supposons donc (3) vérifiée; à une fonction $f(z)$ de E on fait correspondre la fonction

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \frac{z^n}{n!},$$

qui appartient également à E. $g^{(n)}(|z|)$ est le coefficient du terme en $(x-|z|)^n/n!$ du développement en série entière de $g(x)$ au voisinage de $|z|$; la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} |l_n|\, g^{(n)}(|z|)$$

converge donc pour toute valeur finie de z; elle majore la série double (2); celle-ci converge absolument en tout point à distance finie; en permutant l'ordre des sommations, on obtient la forme (4). La majoration précédente montre de plus que la série (4) converge uniformément dans tout domaine borné; on peut la dériver terme à terme; l'opérateur considéré est donc permutable avec la dérivation.

Si on a (1) en chaque point de d', si petit soit-il, cette égalité a lieu en tout point à distance finie et la convergence est uniforme dans tout domaine borné.

D'autre part l'étude du cas où $f(z)$ est un polynôme conduit à la remarque suivante : soit $t_n(z)$ la somme partielle de rang n du développement en série entière de $f(z)$ en $z-z_0$ autour d'un point donné z_0; pour démontrer ce théorème, on peut remplacer la condition (1) par la convergence de $\mathrm{L}(t_n)$ vers $\mathrm{L}(f)$ en chaque point d'un voisinage de z_0, lorsque $n \to \infty$; l'expression (4) est bien indépendante de z_0.

Si la condition (3) est satisfaite, *pour les fonctions de* E *l'opérateur* L *est représenté par la série formelle.*

$$\mathrm{L} = \sum_{n=0}^{\infty} l_n \mathrm{D}^n,$$

en désignant par D le symbole de la dérivation; la signification des coefficients l_n montre que cette représentation est unique.

THÉORÈME. — Les opérateurs linéaires, permutables avec D *et applicables aux fonctions entières de croissance* (σ, τ) *forment un domaine d'intégrité pour* $\sigma \leqslant 1$.

Soient L et M deux de ces opérateurs définis par les séries formelles

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n \mathrm{D}^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} m_n \mathrm{D}^n.$$

Le produit de ces séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n \mathrm{D}^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{q=0}^{n} m_q l_{n-q} \right) \mathrm{D}^n$$

est applicable aux fonctions entières de croissance (σ, τ). Soit en effet a' la plus grande des deux quantités

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(n!^{1-1/\sigma} |l_n|\right)^{1/n} \quad \text{et} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(n!^{1-1/\sigma} |m_n|\right)^{1/n}.$$

A a tel que

$$a' < a < (\sigma\tau)^{-1/\sigma}$$

on peut associer un nombre b, tel que l'on ait pour tout n

$$|l_n| \leqslant b\, n!^{1/\sigma - 1} a^n \quad \text{et} \quad |m_n| \leqslant b\, n!^{1/\sigma - 1} a^n.$$

D'où

$$|p_n| < b^2 a^n \sum_{q=0}^{n} \Big[q!\,(n-q)! \Big]^{1/\sigma - 1} \leqslant (n+1)\, b^2\, n!^{1/\sigma - 1} a^n$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(n!^{1-1/\sigma} |p_n|\right)^{1/n} \leqslant a < (\sigma\tau)^{-1/\sigma}.$$

Pour une fonction $f(z)$ entière de croissance (σ, τ) la série double

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{q=0}^{n} m_q l_{n-q} \right) f^{(n)}(z)$$

converge absolument en tout point à distance finie; elle est majorée par la série obtenue en remplaçant la fonction $f(z)$ par la fonction $g(z)$ introduite dans la démonstration précédente, m_q, l_{n-q} et z par leur modules; dans cette nouvelle série on peut regrouper les termes contenant m_q en facteur, car ils forment le produit par m_q d'une somme convergente, qui majore la dérivée d'ordre q de $\mathrm{L}(f)$. On a donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n \mathrm{D}^n = \mathrm{M}\,\mathrm{L}$$

pour toute fonction entière de croissance (σ, τ); ce produit est commutatif; il n'est nul que si l'un des opérateurs est nul, c'est-à-dire si l'une des séries formelles est nulle.

Tout opérateur M de l'anneau considéré est applicable à la fonction

$$\mathrm{L}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{z^n}{n!};$$

celle-ci est donc *entière de croissance* (σ, τ); car, s'il n'en est pas ainsi, on pourrait trouver un opérateur M tel que

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_n b_n$$

diverge.

Cette propriété ne peut être étendue au cas où $\sigma > 1$.

Le produit des séries formelles peut ne pas être applicable à toutes les fonctions entières de croissance (σ, τ); par exemple pour

$$l_n = m_n = n!^{1/\sigma - 1} a^n, \quad \text{avec} \quad 0 < a < (\sigma\tau)^{-1/\sigma},$$

on a

$$p_n > a^n \left[\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \right]^{2(1/\sigma - 1)}.$$

D'où

$$\lim_{n \to \infty} (n!^{1-1/\sigma} p_n)^{1/n} \geqslant a \left(\frac{1}{2}\right)^{1/\sigma - 1}$$

et il suffit de choisir a de sorte que cette dernière quantité soit supérieure à $(\sigma\tau)^{-1/\sigma}$. De même $\mathrm{L}(f)$ n'est *plus nécessairement une fonction entière de croissance* (σ, τ).

2. *INVERSION DES OPÉRATEURS.*

Soient E l'espace des fonctions entières de croissance (σ, τ) avec $\sigma < 1$ et $\mathscr{L}$ l'anneau des opérateurs linéaires, permutables avec D et applicables aux fonctions de E. *Un élément* L *de* $\mathscr{L}$ *admet-il dans* $\mathscr{L}$ *un inverse à gauche* $\overline{\mathrm{L}}$? Pour les fonctions de E l'égalité $\overline{\mathrm{L}}\,\mathrm{L} = 1$ conduit d'abord à chercher *l'inverse de la série formelle*

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n \mathrm{D}^n,$$

c'est-à-dire à résoudre le système

$$l_0 \bar{l}_0 = 1, \qquad \sum_{q=0}^{n} l_{n-q} \bar{l}_q = 0 \qquad (n = 1, \ldots).$$

Si $l_0 \neq 0$, il reste à montrer que la série formelle ainsi obtenue

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{l}_n \mathrm{D}^n$$

appartient à $\mathscr{L}$.

LEMME. — Si p désigne un nombre positif et $\{\mathrm{C}_n^q\}$ *la suite des coefficients de la formule du binôme, on a*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{q=1}^{n-1} (\mathrm{C}_n^q)^{-p} = 0.$$

En effet soit Q un entier supérieur à $4/p$ et à 2; pour $n > 2\mathrm{Q}$ on a

$$4^{2/p} < n^{2/p} < (n/2)^{4/p} < (n-\mathrm{Q})^{\mathrm{Q}},$$

$$\mathrm{C}_n^{\mathrm{Q}} > \frac{(n-\mathrm{Q})^{\mathrm{Q}}}{\mathrm{Q}!} > \frac{n^{2/p}}{\mathrm{Q}!}$$

et

$$\sum_{q=1}^{n-1} (\mathrm{C}_n^q)^{-p} < 2 \sum_{q=1}^{\mathrm{Q}-1} (\mathrm{C}_n^q)^{-p} + n(\mathrm{C}_n^{\mathrm{Q}})^{-p} < 2 \sum_{q=1}^{\mathrm{Q}-1} (\mathrm{C}_n^q)^{-p} + \frac{\mathrm{Q}!^p}{n};$$

les termes de cette dernière somme, en nombre fini, tendent vers 0 lorsque n augmente indéfiniment.

THÉORÈME. — Les opérateurs linéaires, permutables avec D, *qui sont applicables aux fonctions entières de croissance* (σ, τ) *avec* $\sigma < 1$ *et dont le premier coefficient n'est pas nul, forment un groupe multiplicatif abélien.*

L'opérateur $\bar{\mathrm{L}}$ est unique; montrons qu'il est applicable aux fonctions entières de croissance (σ, τ). L'inverse de L/l_0 est $l_0\bar{\mathrm{L}}$; on peut donc supposer $l_0 = 1$. Il existe $a < (\sigma\tau)^{-1/\sigma}$ et b tels que l'on ait

$$|l_n| < b\, n!^{1/\sigma - 1} a^n$$

pour tout n. De plus il existe b' tel que l'on ait

$$|\bar{l}_q| < b'\, q!^{1/\sigma - 1} a^q$$

pour $q < n$; cette inégalité est encore vérifiée pour $q = n$, si n est supérieur à un nombre N que nous allons déterminer.

$$|\bar{l}_n + l_n| = |\sum_{q=1}^{n-1} l_{n-q}\, \bar{l}_q| < b\, b'\, n!^{1/\sigma - 1} a^n \left[\sum_{q=1}^{n-1} (C_n^q)^{1-1/\sigma}\right].$$

D'après le lemme, on peut trouver N tel que $n > \mathrm{N}$ entraîne

$$\sum_{q=1}^{n-1} (C_n^q)^{1-1/\sigma} < \varepsilon < \frac{1}{b}.$$

On obtient le résultat cherché en prenant

$$b' > \frac{b}{1 - b\varepsilon}.$$

L'inégalité portant sur $\bar{l}_q$ est vérifiée, quel que soit q, et donne

$$\overline{\lim_{q \to \infty}}\, (q!^{1-1/\sigma} |\bar{l}_q|)^{1/q} < (\sigma\tau)^{-1/\sigma}.$$

Cette propriété ne peut être étendue au cas où $\sigma = 1$, comme on le verra plus loin.

REMARQUE. — Si $l_0 = 0$ et si l_{N} est le premier coefficient non nul de L, on a $\mathrm{L} = \mathrm{M}\,\mathrm{D}^{\mathrm{N}}$, où M appartient à $\mathscr{L}$ et admet dans $\mathscr{L}$ un inverse unique $\overline{\mathrm{M}}$, tel que

$$\overline{\mathrm{M}}\,\mathrm{L} = \mathrm{D}^{\mathrm{N}}.$$

3. *CONSÉQUENCES.*

Les notations sont les mêmes qu'au paragraphe précédent et on suppose L non nul.

1. *Si* $\mathrm{N} = 0$, *l'opérateur* $\overline{\mathrm{L}}$ *est à la fois inverse à droite et à gauche de* L *dans* $\mathscr{L}$, car $\mathscr{L}$ est un anneau commutatif.

2. *Si* $f(z)$ *est une fonction entière du type* τ *de l'ordre* σ, *il en est de même de* $\mathrm{L}(f)$.

$\mathrm{L}(f)$, nous l'avons dit, est une fonction entière de croissance (σ, τ); si $\mathrm{L}(f)$ n'était pas une fonction entière du type τ de l'ordre σ,

$$\overline{\mathrm{M}}\,\mathrm{L}(f) = f^{(\mathrm{N})}(z)$$

serait une fonction entière de croissance (σ, τ) sans être du type τ de l'ordre σ, ce qui est contraire à l'hypothèse, car $f(z)$ et ses dérivées ont même ordre et même type.

D'une façon générale, si $f(z)$ est une fonction entière de croissance (σ, τ), $\mathrm{L}(f)$ et $f(z)$ ont même ordre et même type.

3. *On connaît les solutions entières de croissance* (σ, τ) *de l'équation différentielle, linéaire, d'ordre infini, à coefficients constants* $\mathrm{L}(f) = g(z)$, *où* $g(z)$ *est une fonction entière de croissance* (σ, τ).

En effet

$$\overline{\mathrm{M}}(g) = f^{(\mathrm{N})}(z),$$

ce qui permet de connaître $f(z)$ par N intégrations successives; la solution est donc unique si $\mathrm{N} = 0 \quad (l_0 \neq 0)$, et si $\mathrm{N} \neq 0$ l'équation admet une infinité de solutions qui ne diffèrent entre elles que par des polynômes de degré $\mathrm{N} - 1$ au plus. Si $\mathrm{N} \neq 0$, remarquons que $\overline{\mathrm{M}}$ est défini par une série formelle en D et que $\overline{\mathrm{M}}(g)$ est une série de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{m}_n g^{(n)}(z)$$

uniformément convergente dans tout domaine borné; dans un tel domaine on peut intégrer cette série terme à terme N fois.

4. *La ou les solutions entières de croissance* (σ, τ) *de* $\mathrm{L}(f) = g(z)$ *sont des fonctions entières de même ordre et de même type que* $g(z)$.

Si $g(z)$ est un polynôme, il en est de même de $f(z)$; en particulier la solution générale, entière de croissance (σ, τ) de l'équation $\mathrm{L}(f) = 0$ est un polynôme arbitraire de degré $\mathrm{N} - 1$ au plus si $\mathrm{N} \neq 0$ et $f(z) = 0$ si $\mathrm{N} = 0$.

L'opérateur L applique l'espace des fonctions entières de croissance (σ, τ) sur lui-même; cette application est biunivoque si $l_0 \neq 0$.

5. *Si on pose*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{z^n}{n!},$$

l'équation $\mathrm{L}(f) = g(z)$ *est équivalente au système d'une infinité d'équations linéaires à une infinité d'inconnues* a_n

$$\sum_{q=0}^{\infty} l_q a_{n+q} = b_n \qquad (n = 0, \ldots).$$

Inversement la méthode précédente permet de résoudre un tel système « triangulaire » si

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (n!^{1-1/\sigma} |l_n|)^{1/n} < (\sigma\tau)^{-1/\sigma}, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} (n!^{1/\sigma-1} |b_n|)^{1/n} \leqslant (\sigma\tau)^{1/\sigma}$$

et si on se borne aux solutions telles que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (n!^{1/\sigma-1} |a_n|)^{1/n} \leqslant (\sigma\tau)^{1/\sigma}.$$

REMARQUE. — Si l'opérateur

$$\mathrm{L} = \sum_{n=0}^{\infty} l_n \mathrm{D}^n$$

est applicable aux *fonctions entières de croissance* $(1, \tau)$, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n r^n$$

a un rayon de convergence supérieur à τ. Soit s, si elle existe, l'une des racines non nulles de plus petit module de

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n r^n = 0,$$

c'est-à-dire de l'équation caractéristique de l'équation différentielle $L(f) = 0$

Prenons un nombre t tel que

$$t < |s| \quad \text{si} \quad |s| \leqslant \tau,$$

$$t = \tau \quad \text{si} \quad |s| > \tau.$$

Les résultats précédents sont conservés si E désigne l'espace des fonctions entières de croissance $(1, \tau)$ et $\mathscr{L}$ l'anneau des opérateurs linéaires, permutables avec D et applicables aux fonctions de E; car l'existence de l'opérateur $\overline{L}$ ou $\overline{M}$ résulte directement de l'inversion de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n r^n$$

holomorphe et non nulle dans

$$0 < |r| \leqslant t.$$

Ceci est vrai en particulier dans le cas d'un opérateur L ne comportant qu'un nombre fini de termes et dans celui d'une équation différentielle, linéaire, d'ordre fini, à coefficients constants.

4. *SYSTÈMES LINÉAIRES ENTRE OPÉRATEURS.*

E et $\mathscr{L}$ ont, de nouveau, la même signification qu'au § 2.

1. *Résolution de l'égalité linéaire.*

$$L\,A = B,$$

où les opérateurs connus A et B appartiennent à $\mathscr{L}$ et où l'opérateur inconnu L applique E dans lui-même.

Puisque A et B appliquent E sur lui-même, il en est de même de L. On a deux cas à considérer :

a) *Le rang du premier coefficient non nul de* B *est supérieur ou égal au rang n du premier coefficient non nul de* A. En posant

$$A = A'\,D^n, \qquad B = B'\,D^n,$$

l'égalité donnée devient

$$(L\,A' - B')\,D^n = 0;$$

or l'espace des dérivées d'ordre n des fonctions de E est E lui-même; dans E on a donc

$$L = B' \overline{A}'$$

en multipliant par l'inverse unique $\overline{A}'$ de A' dans $\mathscr{L}$. L'opérateur *unique* L appartient à $\mathscr{L}$; il est aussi solution unique de $A\,L = B$ si n est nul.

b) *Le premier coefficient non nul de B est de rang n — p (p entier positif).*
En posant $B = B'' D^{n-p}$, on obtient dans E

$$L\,D^p = B'' \overline{A}';$$

si on applique les deux membres de cette égalité à une fonction $h(z)$ de E, dont la dérivée d'ordre p est $f(z)$, on a

$$D^p L(f) = D^p B'' \overline{A}'(h) = B'' \overline{A}'(f),$$

soit dans E

$$D^p L = L\,D^p = B'' \overline{A}'.$$

L'égalité proposée admet donc une infinité de solutions, pour l'ensemble desquelles on a les résultats suivants : si $f(z)$ est une fonction de E, on ne connaît que la dérivée d'ordre p de $L(f)$; si $L(f)$ est une fonction donnée de E, on ne connaît que la dérivée d'ordre p de $f(z)$. Aucun des opérateurs L n'est linéaire dans E.

Si A est nul, l'égalité n'est possible que si B est nul; l'opérateur L est alors indéterminé.

2. *Résolution du système linéaire de q équations à p inconnues.*

$$\sum_{i=1}^{p} L_i A_{i,j} = B_j \qquad (j = 1, \ldots, q),$$

où les opérateurs connus $A_{i,j}$ et B_j appartiennent à $\mathscr{L}$ et où les opérateurs inconnus L_i sont linéaires et appliquent E dans lui-même.

Les opérateurs étant supposés linéaires, cette résolution s'effectue comme celle d'un système linéaire ordinaire à l'aide des déterminants. Il convient cependant de faire les remarques suivantes, en désignant par Δ le déterminant principal du système et par r son rang.

a) *Si $r = p$ et si les déterminants caractéristiques sont nuls*, on déduit du système donné des relations de la forme

$$L_i \Delta = \Delta_i \qquad (i = 1, \ldots, p),$$

où les opérateurs Δ et Δ_i appartiennent à $\mathscr{L}$. Si le rang n du premier coefficient non nul de Δ est inférieur ou égal à celui du premier coefficient non nul de chaque Δ_i, les opérateurs L_i sont uniques et appartiennent à $\mathscr{L}$. Si cette condition n'est pas réalisée, le système proposé n'admet aucune solution.

b) *Si $r < p$ et si les déterminants caractéristiques sont nuls.* il se peut que le système donné admette une infinité de solutions L_i appartenant à $\mathscr{L}$, par exemple dans le cas où n est nul; mais dans cette dernière hypothèse ce ne sont pas les seules solutions, car les inconnues non principales sont arbitraires et n'appartiennent pas nécessairement à $\mathscr{L}$.

5. *FONCTIONS HOLOMORPHES DANS UN DOMAINE.*

1. *LEMME. — Si l'opérateur* L *applique l'espace* E *des fonctions holomorphes dans* $|z| < \mathrm{R}$ *sur un espace de fonctions holomorphes à l'origine, on a*

$$l = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ (n:|l_n|)^{1/n} < \mathrm{R} \qquad (3');$$

réciproquement des quantités l_n *vérifiant* (3′) *définissent un opérateur* L *applicable aux fonctions de* E, *et pour l'une de celles-ci on a*

$$\mathrm{L}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n f^{(n)}(z) \qquad (4'),$$

où la série converge absolument dans le domaine d' $|z| < \mathrm{R} - l$ *et uniformément dans tout domaine contenu avec sa frontière à l'intérieur de* d'.

La démonstration est analogue à celle faite au § 1; si (3′) n'est pas vérifiée, il existe au moins une fonction de E, pour laquelle $\mathrm{L}(s_n)$ ne converge pas à l'origine lorsque $n \to \infty$; si on a (3′), les inégalités de Cauchy relatives aux dérivées d'une fonction holomorphe prouvent la convergence en tout point de d' de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} |l_n|\, g^{(n)}(|z|),$$

qui majore la série double (2). On peut faire ici des remarques analogues à celles faites au § 1, concernant la convergence de (1); ici la convergence est uniforme dans tout domaine complètement intérieur à d' et z_0 doit se trouver dans d'.

Remarquons que d' *ne peut être remplacé par un autre domaine circulaire* $|z| < r$ avec $r > \mathrm{R} - l$ pour donner la forme (4′) à $\mathrm{L}(f)$, quelle que soit $f(z)$ dans E.

En effet soient z_0 un nombre de module R et t_0 un nombre tel que $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, l_n/t_0^n$ diverge; $\left(\sum_{n=0}^{\infty} l_n \mathrm{D}^n\right)\left(\dfrac{1}{z-z_0}\right)$ diverge pour $z = z_0 - t_0$. Puisque $|t_0|$ est aussi voisin que l'on veut de l, on peut rendre $|z| - (\mathrm{R} - l)$ arbitrairement petit, en choisissant z_0 de même argument que t_0.

2. *Fonctions holomorphes dans un domaine.*

Soient d un domaine donné, contenant l'origine et δ la plus courte distance de l'origine à un point de la frontière de d; pour un nombre donné $l < \delta$ il existe un domaine, intérieur à d, dont tous les points sont à une distance supérieure à l de la frontière de d; on en considère la composante d' connexe, contenant l'origine.

THÉORÈME. — Si on a

$$l = \overline{\lim_{n-\infty}}\ (n!\,|l_n|)^{1/n} < \delta,$$

L *est applicable aux fonctions holomorphes dans* d; *pour une de ces fonctions on a en tout point à distance finie de* d', *où elle est holomorphe,*

$$\mathrm{L}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n f^{(n)}(z) \qquad (4'').$$

En effet d'après le lemme la série (2) définit une fonction holomorphe dans un cercle centré à l'origine et contenu dans d'; dans ce cercle cette fonction peut se mettre sous la forme (4″), qui donne son prolongement analytique dans d'; car la série (4″) converge absolument en tout point à distance finie de d' et uniformément dans tout domaine borné, contenu avec sa frontière à l'intérieur de d'.

Supposons en outre que d est borné et que la frontière C de d se compose d'un nombre fini de courbes simples, rectifiables. Si u appartient à C,

$$\frac{1}{u-z}$$

appartient à l'espace E des fonctions holomorphes dans d;

$$\mathrm{L}\left(\frac{1}{u-z}\right)$$

est définie dans d' par la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, l_n}{(u-z)^{n+1}},$$

qui converge absolument en chaque point de d' et uniformément dans tout domaine d'' complètement intérieur à d'. Si $f(z)$ appartient au *sous-espace e de* E, *dont les éléments sont continus dans* d + C, on a dans d''

$$\mathrm{L}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n \frac{n!}{2i\pi} \int_{\mathrm{C}} \frac{f(u)}{(u-z)^{n+1}}\, du,$$

où le contour C est décrit de façon à laisser le domaine d à gauche; en permutant l'ordre des sommations, on obtient *dans* d'' *pour toute fonction de e*

$$\mathrm{L}(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{C}} \mathrm{L}\left(\frac{1}{u-z}\right) f(u)\, du.$$

CHAPITRE II

PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES DES OPÉRATEURS LINÉAIRES

Soit E un espace vectoriel de fonctions holomorphes à l'origine, tel que, si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}$$

appartient à E, il en est de même des fonctions $s_n(z)$ correspondantes (*cf.* I). Supposons que l'opérateur linéaire L applique E sur un espace E′ de fonctions analytiques, holomorphes en un point donné z_0 et qu'il est soumis à l'*hypothèse de continuité*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{L}(s_n) = \mathrm{L}(f) \qquad (1);$$

on précisera plus loin comment est prise cette limite. Les fonctions

$$\mathrm{L}\left(\frac{z^m}{m!}\right) = h_m(z),$$

correspondant à une valeur de m pour laquelle le coefficient a_m n'est pas nul, appartient à E′, car E contient $\dfrac{z^m}{m!}$; (1) prend la forme

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n} a_m h_m(z) = \mathrm{L}(f) \qquad (1').$$

Il est important de remarquer que *l'opérateur* L *soumis à la condition* (1) *est déterminé par les fonctions* $h_m(z)$; il faut vérifier de plus que la fonction $\mathrm{L}(f)$ ainsi formée est holomorphe en z_0. On pose désormais $z_0 = 0$, sans diminuer la généralité des résultats obtenus.

On supposera, dans ce qui suit, les fonctions $h_m(z)$ définies, quel que soit m; il n'en serait pas ainsi par exemple pour un espace E de fonctions paires. Les développements des fonctions $h_m(z)$ en série entière en z au voisinage de l'origine permettent de construire une *matrice infinie*, qui définit l'opérateur L à l'aide de (1′); ainsi le coefficient l_m^q de $z^q/q!$ dans le développement de $h_m(z)$ se trouve dans la colonne de rang m et dans la ligne de rang q de cette matrice. On conviendra dans le cas d'un espace de fonctions paires de remplacer par 0 les éléments des colonnes arbitraires de rang impair de la matrice; cette règle se généralise aisément.

1. *FORMULE FONDAMENTALE.*

Si l'on suppose que l'on a (1) *en chaque point d'un cercle centré à l'origine*, on a dans ce cercle

$$\mathrm{L}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{q=0}^{\infty} l_n^q \frac{z^q}{q!} \right) \qquad (2).$$

Soit d un domaine borné, qui contient l'origine et dont la frontière C se compose d'un nombre fini de courbes simples, rectifiables. Si $f(z)$ est holomorphe dans d et continue dans $d + \mathrm{C}$, (2) peut encore s'écrire

$$\mathrm{L}(f) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty} l_n^q \frac{z^q}{q!}\right)\frac{n!}{2i\pi}\int_{\mathrm{C}} \frac{f(u)}{u^{n+1}}du \qquad (2'),$$

où le contour C est décrit dans le sens positif.

Il est intéressant de pouvoir permuter sommation et intégration. Pour cela on considère la série double

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} l_n^q \frac{n!}{q!} z^q z'^{n+1} \qquad (3).$$

THÉORÈME. — Si la série (3) *admet* r′ *et* 1/r *comme rayons de convergence associés* (*convergence absolue pour* $|z| < \mathrm{r}'$ *et* $|z'| < 1/\mathrm{r}$), L *applique l'espace des fonctions holomorphes dans* $|z| \leqslant \mathrm{r}$ *sur un espace de fonctions holomorphes dans* $|z| < \mathrm{r}'$.

En effet, si $f(z)$ est holomorphe dans $|z| \leqslant r$, elle est holomorphe dans un cercle $|z| \leqslant r_1$ avec $r_1 > r$; il existe donc un nombre a, tel que l'on ait, quel que soit n, $|a_n| < a\, n!\, r_1^{-n}$; cette majoration et les rayons de convergence associés de (3) montrent que la série double (2) correspondante converge absolument dans $|z| < r'$ et uniformément dans $|z| \leqslant r'_1 < r'$; sa somme est holomorphe dans $|z| < r'$.

En particulier les fonctions $h_m(z)$ sont holomorphes dans $|z| < r'$.

THÉORÈME. — Si C *se trouve dans* $|z| > \mathrm{r}$, *on a dans* $|z| < \mathrm{r}'$

$$\mathrm{L}(f) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{C}} \mathrm{L}\left(\frac{1}{u-z}\right) f(u)\,du \qquad (4).$$

En effet on peut choisir r_1, de sorte que C se trouve dans $|z| > r_1 > r$; pour une valeur donnée de u sur C $\mathrm{L}\left(\dfrac{1}{u-z}\right)$ est donc une fonction holomorphe dans $|z| < r'$; la majoration obtenue dans la démonstration précédente montre que la série (2) correspondante converge absolument dans $|z| < r'$; cette série double se met aussi sous la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} l_n^q \frac{n!}{q!}\frac{z^q}{u^{n+1}} \qquad (3');$$

ceci permet de permuter sommation et intégration dans (2′); d'où le résultat énoncé.

Remarquons que la formule (4) est valable dans l'espace des fonctions holomorphes dans $|z| \leqslant r$; mais la courbe C n'est pas la même pour toutes ces fonctions; cependant pour chacune d'entre elles on peut trouver une courbe C et appliquer la formule (4).

2. *EMPLOI D'UN OPÉRATEUR AUXILIAIRE.*

Soit Λ un opérateur linéaire, appliquant un espace vectoriel F de fonctions holomorphes en un point donné z_0 sur un espace F′; F est ici un espace vectoriel sur le corps des complexes, qui n'est plus nécessairement soumis à la condition de contenir les sommes partielles des développements en série entière en $z-z_0$ de tous ses éléments. Supposons qu'il existe un opérateur linéaire, auxiliaire A, appliquant biunivoquement les espace F et F′ respectivement sur les espace E et E′. Désignons par $\bar{\mathrm{A}}$ l'opérateur inverse de A et supposons enfin que *le transmué* L *de* Λ *par* A soit l'opérateur qui vient d'être étudié; on a pour les éléments de E $\mathrm{L} = \mathrm{A}\Lambda\bar{\mathrm{A}}$ et pour ceux de F $\Lambda = \bar{\mathrm{A}}\,\mathrm{L}\,\mathrm{A}$.

Si $f(z)$ est une fonction de E, désignons par $\phi(z)$ et $\sigma_n(z)$ les fonctions $\bar{\mathrm{A}}(f)$ et $\bar{\mathrm{A}}(s_n)$. Si on suppose l'opérateur Λ soumis à la *condition de continuité*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{A}\Lambda(\sigma_n) = \mathrm{A}\Lambda(\phi)$$

en chaque point d'un voisinage de l'origine et à une condition correspondant à la convergence de la série (3), les résultats du § 1 relatifs à l'opérateur L donnent des propriétés de l'opérateur Λ. En particulier, si la fonction $\mathrm{A}(\phi)$ est holomorphe dans d et continue dans $d+\mathrm{C}$, on peut lui appliquer la formule (4) et on obtient $\Lambda(\phi)$ en multipliant à gauche par $\bar{\mathrm{A}}$ les deux membres de l'égalité ainsi formée.

On vient de considérer le transmué Λ de L par un opérateur linéaire $\bar{\mathrm{A}}$; ces résulats s'étendent au cas où $\bar{\mathrm{A}}$ n'est pas linéaire; on généralise aussi ces résultats en supposant différents les opérateurs qui appliquent biunivoquement F et F′ respectivement sur E et E′.

3. *CONTINUITÉ.*

Reprenons l'étude faite au § 1. L'opérateur L, dont la série (3) admet r' et $1/r$ pour rayons de convergence associés, applique l'espace E des fonctions holomorphes dans $|z| \leqslant r$ sur un espace E′ de fonctions holomorphes dans $|z| < r'$. On se propose de munir E et E′ de deux topologies convenables T et T′ de façon à rendre L continu dans E. Il est naturel de supposer que pour toute fonction de E $s_n(z)$ converge vers $f(z)$ dans T et $\mathrm{L}(s_n)$ vers $\mathrm{L}(f)$ dans T′, lorsque $n \to \infty$.

THÉORÈME. — *Si une suite $\{f_n(z)\}$ de fonctions de* E *converge uniformément dans un cercle de centre* 0 *et de rayon supérieur à r, la suite $\{\mathrm{L}(f_n)\}$ converge uniformément dans tout cercle de centre* 0 *et de rayon inférieur à r'.*

En effet il existe une courbe C située dans $|z| > r$, sur laquelle les fonctions $f_n(z)$ sont holomorphes et convergent uniformément vers une fonction $f(z)$ appartenant à E, lorsque $n \to \infty$; le module de la série double (3′) reste uniformément borné pour u sur C et $|z| \leqslant r'_1 < r'$; la formule (4) montre que, si n augmente indéfiniment, $\mathrm{L}(f_n)$ converge uniformément dans $|z| \leqslant r'_1$ vers $\mathrm{L}(f)$.

L'opérateur L est donc rendu continu par les topologies de la convergence uniforme dans un cercle $|z| \leqslant \rho (\rho > r)$ pour les fonctions de E et dans tout cercle $|z| \leqslant r'_1 < r'$ pour celles de E'.

EXTENSION. Reprenons les hypothèses faites au § 2. Si les fonctions $\phi_n(z)$ $(n = 0, \ldots)$ et $\phi(z)$ de F sont telles que $A(\phi_n)$ converge uniformement vers $A(\phi)$ dans un domaine lorsque $n \to \infty$, on dira que $\phi_n(z)$ converge vers $\phi(z)$ dans la topologie de la convergence uniforme dans ce domaine, associée à l'opérateur auxiliaire A. On a ainsi

COROLLAIRE. Grâce à l'opérateur auxiliaire A, *l'opérateur* Λ *est rendu continu pour les fonctions de* F *par les topologies de la convergence uniforme dans un cercle* $|z| \leqslant \rho (\rho > r)$ *pour les éléments de* F *et dans tout cercle* $|z| \leqslant r'_1 < r'$ *pour ceux de* F', *associée à l'opérateur* A.

APPLICATION. Soit F l'espace des fonctions entières de croissance (σ, τ). Un opérateur Λ linéaire, permutable avec D, appliquant F sur un espace de fonctions holomorphes à l'origine et vérifiant

$$\lim_{n \to \infty} \Lambda(s_n) = \Lambda(f)$$

en tout point d'un voisinage de l'origine (*cf.* I § 1) est de la forme

$$\Lambda = \sum_{n=0}^{\infty} l_n D^n \text{ avec } l = \overline{\lim_{n \to \infty}} \, (n!^{1-1/\sigma} |l_n|)^{1/n} < (\sigma\tau)^{-1/\sigma}.$$

La série double (2) correspondant à une fonction quelconque de F est absolument convergente en tout point à distance finie; Λ est donc défini par une matrice infinie triangulaire, dont les lignes se déduisent les une des autres par translation le long de la diagonale principale, au-dessous de laquelle tous les éléments sont nuls. Il est commode d'utiliser alors l'opérateur auxiliaire A_σ, tel que

$$A_\sigma(f) = \sum_{n=0}^{\infty} n!^{1/\sigma} a_n \frac{z^n}{n!}.$$

L'espace E correspondant est celui des fonctions holomorphes dans $|z| < (\sigma\tau)^{-1/\sigma}$; les sommes partielles du développement en série entière en z autour de l'origine de $A_\sigma(f)$ sont précisément les fonctions $A_\sigma(s_n)$.

Pour $\sigma \leqslant 1$ *l'opérateur* Λ *est rendu continu par la topologie de la convergence uniforme dans tout cercle* $|z| \leqslant \xi < (\sigma\tau)^{-1/\sigma}$, *associée à l'opérateur* A_σ.

En effet dans ce cas les espaces E et E' sont les mêmes; la série double (3) prend ici la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} l_n \left[\frac{(n+q)!}{n!} \right]^{1-1/\sigma} z^q z'^{n+q+1};$$

elle admet pour rayons de convergence associés r et $1/r$ si $r > l$; il suffit donc de prendre $r < (\sigma\tau)^{-1/\sigma}$ et aussi proche que l'on veut de cette valeur; le corollaire précédent donne le résultat cherché.

4. *LIMITE D'UNE SUITE D'OPÉRATEURS.*

Soit L_p ($p = O, \ldots$) une suite d'opérateurs linéaires, jouissant de propriétés analogues à celles de l'opérateur L (§§ 1 et 3). Supposons que la série double

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} l_{n,p}^{q} \frac{n!}{q!} z^q z'^{n+1} \qquad (5),$$

correspondant à l'opérateur L_p défini par la matrice infinie $(l_{n,p}^q)$,admette r_p' et $1/r_p$ pour rayons de convergence associés et qu'il existe deux nombres ρ et ρ', tels que l'on ait pour toute valeur de p $\rho > r_p$ et $\rho' < r_p'$; si ces inégalités ne sont vérifiées qu'à partir d'un certain rang, on est ramené à ce cas en supprimant un nombre fini d'opérateurs.

THÉORÈME. — Si, lorsque $p \to \infty$, $L_p\left(\dfrac{1}{u-z}\right)$ *converge uniformément sur* $|u| = \rho$ *et* $|z| = \rho'$, *pour toute fonction holomorphe dans* $|z| \leqslant \rho$ $L_p(f)$ *converge uniformément dans tout cercle* $|z| \leqslant \rho_1' < \rho'$.

En effet la série (5) converge absolument dans $|z| \leqslant \rho'$ et $|z'| \leqslant 1/\rho$, où elle définit une fonction holomorphe de z et z'; la convergence uniforme sur $|z| = \rho'$ et $|z'| = 1/\rho$ de cette suite de fonctions entraîne sa convergence uniforme dans $|z| \leqslant \rho'$ et $|z'| \leqslant 1/\rho$ vers une fonction holomorphe à l'origine

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} l_n^q \frac{n!}{q!} z^q z'^{n+1},$$

série double dont deux rayons de convergence associés sont égaux ou supérieurs à ρ' et $1/\rho$. Ainsi l'opérateur L défini par la matrice infinie (l_n^q) est applicable aux fonctions holomorphes dans $|z| \leqslant \rho$. Pour une telle fonction $f(z)$ $L(f)$ est holomorphe dans $|z| < \rho'$; de plus la formule (4) est applicable à l'opérateur $L - L_p$, car $f(z)$ est holomorphe sur une courbe C située dans $|z| > \rho$; l'expression obtenue pour $(L - L_p)$ (f) montre qu'elle tend uniformément vers 0 dans tout cercle $|z| \leqslant \rho_1' < \rho'$, lorsque $p \to \infty$.

L'opérateur L peut donc être considéré comme la *limite de la suite d'opérateurs* $\{L_p\}$.

REMARQUES.

1. Ce résultat s'applique en particulier à une suite d'opérateurs linéaires,

permutables avec D; la seule simplification vient de ce que la série double $L_p\left(\frac{1}{u-z}\right)$ est une série simple en $\frac{1}{u-z}$ à l'intérieur de deux cercles de convergence associés.

2. Comme les précédentes, la propriété qui vient d'être établie peut être *transmuée* à l'aide d'un opérateur auxiliaire convenable.

5. *PRODUIT D'OPÉRATEURS.*

Soit encore L un opérateur dont la série (3) admet r' et $1/r$ pour rayons de convergence associés. Soit M un opérateur analogue, défini par la matrice infinie (m_n^q); désignons, s'ils existent, par s' et $1/s$ des rayons de convergence associés de la série double

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} m_n^q \frac{n!}{q!} z^q z'^{n+1}.$$

Un cas particulièrement simple est celui où $s < r'$: L applique l'espace E des fonctions holomorphes dans $|z| \leqslant r$ sur un espace E′ de fonctions holomorphes dans $|z| < r'$, que M applique à son tour sur un espace E″ de fonctions holomorphes dans $|z| < s'$; le produit M L est donc applicable aux fonctions de E.

THÉORÈME. — Le produit M L *est défini par la matrice infinie produit de celle définissant* L *par celle définissant* M.

En effet pour une fonction de E L (f) est une série entière en z, où le coefficient de $z^p/p!$ est la série absolument convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n^p a_n.$$

M L (f) est défini par la série multiple

$$\sum_{p=0}^{\infty}\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} l_n^p a_n\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty} m_p^q \frac{z^q}{q!}\right)\right];$$

en remplaçant toutes les quantités par leurs modules, on obtient une série convergente, quels que soient la fonction $f(z)$ dans E et z dans $|z| < s'$; on peut y grouper les termes qui contiennent $|a_n| \frac{|z|^q}{q!}$ et mettre cette quantité en facteur; de même $a_n \frac{z^q}{q!}$ dans l'expression de M L (f) est multiplié par la série absolument convergente

$$\sum_{p=0}^{\infty} l_n^p m_p^q,$$

qui est le terme général de la matrice infinie, définissant le produit M L; cette matrice est le produit de celles qui définissent L et M.

EXTENSION. Si l'opérateur auxiliaire A applique biunivoquement un espace F$''$ sur E$''$, pour les fonctions de F *le transmué par* $\overline{\mathrm{A}}$ *du produit* M L *est le produit des transmués par* $\overline{\mathrm{A}}$ *de* L *et de* M; on déduit donc du résultat précédent une propriété du produit des opérateurs transmués.

PUISSANCES D'UN OPÉRATEUR. Reprenons l'étude de L dans le cas où $r < r'$. On peut appliquer aux fonction de E l'opérateur L L $=\mathrm{L}^2$; on obtient ainsi des fonctions holomorphes dans $|z| < r'$. Il en est de même pour les puissances successives de l'opérateur L; l'étude de cette suite d'opérateurs L^p $(p = 1, \ldots)$peut être faite suivant la méthode exposée au § 4; celle-ci s'applique aussi aux séries

$$\sum_{p=1}^{\infty} l_p \mathrm{L}^p,$$

où les quantités l_p sont constantes.

6. *ÉTUDE D'UN OPÉRATEUR PARTICULIER.*

En vue de l'étude faite dans les chapitres suivants d'opérateurs vérifiant certaines relations fonctionnelles, on considère ce cas particulier; l'opérateur L est *défini dans l'espace des polynômes par une matrice infinie*, construite de la manière suivante : soient α et β deux entiers positifs et $\rho = \alpha/\beta$; une matrice auxiliaire a ses β premières lignes arbitraires d'éléments $m_n^{k'}$ $(0 \leqslant k' < \beta)$ non tous nuls; en déplaçant ces lignes de β rangs vers le bas et de α rangs vers la droite, on forme les β lignes suivantes, dont les autres éléments sont nuls; et ainsi de suite; dans la matrice ainsi constituée on multiplie les éléments de la ligne de rang q par la constante b_q et ceux de la colonne de rang n par la constante c_n, pour obtenir la matrice définissant L. On suppose les quantités b_q et c_n telles que

$$\lim_{q\to\infty} (q!^b |b_q|)^{1/q} = b' \text{ et } \lim_{n\to\infty} (n!^c |c_n|)^{1/n} = c',$$

où les nombres b' et c' sont finis et non nuls.

Cherchons la condition nécessaire et suffisante pour que L applique un espace E de fonctions holomorphes à l'origine sur un espace de fonctions holomorphes à l'origine, si L vérifie (1) *uniformément* dans un voisinage de l'origine pouvant dépendre de la fonction considérée.

PROPOSITION 1. — *Si* E *est l'espace des fonctions entières de croissance* (σ, τ), *il faut et il suffit que l'on ait*

$$s = 1 - 1/\sigma - c \leqslant (1+b)/\rho$$

et

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \; (n!^s |m_n^{k'}|)^{1/n} < (\sigma\tau)^{-1/\sigma}/c' \qquad (0 \leqslant k' < \beta).$$

a) *Les conditions sont suffisantes* : on peut trouver en effet une série majorante de la série double (2) dans un cercle centré à l'origine. La série (2) est absolument convergente dans ce cercle; on va raisonner sur la somme partielle S_0 qui ne contient que les puissance de z dont l'exposant est un multiple de β; on ferait une démonstration analogue pour les autres sommes partielles, où les exposants de z sont égaux à un multiple de β près, si $\beta \neq 1$.

Il existe des constantes A, B, C, M, A′, B′, C′, M′ telles que l'on ait, quel que soit n,

$$|a_n| < A' n!^{1-1/\sigma} A^n, \qquad |b_n| < B' n!^{-b} B^n,$$
$$|c_n| < C' n!^{-c} C^n \quad , \qquad |m_n^0| < M' n!^{-s} M^n$$

avec $ACM < 1$. On a

$$S_0 = \sum_{q=0}^{\infty} b_{\beta q} \frac{z^{\beta q}}{(\beta q)!}\left(\sum_{n=0}^{\infty} m_n^0 a_{n+\alpha q} c_{n+\alpha q}\right),$$

série double majorée par

$$A'B'C'M' \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(\alpha q)!^s}{(\beta q)!^{1+b}} (A^\rho B C^\rho |z|)^{\beta q} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (C_{n+\alpha q}^n)^s (ACM)^n\right].$$

On sait que la racine d'ordre αq et par conséquent celle d'ordre βq du crochet tendent vers des nombres finis, lorsque $q \to \infty$ (*cf.* [11], p. 91). De plus on rappelle que

$$\lim_{n\to\infty} n!^{1/n}/n = 1/e;$$

la condition imposée à s entraîne que la racine d'ordre βq de

$$(\alpha q)!^s/(\beta q)!^{1+b}$$

tend vers un nombre fini, lorsque $q \to \infty$; ceci assure la convergence de la série majorante dans un cercle centré à l'origine.

b) *La condition portant sur s est nécessaire* : en effet supposons qu'il existe une valeur de σ pour laquelle $s > (1 + b)/\rho$, et que p soit le plus grand entier, tel que l'on ait $m_n^{k'} = 0$ pour $n < p$ et $0 \leqslant k' < \beta$. Considérons une valeur de k', pour laquelle le coefficient $m_p^{k'}$ n'est pas nul; $L(s_{p+\alpha q})$ est un polynôme dont un terme est

$$m_p^{k'} b_{k'+\beta q} a_{p+\alpha q} c_{p+\alpha q} \frac{z^{k'+\beta q}}{(k'+\beta q)!};$$

il existe des fonctions de E pour lesquelles le module de ce terme ne reste borné pour aucune valeur non nulle de z, lorsque $q \to \infty$; $L(s_{p+\alpha q})$ ne peut donc converger uniformément dans un voisinage de l'origine vers une fonction holomorphe à l'origine pour toute fonction de E; car, s'il y a convergence uniforme, les polynômes $L(s_{p+\alpha q})$ sont uniformément bornés sur une circonférence de centre 0 et de rayon suffisamment petit r, et les inégalités de Cauchy montrent que le produit du module du coefficient de $z^{k'+\beta q}$ par $r^{k'+\beta q}$ reste uniformément borné, quel que soit q, ce qui est contraire à l'hypothèse.

c) *Les conditions imposées aux coefficients $m_n^{k'}$ sont nécessaires*; car, si celle qui est relative à une valeur de k' n'est pas vérifiée, on peut extraire de la suite $\{m_n^{k'}\}$ correspondante une suite infinie $\{m_\nu^{k'}\}$ de quantités non nulles, telles que

$$\lim_{\nu\to\infty} (\nu!^s |m_\nu^{k'}|)^{1/\nu} \geqslant (\sigma\tau)^{-1/\sigma}/c' \quad \text{et} \quad c_\nu \neq 0.$$

Lorsque $n \to \infty$, $L(s_n)$ ne converge pas uniformément dans un voisinage de l'origine pour toute fonction de E; pour

$$f(z) = \sum \frac{1}{m_\nu^{k'} c_\nu} \frac{z^\nu}{\nu!}$$

le coefficient de $z^{k'}$ dans le développement en série entière en z autour de l'origine de la série double (2) n'est pas défini si $b_{k'} \neq 0$; si $b_{k'}$ est nul, on fait un raisonnement analogue pour $z^{k'+\beta q}$ avec $b_{k'+\beta q} \neq 0$.

PROPOSITION 2. — *Si* E *est l'espace des fonctions holomorphes dans* $|z| < R$, *il faut et il suffit que l'on ait*

$$s' = 1 - c \leqslant (1+b)/\rho$$

et

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (n!^{s'} |m_n^{k'}|)^{1/n} < R/c' \qquad (0 \leqslant k' < \beta).$$

La démonstration est analogue à la précédente en ce qui concerne les conditions nécessaires; pour montrer qu'elles sont suffisantes, on remplace les majorations portant sur a_n et m_n^0 par

$$|a_n| < A' n! A^n \quad \text{et} \quad |m_n^0| < M' n!^{-s'} M^n$$

avec encore $A C M < 1$; la série majorant S_0 est obtenue à partir de la précédente en remplaçant s par s'.

REMARQUE. — Dans les deux cas l'hypothèse que L vérifie (1) uniformément dans un voisinage de l'origine n'est donc utilisée que si $1-c > (1+b)/\rho$ ou si $\beta > 1$ ($b_0 = 0$ si $\beta = 1$); sinon, *il suffit que l'on ait* (1) *en chaque point du voisinage.*

CHAPITRE III

OPÉRATEURS TRANSFORMANT D^α *EN* D^β

1. *DÉFINITION.*

Soient α et β deux entiers positifs, $\rho = \alpha/\beta$ et E un espace vectoriel de fonctions holomorphes à l'origine fermé par D^α. Considérons un opérateur L linéaire, appliquant E sur un espace de fonctions holomorphes à l'origine, vérifiant pour toute fonction de E

$$D^\beta L = L D^\alpha.$$

On se borne toujours au cas des opérateurs linéaires; parmi ceux qui ne sont pas linéaires, l'un des plus simples est celui qui fait correspondre e^z à n'importe quelle fonction.

L est défini par les fonctions $h_n(z) = L(z^n/n!)$; celles-ci satisfont aux relations

$$h_k^{(\beta)}(z) = 0 \qquad (0 \leqslant k < \alpha),$$

$$h_n^{(\beta)}(z) = h_{n-\alpha}(z) \qquad (n \geqslant \alpha);$$

ce sont donc des *polynômes* de la forme

$$h_{k+\alpha q}(z) = \sum_{k'=0}^{\beta-1} \sum_{r=0}^{q} l_{k+\alpha r}^{k'} \frac{z^{k'+\beta(q-r)}}{[k'+\beta(q-r)]!}.$$

D'après ce qui a été dit au chapitre précédent, on peut donc représenter l'opérateur L dans l'espace des polynômes par une *matrice infinie* dont les β premières lignes sont arbitraires; en déplaçant celles-ci de β rangs vers le bas et de α rangs vers la droite, on obtient les β lignes suivantes, les autres termes étant nuls; et ainsi de suite :

$$\begin{matrix} l_0^0 & l_1^0 & l_2^0 & l_3^0 & l_4^0 & l_5^0 & l_6^0 & \dots \\ l_0^1 & l_1^1 & l_2^1 & l_3^1 & l_4^1 & l_5^1 & l_6^1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & l_0^0 & l_1^0 & l_2^0 & l_3^0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & l_0^1 & l_1^1 & l_2^1 & l_3^1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_0^0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix} \quad \text{pour} \left\{ \begin{aligned} \alpha &= 3 \\ \beta &= 3. \end{aligned} \right.$$

Ce résultat explique l'importance attachée à l'exemple traité en II § 6.

Il est naturel de supposer les coefficients $l_n^{k'}$ tels que pour toute fonction

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!} \quad \text{de E la série} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n h_n(z)$$

converge uniformément dans un domaine contenant l'origine et pouvant dépendre de la fonction considérée; il est alors possible de dériver β fois cette série terme à terme et l'opérateur L vérifie bien dans E $D^\beta L = L D^\alpha$. Dans les cas étudiés ici (*cf.* § 3) la convergence uniforme de la série précédente dans un voisinage de l'origine *entraîne* dans un cercle centré à l'origine la convergence absolue de la série double S obtenue en remplaçant les polynômes $h_n(z)$ par leurs expressions; on peut donc y permuter l'ordre des sommations et écrire

$$L(f)=\sum_{k=0}^{\alpha-1}\sum_{k'=0}^{\beta-1} L_k^{k'}(f), \qquad L_k^{k'}(f)=\left(\sum_{r=0}^{\infty} l_{k+\alpha r}^{k'} D^{\alpha r}\right)(f_k^{k'}) \tag{1}$$

avec

$$f_k^{k'}(z)=\sum_{q=0}^{\infty} a_{k+\alpha q}\frac{z^{k'+\beta q}}{(k'+\beta q)!}.$$

Un opérateur $L_k^{k'}$ est lui-même représenté par une matrice infinie, obtenue à partir de la précédente en annulant les termes des β premières lignes, sauf ceux de l'une d'entre elles, dont les rangs diffèrent d'un multiple de α; les éléments suivants sont obtenus par la même méthode.

2. *CAS PARTICULIER.*

Considérons l'opérateur qui à la fonction holomorphe à l'origine

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_{\alpha n}\frac{z^{\alpha n}}{(\alpha n)!}$$

fait correspondre la fonction

$$f_0^0(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_{\alpha n}\frac{z^{\beta n}}{(\beta n)!}.$$

dans le cas où elle est holomorphe à l'origine.

2. *Si $f(z)$ est une fonction entière du type τ de l'ordre σ, on a*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,[(\alpha n)!^{1/\sigma-1}|a_{\alpha n}|]^{1/n}=(\sigma\tau)^{\alpha/\sigma}.$$

Si ce nombre existe, prenons σ', tel que

$$\frac{1}{\sigma'}-1=\rho\left(\frac{1}{\sigma}-1\right);$$

on a aussi

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,[(\beta n)!^{1/\sigma'-1}\,|a_{\alpha n}|\,]^{1/\beta n} = \rho^{\rho(1-1/\sigma)}(\sigma\tau)^{\rho/\sigma}.$$

Pour $\alpha \leqslant \beta$ ou pour $\alpha > \beta$ et $\sigma < \alpha/(\alpha - \beta)$ $f_0^0(z)$ est donc une fonction entière du type τ' de l'ordre σ' avec

$$(\sigma'\tau')^{1/\sigma'} = \rho^{\rho}(\sigma\tau/\rho)^{\rho/\sigma}.$$

Pour $\alpha > \beta$ et $\sigma = \alpha/(\alpha - \beta)$ un calcul analogue montre que $f_0^0(z)$ admet pour rayon de convergence R′ avec

$$1/\mathrm{R}' = \rho\,(\sigma\tau)^{\rho/\sigma}.$$

Le cas où $\alpha > \beta$ et $\sigma > \alpha/(\alpha - \beta)$ n'est pas à envisager, car la fonction $f_0^0(z)$ n'est plus définie qu'à l'origine.

2. *Si $f(z)$ admet* R *(fini et non nul) comme rayon de convergence*, on a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,[\,|a_{\alpha n}|/(\alpha n)!\,]^{1/n} = \mathrm{R}^{-\alpha}.$$

Si ce nombre existe, prenons de même σ', tel que

$$1 - \frac{1}{\sigma'} = \rho;$$

on a également

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,[\,(\beta n)!^{1/\sigma'-1}\,|a_{\alpha n}|\,]^{1/\beta n} = (\rho/\mathrm{R})^{\rho}.$$

Pour $\alpha < \beta$ $f_0^0(z)$ est une fonction entière du type τ' de l'ordre σ' avec

$$\sigma' = \frac{\beta}{\beta - \alpha}, \qquad (\sigma'\tau')^{1/\sigma'} = (\rho/\mathrm{R})^{\rho},$$

Pour $\alpha = \beta$ les deux fonctions sont égales. Le cas $\alpha > \beta$ est à exclure, car la fonction $f_0^0(z)$ n'est définie qu'à l'origine.

3. *CONDITIONS D'APPLICATION.*

L'hypothèse de continuité faite au § 1 : convergence uniforme de la suite $\{\mathrm{L}(s_n)\}$ vers L (f) dans un voisinage de l'origine pour toute fonction de E, permet d'appliquer les résultats de II § 6.

THÉORÈME. — Pour que l'opérateur L *soit applicable aux fonctions entières de croissance (σ, τ), il faut et il suffit que $\sigma \leqslant \alpha/(\alpha - \beta)$ pour $\alpha > \beta$ et*

$$l = \sup_{0 \leqslant k' < \beta}\left[\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(n!^{1-1/\sigma}\,|l_n^{k'}|)^{1/n'}\right] < (\sigma\tau)^{-1/\sigma}.$$

On connaît une série majorant la série double S; aussi dans tout domaine, où la série majorante converge, S converge absolument et on peut mettre L (f)

sous la forme (1), ce qui donne directement la croissance de la fonction $L(f)$, bien que l'on puisse également l'obtenir à l'aide de la série majorante.

Supposons que $f(z)$ soit une fonction entière du type τ de l'ordre σ et utilisons les notations de § 2. 1.

Pour $\alpha \leqslant \beta$ ou $\alpha > \beta$ et $\sigma < \alpha/(\alpha - \beta)$ S converge absolument en tout point à distance finie et uniformément dans tout domaine borné. Les fonctions $f_k^{k'}(z)$ sont entières de croissance (σ', τ'). Pour $\sigma \leqslant 1$ on a $\sigma' \leqslant 1$ et $L(f)$ est aussi une fonction entière de croissance (σ', τ'); les topologies de la convergence uniforme dans tout cercle $|z| \leqslant \zeta < (\sigma\tau)^{-1/\sigma}$, associée l'opérateur A_σ et dans tout cercle $|z| \leqslant \zeta' < (\sigma'\tau')^{-1/\sigma'}$ associée à l'opérateur $A_{\sigma'}$ (*cf.* II § 3) rendent l'opérateur L continu dans l'espace E des fonctions entières de croissance (σ, τ). Pour $\sigma > 1$ $L(f)$ est une fonction entière de croissance (σ', τ_1) avec

$$\tau_1 = \tau'(1 - [l(\sigma\tau)^{1/\sigma}]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}})^{1-\sigma'};$$

les opérateurs A_σ et $A_{\sigma'}$ permettent encore de rendre L continu dans E. Dans le cas $\alpha = \beta$ on a évidemment $\sigma' = \sigma$ et $\tau' = \tau$.

Pour $\alpha > \beta$ et $\sigma = \alpha/(\alpha - \beta)$ les fonctions $f_k^{k'}(z)$ sont holomorphes dans $|z| < R'$; $L(f)$ est holomorphe dans

$$|z| < R' - l^\rho/\rho;$$

S converge absolument dans ce cercle et uniformément dans tout cercle centré en 0 et intérieur au précédent; l'opérateur L peut encore être rendu continu dans E à l'aide de A_σ.

THÉORÈME. — Pour que l'opérateur L *soit applicable aux fonctions holomorphes dans* $|z| < R$, *il faut et il suffit que* $\alpha \leqslant \beta$ *et*

$$l = \sup_{0 \leqslant k' < \beta} \left[\overline{\lim_{n\to\infty}} (n!\,|l_k^{k'}|)^{1/n} \right] < R.$$

Supposons que $f(z)$ soit une fonction holomorphe dans $|z| < R$ et que R ne puisse être remplacé par un nombre supérieur; reprenons les notations de § 2.2.

Pour $\alpha < \beta$ S converge absolument en tout point à distance finie et uniformément dans tout domaine borné; les fonctions $f_k^{k'}(z)$ sont entières de croissance (σ', τ') et $L(f)$ est une fonction entière de croissance (σ', τ_1) avec

$$\tau_1 = \tau'(1 - l/R)^{1-\sigma'};$$

ici encore grâce à l'opérateur $A_{\sigma'}$ (*cf*, II § 3) on peut rendre L continu dans l'espace E des fonctions holomorphes dans $|z| < R$.

Pour $\alpha = \beta$ les fonctions $f_k^{k'}(z)$ sont holomorphes dans $|z| < R$ et $L(f)$ dans $|z| < R - l$; S converge absolument dans ce cercle et uniformément dans tout cercle complètement intérieur; l'opérateur L est rendu continu dans E par les topologies de la convergence uniforme dans tout cercle $|z| \leqslant \zeta < R$ et dans tout $|z| \leqslant \zeta' < R - l$; car la convergence uniforme d'une suite de fonctions $\{f_n(z)\}$ sur un cercle $|z| = r$

avec $l < r$ entraîne la convergence uniforme de la suite $\{L(f_n)\}$ dans tout cercle $|z| \leqslant r' < r - l$.

REMARQUES.

1. La condition de convergence uniforme rappelée au début de ce paragraphe doit être introduite, sauf dans le cas $\alpha = \beta = 1$, c'est-à-dire dans l'étude des opérateurs permutables avec D, ce qui explique la différence des hypothèses faites ici avec celles du chapitre I.

2. Les conditions qui sont énoncées dans ces théorèmes et qui portent sur les coefficients $l_n^{k'}$ sont des conditions suffisantes pour que *les opérateurs*

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n^{k'} D^n \qquad (0 \leqslant k' < \beta)$$

soient applicables aux fonctions considérées. Désignons par $A_k^{k'}$ l'opérateur tel que

$$A_k^{k'}(f) = f_k^{k'}(z).$$

Si on associe à l'opérateur $L_k^{k'}$ la série formelle

$$\lambda_k^{k'}(D) = \sum_{r=0}^{\infty} l_{k+\alpha r}^{k'} D^r,$$

on a pour les fonctions envisagées dans chaque cas

$$L_k^{k'} = \lambda_k^{k'}(D^\beta) A_k^{k'} = A_k^{k'} \lambda_k^{k'}(D^\alpha);$$

ces produits ne sont commutatifs que si $\alpha = \beta$.

4. *RÉSOLUTION DE* $L(f) = g(z)$.

On se propose de résoudre l'équation

$$L(f) = g(z),$$

où l'opérateur L est applicable aux fonctions entières de croissance (σ, τ) avec $\sigma < 1$, et où

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{z^n}{n!}$$

est une fonction entière de croissance (σ', τ') (*cf.* § 2. 1). *On ne recherche que les solutions entières de croissance* (σ, τ).

Posons

$$f_k(z) = \sum_{q=0}^{\infty} a_{k+\alpha q} \frac{z^q}{q!} \qquad (0 \leqslant k < \alpha),$$

$$g_{k'}(z) = \sum_{q=0}^{\infty} b_{k'+\beta q} \frac{z^q}{q!} \qquad (0 \leqslant k' < \beta);$$

les résultats de § 2. 1. montrent que ce sont des fonctions entières de croissance (σ'', τ'') avec

$$1/\sigma''-1=\alpha(1/\sigma-1), \qquad (\sigma''\tau'')^{1/\sigma''}=\alpha^{\alpha}(\sigma\tau/\alpha)^{\alpha/\sigma};$$

on a en particulier $\sigma'' < 1$; les opérateurs $\lambda_k^{k'}(\mathrm{D})$ sont applicables aux fonctions entières de croissance (σ'', τ'').

Décomposons le développement en série entière de $g(z)$ en β sommes partielles, où les exposants de z ne diffèrent que par des multiples de β; *l'équation proposée est équivalente au système.*

$$\mathrm{E}_{k'}=\sum_{k=0}^{\alpha-1}\lambda_k^{k'}(\mathrm{D})(f_k)-g_{k'}(z)=0 \qquad (k'=0, \ldots, \beta-1) \ (2),$$

dont on cherche les solutions entières de croissance (σ'', τ''), car la connaissance des fonctions $f_k(z)$ entraîne celle de $f(z)$.

On forme les déterminants extraits de la matrice $(\lambda_k^{k'}(\mathrm{D}))$, dont les éléments sont les opérateurs $\lambda_k^{k'}(\mathrm{D})$ et où k désigne le rang de la colonne, k' celui de la ligne. Soit r le rang maximum de ceux qui ne sont pas nuls. Trois cas sont à envisager :

1. $r=\alpha=\beta$. On utilise la méthode habituelle de résolution à l'aide des déterminants. Du système (2) on tire les relations

$$|\lambda_k^{k'}(\mathrm{D})|(f_k)=|\lambda_k^{k'}(\mathrm{D})|_k(g) \qquad (k=0, \ldots, \alpha-1) \ (3);$$

le second membre exprime que dans le déterminant $|\lambda_k^{k'}(\mathrm{D})|$ on remplace les éléments de la colonne de rang k par les fonctions $g_{k'}(z)$ correspondantes.

Pour savoir si ce nouveau système est équivalent au premier, on en tire

$$|\lambda_k^{k'}(\mathrm{D})|(\mathrm{E}_{k'})=0 \qquad (k=0, \ldots, \alpha-1) \ (4).$$

Or les expressions $\mathrm{E}_{k'}$ sont des fonctions entières de croissance (σ'', τ''); si dans la série formelle en D $|\lambda_k^{k'}(\mathrm{D})|$ le premier terme non nul est en D^p, ces équations sont équivalentes (*cf.* 1 § 3) à

$$\mathrm{D}^p(\mathrm{E}_{k'})=0 \qquad (k'=0, \ldots, \alpha-1) \ (5).$$

Si p est nul, les systèmes sont équivalents et l'équation proposée admet *une seule solution* donnée par (3), puisque l'opérateur $|\lambda_k^{k'}(\mathrm{D})|$ admet un inverse unique. L'opérateur L applique biunivoquement l'espace des fonctions entières de croissance (σ, τ) sur lui-même; pour celles-ci il admet donc un inverse unique à gauche et à droite; cet inverse est, comme L, permutable avec D^{α}. On peut donc généraliser le résultat de I § 2.

THÉORÈME. — Les opérateurs tels que $r=\alpha=\beta$ et $p=0$ forment un groupe multiplicatif.

En effet une démonstration analogue à celle faite en II § 5 montre que l'on peut effectuer le produit de deux tels opérateurs L et M, et que la matrice infinie définissant le produit M L est le produit de celles définissant L et M; l'opérateur M L est permutable avec D^α et applicable aux fonctions entières de croissance (σ, τ). Dans la série multiple obtenue en appliquant le produit M L à l'une de ces fonctions un regroupement convenable de termes montre aussi que, en multipliant la matrice $(\lambda_k^{k'}(D))$ par la matrice analogue et relative à M, on obtient celle qui correspond au produit M L; le déterminant de la matrice produit est le produit des déterminants des deux premières matrices; le produit M L est donc tel que $r = \alpha$ et $p = 0$; pour $\alpha \neq 1$ le produit de ces matrices n'est pas en général commutatif et le groupe n'est pas abélien.

D'autre part les formules (3) montrent que l'opérateur inverse de L est défini par la matrice inverse de $(\lambda_k^{k'}(D))$, dont le déterminant est l'inverse de celui qui correspond à L; l'opérateur inverse vérifie encore $r = \alpha$ et $p = 0$. L'élément neutre, qui est l'identité, considérée comme opérateur permutable avec D^α, satisfait aux mêmes conditions.

Si p est positif, on ne peut plus conclure à l'équivalence des systèmes (2) et (3); mais les relations (5) conduisent à introduire des fonctions $F(z)$ et $G(z)$ telles que

$$F^{(p\alpha)}(z) = f(z), \qquad G^{(p\alpha)}(z) = g(z);$$

l'égalité $L(F) = G(z)$ entraîne $L(f) = g(z)$ par $p\alpha$ dérivations successives; et réciproquement à toute solution de $L(f) = g(z)$ on peut associer une solution d'une équation $L(F) = G(z)$ obtenue par $p\alpha$ intégrations successives. Comme ci-dessus, aux fonctions $F(z)$ et $G(z)$ on fait correspondre les fonctions

$$F_k(z) \ (0 \leqslant k < \alpha) \quad \text{et} \quad G_{k'}(z) \ (0 \leqslant k' < \alpha).$$

L'équation $L(F) = G(z)$ est équivalente au système

$$E'_{k'} = \sum_{k=0}^{\alpha-1} \lambda_k^{k'}(D)(F_k) - G_{k'}(z) = 0 \qquad (k' = 0, \ldots, \alpha - 1);$$

on en tire

$$|\lambda_k^{k'}(D)|(F_k) = |\lambda_k^{k'}(D)|_k(G) \qquad (k = 0, \ldots, \alpha-1) \ (3');$$

ces relations permettent de calculer les fonctions $F_k^{(p)}(z) = f_k(z)$, qui sont donc solutions des équations

$$D^p(E'_{k'}) = 0, \quad \text{soit} \quad E_{k'} = 0 \qquad (k' = 0, \ldots, \alpha-1).$$

Le développement en série formelle en D de l'un au moins des mineurs non nuls de $|\lambda_k^{k'}(D)|$ comporte une puissance de D d'exposant inférieur à p; l'un au moins des coefficients du polynôme arbitraire d'intégration obtenu en formant $G(z)$ à partir de $g(z)$ intervient dans la détermination des fonctions $f_k(z)$ par les relations (3'); l'équation proposée admet dont une *infinité de solutions qui ne diffèrent entre elles que par des solutions de* $L(f) = 0$; *celles-ci sont des polynômes, dont le degré est inférieur à* $p\alpha$, comme le montrent les égalités (3); la méthode des coefficients indéterminés appliquée aux équations (2) correspondant à $g(z) = 0$ conduit à la résolution d'un système linéaire, homogène de $p\alpha$ équations à $p\alpha$ inconnues a_n, dont les α premières sont

$$\sum_{n=0}^{p\alpha-1} l_n^{k'} a_n = 0$$

(*cf.* remarque finale); on vérifie aisément que le déterminant formé avec les coefficients des inconnues dans ces équations est nul.

De plus on remarque, *si $f(z)$ est une fonction entière du type τ de l'ordre σ, il en est de même de* $\mathrm{L}(f)$. Car, s'il n'en était pas ainsi, $\mathrm{L}(f) = g(z)$ serait de croissance inférieure au type τ de l'ordre σ; les fonctions $g_{k'}(z)$ seraient de croissance inférieure au type τ'' de l'ordre σ''; et il en serait de même des fonctions $f_k(z)$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

2. $r = \beta < \alpha$. On choisit un déterminant Δ non nul de rang β, extrait de la matrice $(\lambda_k^{k'}(\mathrm{D}))$. On prend arbitrairement les fonctions entières de croissance (σ'', τ'') $f_{k_1}(z)$, dont l'indice k_1 n'est l'indice d'acune colonne de Δ, et on retranche de $g_k(z)$ la somme correspondante.

$$\sum_{k_1} \lambda_{k_1}^{k'}(\mathrm{D})(f_{k_1});$$

on est alors ramené au cas précédent. L'équation proposée admet *une infinité de solutions* entières de croissance (σ, τ).

3. $r < \beta$. On choisit parmi les déterminants de rang r non nuls, extraits de la matrice $(\lambda_k^{k'}(\mathrm{D}))$ un de ceux, où l'exposant du premier terme du développement en série formelle en D est le plus petit possible; soient p cette valeur et Δ le déterminant. Les formes

$$e_{k'} = \sum_{k=0}^{\alpha-1} \lambda_k^{k'}(\mathrm{D})(f_k) \qquad (0 \leqslant k' < \beta)$$

considérées comme linéaires par rapport aux fonctions $f_k(z)$ ne sont pas indépendantes; il existe en effet entre elles des relations de la forme

$$\Delta(e_{k_1'}) = \sum_{k'} \Delta_{k'}(e_{k'});$$

k_1' n'est l'indice d'aucune ligne de Δ, et la somme est étendue aux indices k' de toutes les lignes de Δ; $\Delta_{k'}$ est un déterminant de rang r extrait de la matrice $(\lambda_k^{k'}(\mathrm{D}))$ comportant $r - 1$ lignes communes avec Δ.

On peut mettre D^p en facteur dans les deux membres de ces égalités et les diviser par cet opérateur; car elles sont vérifiées, quelles que soient les fonctions $f_k(z)$ entières de croissance (σ'', τ''), et on peut remplacer celles-ci par des fonctions, dont elles sont les dérivées d'ordre p; en posant

$$\Delta = \Delta' \mathrm{D}^p, \qquad \Delta_{k'} = \Delta'_{k'} \mathrm{D}^p,$$

on a donc

$$\Delta'(e_{k'_1}) = \sum_{k'} \Delta'_{k'}(e_{k'}).$$

Pour que le système (2) soit possible, il *faut* que

$$\Delta'(g_{k'_1}) = \sum_{k'} \Delta'_{k'}(g_{k'}). \qquad (6).$$

Ces conditions sont aussi *suffisantes*; car elles s'écrivent encore

$$\Delta'(\mathrm{E}_{k'_1}) = \sum_{k'} \Delta'_{k'}(\mathrm{E}_{k'});$$

l'opérateur Δ' admet un inverse unique pour les fonctions entières de croissance (σ'', τ''); la nullité des expressions $\mathrm{E}_{k'_1}$ entraîne donc celle de $\mathrm{E}_{k'_1}$. Les égalités (6) permettent d'obtenir les fonctions $g_{k'_1}(z)$, si l'on connaît les fonctions $g_{k'}(z)$; on détermine ainsi la *structure de l'espace de fonctions,* sur lequel L applique l'espace des fonctions entières de croissance (σ, τ).

Si les conditions (6) sont vérifiées, il reste à résoudre le système formé par les r équations principales, et on est ramené à l'un des deux cas précédents.

THÉORÈME. — Si $r = \alpha$ et si $f(z)$ est une fonction entière du type τ de l'ordre σ, $\mathrm{L}(f)$ est une fonction entière du type τ' de l'ordre σ'.

Si $r = \alpha$ et si l'équation $\mathrm{L}(f) = g(z)$ admet une infinité de solutions, celles-ci ne diffèrent entre elles que par des polynômes.

Enfin, si l'un des déterminants de rang α extraits de la matrice $(\lambda_k^{k'}(\mathrm{D}))$ n'est ni nul, ni divisible par D, l'opérateur L applique de façon biunivoque l'espace des fonctions entières de croissance (σ, τ) sur l'espace des fonctions entières $g(z)$ de croissance (σ', τ') vérifiant les relations

$$\Delta(g_{k'_1}) = \sum_{k'} \Delta_{k'}(g_{k'});$$

on peut associer à l'opérateur L un inverse unique $\overline{\mathrm{L}}$, satisfaisant dans l'espace de ces fonctions $g(z)$ à l'égalité

$$\mathrm{D}^{\alpha}\overline{\mathrm{L}} = \overline{\mathrm{L}}\,\mathrm{D}^{\beta}.$$

REMARQUE. — De fait on vient de résoudre le *système d'une infinité d'équations linéaires à une infinité d'inconnues a_n*

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n^{k'} a_{n+\alpha q} = b_{k'+\beta q} \qquad (0 \leqslant k' < \beta;\ q = 0, \ldots).$$

Inversement on peut ainsi résoudre un tel système si

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, (n!^{1-1/\sigma} |l_n^{k'}|)^{1/n} < (\sigma\tau)^{-1/\sigma} \qquad (0 \leqslant k' < \beta),$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, (n!^{1/\sigma'-1}\,|b_n|)^{1/n} \leqslant (\sigma'\tau')^{1/\sigma'},$$

en se bornant aux solutions telles que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, (n!^{1/\sigma-1}\,|a_n|)^{1/n} \leqslant (\sigma\tau)^{1/\sigma}.$$

Le cas de résolution le plus simple ($r = \alpha = \beta$ et $p = 0$) correspond au fait que le déterminant d'ordre α formé avec les premiers éléments en haut et à gauche de la matrice infinie définissant L n'est pas nul; des combinaisons linéaires entre les lignes permettent alors de se ramener à un système « triangulaire », analogue à ceux étudiés en I § 3. 5.

CHAPITRE IV

RÉSULTATS GÉNÉRAUX

1. *CAS D'UNE SOLUTION.*

On se propose d'étudier les opérateurs vérifiant l'égalité

$$\mathrm{R\,L} = \mathrm{L\,Q} \qquad (1);$$

les opérateurs connus, Q, R et inconnu L font correspondre une fonction analytique à une fonction analytique. Supposons que l'on connaisse une solution particulière A de cette égalité

$$\mathrm{R\,A} = \mathrm{A\,Q},$$

appliquant une classe $\mathscr{C}$ de fonctions fermée par l'opérateur Q sur une classe $\mathscr{C}'$ fermée par R.

On est conduit à deux séries de résultats *suivant le rôle que l'on fait jouer à $\mathscr{C}$ ou à $\mathscr{C}'$.*

a) Si M est un opérateur quelconque, applicable aux fonctions de $\mathscr{C}'$, pour lesquelles il est permutable avec R,

$$\mathrm{R\,M} = \mathrm{M\,R},$$

le produit M A *est une solution de* (1) *applicable aux fonctions de $\mathscr{C}$.*

En effet pour celles-ci on a

$$\mathrm{R\,M\,A} = \mathrm{M\,R\,A} = \mathrm{M\,A\,Q}.$$

b) Si N est un opérateur quelconque, permutable avec Q,

$$\mathrm{Q\,N} = \mathrm{N\,Q},$$

et appliquant une classe quelconque $\mathscr{C}_1$ sur $\mathscr{C}$, *le produit* A N *est une solution de* (1) *appliquant une classe de fonctions* (*ici* $\mathscr{C}_1$) *sur* $\mathscr{C}'$.

En effet pour les fonctions de $\mathscr{C}_1$ on a

$$\mathrm{R\,A\,N} = \mathrm{A\,Q\,N} = \mathrm{A\,N\,Q}.$$

Le cas où l'opérateur A applique biunivoquement la classe $\mathscr{C}$ sur la classe $\mathscr{C}'$ est rendu important par les énoncés suivants :

THÉORÈME. — Si la solution particulière A *applique biunivoquement $\mathscr{C}$ sur $\mathscr{C}'$, la solution générale, applicable aux fonctions de $\mathscr{C}$ est le produit à gauche de* A *par un opérateur permutable avec* R *et applicable aux fonctions de $\mathscr{C}'$.*

En effet pour les fonctions de $\mathscr{C}$ on a

$$Q = \bar{A}\, R\, A,$$

en désignant par $\bar{A}$ l'opérateur inverse de A; l'égalité (1) devient

$$R\, L = L\, \bar{A}\, R\, A;$$

en multipliant les deux membres à droite par $\bar{A}$, on obtient pour les fonctions de $\mathscr{C}'$

$$R\, L\, \bar{A} = L\, \bar{A}\, R;$$

l'opérateur $L\, \bar{A} = M$ est quelconque, permutable avec R et applicable aux fonctions de $\mathscr{C}'$; enfin en multipliant à droite par A les deux membres de l'égalité $L\, \bar{A} = M$, on a pour les fonctions de $\mathscr{C}$

$$L = M\, A.$$

THÉORÈME. — Si la solution particulière A *applique biunivoquement* $\mathscr{C}$ *sur* $\mathscr{C}'$, *la solution générale, appliquant une classe de fonctions sur* $\mathscr{C}'$ *est le produit à droite de* A *par une opérateur permutable avec* Q *et appliquant une classe de fonctions sur* $\mathscr{C}$.

En effet on a pour les fonctions de $\mathscr{C}'$

$$R = A\, Q\, \bar{A};$$

et l'égalité (1) devient

$$A\, Q\, \bar{A}\, L = L\, Q,$$

c'est-à-dire

$$Q\, \bar{A}\, L = \bar{A}\, L\, Q.$$

Toutes les solutions cherchées sont donc de la forme

$$L = A\, N,$$

où N est un opérateur quelconque, permutable avec Q et appliquant une classe de fonctions sur $\mathscr{C}$.

CONSÉQUENCES. La connaissance d'un opérateur A appliquant biunivoquement une classe $\mathscr{C}$ sur une classe $\mathscr{C}'$ conduit à l'égalité (1) correspondante soit par la relation

$$Q = \bar{A}\, R\, A \qquad (2),$$

qui détermine Q de façon unique si $\mathscr{C}'$ est fermée par l'opérateur donné R, soit par la relation

$$R = A\, Q\, \bar{A} \qquad (3),$$

qui donne R si $\mathscr{C}$ est fermée par l'opérateur donné Q.

CAS DES OPÉRATEURS LINÉAIRES. Supposons les opérateurs Q, R, A, L, linéaires. Il est naturel de supposer aussi que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont des espaces vectoriels de fonctions holomorphes en un point donné, l'origine par exemple, sans qu'il soit nécessaire de préciser s'ils contiennent les sommes partielles des développements en série entière en z au voisinage de l'origine de chacun de leurs éléments respectifs.

Il est en particulier intéressant de poser $R = D^{\beta}$ ou $Q = D^{\alpha}$, où α et β sont des entiers positifs; dans ce cas M (ou N) est un opérateur permutable avec D^{β} (ou D^{α}), et on peut utiliser les résultats du chapitre précédent.

2. *EXEMPLES.*

On prend pour A les opérateurs les plus simples et on fait soit $R = D$ dans l'égalité (2), soit $Q = D$ dans l'égalité (3).

1. *Produit dans le cas* $R = D$. Soit $g(z)$ une fonctions holomorphe dans un domaine Δ, où elle ne s'annule pas, et $\mathscr{C}$ l'espace des fonctions $f(z)$ holomorphes dans Δ. Le produit P_g est un opérateur, qui fait correspondre à la fonction $f(z)$ la fonction $f(z)\, g(z)$ holomorphe dans Δ. On remarque que

$$\bar{P}_g = P_{1/g}.$$

La relation (2) donne pour les fonctions de $\mathscr{C}$

$$Q = P_{1/g}\, D\, P_g:$$

c'est-à-dire

$$Q(f) = f'(z) + \frac{g'(z)}{g(z)} f(z) = f'(z) + \phi(z) f(z);$$

$\phi(z)$ est une fonction holomorphe dans Δ. L'égalité (1) correspondante est donc

$$D\, L = L(D + P_{\phi}),$$

dont *la solution générale, applicable aux fonctions de $\mathscr{C}$ est*

$$L = M\, P_g,$$

où M est un opérateur quelconque, permutable avec D et applicable aux fonctions de $\mathscr{C}$.

Si on suppose de plus L *linéaire*, il en est de même de M et un tel opérateur M a été étudié en I § 5, si on suppose que Δ contient l'origine et que l'on a pour toute fonction de $\mathscr{C}$

$$\lim_{n\to\infty} L(s_n/g) = L(f/g)$$

en chaque point d'un voisinage d'un point donné de Δ.

Inversement on sait résoudre l'égalité

$$D\,L = L(D+P_\phi),$$

où $\phi(z)$ est une fonction holomorphe dans un domaine *simplement connexe* Δ.

En effet on est ramené à la détermination d'une fonction $g(z)$ holomorphe et non nulle dans Δ, telle que

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \phi(z);$$

on a donc

$$g(z) = e^{\int_{z_0}^{z} \phi(z)\,dz},$$

où l'intégrale est prise sur une courbe simple, rectifiable, intérieure à Δ. Si on modifie z_0 à l'intérieur de Δ, on multiplie $g(z)$ par une constante, ce qui conduit à un résultat évident.

2. *Produit dans le cas* $Q = D$. En reprenant les mêmes notations, on voit que l'égalité

$$(D+P_\varphi)L = L\,D$$

admet pour *solution générale, appliquant une classe $\mathscr{C}_1$ quelconque de fonctions sur $\mathscr{C}$*

$$L = P_{1/g}\, N,$$

où N est un opérateur quelconque, permutable avec D et appliquant $\mathscr{C}_1$ sur $\mathscr{C}$.

Si L est *linéaire*, les résultats de I § 5 s'appliquent à N, en supposant que $\mathscr{C}$ est un espace de fonctions holomorphes dans un domaine contenant Δ et l'origine, et que pour toute fonction de $\mathscr{C}_1$ on a

$$\lim_{n\to\infty} [\,g(z)\,L(s_n)\,] = g(z)\,L(f)$$

en chaque point d'un voisinage d'un point donné de Δ.

Inversement on résout, comme ci-dessus, l'égalité

$$(\mathrm{D}+\mathrm{P}_{\phi})\,\mathrm{L} = \mathrm{L}\,\mathrm{D}$$

dans le cas où $\phi(z)$ est une fonction holomorphe dans un domaine *simplement connexe* Δ.

3. *Substitution dans le cas* $\mathrm{R} = \mathrm{D}$. Soit $g(z)$ une fonction holomorphe et *univalente* dans un domaine $\bar{\Delta}$, dont elle donne la représentation conforme sur un domaine Δ. Désignons par $\bar{g}(z)$ la fonction inverse de $g(z)$ et par $\mathscr{C}$ l'espace des fonctions holomorphes dans Δ. La substitution S_g de $g(z)$ à z est un opérateur, qui fait correspondre à la fonction $f(z)$ holomorphe dans Δ la fonction $f[g(z)]$ holomorphe dans $\bar{\Delta}$. On remarque que

$$\bar{\mathrm{S}}_g = \mathrm{S}_{\bar{g}}.$$

L'égalité (2) devient pour les fonctions de $\mathscr{C}$

$$\mathrm{Q} = \mathrm{S}_{\bar{g}}\,\mathrm{D}\,\mathrm{S}_g,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{Q}(f) = g'[\bar{g}(z)]f'(z) = \frac{1}{\bar{g}'(z)}f'(z) = \psi(z)f'(z);$$

$\psi(z)$ est une fonction holomorphe et non nulle dans Δ. L'égalité (1) correspondante est donc

$$\mathrm{D}\,\mathrm{L} = \mathrm{L}\,\mathrm{P}_{\psi}\,\mathrm{D},$$

dont *la solution générale, applicable aux fonctions de* $\mathscr{C}$ *est*

$$\mathrm{L} = \mathrm{M}\,\mathrm{S}_g,$$

où M est un opérateur quelconque, permutable avec D et applicable aux fonctions holomorphes dans $\bar{\Delta}$.

Si L est *linéaire*, il en est de même de M; désignons par $\sigma_n(z)$ $(n = 0, \ldots)$ les sommes partielles du développement de $f[g(z)]$ en série entière en $z - a$ au voisinage d'un point a de $\bar{\Delta}$; si on a, pour toute fonction de $\mathscr{C}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{L}[\sigma_n(\bar{g})] = \mathrm{L}(f)$$

en chaque point d'un voisinage d'un point donné de $\bar{\Delta}$, l'opérateur M a été étudié en I § 5.

Inversement on sait résoudre l'égalité

$$\mathrm{D}\,\mathrm{L} = \mathrm{L}\,\mathrm{P}_{\psi}\,\mathrm{D},$$

où $\psi(z)$ est une fonctions holomorphe et non nulle dans un domaine *simplement connexe* Δ.

En effet on est ramené à la détermination d'une fonction $g(z)$ holomorphe dans un domaine, où elle est l'inverse d'une fonction $\bar{g}(z)$ holomorphe et univalente dans Δ, telle que

$$\frac{1}{\bar{g}'(z)} = \psi(z);$$

on a donc

$$\bar{g}(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\psi(z)},$$

où l'intégrale est prise sur une courbe simple, rectifiable; on doit de plus choisir Δ suffisamment petit, pour que la fonction $\bar{g}(z)$ y soit univalente. La fonction $g(z)$, inverse de $\bar{g}(z)$, est la fonction cherchée.

Si on modifie z_0, on remplace $g(z)$ par $g(z + c)$, où c est une constante; cela revient à remplacer $\bar{\Delta}$ par un domaine $\bar{\Delta}'$ déduit de $\bar{\Delta}$ par translation; si M est un des opérateurs étudiés en I § 5 et applicables aux fonctions holomorphes dans $\bar{\Delta}$, il est aussi applicable aux fonctions holomorphes dans $\bar{\Delta}'$.

4. *Substitution dans le cas* Q = D. En conservant les notations du numéro précédent, on voit que l'égalité

$$P_\psi D L = L D$$

admet pour *solution générale, appliquant une classe* $\mathscr{C}_1$ *quelconque de fonctions sur* $\mathscr{C}$

$$L = S_{\bar{g}} N,$$

où N est un opérateur quelconque, permutable avec D et appliquant $\mathscr{C}_1$ sur l'espace des fonctions holomorphes dans $\bar{\Delta}$.

Inversement on résout, comme ci-dessus, l'égalité

$$P_\psi D L = L D$$

dans le cas où $\psi(z)$ est une fonction holomorphe et non nulle dans un domaine *simplement connexe* Δ.

3. *CAS DE PLUSIEURS SOLUTIONS.*

Supposons que l'on connaisse un *nombre fini* de solutions particulières, linéaires A_i de l'égalité (1), applicables aux fonctions d'un même espace vectoriel de fonctions $\mathscr{C}$ fermé par Q; l'opérateur A_i applique $\mathscr{C}$ sur un espace $\mathscr{C}'_i$. L'opérateur A, qui fait correspondre à une fonction $f(z)$ de $\mathscr{C}$ l'ensemble des fonctions $A_i(f)$, vérifie l'égalité (1), puique les composantes $A_i(f)$ du vecteur A (f) vérifient cette égalité dans chaque espace $\mathscr{C}'_i$.

Nous dirons que *les opérateurs* A_i *forment un système essentiel de solutions*, si l'opérateur A applique biunivoquement $\mathscr{C}$ sur $\prod_i \mathscr{C}'_i$. Désignons par $\bar{A}$ l'opérateur inverse de A. On a donc pour les fonctions de $\mathscr{C}$

$$Q = \overline{A}\, R\, A;$$

l'égalité (1) devient pour les fonctions de $\mathscr{C}$

$$R\, L = L\, \overline{A}\, R\, A,$$

ou pour les éléments de $\prod_i \mathscr{C}'_i$

$$R\, L\, \overline{A} = L\, \overline{A}\, R.$$

Si L est linéaire, $L\,\overline{A}$ est une application linéaire de $\prod_i \mathscr{C}'_i$ sur un espace $\mathscr{C}'$, et sa restriction à $\mathscr{C}'_i$ est un opérateur M_i linéaire, quelconque, permutable avec R et appliquant $\mathscr{C}'_i$ dans $\mathscr{C}'$; on a donc

$$L(f) = \sum_i M_i A_i(f).$$

THÉORÈME. — Si l'égalité (1) *admet un système essentiel de solutions linéaires* A_i, *applicables aux fonctions d'un même espace vectoriel, toute solution linéaire de* (1), *applicable aux mêmes fonctions est de la forme*

$$L = \sum_i M_i A_i.$$

EXEMPLE.

Si $Q = D^\alpha$ et $R = D^\beta$, et si l'on se trouve dans les conditions d'application de l'un des théorèmes de III § 3, on peut prendre

$$A_k = A_k^0 \qquad (0 \leqslant k < \alpha).$$

REMARQUE. — On ne peut appliquer une méthode comparable, si on impose à L d'être linéaire et d'appliquer un espace vectoriel, quelconque de fonctions (et non un produit de tels espaces) sur un espace vectoriel, donné.

4. *AUTRE MÉTHODE DE RÉSOLUTION.*

Le principe de la résolution de l'égalité (1), qui vient d'être exposé, repose sur la connaissance d'une ou plusieurs solutions particulières. Q' et R' étant des opérateurs connus, on obtient des résultats analogues à partir de solutions de l'égalité

$$R'\, B = B\, Q \tag{4}$$

ou de l'égalité

$$R\, C = C\, Q' \tag{5}$$

En particulier

THÉORÈME. — Si une solution particulière B *de* (4) *applique biunivoquement la classe* $\mathscr{C}$ *sur la classe* $\mathscr{C}''$, *les solutions de* (1) *applicables aux fonctions de* $\mathscr{C}$ *sont de la forme*

$$L = M' B,$$

où M', *s'il existe, est un opérateur quelconque, applicable aux fonctions de* $\mathscr{C}''$ *et tel que*

$$R M' = M' R'.$$

En effet soit $\overline{B}$ l'opérateur inverse de B; pour les fonctions de $\mathscr{C}$ on a

$$Q = \overline{B} R' B \qquad (2');$$

et l'égalité (1) devient

$$R L = L \overline{B} R' B;$$

en multipliant les deux membres à droite par $\overline{B}$, on obtient pour les fonctions de $\mathscr{C}''$

$$R L \overline{B} = L \overline{B} R';$$

l'opérateur $M' = L \overline{B}$ possède donc toutes les propriétés qui viennent d'être indiquées, et on a pour les fonctions de $\mathscr{C}$

$$L = M' B.$$

THÉORÈME. — Si une solution particulière C *de* (5) *applique biunivoquement la clase* $\mathscr{C}''$ *sur la classe* $\mathscr{C}'$, *les solutions de* (1) *appliquant une classe de fonctions sur* $\mathscr{C}'$ *sont de la forme.*

$$L = C N',$$

où N', *s'il existe, est un opérateur quelconque, appliquant une classe de fonctions sur* $\mathscr{C}''$ *et vérifiant*

$$Q' N' = N' Q.$$

En effet, si $\overline{C}$ est l'opérateur inverse de C, on a pour les fonctions de $\mathscr{C}'$

$$R = C\,Q'\,\overline{C} \tag{3'}$$

et l'égalité (1) s'écrit

$$C\,Q'\,\overline{C}\,L = L\,Q,$$

soit

$$Q'\,\overline{C}\,L = \overline{C}\,L\,Q,$$

ce qui entraîne le résultat énoncé.

CAS PARTICULIER. — Supposons les opérateurs linéaires. Soient $R = D^{\beta}_{z}$ $R' = D^{\alpha}_{z}$ $\mathscr{C}''$ l'espace des fonctions entières de croissance (σ, τ) avec $\sigma < 1$. Si l'hypothèse de continuité faite sur L est telle que M′ soit un des opérateurs étudiés en III § 3, *la méthode exposée au* § 1 *tombe en défaut pour* $\alpha > \beta$, *alors que la connaissance d'un opérateur* B *possédant un inverse unique permet de résoudre l'égalité* (1).

En effet il n'existe pas dans ce cas de solution particulière A, possédant un inverse unique à droite et à gauche dans $\mathscr{C}$. Car, si elle existait, il lui correspondrait un opérateur M′ applicable aux fonctions de $\mathscr{C}''$, vérifiant $D^{\beta}M' = M'D^{\alpha}$, pour lequel on aurait

$$A = M'\,B;$$

M′ appliquerait donc biunivoquement l'espace $\mathscr{C}''$ sur un espace $\mathscr{C}'$, ce qui est contraire à l'hypothèse $\alpha > \beta$.

De même soient $Q = D^{\alpha}$, $Q' = D^{\beta}$, $\mathscr{C}''$ l'espace des fonctions entières de croissance (σ, τ) avec $\sigma < 1$. Si L est soumis à une condition de continuité telle que N′ est un des opérateurs étudiés en III § 3, *la solution générale de l'égalité* (1) *est obtenue grâce à un opérateur* C *admettant un inverse unique, alors que la méthode exposée au* § 1 *n'est pas applicable pour* $\alpha < \beta$.

En effet il n'existe pas dans ce cas de solution particulière A, appliquant biunivoquement un espace $\mathscr{C}$ sur $\mathscr{C}'$. Car, si elle existait, il lui correspondrait un opérateur N′ vérifiant $D^{\beta}N' = N'D^{\alpha}$ et appliquant biunivoquement $\mathscr{C}$ sur $\mathscr{C}''$, puisque l'on aurait

$$A = C\,N';$$

l'inverse $\overline{N'}$ de N′ vérifierait $D^{\beta}\overline{N'} = \overline{N'}D^{\alpha}$ et appliquerait biunivoquement $\mathscr{C}''$ sur $\mathscr{C}$, ce qui est contraire à l'hypothèse $\beta > \alpha$.

EXEMPLES. — Supposons encore les opérateurs linéaires.

a) Soient $R = D^{\beta}$, $R' = D^{\alpha}$, $\mathscr{C}$ un espace vectoriel de fonctions holomorphes à l'origine et B un opérateur linéaire, *permutable avec* $P_z D$ et défini par les coefficients constants b_n, tels que la fonction

$$B(f) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n a_n \frac{z^n}{n!}$$

soit holomorphe à l'origine pour toute fonction $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}$ de $\mathscr{C}$.

Pour que B admette un inverse unique $\overline{B}$ dans $\mathscr{C}$, il faut et il suffit que toute quantité b_n, correspondant à une valeur de n pour laquelle il existe au moins un coefficient a_n non nul, soit différente de 0; $\overline{B}$ est alors linéaire, permutable avec $P_z D$, défini par les coefficients $1/b_n$ et applicable aux fonctions de $\mathscr{C}''$.

Si $\mathscr{C}''$ est fermé par D^{α}, la relation (2') donne pour les fonctions de $\mathscr{C}$

$$Q(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{n+\alpha}}{b_n} a_{n+\alpha} \frac{z^n}{n!} = B'(f^{(\alpha)}),$$

soit

$$Q = B' D^{\alpha}.$$

B' est lui-même un opérateur linéaire, *permutable avec* $P_z D$, défini par les coefficients

$$b'_n = \frac{b_{n+\alpha}}{b_n}$$

et applicable aux dérivées d'ordre α des fonctions de $\mathscr{C}$.

Inversement on sait résoudre une égalité de la forme

$$D^{\beta} L = L B' D^{\alpha},$$

où B' est un opérateur linéaire, permutable avec $P_z D$ et défini par les coefficients non nuls b'_n. Pour cela on pose, par exemple,

$$b_k = 1, \qquad b_{k+\alpha q} = \prod_{r=0}^{q-1} b'_{k+\alpha r} \qquad (0 \leqslant k < \alpha;\ q > 0).$$

On se place dans un espace vectoriel $\mathscr{C}$ de fonctions holomorphes à l'origine, telles que l'opérateur B leur soit applicable et que l'opérateur B' soit applicable à leurs dérivées d'ordre α.

b) Soient $Q = D^{\alpha}$, $Q' = D^{\beta}$, C un opérateur linéaire, *permutable avec* $P_z D$, défini par les coefficients non nuls c_n et appliquant biunivoquement un espace vectoriel $\mathscr{C}''$ de fonctions holomorphes à l'origine fermé par D^{β} sur un espace $\mathscr{C}'$ de fonctions holomorphes à l'origine. La relation (3') donne pour les fonctions de $\mathscr{C}'$

$$\mathrm{R}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{c_{n+\beta}} a_{n+\beta} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{C}'(f^{(\beta)}),$$

soit

$$\mathrm{R} = \mathrm{C}'\mathrm{D}^{\beta};$$

C' est donc un opérateur linéaire, *permutable avec* $\mathrm{P}_z \mathrm{D}$, défini par les coefficients

$$c'_n = \frac{c_n}{c_{n+\beta}}$$

et appliquant sur $\mathscr{C}'$ l'espace des dérivées d'ordre β des fonctions de $\mathscr{C}'$.

Inversement on sait résoudre une égalité de la forme

$$\mathrm{C}'\mathrm{D}^{\beta}\mathrm{L} = \mathrm{L}\mathrm{D}^{\alpha},$$

où C' est un opérateur linéaire, permutable avec $\mathrm{P}_z \mathrm{D}$, défini par les coefficients non nuls c'_n. On pose, par exemple,

$$c_{k'} = 1, \qquad c_{k'+\beta q} = 1/\prod_{r=0}^{q-1} c'_{k'+\beta r} \qquad (0 \leqslant k' < \beta;\ q > 0).$$

$\mathscr{C}'$ est choisi de sorte qu'il existe deux espaces de fonctions holomorphes à l'origine, que C et C' appliquent respectivement sur $\mathscr{C}'$.

CAS DE PLUSIEURS SOLUTIONS. De même qu'au § 3, on démontre le résultat suivant :

THÉORÈME. — Si l'égalité (4) *admet un système essentiel de solutions linéaires* B_j, *en nombre fini, applicables aux fonctions d'un même espace vectoriel* $\mathscr{C}$, *toute solution linéaire de* (1), *applicable aux mêmes fonctions est de la forme*

$$\mathrm{L} = \sum_j \mathrm{M}'_j \mathrm{B}_j.$$

Si B_j applique $\mathscr{C}$ sur l'espace $\mathscr{C}''_j$, M'_j est un opérateur linéaire, quelconque, vérifiant

$$\mathrm{R}\,\mathrm{M}'_j = \mathrm{M}'_j \mathrm{R}'$$

et applicable aux fonctions de $\mathscr{C}''_j$.

Des exemples seront étudiés en détail dans le chapitre suivant pour $\mathrm{R} = \mathrm{D}^{\beta}$ et $\mathrm{R}' = \mathrm{D}^{\alpha}$. D'autre part on remarque, comme au § 3, qu'une méthode analogue n'est pas applicable au cas où l'opérateur linéaire L doit appliquer un espace vectoriel, quelconque de fonctions sur un espace vectoriel, donné.

5. *ÉQUATIONS AVEC SECOND MEMBRE.*

L'égalité (1) peut être considérée comme une équation homogène du premier degré en L. Sa résolution permet, en supposant R linéaire, celle d'une *équation non homogène du premier degré en* L

$$\mathrm{R\,L - L\,Q = T}$$

où T est un opérateur donné. En effet, si l'on connaît une solution particulière, applicable aux fonctions de la classe considérée, ou appliquant une classe de fonctions sur une classe donnée, la solution générale est la somme de cette solution particulière et de la solution générale de l'équation « sans second membre » (1). Cela résulte de la définition de la somme $L + L'$ de deux opérateurs L et L' applicables à une même fonction $f(z)$, définition donnée par l'égalité $(L + L')(f) = L(f) + L'(f)$.

Ainsi pour p entier positif *une solution particulière de l'équation*

$$\mathrm{D\,L - L\,D = D}^p \tag{6}$$

est $\mathrm{P}_z \mathrm{D}^p$; il faut ajouter à cet opérateur un opérateur quelconque, permutable avec D et, par exemple, applicable aux fonctions analytiques considérées pour obtenir la solution générale de (6). On peut étendre ce résultat au cas où $p = 0$, en supposant, comme l'a fait jusqu'ici, que $\mathrm{D}^0 = 1$ est l'identité.

Montrons que l'on peut ainsi résoudre des *équations de type analogue*. Soit A un opérateur permutable avec D et appliquant biunivoquement une classe $\mathscr{C}$ de fonctions fermée par D sur une classe $\mathscr{C}'$. Les solutions de (6) applicables aux fonctions de $\mathscr{C}$ peuvent être mises sous la forme

$$\mathrm{L = M\,A},$$

soit

$$\mathrm{D\,M\,A - M\,A\,D = D}^p \quad \text{ou} \quad \mathrm{D\,M\,A - M\,D\,A = D}^p;$$

en multipliant à droite les deux membres de la dernière égalité par l'opérateur $\overline{\mathrm{A}}$ inverse de A, on obtient pour les fonctions de $\mathscr{C}'$

$$\mathrm{D\,M - M\,D = D}^p\,\overline{\mathrm{A}}.$$

Inversement considérons une égalité de la forme

$$\mathrm{D\,M - M\,D = T} \tag{6'}$$

où T est un opérateur donné, permutable avec D; si on peut mettre T sous la forme $\mathrm{D}^p\,\overline{\mathrm{A}}$ et si $\overline{\mathrm{A}}$ applique biunivoquement une classe $\mathscr{C}'$ sur une classe $\mathscr{C}$, la solution générale de (6′) applicable aux fonctions de $\mathscr{C}'$ est

$$\mathrm{M = L}\,\overline{\mathrm{A}},$$

où L est une solution de (6) applicable aux fonctions de $\mathscr{C}$.

Supposons que T soit un des opérateurs étudiés au chapitre I et applicables aux fonctions entières de croissance (σ, τ) avec $\sigma < 1$ et que ces fonctions forment les deux classes identiques $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. On connaît les solutions linéaires de (6′), applicables aux fonctions de $\mathscr{C}$, si on a pour toute fonction $f(z)$ de $\mathscr{C}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{M\,A}(s_n) = \mathrm{M\,A}(f)$$

en chaque point d'un voisinage d'un point donné à distance finie.

CHAPITRE V

ÉTUDE DE QUELQUES CAS PARTICULIERS

Dans ce chapitre et dans les suivants *les opérateurs considérés sont linéaires et* P *désigne l'opérateur* P_z.

Ce chapitre donne un exemple des méthodes exposées en IV; mais les résultats qu'elles permettent d'obtenir peuvent être complétés dans certains cas; ainsi les opérateurs solutions de $RL = LQ$ et applicables aux fonctions de certaines classes de fonctions sont encore de la forme trouvée en IV § 3, même si les produits $M_i A_i$ sont seulement formels. D'autre part des égalités d'un type différent de $RL = LQ$ fournissent cependant des solutions de forme analogue ($L = CN'$); mais il faut observer que les autres hypothèses faites sur L ne sont plus les mêmes; en IV on imposait la classe des fonctions $L(f)$, alors qu'ici L sera applicable à une classe donnée de fonctions et soumis à une condition de continuité. Enfin ces solutions elles-mêmes peuvent être encore mises sous une autre forme.

1. *OPÉRATEURS TRANSFORMANT* $P^\gamma D^{\gamma+\alpha}$ *EN* D^β.

α, β, γ désignent des entiers positifs, E un espace vectoriel de fonctions holomorphes à l'origine fermé par $P^\gamma D^{\gamma+\alpha}$. On étudie les opérateurs L linéaires, applicables aux fonctions de E et vérifiant pour toute fonction de E l'égalité

$$D^\beta L = L P^\gamma D^{\gamma+\alpha} \tag{1}$$

Un tel opérateur est déterminé par les fonctions $h_n(z) = L(z^n/n!)$. On peut calculer ces fonctions en écrivant les relations différentielles, qui existent entre elles. Mais on va utiliser une *méthode moins directe, mais plus intéressante*. Pour cela supposons que E soit l'espace des polynômes; il existe un *système essentiel de solutions de l'égalité*

$$D^\alpha L = L P^\gamma D^{\gamma+\alpha} \tag{2}$$

applicables aux fonctions de E; ce sont d'une part les opérateurs A_i ($0 \leqslant i < \gamma$) tels que

$$A_i(f) = f^{(i)}(0),$$

d'autre part un opérateur CD^γ, où C est un opérateur permutable avec P D, défini par des coefficients c_n non nuls; en effet, en appliquant les deux membres de l'égalité (2) à

$$z^{n+\gamma+\alpha}/(n+\gamma+\alpha)!,$$

on trouve

$$c_{n+\alpha}\,\frac{z^n}{n!} = \frac{(n+\gamma)!}{n!}\;c_n\,\frac{z^n}{n!}.$$

Il suffit donc que les quantités c_n vérifient

$$c_{n+\alpha} = \frac{(n+\gamma)!}{n!}\, c_n \qquad (n = 0, \ldots).$$

Pour qu'elles ne soient pas nulles, on prend, par exemple,

$$c_{k+\alpha q} = \prod_{r=0}^{q} c'_{k+\alpha r} \qquad (0 \leqslant k < \alpha;\ q \geqslant 0)$$

avec

$$c'_k = 1 \quad \text{et} \quad c'_n = \frac{(n+\gamma-\alpha)!}{(n-\alpha)!} \qquad (n \geqslant \alpha).$$

Ainsi *dans l'espace des polynômes la solution générale de* (1) *est*

$$\mathrm{L} = \sum_{i=0}^{\gamma-1} \mathrm{M}_i \mathrm{A}_i + \mathrm{M\,C\,D}^{\gamma} \qquad (3).$$

Les opérateurs M_i transforment D^{α} en D^{β}; les fonctions $h_i(z)$ sont donc des polynômes arbitraires de degré inférieur à β. L'opérateur M aussi transforme D^{α} en D^{β}; s'il est défini (*cf.* III § 1) par les coefficients $m_n^{k'}$ $(0 \leqslant k' < \beta)$, c'est-à-dire par les polynômes $\mathrm{H}_n(z) = \mathrm{M}(z^n/n!)$, on a pour $n \geqslant 0$

$$h_{n+\gamma}(z) = c_n \mathrm{H}_n(z).$$

2. *CONSÉQUENCES.*

1. *Dans l'espace des polynômes l'opérateur* L *est représenté* (*cf.* II) *par une matrice infinie.* Dans les γ premières colonnes de celle-ci les termes des β premières lignes sont arbitraires et tous les autres éléments sont nuls. La seconde partie de la matrice est de la forme étudiée en II § 6 avec $b_n = 1$, quel que soit n.

$$\begin{matrix} l_0^0 & c_0 m_0^0 & c_1 m_1^0 & c_2 m_2^0 & c_3 m_3^0 & c_4 m_4^0 & \cdots \\ l_0^1 & c_0 m_0^1 & c_1 m_1^1 & c_2 m_2^1 & c_3 m_3^1 & c_4 m_4^1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 m_0^0 & c_4 m_1^0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 m_0^1 & c_4 m_1^1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix} \quad \text{pour} \quad \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 1. \end{cases}$$

2. Pour un espace E quelconque on supposera que, lorsque $n \to \infty$, $\mathrm{L}(s_n)$ converge *uniformément vers* $\mathrm{L}(f)$ *dans un voisinage de l'origine* pouvant dépendre de la fonction, de façon à pouvoir dériver terme à terme la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n h_n(z);$$

comme en III § 1, L vérifie donc l'égalité proposée (1).

3. Dans les exemples qui vont suivre (§ 3) cette convergence uniforme *entraîne* la convergence absolue de la série double formée en remplaçant $h_n(z)$ par son expression; on peut donc permuter dans

$$\sum_{n=y}^{\infty} a_n h_n(z)$$

l'ordre des termes et considérer cette fonction comme la somme de $\alpha\beta$ facteurs $\mu_k^{k'}(\mathrm{D}^\beta)(\phi_k^{k'})$ (notations analogues à celles de III § 3) avec

$$\phi_k^{k'}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\gamma+k+\alpha n}\, c_{k+\alpha n} \frac{z^{k'+\beta n}}{(k'+\beta n)!}$$

4. Dans cette même hypothèse de convergence uniforme L a encore la forme (3); mais dans certains cas on ne peut appliquer successivement les opérateurs $\mathrm{C\,D}^\gamma$ et M à toutes les fonctions considérées; toutefois on convient alors de *garder le produit formel* $\mathrm{M\,C\,D}^\gamma$ et la formule obtenue généralise le résultat trouvé à l'aide de la méthode exposée au chapitre précédent.

3. *CONDITIONS D'APPLICATION.*

On a

$$[(n-1)!\,\alpha^n]^\gamma < c_{\alpha n} < [(n+\gamma_0)!\,\alpha^n]^\gamma,$$

où γ_0 est le quotient de la division de γ par α; d'où

$$\lim_{n\to\infty} (n!^{-\gamma/\alpha}|c_n|)^{1/n} = 1.$$

La condition de continuité énoncée au § 2. 2 permet d'utiliser l'étude faite en II § 6; celle-ci fournit alors une série majorant la série double définissant $\mathrm{L}(f)$; d'autre part des calculs analogues à ceux faits en III § 2 font connaître la croissance des fonctions $\phi_k^{k'}(z)$, et on fait un raisonnement analogue à celui de III § 3.

THÉORÈME. — Pour que l'opérateur L *soit applicable aux fonctions entières de croissance* (σ, τ), *il faut et il suffit que* $\sigma \leqslant \alpha/(\gamma + \alpha - \beta)$ *pour* $\gamma + \alpha > \beta$ *et*

$$m = \sup_{0 \leqslant k' < \beta} \left[\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(n!^{\,1-\frac{1}{\sigma}+\frac{\gamma}{\alpha}} |m_n^{k'}|\right)^{1/n} \right] < (\sigma\tau)^{-1/\sigma}.$$

Les fonctions $\phi_k^{k'}(z)$, correspondant à une fonction $f(z)$ entière du type τ de l'ordre σ, sont entières de croissance (σ', τ') avec

$$\frac{1}{\sigma'} - 1 = \rho\left(\frac{1}{\sigma} - 1 - \frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

$$(\sigma'\tau')^{1/\sigma'} = \rho^{\rho(1+\gamma/\alpha)}(\sigma\tau/\rho)^{\rho/\sigma}$$

si $\rho = \alpha/\beta$ et $\sigma < \alpha/(\gamma+\alpha-\beta)$ pour $\gamma+\alpha > \beta$; $L(f)$ est donc une fonction entière de croissance (σ', τ') pour $\sigma \leqslant \alpha/(\gamma+\alpha)$, de croissance (σ', τ_1) avec

$$\tau_1 = \tau'(1 - [m(\sigma\tau)^{1/\sigma}]^{\sigma'/(\sigma'-1)})^{1-\sigma'}$$

pour $\sigma > \alpha/(\gamma+\alpha)$. Si $\gamma+\alpha > \beta$ et $\sigma = \alpha/(\gamma+\alpha-\beta)$, les fonctions $\phi_k^{k'}(z)$ sont holomorphes dans

$$|z| < \frac{1}{\rho}(\sigma\tau)^{-\rho/\sigma},$$

et la fonction $L(f)$ dans

$$|z| < \frac{1}{\rho}[(\sigma\tau)^{-\rho/\sigma} - m^{\rho}].$$

REMARQUES. — 1. *Il n'est pas toujours possible d'appliquer successivement les opérateurs* CD^{γ} *et* M *à toutes les fonctions entières de croissance* (σ, τ).

En effet CD^{γ} n'est applicable à une fonction $f(z)$ entière du type τ de l'ordre σ que si $\sigma \leqslant \alpha/\gamma$. Pour $\sigma < \alpha/\gamma$ $CD^{\gamma}(f)$ est une fonction entière du type τ'' de l'ordre σ'' avec

$$\frac{1}{\sigma''} = \frac{1}{\sigma} - \frac{\gamma}{\alpha}, \qquad (\sigma''\tau'')^{1/\sigma''} = (\sigma\tau)^{1/\sigma};$$

pour $\sigma = \alpha/\gamma$ le développement de $CD^{\gamma}(f)$ en série entière en z au voisinage de l'origine admet $(\sigma\tau)^{-1/\sigma}$ pour rayon de convergence; pour $\sigma > \alpha/\gamma$, la fonction $CD^{\gamma}(f)$ n'est pas définie, alors que, si $\alpha > \beta$, $L(f)$ peut exister, comme on vient de le voir.

On comprend ainsi l'intérêt d'introduire les fonctions $\phi_k^{k'}(z)$.

2. Pour $\sigma < \alpha/(\gamma + \alpha)$ σ'' est inférieur à 1. Dans ce cas on sait *trouver les solutions entières de croissance* (σ, τ) *de l'équation*

$$L(f) = g(z),$$

si on se donne la fonction $g(z)$ entière de croissance (σ', τ'). On prend arbitrairement les γ premiers coefficients du développement en série de $f(z)$, et on cherche toutes les solutions $\phi(z)$ entières de croissance (σ'', τ'') de l'équation

$$M(\phi) = g(z) - \sum_{i=0}^{\gamma-1} a_i h_i(z);$$

s'il en existe une pour un ensemble de valeurs attribuées aux coefficients a_i $(0 \leqslant i < \gamma)$, on a

$$D^{\gamma}(f) = \overline{C}(\phi),$$

en désignant par $\overline{C}$ l'opérateur inverse de C; cela achève la détermination de la fonction $f(z)$.

3. Si on a $\sigma < \alpha/(\gamma + \alpha)$ et si le « rang » de l'opérateur M (*cf.* III § 4) est égal à α, L (f) *est une fonction entière du type τ' de l'ordre σ' pour une fonction $f(z)$ entière du type τ de l'ordre σ.*

THÉORÈME. — Pour que l'opérateur L *soit applicable aux fonctions holomorphes dans* $|z| < R$, *il faut et il suffit que* $\gamma + \alpha \leqslant \beta$ *et*

$$m' = \sup_{0 \leq k' < \beta} \left[\overline{\lim_{n \to \infty}} \, (n!^{1+\gamma/\alpha} |m_n^{k'}|)^{1/n} \right] < R.$$

Si $\gamma + \alpha = \beta$, les fonctions $\phi_k^{k'}(z)$ sont holomorphes dans $|z| < R^\rho/\rho$ et la fonction $L(f)$ dans

$$|z| < \frac{1}{\rho}(R^\rho - m'^\rho).$$

Si $\gamma + \alpha < \beta$, les fonctions $\phi_k^{k'}(z)$ sont entières de croissance (σ', τ') avec

$$\sigma' = \frac{\beta}{\gamma + \alpha - \beta}, \qquad (\sigma' \tau')^{1/\sigma'} = \rho^{\rho(1+\gamma/\alpha)} R^{-\rho}$$

et la fonction $L(f)$ est entière de croissance (σ', τ_1) avec

$$\tau_1 = \tau' [1 - (m'/R)^{\alpha/(\gamma+\alpha)}]^{1-\sigma'}.$$

4. *EXTENSION A UNE FORME D'EULER.*

On remplace l'égalité (1) par

$$D^\beta L = LB,$$

où B est l'opérateur différentiel d'Euler

$$B = \sum_{q=0}^{\gamma} b_q P^q D^{q+\alpha},$$

défini par les constantes b_q avec $b_\gamma \neq 0$. On suppose $b_\gamma = 1$; s'il n'en est pas ainsi, on se ramène à ce cas en multipliant z par une racine d'ordre β de $1/b_\gamma$ dans l'expression de L (f); cette opération est possible, car L (f), comme dans les paragraphes précédents, est une fonction holomorphe à l'origine.

On pourrait faire ici un raisonnement analogue à celui du § 1; mais on peut aussi utiliser la méthode directe, qui consiste à écrire les relations différentielles entre les fonctions $h_n(z)$; celles-ci se mettent sous la forme

$$h_n^{(\beta)}(z) = c_n'' h_{n-\alpha}(z)$$

avec

$$c''_n = 0 \qquad (n < \alpha),$$

$$\frac{c''_n}{(n-\alpha)!} = \sum_{q=0}^{n-\alpha} \frac{b_q}{(n-\alpha-q)!} \qquad (\alpha \leqslant n < \gamma + \alpha),$$

$$\frac{c''_n}{(n-\alpha)!} = \sum_{q=0}^{\gamma} \frac{b_q}{(n-\alpha-q)!} \qquad (n \geqslant \gamma + \alpha).$$

Les fonctions $h_n(z)$ sont donc des polynômes, dont la forme dépend de la valeur des quantités c''_n; en effet *un nombre fini de ces dernières peuvent être nulles*, parce que z^n est solution de l'équation différentielle d'Euler

$$\sum_{q=0}^{\infty} b_q z^q y^{(q+\alpha)} = 0 \qquad (4);$$

cela a lieu en particulier, lorsque les premiers coefficients b_q sont nuls (*cf.* § 1). On cherche les solutions de cette équation, qui sont des puissances de z, dont l'exposant est un entier supérieur ou égal à α; elles sont en nombre fini. Ce sont en particulier z^2 et z^4 dans l'*exemple*

$$\mathrm{D\,L} = \mathrm{L}(\mathrm{P}^2\mathrm{D}^4 - \mathrm{P\,D}^3),$$

que nous traiterons maintenant, afin d'éviter un exposé trop compliqué.

Dans l'espace des polynômes l'opérateur L est défini par une matrice infinie de la forme

$$\begin{matrix} l_0 & c_1 m_1 & l_1 & c_3 m_3 & c_0 m_0 & c_5 m_5 & c_2 m_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & c_3 m_1 & 0 & c_5 m_3 & c_2 m_0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 m_1 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}$$

et on a

$$\mathrm{L} = l_0 \mathrm{A}_0 + l_1 \mathrm{A}_1 + \mathrm{M\,C\,A},$$

où les opérateurs A_0, A_1, A sont tels que

$$\mathrm{A}_0(f) = f(0), \qquad \mathrm{A}_1(f) = f''(0),$$

$$\mathrm{A}(f) = \sum_{n \geqslant 0} a_{2n+4} \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n \geqslant 0} a_{2n+1} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

l'opérateur C est permutable avec P D et défini par les coefficients non nuls c_n

$$\begin{aligned} c_0 = 1, \qquad & c_{2n} = 4^n \prod_{q=1}^{n} q(q+1), \\ c_1 = 1, \qquad & c_{2n+1} = \prod_{q=1}^{n} (2q-1)(2q-3); \end{aligned} \qquad (n > 0)$$

l'opérateur M transforme D^2 en D. On retrouve ainsi que dans l'espace des polynômes A_0, A_1, C A forment un système essentiel de solutions de l'égalité $D^2 L = L B$.

Cela montre que la plupart des résultats obtenus dans les paragraphes précédents peuvent s'étendre à cette étude et, plus généralement, au cas d'un opérateur B d'Euler quelconque; car *l'hypothèse* $b_\gamma = 1$ *entraîne que les coefficients* c_n, analogues à ceux que nous venons de faire intervenir, *vérifient encore* :

$$\lim_{n \to \infty} (n!^{-\gamma/\alpha} |c_n|)^{1/n} = 1.$$

REMARQUE. — Un cas intéressant est celui, où aucune puissance de z d'exposant supérieur ou égal à α n'est solution de l'équation (4); la méthode précédente s'applique, mais il est préférable de remarquer que *l'opérateur* B *se met alors sous la forme* $B' D^\alpha$, où B' est l'opérateur linéaire, permutable avec P D et défini par les coefficients non nuls $b'_n = c''_{n-\alpha}$; on rattachera cette étude à celle de l'un des exemples donnés en IV § 4. Cela a lieu en particulier pour $B = D^{\gamma+\alpha} P^\gamma$, cas qui sera examiné au chapitre suivant.

5. *ÉTUDE D'UNE ÉGALITÉ PARTICULIÈRE.*

On a trouvé au chapitre précédent (IV §§ 1 et 4) pour solutions de l'égalité $R L = L Q$ des opérateurs de la forme $L = A N$ ou $L = C N'$; rappelons que ces opérateurs ne sont pas nécessairement linéaires et que l'on leur impose seulement d'appliquer une classe quelconque de fonctions sur une classe donnée. On se propose de montrer que, à une différence de notation près, cette forme de solution n'est pas caractéristique de ce type d'égalité. Cependant on remarquera que *les hypothèses faites sur L sont totalement différentes.*

En effet soit E un espace vectoriel de fonctions holomorphes à l'origine fermé par D^α; on étudie les opérateurs linéaires, applicables aux fonctions de E, soumis à une condition de continuité à préciser et vérifiant l'égalité

$$D L = \sum_{q=0}^{p} c_q P^q L D^{(q+1)\alpha} \tag{5}$$

où p est α sont des entiers positifs et les quantités c_q des constantes données; on suppose $c_p = 1$, sans diminuer la généralité de la question (*cf.* plus haut).

Les fonctions $h_n(z)$ vérifient

$$h'_k(z) = 0 \qquad (0 \leqslant k < \alpha),$$

$$h'_{k+\alpha(r+1)}(z) = \sum_{q=0}^{r} c_q z^q h_{k+\alpha(r-q)}(z) \qquad (0 \leqslant r < p),$$

$$h'_{k+\alpha(r+1)}(z) = \sum_{q=0}^{p} c_q z^q h_{k+\alpha(r-q)}(z) \qquad (r \geqslant p).$$

Ce sont des polynômes de la forme

$$h_{k+\alpha r}(z) = \sum_{s=0}^{r} m_{k+\alpha s} b_{r-s} \frac{z^{r-s}}{(r-s)!},$$

où m_n est une constante arbitraire.

Dans l'espace des polynômes l'opérateur L est défini par une *matrice infinie de la forme étudiée en* II § 6 avec $\beta = 1$; et on a

$$\mathrm{L} = \mathrm{B\,M},$$

où B est l'opérateur permutable avec P D, défini par les coefficients b_n et M un opérateur transformant D^α en D.

Pour que réciproquement un opérateur L défini par une telle matrice infinie vérifie (5) pour toute fonction de E, on suppose que l'on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{L}(s_n) = \mathrm{L}(f)$$

uniformément dans un voisinage de l'origine (pouvant dépendre de la fonction considérée).

DÉTERMINATION DES CONSTANTES b_n. Elles sont définies à un facteur multiplicatif près; on peut les calculer directement à partir des relations différentielles entre les fonctions $h_n(z)$; mais il est plus simple de procéder comme suit : prenons $m_0 = b_0 = 1$, $m_n = 0$ pour $n \neq 0$. Montrons que L est applicable à e^z; s'il en est ainsi, $\mathrm{L}(e^z)$ est, comme le montre (5), une solution de l'équation différentielle

$$y' = \left(\sum_{q=0}^{p} c_q z^q\right) y;$$

puisqu'elle est égale à 1 pour $z = 0$, l'unicité de la fonction $\mathrm{L}(e^z)$ montre que

$$\mathrm{L}(e^z) = \exp\left[\int_0^z \left(\sum_{q=0}^{p} c_q z^q\right) dz\right],$$

fonction entière, dont le développement en série entière en z autour de l'origine converge uniformément dans tout domaine borné; or pour e^z on a

$$L(s_n) = \sum_{m=0}^{n} b_m \frac{z^m}{m!};$$

ce polynôme est donc la somme partielle de rang n du développement en série de l'exponentielle; b_n est le coefficient du terme en $z^n/n!$ dans ce dernier; il vérifie donc

$$\lim_{n\to\infty} (n!^{-p/(p+1)}|b_n|)^{1/n} = 1.$$

De II § 6 on déduit le résultat suivant : pour que l'opérateur L soit applicable aux fonctions entières de croissance (σ, τ), il faut et il suffit qu'il en soit de même de M et que

$$\sigma \leqslant \frac{\alpha(p+1)}{\alpha(p+1)-1};$$

on peut donc appliquer successivement les opérateurs M et B à ces fonctions.

CAS PARTICULIER. — C'est celui où aucune des quantités b_n n'est nulle; l'opérateur B admet pour un espace convenable de fonctions un inverse unique. Essayons alors de *rapprocher les résultats obtenus ici de ceux du chapitre précédent.*

Si on donne l'espace E′ des fonctions $L(f)$, on en déduit l'espace E″ que B applique biunivoquement sur E′; par exemple, si E′ est l'espace des fonctions entières de croissance (σ', τ'), E″ est celui des fonctions entières de croissance (σ'', τ'') avec

$$\frac{1}{\sigma''} = \frac{1}{\sigma'} + \frac{p}{p+1}, \qquad (\sigma''\tau'')^{1/\sigma''} = (\sigma'\tau')^{1/\sigma'};$$

supposons $\sigma' < p+1$ et $\alpha = 1$.

Les propriétés énoncées en IV indiquent que M est un opérateur permutable avec D et appliquant un espace E sur E″ avec $\sigma'' < 1$; pour retrouver les résultats de ce paragraphe, il faut de plus que L soit linéaire et soumis à la condition de continuité donnée ci-dessus, mais aussi que l'on impose à E, par exemple, de ne contenir que des fonctions entières d'ordre inférieur à 1; d'après I on voit que M est alors un opérateur quelconque, applicable aux fonctions de E″, puisqu'un tel opérateur conserve l'ordre et le type des fonctions.

6. *AUTRE FORME DE LA SOLUTION.*

Dans certains cas on peut donner encore une autre forme aux opérateurs étudiés dans le paragraphe précédent. A cet effet étudions les opérateurs L linéaires, vérifiant

$$DL = P_g L D^\alpha,$$

où α est encore un entier positif et $g(z)$ une fonction donnée, holomorphe à l'origine; les relations entre les fonctions $L(z^n/n!) = h_n(z)$ montrent que

$$h_n(z) = H_n[G(z)];$$

$G(z)$ est une primitive de $g(z)$ et

$$H_n(z) = N(z^n/n!),$$

où l'opérateur linéaire N transforme D^α en D. *Dans l'espace des polynômes on a donc*

$$L = S_G N.$$

CONSÉQUENCE. Cette expression peut être généralisée moyennant une condition de continuité convenable. Ainsi dans le cas, où le second membre de l'égalité (5) ne comporte qu'un seul terme, c'est-à-dire

$$DL = P^p L D^{(p+1)\alpha},$$

les solutions linéaires dans l'espace des polynômes sont de la forme

$$L = S_{z^{p+1}/(p+1)} N',$$

où N' est un opérateur transformant $D^{(p+1)\alpha}$ en D. *Cette forme est encore valable, si on suppose*, comme on l'a fait plus haut, que $L(s_n)$ converge uniformément dans un voisinage de l'origine vers $L(f)$, lorsque $n \to \infty$, et que E est l'espace des fonctions entières de croissance (σ, τ) avec

$$\sigma \leqslant \frac{\alpha(p+1)}{\alpha(p+1)-1}.$$

En effet la convergence uniforme d'une suite de fonctions $\{f_n(z)\}$ dans un voisinage de l'origine entraîne celle de la suite

$$\left\{f_n\left(\frac{z^{p+1}}{p+1}\right)\right\}$$

dans un voisinage de l'origine, et réciproquement; $N'(s_n)$ converge donc uniformément vers $N'(f)$ dans un voisinage de l'origine, et N' est un des opérateurs étudiés en III § 3.

REMARQUE. — Il faut rapprocher le résultat obtenu au début de ce paragraphe de celui de IV § 2. 4. Remarquons ici encore que *les hypothèses sont différentes* dans les deux cas; en effet en IV § 2. 4 on a $\alpha = 1$ et on se donne l'espace des fonctions $L(f)$; L n'est pas nécessairement linéaire et n'est soumis à aucune condition de continuité; par contre on impose une hypothèse d'univalence à la fonction $\bar{g}(z.)$

CHAPITRE VI

TRANSFORMATIONS D'UNE ÉGALITÉ

On se propose d'étudier l'égalité traduisant qu'un opérateur L est permutable avec $D^{\gamma+\alpha}P^{\gamma}$, α et γ étant deux entiers positifs; si on multiplie les deux membres par un même opérateur connu, on obtient une nouvelle égalité, dont on peut « prévoir » certaines solutions, mais ce ne sont pas les seules en général; chaque cas doit être étudié en particulier, selon des méthodes que l'on s'efforcera de varier; on est ainsi conduit de proche en proche jusqu'aux opérateurs permutables avec $P^{\gamma}D^{\gamma+\alpha}$.

1. *OPÉRATEURS PERMUTABLES AVEC* $D^{\gamma+\alpha}P^{\gamma}$.

On recherche les opérateurs linéaires L, *permutables avec* $D^{\gamma+\alpha}P^{\gamma}$,

$$D^{\gamma+\alpha}P^{\gamma}L = L\,D^{\gamma+\alpha}P^{\gamma} \tag{1}$$

et applicables aux fonctions d'un espace vectoriel E de fonctions holomorphes à l'origine fermé par $D^{\gamma+\alpha}P^{\gamma}$.

On prend pour E l'espace des polynômes, afin de déterminer les fonctions $h_n(z)$; celles-ci sont des polynômes, comme le montrent les équations différentielles, dont elles sont solutions. L applique donc E dans lui-même. D'autre part la remarque faite à la fin de V § 4 conduit, comme dans l'exemple *a*) de IV § 4, à prendre comme solution particulière B de l'égalité

$$D^{\alpha}B = B\,D^{\gamma+\alpha}P^{\gamma} \tag{2}$$

un opérateur permutable avec P D, défini par des coefficients b_n non nuls. B applique biunivoquement E sur lui-même et L *est donc dans* E *le transmué par l'inverse* $\overline{B}$ *de* B *d'un opérateur* M *permutable avec* D^{α} et applicable aux polynômes; ce dernier applique bien du reste E dans lui-même. Par conséquent l'opérateur L est défini par une matrice infinie de la forme étudiée en II § 6; elle se déduit de celle définissant M en multipliant les élément de la colonne de rang n par b_n et en divisant ceux de la ligne de rang q par b_q.

Il reste à déterminer les quantités b_n. En appliquant les deux membres de l'égalité (2) à $z^n/n!$ avec $n \geqslant \alpha$, on obtient

$$b_n \frac{z^{n-\alpha}}{(n-\alpha)!} = \frac{(n+\gamma)!}{n!}\, b_{n-\alpha} \frac{z^{n-\alpha}}{(n-\alpha)!};$$

il suffit donc de poser

$$b_n = \frac{(n+\gamma)!}{n!}\, b_{n-\alpha}$$

pour $n \geqslant \alpha$; on reconnaît l'analogie avec l'égalité définissant les constantes c_n en V § 1; il est naturel de poser

$$b_n = c_{n+\alpha}.$$

De plus on se réserve ainsi la possibilité de prendre pour b_n certains indices négatifs, qui seront utiles dans la suite,

$$b_n = 1 \qquad\qquad (-\alpha \leqslant n < 0).$$

On en déduit qu'*aucune des quantités* b_n $(n \geqslant -\alpha)$ *n'est nulle* et que l'on a

$$\lim_{n\to\infty} (n!^{-\gamma/\alpha}|b_n|)^{1/n} = 1.$$

Les fonctions $h_n(z)$ sont donc de la forme

$$h_n(z) = b_n \overline{\mathrm{B}}(\mathrm{H}_n)$$

avec

$$\mathrm{H}_n(z) = \mathrm{M}(z^n/n!).$$

Comme dans les exemples précédents, si E n'est pas un espace de polynômes, on supposera que l'on a pour toute fonctions de E

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{L}(s_n) = \mathrm{L}(f) \tag{3}$$

uniformément dans un voisinage de l'origine; ainsi L vérifie bien (1) dans E et les résultats de II § 6 sont applicables.

2. *CONDITIONS D'APPLICATION.*

Supposons en effet l'opérateur M défini par les coefficients $m_n^{k'}$.

THÉORÈME. — La condition nécessaire et suffisante pour que l'opérateur L *soit applicable aux fonctions entières de croissance* (σ, τ) *est*

$$m = \sup_{0\leqslant k'<\alpha}\left[\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \left(n!^{\,1-\frac{1}{\sigma}+\frac{\gamma}{\alpha}}\, |m_n^{k'}|\right)^{1/n}\right] < (\sigma\tau)^{-1/\sigma}.$$

La série majorante obtenue dans la démonstration de la Proposition 1 (II § 6) montre que, si $f(z)$ est une fonction entière du type τ de l'ordre σ, $\mathrm{L}(f)$ est pour $s = 1 - \frac{1}{\sigma} + \frac{\gamma}{\alpha} \leqslant 0$, c'est-à-dire $\sigma \leqslant \frac{\alpha}{\gamma+\alpha}$ une fonction entière de croissance (σ, τ), pour $\sigma > \frac{\alpha}{\gamma+\alpha}$ une fonction entière de croissance (σ, τ_1) avec

$$\tau_1 = \tau(1 - [m(\sigma\tau)^{1/\sigma}]^{1/s})^{-s\sigma}.$$

REMARQUES.

1. Si $\alpha = 1$, *il suffit que l'on ait* (3) *en chaque point d'un voisinage de l'origine*; la majoration obtenue entraîne la convergence uniforme de (3) dans tout domaine borné pour toutes les valeurs de α.

2. La croissance de L (f) peut être étudiée directement dans le cas où $\sigma \leqslant \alpha/\gamma$; car *les opérateurs* B, M, $\bar{\mathrm{B}}$ *sont successivement applicables à* $f(z)$ (*cf.* V § 3); l'opérateur L garde la forme $\bar{\mathrm{B}}\mathrm{MB}$ trouvée dans l'espace des polynômes; pour $\sigma > \alpha/\gamma$ ce produit n'est plus que formel.

3. Si $\sigma < \alpha/(\gamma + \alpha)$ et si le « rang » de l'opérateur M (*cf.* III § 4) est égal à α, L (f) et $f(z)$ *ont même ordre et même type.*

4. Pour les mêmes valeurs de σ on sait *résoudre l'équation*

$$\mathrm{L}(f) = g(z),$$

où les fonctions inconnue $f(z)$ et donnée $g(z)$ sont entières de croissance (σ, τ).

THÉORÈME. — La condition nécessaire et suffisante pour que l'opérateur L *soit applicable aux fonctions holomorphes dans* $|z| < \mathrm{R}$ *est*

$$m' = \sup_{0 \leqslant k' < \alpha} \left[\overline{\lim_{n \to \infty}} \left(n!^{1+\gamma/\alpha} |m_n^{k'}|\right)^{1/n} \right] < \mathrm{R}.$$

Si $f(z)$ est une fonction holomorphe dans $|z| < \mathrm{R}$, la fonction L (f) est holomorphe dans

$$|z| < \mathrm{R}\left[1 - (m'/\mathrm{R})^{1/s'}\right]^{s'} \quad \text{avec} \quad s' = 1 + \gamma/\alpha.$$

3. *MULTIPLICATION PAR UNE PUISSANCE DE* P.

Soit ε un entier tel que $0 < \varepsilon \leqslant \gamma$. Multiplions les deux membres de l'égalité (1) à gauche par P^ε

$$\mathrm{P}^\varepsilon \mathrm{D}^{\gamma+\alpha} \mathrm{P}^\gamma \mathrm{L} = \mathrm{P}^\varepsilon \mathrm{L}\, \mathrm{D}^{\gamma+\alpha} \mathrm{P}^\gamma.$$

Tous les opérateurs

$$\mathrm{L}' = \mathrm{P}^\varepsilon \mathrm{L}$$

sont ainsi des solutions de l'égalité

$$\mathrm{P}^\varepsilon \mathrm{D}^{\gamma+\alpha} \mathrm{P}^{\gamma-\varepsilon} \mathrm{L}' = \mathrm{L}' \mathrm{D}^{\gamma+\alpha} \mathrm{P}^\gamma$$

applicables aux fonctions de E.

Mais sont-elles les seules? Comme le montrent les relations différentielles qui existent entre les fonctions $\mathrm{L}'(z^n/n!)$, celles-ci sont divisibles par z^ε; il en est par conséquent de même pour les fonctions $\mathrm{L}'(s_n)$. Il est donc naturel de supposer que la suite $\{\mathrm{L}'(s_n)\}$ converge *uniformément* dans un voisinage de l'origine, pour que cette divisibilité soit conservée et que L′ vérifie l'égalité proposée dans E. Réciproquement L′ peut alors être mis sous la forme P^ε L, et L vérifie (1). De plus la convergence uniforme de la suite $\{z^{\varepsilon} \mathrm{L}(s_n)\}$ dans un voisinage de l'origine, c'est-à-dire sur une circonférence de centre 0 entraîne la convergence uniforme de la suite $\{\mathrm{L}(s_n)\}$ sur cette circonférence et par conséquent dans un voisinage de l'origine; on retrouve l'hypothèse faite au § 1.

4. *MULTIPLICATION PAR UNE DÉRIVATION.*

Soit δ un entier tel que $0 < \delta \leqslant \gamma + \alpha$. On multiplie les deux membres de l'égalité (1) à droite par D^{δ}

$$\mathrm{D}^{\gamma+\alpha} \mathrm{P}^{\gamma} \mathrm{L}\, \mathrm{D}^{\delta} = \mathrm{L}\, \mathrm{D}^{\gamma+\alpha} \mathrm{P}^{\gamma} \mathrm{D}^{\delta}.$$

Tout opérateur de la forme

$$\mathrm{N} = \mathrm{L}\, \mathrm{D}^{\delta}$$

est donc une solution de l'égalité

$$\mathrm{D}^{\gamma+\alpha} \mathrm{P}^{\gamma} \mathrm{N} = \mathrm{N}\, \mathrm{D}^{\gamma+\alpha-\delta} \mathrm{P}^{\gamma} \mathrm{D}^{\delta} \tag{4}$$

applicable aux fonctions, dont les dérivées d'ordre δ forment l'espace E. Ici cependant *on n'obtient pas ainsi toutes les solutions en général.*

On est amené à distinguer deux cas; en effet l'opérateur $\mathrm{D}^{\gamma+\alpha-\delta} \mathrm{P}^{\gamma} \mathrm{D}^{\delta}$ est un opérateur différentiel d'Euler, dans lequel on peut mettre D^{α} en facteur à droite; il n'est divisible par une puissance plus élevée de D que si $\delta > \alpha$.

1. $\delta \leqslant \alpha$. Plaçons-nous encore dans l'espace E des polynômes. Au § 1 on a vu que L est le transmué par $\overline{\mathrm{B}}$ d'un opérateur M permutable avec D^{α}, c'est-à-dire le produit de M à gauche par $\overline{\mathrm{B}}$ et à droite par B ($\overline{\mathrm{B}}$ M B). De même ici N applique E dans lui-même (même raisonnement que pour L). On introduit une solution particulière B_{δ} de l'égalité.

$$\mathrm{D}^{\alpha} \mathrm{B}_{\delta} = \mathrm{B}_{\delta} \mathrm{D}^{\gamma+\alpha-\delta} \mathrm{P}^{\gamma} \mathrm{D}^{\delta} \tag{5},$$

permutable avec P D et définie par des coefficients b'_n non nuls. Dans E N *est donc le produit d'un opérateur* M′ *à gauche par* $\overline{\mathrm{B}}$ *et à droite par cet opérateur* B_{δ}, qui se déduit facilement de B; M′ est permutable avec D^{α} et applique E dans lui-même;

$$\mathrm{N} = \overline{\mathrm{B}}\, \mathrm{M}'\, \mathrm{B}_{\delta}.$$

Si on applique les deux membres de l'égalité (5) à $z^n/n!$ $(n \geqslant \alpha)$, on obtient, en simplifiant par $z^{n-\alpha}/(n-\alpha)!$,

$$b'_n = \frac{(n+\gamma-\delta)!}{(n-\delta)!}\, b'_{n-\alpha} \qquad (n \geqslant \alpha);$$

on prend, par exemple, les coefficients non nuls

$$b'_n = b_{n-\delta} \qquad (n \geqslant 0),$$

puisque l'on peut attribuer à $b_{n-\delta}$ certains indices négatifs.

Il est commode de définir M′ par les coefficients

$$m'^{k'}_{n} = m^{k'}_{n-\delta} \qquad (n \geqslant 0),$$

en prenant arbitrairement certains coefficients $m^{k'}_{p}$ à indice inférieur négatif. Dans l'espace des polynômes l'opérateur N est défini par une matrice infinie analogue à la précédente; les différences proviennent de ce qu'elle est construite à partir de la matrice définissant M′ (et non M) et de ce que l'on multiplie les éléments de la colonne de rang n par b'_n (et non b_n). *On retrouve pour* N *la forme* $\mathrm{L\,D}^{\delta}$, lorsque $m'^{k'}_{n} = 0$ pour $0 \leqslant n < \delta$, $0 \leqslant k' < \alpha$. On peut étendre l'étude de N à un espace E quelconque, comme on l'a fait pour L.

2. $\delta > \alpha$. N est défini dans l'espace des polynômes par une matrice infinie, qui ne diffère de celle du cas $\delta = \alpha$ que par *l'adjonction à gauche de* $\delta - \alpha$ *colonnes*; dans celles-ci les éléments des α premières lignes sont arbitraires, ceux des lignes suivantes étant nuls.

$$\begin{array}{lcccccc}
l_0 & \dfrac{b_{-2}}{b_0}m^0_{-2} & \dfrac{b_{-1}}{b_0}m^0_{-1} & m^0_0 & \cdots & & \\[2ex]
l_1 & \dfrac{b_{-2}}{b_1}m^1_{-2} & \dfrac{b_{-1}}{b_1}m^1_{-1} & \dfrac{b_0}{b_1}m^1_0 & \cdots & \text{pour} & \left\{\begin{array}{l}\alpha = 2\\ \delta = 3.\end{array}\right. \\[2ex]
0 & 0 & 0 & \dfrac{b_0}{b_2}m^0_{-2} & \cdots & & \\[2ex]
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & &
\end{array}$$

La méthode précédente ne s'applique plus; l'étude directe des fonctions $j_n(z) = \mathrm{N}(z^n/n!)$ montre qu'elles vérifient

$$j_n^{(\alpha)}(z) = 0 \qquad (n < \delta),$$

$$\mathrm{D}^{\gamma+\alpha}\mathrm{P}^{\gamma}(j_n) = \frac{(n+\gamma-\delta)!}{(n-\delta)!}j_{n-\alpha}(z) \qquad (n \geqslant \delta);$$

ces relations sont encore valables, si on a $\delta = \alpha$. Si on compare les deux systèmes différentiels, obtenus pour $\delta = \alpha$ et $\delta > \alpha$, on voit que dans ce dernier cas on a pour un polynôme.

$$\mathrm{N}(f) = \sum_{i=0}^{\delta-\alpha-1} a_i j_i(z) + \bar{\mathrm{B}}\,\mathrm{M}'\,\mathrm{B}_{\alpha}\,\mathrm{D}^{\delta-\alpha}(f).$$

Pour que N *prenne la forme* $\mathrm{L\,D}^\delta$, *il suffit donc dans les deux cas étudiés que les éléments des* δ *premières colonnes de la matrice infinie soient nuls.* L'extension à un espace de fonctions holomorphes à l'origine, qui ne soit pas un espace de polynômes, se fait comme aux §§ 1 et 2, sauf en ce qui concerne la résolution de l'équation $\mathrm{N}(f) = g(z)$, où l'on peut choisir arbitrairement les $\delta - \alpha$ premiers coefficients du développement en série entière de $f(z)$.

Pour $\delta = \gamma + \alpha$ on obtient les opérateurs vérifiant l'égalité

$$\mathrm{D}^{\gamma+\alpha}\mathrm{P}^\gamma\mathrm{N} = \mathrm{N}\mathrm{P}^\gamma\mathrm{D}^{\gamma+\alpha}.$$

5. *COMBINAISON DES OPÉRATIONS PRÉCÉDENTES.*

ε désigne encore un entier tel que $0 < \varepsilon \leqslant \gamma$. Multiplions les deux membres de l'égalité (4) à gauche par P^ε. Les opérateurs

$$\mathrm{N}' = \mathrm{P}^\varepsilon\mathrm{N}$$

sont des solutions de l'égalité

$$\mathrm{P}^\varepsilon\mathrm{D}^{\gamma+\alpha}\mathrm{P}^{\gamma-\varepsilon}\mathrm{N}' = \mathrm{N}'\mathrm{D}^{\gamma+\alpha-\delta}\mathrm{P}^\gamma\mathrm{D}^\delta,$$

les opérateurs N et N′ étant applicables aux mêmes fonctions.

Obtient-on ainsi toutes les solutions? Il en sera ainsi, si $\mathrm{N}'(f)$ est divisible par z^ε, quelle que soit $f(z)$. Ici encore il faut distinguer deux cas suivant les valeurs de δ.

1. $\delta \leqslant \alpha$. Les relations différentielles, existant entre les fonctions $\mathrm{N}'(z^n/n!)$ montrent que celles-ci sont des polynômes divisibles par z^ε pour toute valeur de n. Comme au § 3, une condition de continuité convenable, imposée à N′ entraîne que l'on a de cette façon *toutes les solutions.*

2. $\delta > \alpha$. La fonction $\mathrm{N}'(z^n/n!)$ n'est divisible par z^ε que pour $n \geqslant \delta - \alpha$, alors que pour $n < \delta - \alpha$ elle est un polynôme arbitraire de degré $\alpha + \varepsilon - 1$ au plus. Pour un polynôme $f(z)$ *la différence entre* $\mathrm{N}'(f)$ *et* $\mathrm{P}^\varepsilon\mathrm{N}(f)$ est

$$\sum_{i=0}^{\delta-\alpha-1} a_i\, p_i(z),$$

où $p_i(z)$ est un polynôme arbitraire de degré maximum $\varepsilon - 1$ et dépendant de l'opérateur N′ considéré; $\mathrm{N}'(f)$ n'est donc divisible par z^ε que si tous ces polynômes sont identiquement nuls. L'étude des conditions d'application aux fonctions d'un espace E quelconque se fait comme dans les cas précédents.

REMARQUES

1. En faisant $\delta = \gamma + \alpha$ et $\varepsilon = \gamma$, on voit que les résultats obtenus jusqu'ici conduisent finalement aux *opérateurs permutables avec* $\mathrm{P}^\gamma\mathrm{D}^{\gamma+\alpha}$.

2. Plus généralement on peut combiner plusieurs fois les opérations, qui viennent d'être exposées. On peut aussi multiplier les deux membres de l'une des égalités

obtenues soit à droite par une puissance de P, soit à gauche par une puissance de D; mais les résultats sont en général moins simples.

3. A l'équation $L(f) = g(z)$ étudiée au § 2 et aux équations analogues et obtenues à partir des opérateurs L', N ou N' se rattache la résolution des *différents systèmes* linéaires, correspondants d'une infinité d'équations à une infinité d'inconnues a_n soumises à des inégalités données.

CHAPITRE VII

OPÉRATEURS PERMUTABLES AVEC DES OPÉRATEURS REMARQUABLES

On a réservé jusqu'ici une place importante aux opérateurs permutables avec P D; de plus les résultats du chapitre précédent ne sont obtenus que si γ est un entier positif; il est donc naturel d'étudier, α étant un entier positif, les opérateurs permutables avec $\mathrm{D}^\alpha \mathrm{P}^\alpha$ et ceux qui s'y rattachent.

D'autre part on a remarqué à plusieurs reprises, et en particulier au chapitre VI, l'intérêt des opérateurs permutables avec D^α; on va donner de ceux-ci une définition plus générale.

1. *OPÉRATEURS PERMUTABLES AVEC* $\mathrm{D}^\alpha \mathrm{P}^\alpha$.

Rappelons qu'un opérateur permutable avec D P et applicable aux fonctions holomorphes à l'origine d'un espace vectoriel donné est également permutable avec P D, et réciproquement; un tel opérateur est défini dans l'espace des polynômes par exemple par une matrice infinie, dont les éléments de la diagonale principale sont arbitraires, tous les autres étant nuls.

Cherchons les opérateurs *permutables avec* $\mathrm{D}^\alpha \mathrm{P}^\alpha$ et applicables aux fonctions d'un espace vectoriel E de fonctions holomorphes à l'origine.

Si on applique les deux membres de l'égalité

$$\mathrm{D}^\alpha \mathrm{P}^\alpha \mathrm{L} = \mathrm{L} \mathrm{D}^\alpha \mathrm{P}^\alpha \tag{1}$$

à $z^n/n!$, on obtient

$$\mathrm{D}^\alpha \mathrm{P}^\alpha (h_n) = \frac{(n+\alpha)!}{n!} h_n(z),$$

$h_n(z)$ désignant encore la fonction $\mathrm{L}(z^n/n!)$. Il est important de remarquer que l'opérateur L fait correspondre une fonction holomorphe à l'origine à une fonction holomorphe à l'origine; on cherche donc une solution de cette équation différentielle d'Euler de la forme z^p, où p est un entier positif ou nul; on a

$$\frac{(p+\alpha)!}{p!} = \frac{(n+\alpha)!}{n!},$$

soit $p = n$, qui correspond à une solution simple. D'où

$$h_n(z) = c_n \frac{z^n}{n!},$$

où c_n est une constante. Or ces fonctions définissent aussi un opérateur permutable avec D P.

Réciproquement un opérateur linéaire et permutable avec D P est aussi permutable avec $D^\alpha P^\alpha$, car $D^\alpha P^\alpha$ est un polynôme de degré α en D P.

THÉORÈME. — Tout opérateur permutable avec $D^\alpha P^\alpha$ *et applicable aux fonctions d'un espace vectoriel, pour lesquelles* $L(s_n)$ *converge vers* $L(f)$ *en chaque point d'un voisinage de l'origine, lorsque* $n \to \infty$, *est permutable avec* D P, *et réciproquement.*

La condition de continuité assure un rayon de convergence non nul à la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n \frac{z^n}{n!};$$

L vérifie donc (1) et D P L = L D P pour toute fonction de E.

CONSÉQUENCES. On peut faire subir à l'égalité (1) les transformations étudiées au chapitre précédent; les résultats sont plus simples et seront exposés rapidement.

1. Soit ε un entier tel que $0 < \varepsilon \leqslant \alpha$; des solutions de l'égalité

$$P^\varepsilon D^\alpha P^{\alpha-\varepsilon} L' = L' D^\alpha P^\alpha$$

applicables aux fonctions de E sont de la forme

$$L' = P^\varepsilon L.$$

La fonction $L'(z^n/n!)$ vérifie une équation différentielle d'Euler, dont la seule solution holomorphe à l'origine est, à un coefficient constant près, $z^{n+\varepsilon}$; $L'(s_n)$ est donc divisible par z^ε; il en est de même de $L'(f)$, si on soumet L' à la même condition de continuité que L, comme le montrent les propriétés élémentaires des séries entières; les solutions indiquées sont alors effectivement *les seules.*

2. Soit δ un entier tel que $0 < \delta \leqslant \alpha$; des solutions de l'égalité

$$D^\alpha P^\alpha N = N D^{\alpha-\delta} P^\alpha D^\delta$$

applicables aux fonctions, dont la dérivée d'ordre δ appartient à E, sont de la forme

$$N = L D^\delta.$$

Les fonctions $N(z^n/n!)$ sont nulles pour $n < \delta$ et proportionnelles à $z^{n-\delta}$ pour $n \leqslant \delta$. La même condition de continuité imposée à N montre que *ces solutions sont les seules.*

Les matrices infinies définissant les opérateurs L' et N ont tous leurs éléments nuls, sauf peut-être ceux qui sont situés sur une « parallèle » à la diagonale principale et qui sont arbitraires; cette parallèle se trouve pour L' au-dessous et pour N au-dessus de la diagonale principale.

3. Enfin, en combinant les deux opérations, on est conduit à l'égalité

$$P^\varepsilon D^\alpha P^{\alpha-\varepsilon} N' = N' D^{\alpha-\delta} P^\alpha D^\delta,$$

dont les solutions applicables aux fonctions, dont la dérivée d'ordre δ appartient à E, *ne sont pas en général de la forme*

$$P^{\varepsilon} N = P^{\varepsilon} L D^{\delta}.$$

En effet pour $n < \delta$ la fonction $N'(z^n/n!)$ est un polynôme arbitraire de degré $\varepsilon - 1$ au plus; pour un polynôme $f(z)$ la différence entre $N'(f)$ et $P^{\varepsilon} N(f)$ est donc de même nature que celle qui a été rencontrée en VI § 5.2; cette différence se conserve pour une fonction quelconque, si on soumet N' à la même condition de continuité que les opérateurs précédents.

REMARQUE. — Grâce à cette condition on peut associer à L un autre opérateur L_1 permutable avec D P et tel que $P^{\varepsilon} L D^{\delta}$ prenne soit la forme $L_1 D^{\delta-\varepsilon}$ pour $\delta > \varepsilon$, soit $P^{\varepsilon-\delta} L_1$ pour $\delta < \varepsilon$.

2. *OPÉRATEURS PERMUTABLES AVEC UN OPÉRATEUR PERMUTABLE AVEC* D.

Cette étude est indépendante de celle faite au § 1.

Dans ce paragraphe et dans les suivants e désigne l'espace des polynômes, E celui des fonctions entières de croissance (σ, τ) avec $\sigma < 1$, B un opérateur permutable avec D, applicable aux fonctions de E au sens de I § 1 et défini par les coefficients b_n.

Cherchons les *opérateurs* L *permutables avec* B *et appliquant* e *dans* E. Les fonctions entières de croissance (σ, τ) $L(z^n/n!) = h_n(z)$ vérifient les relations

$$B(h_n) = \sum_{q=0}^{n} b_q h_{n-q}(z) \qquad (n \geqslant 0).$$

Si on a $b_n = 0$ pour $0 < n < \alpha$ et $b_\alpha \neq 0$, les α premières équations donnent

$$h_n^{(\alpha)}(z) = 0 \qquad (0 \leqslant n < \alpha)$$

La résolution des équations suivantes *ne conduit à un résultat simple que si* tous les coefficients b_n, dont l'indice n'est pas un multiple de α, sont nuls. Si cette condition est remplie, on obtient par récurrence

$$h_n^{(\alpha)}(z) = h_{n-\alpha}(z) \qquad (n \geqslant \alpha);$$

la valeur de b_0 est indifférente, comme il était à prévoir. Les fonctions $h_n(z)$ ainsi trouvées définissent un opérateur permutable avec D^α.

THÉORÈME. — *Tout opérateur appliquant l'espace des polynômes dans celui* E *des fonctions entières de croissance* (σ, τ) *avec* $\sigma < 1$ *et permutable avec une série formelle en* D^α, *dont le terme en* D^α *n'est pas nul et qui est applicable aux fonctions de* E, *est permutable avec* D^α.

L est un des opérateurs considérés au chapitre III et applicables aux fonctions de E; il est donc naturel de supposer que pour toute fonction de E on a uniformément dans un voisinage de l'origine

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{L}(s_n) = \mathrm{L}(f);$$

cette hypothèse entraîne réciproquement que L est permutable avec D^{α}; montrons que dans E il vérifie aussi B L = L B. En effet B et L sont des opérateurs déjà étudiés en III § 3; une démonstration analogue à celle de II § 5 montre que, si dans la série multiple

$$\mathrm{B}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n h_n(z)\right)$$

on remplace a_n, b_q, z et les coefficients des polynômes $h_n(z)$ par leurs valeurs absolues, on obtient une série convergente en tout point à distance finie; un regroupement légitime de termes permet donc de mettre B L (f) sous la forme L B (f). Si $\alpha = 1$, il suffit que la suite $\mathrm{L}(s_n)$ converge en chaque point d'un voisinage de l'origine (*cf.* I § 1).

3. *ÉGALITÉ DE LA FORME* $\mathrm{D}^{\beta}\,\mathrm{L}\,\mathrm{B} = \mathrm{B}\,\mathrm{L}\,\mathrm{D}^{\beta}$.

L'opérateur L applique e dans E et vérifie maintenant

$$\mathrm{D}^{\beta}\mathrm{L}\,\mathrm{B} = \mathrm{B}\,\mathrm{L}\,\mathrm{D}^{\beta},$$

où β est un entier tel que $\beta > \alpha$, B un opérateur permutable avec D pour lequel $b_n = 0$ si $0 \leqslant n < \alpha$ et $b_\alpha \neq 0$. On pose donc

$$\mathrm{B} = \mathrm{D}^{\alpha}\,\mathrm{B}' \quad \text{avec} \quad \mathrm{B}' = \sum_{q=0}^{\infty} b'_q\,\mathrm{D}^q.$$

L'égalité précédente devient

$$\mathrm{D}^{\beta}\mathrm{L}\,\mathrm{B}'\,\mathrm{D}^{\alpha} = \mathrm{B}'\,\mathrm{D}^{\alpha}\mathrm{L}\,\mathrm{D}^{\beta} \tag{2}$$

Les fonctions entières de croissance (σ, τ) $\mathrm{L}(z^n/n!) = h_n(z)$ vérifient un système de relations différentielles. Les $\beta - \alpha = \gamma$ premières d'entre elles donnent

$$h_n^{(\beta)}(z) = 0 \qquad (0 \leqslant n < \gamma).$$

Les autres s'écrivent

$$\sum_{q=0}^{n+\gamma} b'_q\,h_{n+\gamma-q}^{(\beta)}(z) = \sum_{q=0}^{n} b'_q\,h_{n+\gamma-q}^{(\beta)}(z) = \sum_{q=0}^{\infty} b'_q\,h_n^{(q+\alpha)}(z);$$

cette dernière somme ne contient en fait qu'un nombre fini de termes, car les fonctions $h_n(z)$ sont des polynômes.

Cependant *ces polynômes n'ont une expression simple que si* les coefficients b'_q, dont l'indice n'est pas un multiple de γ, sont nuls.

On peut mettre cette condition en évidence d'une façon différente; désignons par $\overline{\mathrm{B}}'$ l'opérateur inverse de B' pour les fonctions de E; l'égalité (2) s'écrit encore pour les polynômes

$$\mathrm{D}^\gamma \overline{\mathrm{B}}' (\mathrm{D}^\alpha \mathrm{L}\, \mathrm{D}^\alpha) = (\mathrm{D}^\alpha \mathrm{L}\, \mathrm{D}^\alpha) \mathrm{D}^\gamma \overline{\mathrm{B}}';$$

l'opérateur $\mathrm{D}^\alpha \mathrm{L}\, \mathrm{D}^\alpha$ applique e dans E et est permutable avec $\mathrm{D}^\gamma \overline{\mathrm{B}}'$; il ne prend une forme simple que si $\overline{\mathrm{B}}'$ et par conséquent B' sont définis par des séries formelles en D^γ; cependant cette méthode ne permet pas d'en déduire la nature de l'opérateur L.

Si cette condition est réalisée, on obtient

$$h_{n+\gamma}^{(\beta)}(z) = h_n^{(\alpha)}(z) \qquad (n \geqslant 0),$$

soit encore

$$\mathrm{D}^\alpha (h_{n+\gamma}^{(\gamma)} - h_n) = 0 \qquad (n \geqslant 0).$$

Ces relations, jointes aux précédentes, montrent que *les fonctions $h_n(z)$, à des polynômes de degré maximum $\alpha - 1$ près, définissent un opérateur permutable avec* D^γ.

Dans e L est donc défini par une matrice infinie, qui se déduit de celle, qui définit un opérateur M permutable avec D^γ, en remplaçant les α premières lignes par α lignes arbitraires d'éléments $l_n^{k'}$ $(0 \leqslant k' < \alpha)$.

Pour que L soit applicable aux fonctions de E en vérifiant pour chacune d'elles uniformément dans un voisinage de l'origine

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{L}(s_n) = \mathrm{L}(f),$$

il faut et il suffit qu'il en soit de même de M au sens de III § 3 et que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, (n!^{1-1/\sigma} |l_n^{k'}|)^{1/n} < (\sigma\tau)^{-1/\sigma} \qquad (0 \leqslant k' < \alpha).$$

On montre enfin, comme au paragraphe précédent, que réciproquement un tel opérateur vérifie bien (2) pour toutes les fonctions de E.

REMARQUE. — On vient de supposer $\beta > \alpha$.

Remarquons que *le cas $\beta = \alpha$ se ramène au cas $\beta < \alpha$*, et réciproquement; il est en effet possible de retrancher à B l'opérateur $b_\beta \mathrm{D}^\beta$, sans modifier l'égalité initiale; la valeur de b_β est indifférente, et on peut supposer ce coefficient nul.

D'autre part, si $\beta < \alpha$, on a encore l'égalité (2); et, en désignant, comme ci-dessus, par $\overline{\mathrm{B}}'$ l'inverse de B', on obtient dans e

$$\mathrm{D}^\alpha \mathrm{L}\, \mathrm{D}^\beta \overline{\mathrm{B}}' = \mathrm{D}^\beta \overline{\mathrm{B}}' \mathrm{L}\, \mathrm{D}^\alpha,$$

égalité qui est du type, qui vient d'être étudié; elle est valable aussi pour les fonctions de E, puisque L applique E dans lui-même.

4. *ÉGALITÉ DE LA FORME* C L B = B L C.

Soit C un opérateur permutable avec D, applicable aux fonctions de E au sens de I § 1 et défini par les coefficients c_n, dont le premier non nul est c_β; posons

$$C = D^\beta C',$$

et désignons par $\overline{C}'$ l'opérateur inverse de C′ pour les fonctions de E.

L'opérateur L applique e dans E, mais vérifie dans ce paragraphe l'égalité

$$C\,L\,B = B\,L\,C.$$

Pour les polynômes on a donc

$$D^\beta L D^\alpha B' \overline{C}' = D^\alpha B' \overline{C}' L D^\beta \qquad (3).$$

Deux cas sont donc à distinguer :

1. $\beta \neq \alpha$. On peut supposer $\beta > \alpha$, en échangeant, si cela est nécessaire, les rôles des opérateurs B et C. L'égalité (3) est dans ce cas du type étudié au début du paragraphe précédent. Sa résolution n'a été effectuée que si $B'\,\overline{C}'$ est un opérateur défini par une série formelle en D^γ ($\gamma = \beta - \alpha$), dont le premier coefficient n'est pas nul; soit Q un tel opérateur; on a

$$C' = B'Q \quad \text{soit} \quad C = B D^\gamma Q.$$

L'opérateur C *est donc le produit de l'opérateur* B *par une série formelle en* D^γ, *dont le premier terme non nul est en* D^γ.

2. $\beta = \alpha$. On est ramené au cas évoqué dans la remarque du paragraphe précédent. Ce cas n'a été résolu que si $B'\,\overline{C}'$ est un opérateur défini par une série formelle en D^δ (δ entier positif), dont les deux premiers termes non nuls sont le terme constant et celui en D^δ; *l'opérateur* C *est le* produit de B par un tel opérateur.

L'extension de ces résultats aux fonctions de E se fait comme aux paragraphes précédents.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. P. Boas. — Functions of exponential type, III. *Duke Math. Journal*, vol. 11 (1944), p. 507-511.

[2] C. Bourlet. — Sur les opérations en général et les équations différentielles linéaires d'ordre infini. *Ann. Sci. Ecole norm. sup.*, 3e série, t. XIV (1897), p. 133-190.

[3] P. Flamant. — La continuité des transmutations distributives et l'extension d'une transmutation définie pour les polynômes. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 183 (1926), p. 590-592.

[4] E. Hilb. — Lineare Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit ganzen rationalen Koeffizienten. *Math. Annalen*, 82. Band (1921), p. 1-39; 84. Band (1921), p. 16-30; 84. Band (1921), p. 43-52.

[5] H. Von Koch. — Sur les équations différentielles linéaires d'ordre infini. *Arkiv för Mathematik, Astronomi och Physik*, vol. 16 (1921), No 6.

[6] H. Muggli. — Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit konstanten Koeffizienten. *Commentarii Math. Helvetici*, vol. 11 (1938), p. 151-179; vol. 14 (1941), p. 381-393.

[7] O. Perron. — Lineare Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit ganzen rationalen Koeffizienten. *Math. Annalen*, 84. Band (1921), p. 31-42.

[8] S. Pincherle. — Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif. *Math. Annalen*, 49. Band (1897), p. 325-382.

[9] S. Pincherle. — Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi. (Bologne 1901).

[10] J. F. Ritt. — On a general class of linear homogeneous differential equations of infinite order with constant coefficients. *Transactions of the American math. Society*, vol. 18 (1917), p. 27-49.

[11] P. C. Sikkema. — Differential operators and differential equations of infinite order with constant coefficients (Groningen 1953).

[12] P. C. Sikkema. — On linear recursion formulae. *Indagationes Math.*, vol. XVII (1955), p. 596-607.

[13] P. C. Sikkema. — A generalization of Nördlund's theory of principal solutions of linear difference equations. *Indagationes Math.*, vol. XVII (1955), p. 608-620; vol. XVIII (1956), p. 83-94.

[14] G. Valiron. — Sur les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre infini à coefficients constants. *Ann. Sci. Ecole norm. sup.*, 3e série, t. XLVI (1929), p. 25-53.

TABLE DES MATIÈRES