ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

MICHEL PARREAU

Fonction caractéristique d'une application conforme

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 19 (1955), p. 175-190
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1955_4_19__175_0>

FONCTION CARACTÉRISTIQUE D'UNE APPLICATION CONFORME

par Michel PARREAU

L'objet du présent travail (1) est d'établir l'existence et d'étudier les propriétés de la fonction caractéristique d'une application conforme quelconque. Il s'avère en effet que la notion de fonction caractéristique, définie par R. NEVANLINNA (cf. [18]) pour les fonctions méromorphes dans le plan complexe ou le disque unité est susceptible de généralisations étendues (voir par exemple GUNNAR af HALLSTROM [8], M. PARREAU [19]), qui n'ont toutefois été faites jusqu'ici à ma connaissance que pour des fonctions à valeurs complexes.

Or, dans une série d'articles récents ([13], [14], [15], [16], [17]), O. LEHTO, apportant un point de vue nouveau dans la théorie de NEVANLINNA (essentiellement par la mise en évidence de la sousharmonicité de la fonction appelée N (r, a) par cet auteur), a pu donner une définition plus maniable de la fonction caractéristique; de son côté, M. HEINS, dans deux notes aux *Proceedings* de l'Académie des Sciences des U.S.A. ([10]), développées récemment dans un mémoire des Annals of Math. [11], a édifié une théorie des applications conformes d'une surface de RIEMANN dans une autre (en particulier en introduisant l'importante notion d'*application de type Bl*, généralisation des produits de BLASCHKE), qui donne pour les fonctions méromorphes des résultats analogues à ceux obtenus par LEHTO dans le même temps.

Comme ces deux auteurs, je prendrai comme point de départ la forme précise de l'inégalité de LINDELOF. Dans un premier paragraphe, je rappelle les conséquences qu'on peut en tirer, en allégeant leur démonstration au moyen de considérations simples sur les mesures de RADON, et en utilisant le théorème de convergence de H. CARTAN [6] sur les suites décroissantes de fonctions surharmoniques. J'établis ensuite la généralisation de la formule de Lindelöf (due à LEHTO dans le cas du disque unité) que permet d'étendre la notion de fonction caractéristique, et je montre que celle-ci possède encore les propriétés classiques : premier théorème fondamental de NEVANLINNA, théorème de FROSTMAN sur le défaut, théorème de NEVANLINNA-FROSTMAN sur les limites radiales, étendu ici aux limites suivant les

(*) Les numéros entre crochets renvoient à la Bibliographie placée à la fin du mémoire.

(1) Une partie de ce travail a fait l'objet d'un exposé au Séminaire d'Analyse (15 mars 1955).

lignes de GREEN de la surface initiale. L'emploi systématique de la théorie moderne du potentiel, et notamment du théorème de convergence précité, permet d'ailleurs une présentation nouvelle de ces résultats, même dans le cas classique.

Enfin, j'étudie les rapports qui existent entre fonctions de caractéristique bornée et fonctions de type B*l*, et j'en déduis l'inclusion $O_{HB} \subset O_{AM_0}$.

1. — PRÉLIMINAIRES

Soient R et S deux surfaces de RIEMANN greeniennes, et f une application conforme de R dans S. Pour tout couple de points $p \in R$, $q \in S$, nous désignerons par $m(p, q)$ la multiplicité de p pour l'équation $f = q$ ($m(p, q) = 0$ si $f(p) \neq q$); nous appellerons ν_q la mesure de RADON sur R définie par la masse $m(p, q)$ en chaque point p de R (c'est-à-dire la mesure $\nu_q = \Sigma\, m(p, q)\, \varepsilon_p$, ε_p désignant la masse unité en p); ν_q est la mesure associée à la fonction surharmonique $\mathcal{G}_S^q \circ f$(2) ; le théorème de décomposition de F. RIESZ donne donc la *formule de Lindelöf* (cf. M. HEINS [**11**])

$$(1) \qquad \mathcal{G}_S(f(p), q) = \sum_r m(r, q)\, \mathcal{G}_R(p, r) + u(p, q),$$

l'application $p \to u(p, q)$ étant harmonique positive sur R. M. HEINS a montré qu'elle est quasi-bornée ([**19**]) pour tout q n'appartenant pas à un ensemble de capacité nulle, et que l'application $q \to u(p, q)$ est quasi-surharmonique (3) semi-continue supérieurement, sa régularisée $v(p, q)$ étant un potentiel de Green sur S.

Nous démontrerons ici ces résultats au moyen de théorème de H. CARTAN cité plus haut; nous aurons besoin en outre du lemme suivant :

Lemme. — *Pour toute fonction* φ *continue à support compact sur R la fonction* $\tilde{\varphi}(q) = \int \varphi\, d\nu_q$ *est continue à support compact sur S.*

En effet, soit K le support de φ, U un voisinage compact de K, q_0 un point de S, $p^0_1, p^0_2, \ldots, p^0_k$ les antécédents de q_0 qui appartiennent à K. D'après le théorème d'inversion locale d'une application conforme, l'image réciproque d'un voisinage suffisamment petit W de q_0 se compose, dans U, de k domaines V_j contenant chacun un point p^0_j; si $q \in W$, chaque V_j

(2) Etant donné un domaine (ou un ensemble ouvert D), nous noterons $\mathcal{G}_D^q(p) = \mathcal{G}_D(p, q)$ sa fonction de GREEN de pôle q, prolongée éventuellement par zéro hors de D, sauf aux points-frontières irréguliers. Le potentiel de GREEN dans D d'une mesure μ (ou de la restriction de μ à D) sera noté U_D^μ; on le prolongera aussi par 0 hors de D s'il y a lieu.

(3) Rappelons que « *quasi-partout* » signifie « hors d'un ensemble de capacité (extérieure) nulle ». Une fonction *quasi-surharmonique* est la limite d'une suite décroissante de fonctions surharmoniques; elle est égale quasi-partout à une fonction surharmonique, qui est sa régularisée semi-continue inférieurement (*cf.* H. CARTAN [**6**]).

contient $m\left(p_j^o, q_o\right)$ antécédents de q; de plus, si W tend vers $\{q_o\}$, V_j tend vers $\{p^o{}_j\}$. Donc, si q tend vers q_o, $\tilde{\varphi}(q) = \Sigma\, m(p, q)\, \varphi(p)$ tend vers $\tilde{\varphi}(q_o)$, puisque α est nulle hors de K. Enfin, $\tilde{\varphi}(q)$ est nulle hors de f (K).

Le principal intérêt du lemme précédent est de montrer qu'à toute mesure de RADON σ sur S on peut associer une mesure de RADON $\tilde{\sigma}$ sur R, par la relation $\tilde{\sigma} = \int \nu_q\, d\,\sigma(q)$ (Pour l'intégration des fonctions vectorielles, voir N. BOURBAKI, *Intégration,* chap. III, § 4; le lemme montre que l'application $q \rightarrow \nu_q$ de S dans l'espace $\mathfrak{M}$ (R) des mesures de RADON sur R est continue pour la topologie vague, et même appartient à l'espace $\mathcal{K}'_{\mathcal{M}(R)}(S)$, suivant la terminologie de cet auteur). On peut encore définir $\tilde{\sigma}$ par la formule $\int_R \varphi d\tilde{\sigma} = \int_S \tilde{\varphi}\, d\,\sigma$; le second membre de cette égalité est visiblement une forme linéaire (positive si $\sigma \geqslant 0$) sur l'espace $\mathcal{K}$ (R) des fonctions continues à support compact sur R. De plus, si σ a un potentiel de Green fini quasi-partout, il en est de même de $\tilde{\sigma}$, d'après l'inégalité de LINDELOF. Plus précisément, on obtient en intégrant la relation (1) par rapport à σ (désormais supposée positive) [4] :

$$\text{(2)} \qquad U_S^{\sigma}(f(p)) = U_R^{\tilde{\sigma}}(p) + \int u(p, q)\, d\,\sigma(q)$$

Ce qui montre à la fois que $\tilde{\sigma}$ est la mesure associée à $U_S^{\sigma} \cdot f$ et que la plus grande minorante harmonique de $U_S^{\sigma} \circ f$ est $\int u_q\, d\,\sigma(q)$.

En particulier, si nous prenons pour σ la mesure $\varepsilon_{q,\,\alpha}$ de potentiel $\inf\left(\mathcal{G}_S^q, \alpha\right)$ (« moyenne linéaire » sur la courbe de niveau $\Gamma_{q,\,\alpha} = \left\{\mathcal{G}_S^q = \alpha\right\}$ nous en déduisons que $\int u_s\, d\,\varepsilon_{q,\,\alpha}(s) \leqslant u_q$

D'autre part, un raisonnement analogue à celui du lemme montre que $q \rightarrow u(p, q)$ est continue lorsque R est un domaine relativement compact très régulier d'une surface de RIEMANN plus grande, et que f est encore analytique sur la frontière de R. En appliquant ceci à une exhaustion (R_n) de R, on voit que $u(p, q)$, limite décroissante des fonctions $u_n(p, q)$ correspondantes, est (pour p fixe) semi-continue supérieurement et quasi-surharmonique (H. CARTAN [**6**] th 4); sa régularisée s.c.i. $v(p, q)$ est d'ailleurs la limite de ses moyennes, c'est-à-dire $\lim\limits_{\alpha \rightarrow +\infty} \int u(p, s)\, d\,\varepsilon_{q,\alpha}(s)$;

---

(4) L'intégrabilité des fonctions qui figurent dans (1) est une conséquence du lemme, qui montre que $q \rightarrow \Sigma\, m(r, q)\, \mathcal{G}_F(p, r)$ est semi-continue inférieurement puisque $r \rightarrow \mathcal{G}_F(p, r)$ l'est.

$v(p, q)$ est ainsi pour q fixe, la limite de la plus grande minorante harmonique de $\inf\left(\mathcal{G}_S^q \circ f, \alpha\right)$, qui est aussi celle de $\inf(u_q, \alpha)$; c'est donc la composante quasi-bornée de $u(p, q)$ (cf. [19], chap. III, n° 19, formule (1)).

2. — LA RELATION DE LINDELOF-LEHTO

On peut généraliser les résultats précédents au cas où R est une surface de RIEMANN ouverte et S une surface quelconque, à condition de considérer sur ces surfaces des domaines greeniens F et G, et d'appliquer le théorème de décomposition à la restriction à F de $\mathcal{G}_G^q \circ f$. Nous devons toutefois noter que $\mathcal{G}_G^q$ (prolongée par 0 dans $\complement G$) n'est plus alors surharmonique partout, mais est au contraire sousharmonique dans $S - \{q\}$. La mesure associée à cette fonction est $\varepsilon_q - \omega_q^G$, ω_q^G étant la mesure harmonique de G en q $\left(\int \varphi \, d\omega_q^G\right.$ est la valeur en q de la solution du problème de DIRICHLET ordinaire ou « extérieur » dans G avec donnée frontière φ si $q \in G$ (cf. [4], [19]). La mesure associée à $\mathcal{G}_G^q \circ f$ est donc $\nu_q - \tilde{\omega}_q^G$ de sorte que l'on a, si ν_q et $\tilde{\omega}_q^G$ ont des potentiels de Green dans F finis quasi-partout :

$$\mathcal{G}_G(f(p), q) = N_F(p, q) - H_{F,G}(p, q) + u_{F,G}(p, q) \tag{3}$$

en posant $\quad U_F^{\nu_q}(p) = N_F(p, q), \quad U_F^{\tilde{\omega}_q^G} = H_{F,G}(p, q).$

Pour q fixe, $u_{F,G}(p, q)$ est harmonique dans F; c'est la moyenne de $\mathcal{G}_G^q \circ f$ en p dans F, puisque celles des potentiels $N_F(p, q)$ et $H_{F,G}(p, q)$ sont nulles. On a donc

$$u_{F,G}(p, q) = \int \mathcal{G}_G(f(r), q) \, d\omega_p^F(r), \tag{4}$$

ce qui montre en particulier que $u_{F,G}(p, q)$ est positive.

La fonction $S_{F,G}(p, q) = \mathcal{G}_G(f(p), q) + H_{F,G}(p, q)$, égale aussi à $N_F(p, q) + u_{F,G}(p,q)$ d'après (3), est la plus petite majorante surharmonique de $\mathcal{G}_G^q \circ f$ dans F (ou encore sa plus petite majorante harmonique dans $F \cap \complement \overset{-1}{f}(p)$

D'autre part, $H_{F,G}(p, q)$ est le potentiel de GREEN de $\tilde{\omega}_q^G$ on a donc :

$$H_{F,G}(p, q) = \int \mathcal{G}_F(p, r) \, d\tilde{\omega}_q^G(r) = \int\int \mathcal{G}_F(p, r) \, d\nu_s(r) \, d\omega_q^G(s)$$

$$= \int N_F(p, s) \, d\omega_q^G(s)$$

Pour p fixe et $q \in G$, $H_{F,G}(p, q)$ est donc la fonction harmonique dans G qui prend à la frontière les valeurs $N_F(p, q)$ [et 0 à la « frontière idéale », si G n'est pas compact]. Si $q \in \complement G$, $H_{F,G}(p, q) = N_F(p, q)$.

Lorsque F est relativement compact très régulier, la fonction $q \to N_F(p, q)$ est sousharmonique continue dans $S - \{f(p)\}$, avec un pôle logarithmique d'ordre 1 en $f(p)$, d'après les résultats rappelés au paragraphe précédent (on les appliquera à la restriction de f à F, prenant ses valeurs dans $f(F)$); $N_F(p, q) - \mathcal{G}_G(f(p), q)$ est donc sousharmonique dans G, et y admet comme plus petite majorante harmonique $H_{F,G}(p, q)$; il en résulte que $H_{F,G}(p, q) + \mathcal{G}_G(f(p), q)$ est la plus petite majorante surharmonique de $N_F(p, q)$ (5) dans G (ou sa plus petite majorante harmonique dans $G - \{f(p)\}$).

On voit ainsi que (toujours pour p fixe et $q \in G$) $u_{F,G}(p, q)$ est un potentiel de GREEN dans G; c'est ainsi une conséquence de la formule (4), qui montre de plus que la mesure associée à ce potentiel est $f\left(\omega_p^F\right)$ [mesure définie par la forme linéaire $\psi \to \int \psi \circ f \, d\omega_p^F$ sur $\mathcal{K}(S)$]. Notons que cette mesure est de masse totale 1.

Si F est un domaine greenien quelconque, on l'approche par des domaines relativement compacts réguliers contenus; comme $N_F(p, q)$ croît avec F, on voit que cette fonction est, dans le cas général quasi-sousharmonique semi-continue inférieurement dans $S - \{f(p)\}$, et que $u_{F,G}(p, q)$ est quasi-partout égale à un potentiel de GREEN $v_{F,G}(p, q)$. La fonction $p \to v_{F,G}(p, q)$ est encore harmonique et quasi-bornée (en tant que limite des moyennes de $u_{F,G}(p, q)$; le fait que ces moyennes soient des fonctions harmoniques bornées de p résulte de l'intégration de la formule (4).

3. — FONCTION CARACTÉRISTIQUE

La fonction $S_{F,G}(p, q) = H_{F,G}(p, q) + \mathcal{G}_G(f(p,) q) = N_F(p, q) + u_{F,G}(p, q)$ dont nous avons vu une double interprétation dans le paragraphe précédent, est la généralisation de la fonction caractéristique de NEVANLINNA. En effet, si R est le disque unité $\{|z| < 1\}$, S le plan complexe des w, F le disque $\{|z| < r\}$, p le point $z = 0$, q le point $w = a$, $N_F(p, q)$ n'est autre que la « fonction de numération » $N(r, a)$ de NEVANLINNA, et $u_{F,G}(p, q)$, moyenne de $\mathcal{G}_G^q \circ f$ dans F, n'est autre que la fonction $m(r, a)$ de NEVANLINNA-LEHTO (cf. [**18**], [**16**]).

Nous supposons désormais (sauf mention contraire) que p et G ont été fixés une fois pour toutes, et que q appartient à $G - \{f(p)\}$. Nous porterons notre attention sur la variation de $S_{F,G}(p, q)$ lorsque F décrit l'en-

(5) On peut encore dire que $S_{F,G}(p, q)$ est l'extrémale de $N_F(p, q)$ pour G, au sens de M. BRELOT ([**3**], p. 10).

semble (filtrant croissant) $\mathcal{F}$ des domaines relativement compacts très réguliers de R qui contiennent p; ceci nous amène à changer de notation et à écrire à partir de maintenant cette fonction $T(F, q)$ [$T_{p,G}(F, q)$ s'il importe de préciser].

$T(F, q)$ est une fonction croissante de F, puisque $N_F(p, q)$, donc $H_{F,G}(p, q)$, croît avec F; par conséquent, $\lim\limits_{F \in \mathcal{F}} T(F, q)$ existe. Nous dirons que *f est de caractéristique bornée si* (5) $\lim\limits_{F \in \mathcal{F}} T(F, q) < +\infty$. D'après la signification de $S_{F,G}(p, q)$ en tant que fonction de p, cette propriété est équivalente à la suivante : *la fonction* $\mathcal{G}_G^q \circ f$ *admet une majorante surharmonique sur la surface* R [6] [ou encore admet une majorante harmonique dans $R - f^{-1}(q)$].

La condition (5) ne dépend donc pas du point p. Nous allons voir qu'elle est également indépendante de G et de q.

Plus précisément, nous allons montrer que (pour p fixé) la fonction caractéristique ne dépend que d'une quantité bornée, si l'on change G ou q.

Tout d'abord, si $q \in G \subset G'$, il existe une constante A telle que $\mathcal{G}_G^q \leqslant \mathcal{G}_{G'}^q \leqslant \mathcal{G}_G^q + A$, ce qui entraîne

$$T_{p,G}(F, q) \leqslant T_{p,G'}(F, q) \leqslant T_{p,G}(F, q) + A$$

Si G_1 et G_2 sont deux domaines greeniens de S, en utilisant un domaine de comparaison G' contenant leur réunion, on voit que

THÉORÈME 1. — *La différence* $T_{p,G_1}(F, q) - T_{p,G_2}(F, q)$ *reste bornée quand* F *décrit l'ensemble* $\mathcal{F}$

L'autre résultat constitue le premier théorème fondamental de NEVANLINNA, qui s'énonce ici comme suit :

THÉORÈME 2. — *Si* q_1 *et* q_2 *appartiennent à* $G - \{f(p)\}$, $T(F, q_1) - T(F, q_2)$ *reste bornée lorsque* F *décrit l'ensemble* $\mathcal{F}$

En effet, posons :

$$\chi_G(q, q_0 ; q_1, q_2) = \mathcal{G}_G(q, q_1) - \mathcal{G}_G(q, q_2) - \mathcal{G}_G(q_0, q_1) + \mathcal{G}_G(q_0, q_2)$$

et soit $\chi(q, q_0 ; q_1, q_2) = \lim\limits_{G \to S} \chi_G(q, q_0 ; q_1, q_2)$ l'intégrale normale harmonique de troisième espèce sur S, ayant pour pôles logarithmiques q_1 et q_2, et s'annulant en q_0 (si S est non greenienne, la limite existe du fait qu'une telle intégrale est déterminée de façon unique sur S). La fonction de r

$$\chi(f(r), f(p) ; q_1, q_2) - N_F(r, q_1) + N_F(r, q_2)$$

est harmonique dans F; en lui appliquant le théorème de la moyenne, relativement au point p, on obtient la *formule de* JENSEN :

$$(6) \qquad \int \chi(f(r), f(p) ; q_1, q_2)\, d\omega_p^F(r) + N_F(p, q_1) - N_F(p, q_2) = 0$$

---

(6) Pour une fonction méromorphe on obtient ainsi une condition équivalente à celle de ma thèse ([**19**], p. 180) : pour que f soit de caractéristique bornée, il faut et il suffit que $\log |f|$ ait une majorante surharmonique sur R.

Or, d'après un lemme de JOHANSSON [12] et BADER [2], les fonctions χ_G, pour q_0, q_1, q_2 fixes, sont bornées dans leur ensemble hors d'un voisinage de q_1 et q_2, et par conséquent $\chi - \chi_G$ est bornée sur S. L'intégrale qui figure dans la relation (6) ne diffère que d'une quantité bornée de :

$$u_{F,G}(p, q_1) - u_{F,G}(p, q_2) - \mathcal{G}_G(f(p), q_1) + \mathcal{G}_G(f(p), q_2),$$

ce qui démontre le théorème.

On peut même voir que le théorème 2 reste vrai lorsque q_1 et q_2 varient dans un compact K de $S - \{f(p)\}$, pourvu que G contienne un voisinage U de K.

En effet

Lemme : *Pour tout compact* K *de* S, *et tout voisinage* U *de* K, *il existe une constante* M_U *telle que*

$$|\chi(q, q_0; q_1, q_2) - \chi_G(q, q_0; q_1, q_2)| \leqslant M_U, \textit{ si } q_1, q_2 \in K \textit{ et } G \supset U$$

Ce lemme est une conséquence de celui de JOHANSSON-BADER : soit V un voisinage de K tel que $V \subset \mathring{U}$; supposons d'abord que $q_0 \in \complement V$; on a alors

$$\chi_U(q, q_0; q_1, q_2) \leqslant 2 \max_{q \in K,\ s \in \complement V} \mathcal{G}_U(q, s)$$

Or, le lemme cité ([2], p. 293) montre que les oscillations de χ_G et χ_U dans $\complement V$ (8) sont liées par

$$\Omega(\chi_G ; \complement V) \leqslant k\, \Omega(\chi_U ; \complement V)$$

k ne dépendant que de U et V. Comme $\chi_G(q, q_0; q_1, q_2)$ s'annule dans $\complement V$, son oscillation majore sa valeur absolue, d'où le résultat, puisque $\chi - \chi_G$ est harmonique dans G. Enfin, la relation

$$\chi_G(q, q_0) ; q_1, q_2) = \chi_G(q, q' ; q_1, q_2) - \chi_G(q_0, q' ; q_1, q_2)$$

permet de se débarrasser de l'hypothèse $q \in \complement V$.

On déduit du lemme précédent que

(7) $$|T(F, q_1) - T(F, q_2) - \mathcal{G}_G(f(p), q_1) + \mathcal{G}_G(f(p), q_2)| \leqslant M_U$$

si q_1 et $q_2 \in K$, et $G \supset U$.

---

(7) En effet, χ, limite des fonctions χ_G, a la même borne que celles-ci hors du voisinage en question, et $\chi - \chi_G$ est harmonique dans G.

(8) L'oscillation de χ_G sur $\complement V$ est encore égale à son oscillation à la frontière de V, car χ_G prend à la frontière de G une valeur constante, comprise entre les bornes de χ_G à la frontière de V, puisque $\displaystyle\int_{\mathrm{fr.}\,G} \frac{\partial \chi_G}{\partial n}\, ds = 0$

Ce résultat conduit à donner une nouvelle définition de la fonction caractéristique, généralisant celle de CARTAN-AHLFORS. Soit K un ensemble compact de S, de capacité non nulle, et soit σ une mesure positive sur K, *de masse totale* 1, *et de potentiel borné dans un domaine greenien* G *contenant* K (c'est alors vrai pour tout $G \supset K$). L'intégration de l'inégalité (7) par rapport à σ montre que

$\int T(F, q)\, d\sigma(q) = T(F, q_0) + O(1)$, quel que soit $q_0 \in G - \{f(p)\}$.

Or :

$$\int U_{F,G}(p, q)\, d\sigma(q) = \int\int \mathcal{G}_G(f(p), q)\, d\omega_p^F(r)\, d\sigma(q) - \int U_G^\sigma(f(r))\, d\omega_p^F(r) = O(1)$$

de sorte que

$$\int T(F, q)\, d\sigma(q) = \int N_F(p, q)\, d\sigma(q) + O(1)$$

si l'on pose

$$T^*(F) = T^*_\sigma(F) = \int N_F(p, q)\, d\sigma(q)$$

on voit donc que cette quantité, pour F variable, peut être prise comme fonction caractéristique de f, puisque, pour $q_0 \in S - \{f(p)\}$, on a

$$T^*(F) - T(F, q_0) = O(1)$$

lorsque F décrit l'ensemble filtrant $\mathcal{F}$

Dans le cas classique où f est une fonction méromorphe, on retrouve la définition de H. CARTAN [5] en prenant pour σ la moyenne linéaire sur $\{|w| = 1\}$; lorsque σ est la moyenne superficielle sur la sphère de RIEMANN, on obtient la fonction caractéristique d'Ahlfors [1] (9).

REMARQUE. — Si S elle-même est greenienne, on peut prendre G = S. Alors, toute application conforme de R dans S est de caractéristique bornée, puisque $\mathcal{G}_S(f(p), q)$ est surharmonique en p dans R. Donc :

THÉORÈME 3. — *Toute application conforme f d'une surface de* RIEMANN R *dans une surface de* RIEMANN S *qui possède une fonction de* GREEN *est de caractéristique bornée.*

D'autre part, le critère d'hyperbolicité de BRELOT-OHTSUKA (cf. [19], p. 117) montre que

THÉORÈME 4. — *S'il existe une application conforme de caractéristique bornée de* R *dans* S, *la surface* R *possède une fonction de* GREEN.

---

(9) Une telle extension à également été faite par R. NEVANLINNA [18] chap. VI, § 4, mais seulement dans le cas ou σ est la « distribution d'équilibre » de K.

4. — DÉFAUT. EXTENSION DU THÉORÈME DE FROSTMAN

Les définitions précédentes amènent à étendre la notion de défaut aux applications conformes. Pour tout point q de $S - \{f(p)\}$ (en supposant toujours p fixé dans toute la question) nous appellerons *défaut de la valeur q pour f* la quantité

$$\delta(q) = 1 - \limsup_{F \in \mathfrak{F}} \frac{N_F(p, q)}{T(F, q)} = \liminf_{F \in \mathfrak{F}} \frac{u_{F,G}(p, q)}{T(F, q)}$$

Lorsque f est de caractéristique non bornée, le théorème 1 montre que le défaut $\delta(q)$ ne dépend pas de G; pour toute mesure σ du type indiqué plus haut, on a encore $\delta(q) = \liminf_{F \in \mathfrak{F}} \frac{u_{F,G}(p, q)}{T^*(F)}$.

Or la fonction $\dfrac{u_{F,G}(p, q)}{T^*(F)}$ est un potentiel de Green dans G, et la mesure associée σ_F a pour masse totale $\dfrac{1}{T^*(F)}$ donc converge vaguement vers 0 quand F tend vers R en décrivant $\mathfrak{F}$. Comme le filtre des section de $\mathfrak{F}$ est à la base dénombrable, on a encore, pour toute exhaustion (R_n) de R,

$$\delta(q) = \lim_{n \to \infty} \left(\inf_{F \supset R_n} \frac{u_{F,G}(p, q)}{T^*(F)} \right)$$

il résulte alors des théorèmes de convergence de H. CARTAN ([**6**], th 4 et 6) que $\delta(q)$ est quasi-surharmonique, sa régularisée étant le potentiel dans G de la limite vague des σ_n, c'est-à-dire 0. $\delta(q)$ est donc nulle quasi-partout dans G; comme G est arbitraire, on a :

THÉORÈME 5. — *Lorsque f est de caractéristique non bornée, l'ensemble des valeurs de défaut > 0 pour f est de capacité nulle.*

En particulier, l'ensemble des valeurs omises par f est de capacité nulle (ce que montre aussi le théorème 3).

Si R *est greenienne,* on voit même que *l'ensemble des valeurs prises par f un nombre fini de fois est de capacité nulle.*

En effet, pour une telle valeur $N_F(p, q)$ reste borné, donc $\delta(q) = 1$.

5. — APPLICATIONS DE CARACTÉRISTIQUE BORNÉE

Si f est de caractéristique bornée, $N_R(p, q) = \lim_{F \in \mathfrak{F}} N_F(p, q)$ est finie pour tout $q \neq f(p)$. Inversement, le théorème 5 montre que :

Pour que f soit de caractéristique bornée, il suffit que $N_R(p, q)$ soit finie pour un ensemble de valeurs q de capacité (strictement) positive (10).

On peut établir pour les applications conformes de caractéristique bornée un théorème analogue à celui de NEVANLINNA-FROSTMAN sur les

(10) Cela résulte encore des considérations de la fin du § 3.

limites radiales (cf. [7], [8]). Nous considérons ici, plus généralement, les limites sur les *lignes de* GREEN issues d'un pôle donné $p \in$ R. Renvoyant au mémoire fondamental [4] de M. BRELOT et G. CHOQUET pour une étude plus complète, nous rappellerons simplement les définitions et résultats suivants : on appelle lignes de GREEN les trajectoires orthogonales des courbes de niveau $\Gamma_{p,\alpha} = \left\{ \mathcal{G}_R^p = \alpha \right\}$; une ligne de GREEN est *régulière* si $\mathcal{G}_R^p$ y décroît de $+\infty$ à 0; la *mesure de Green* sur l'ensemble des lignes de GREEN (notée ici γ) est égale à la mesure harmonique en p sur l'ensemble de leurs intersections avec $\Gamma_{p,\alpha}$ relativement au domaine $\Delta_{p,\alpha} = \left\{ \mathcal{G}_R^p > \alpha \right\}$; l'ensemble des lignes de GREEN non régulières est de γ mesure nulle.

On a alors l'énoncé suivant, qui généralise aussi le théorème 27 de M. BRELOT et G. CHOQUET [4] :

THÉORÈME 6. — *Soit une application conforme de caractéristique bornée de* R *dans* S *et soit* E *un ensemble de capacité nulle de points de* S. *L'ensemble des lignes de* GREEN *régulières issues de p sur lesquelles f tend vers une limite appartenant à* E, *lorsque* $\mathcal{G}_R^p$ *tend vers 0, est de mesure de* GREEN *nulle.*

Supposons d'abord E compact. Soit K un compact de S — E, à points-frontière réguliers pout S — K. Il existe une fonction U sousharmonique continue positive dans S — K, valant $+\infty$ sur E, et harmonique au voisinage de la frontière de K, où elle s'annule [11]. Si on la prolonge par 0 sur K, la fonction U est sousharmonique dans un voisinage de K. Soit σ la mesure positive associée à U dans ce voisinage. Pour tout domaine F de R, la fonction de r $\mathrm{U}(f(r)) + \int \mathrm{N_F}(r,q)d\sigma(q)$ est surharmonique dans F; on a par conséquent :

$$\int \mathrm{U}(f(r))\, d\omega_p^{\mathrm{F}}(r) \leqslant \mathrm{U}(f(p)) + \int \mathrm{N_F}(p, q)\, d\sigma(q)$$

Comme $\int \mathrm{N_R}(p,q)\, d\sigma(q)$ est $< +\infty$, d'après les considérations du § 3, on aura, en prenant $\mathrm{F} = \Delta_{p,\alpha}$ et en appelant $r_{l,\alpha}$ le point d'intersection de $\Gamma_{p,\alpha}$ avec la ligne de GREEN l :

$$\int \mathrm{U}(f(r_{l,\alpha}))\, d\gamma(l) \leqslant \mathrm{U}(f(p)) + \int \mathrm{N_R}(p, q)\, d\sigma(q)$$

de sorte que la fonction $\mathrm{U} \circ f$ ne peut tendre vers $+\infty$ que sur un ensemble de lignes de GREEN de mesure nulle, d'après le lemme de FATOU [12]. Or les lignes de GREEN sur lesquelles $\mathrm{U} \circ f$ tend vers $+\infty$ sont celles sur lesquelles

(11) L'existence d'une telle fonction, avec harmonicité dans S — (K ∪ E) résulte du théorème d'Evans; nous la prenons seulement surharmonique afin que la démonstration reste valable pour le théorème 6 *bis*.

(12) Cf. N. BOURBAKI, *Intégration*, chap. IV, § 1, coroll. de la propos. 14.

f tend vers un point de E, puisque U est borné hors de tout voisinage de E, et que cet ensemble est totalement discontinu.

Si E n'est pas compact, soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des lignes de GREEN sur lesquelles admet une limite appartenant à E. D'après le théorème d'EGOROFF [13] il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un ensemble compact $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ tel que $\gamma(\mathcal{A} - \mathcal{B}) < \varepsilon$, et que la convergence de $f(r_{l,\alpha})$ vers sa limite $f^*(l)$ soit uniforme pour $l \in \mathcal{B}$. La fonction $f^*(l)$ est alors continue sur $\mathcal{B}$, donc transforme $\mathcal{B}$ en un ensemble compact $E' \subset E$. E' est encore de capacité nulle, et par conséquent $\mathcal{B}$ est de mesure de GREEN nulle. Comme ε est arbitraire, on a aussi $\gamma(\mathcal{A}) = 0$.

Si S est une surface de RIEMANN *non greenienne*, on peut étendre le théorème précédent à la « frontière idéale » de S.

THÉORÈME 6 *bis*. — *Si* f *est une application conforme de caractéristique bornée de* R *dans une surface* S *non greenienne, l'ensemble des lignes de* GREEN *régulières issues de* p *sur lesquelles* $f(r)$ *« s'éloigne à l'infini » sur* S *quand* $\mathcal{G}_R(p, r) \to 0$ *est de mesure de* GREEN *nulle.*

La démonstration est la même. Il suffit de montrer qu'il existe une fonction U convenable. Or, soit (S_n) une exhaustion de S, telle que $S_1 \supset K$; soit $U_n(q)$ la fonction sur S égale à 0 dans K, à 1 dans $\complement S_n$, et à la mesure harmonique de la frontière de S_n relativement à $S_n - K$, dans ce dernier domaine. En supprimant au besoin un certain nombre de termes dans la suite (S_n), on peut supposer que $\sum u_n(q)$ converge sur S (il suffit que cela ait lieu en *un* point $q \in \complement K$); la somme de cette série est alors la fonction $U(q)$ cherchée, car elle est souharmonique dans S_1, surharmonique dans $\complement K$ et elle tend vers $+\infty$ quand q tend vers la frontière idéale de S, puisqu'elle est $\geqslant n$ dans $\complement S_n$.

Nous allons examiner maintenant le rapport qui existe entre les notions introduites ici et celle d'application de type Bl ([**11**], § V). Nous avons remarqué plus haut que si f est de caractéristique bornée, $N_R(p, q)$ est finie pour tout $q \neq f(p)$. Si G est relativement compact, $H_{R,G}(p, q) = \lim F \in \mathcal{F}$ $H_{F,G}(p, q)$ est également finie, donc $u_{F,G}(p, q)$ tend vers une limite finie $u_{R,G}(p, q)$, qui vérifie la relation

$$\mathcal{G}_G(f(p), q) = N_R(p, q) - H_{R,G}(p, q) + u_{R,G}(p, q)$$

Comme au § 2, nous désignerons par $v_{R,G}(p, q)$ la régularisée *s. c. i.* de $u_{R,G}(p, q)$. On a vu que, pour q fixe $u_{R,G}(p, q)$ et $v_{R,G}(p, q)$ sont des fonctions harmoniques positives de p dans R; la seconde est quasi-bornée.

---

(13) Ibid., chap IV, § 5, théorème 2.

D'autre part, soit Ω l'image réciproque de G par f; en étendant aux ensembles ouverts les notions définies dans [**11**] et dans les paragraphes précédents, on peut écrire, lorsque $p \in \Omega$, $q \in G$

$$\mathcal{G}_G(f(p), q) = N_\Omega(p, q) + u_{\Omega,G}(p, q).$$

$u_{\Omega,G}(p, q)$ est dans chaque domaine composant de Ω la fonction définie par Heins (pour la restriction de f à ce domaine); $v_{\Omega,G}(p, q)$ est donc sa *composante* quasi-bornée. La nullité de l'une ou l'autre de ces fonctions équivaut au fait que f est de type Bl_1 ou de type Bl dans G.

Nous allons voir qu'on passe des fonctions $u_{R,G}(p, q)$ et $v_{R,G}(p\, q)$ aux fonctions $u_{\Omega,G}(p, q)$ et $v_{\Omega,G}(p, q)$ et réciproquement au moyen des applications λ_Ω et μ_Ω de M. Heins ([**11**], § II, p. 442). Rappelons que si h est harmonique positive dans Ω et s'annule continûment à la frontière μ_Ω (h) est la plus petite fonction harmonique positive sur R qui majore h dans Ω.

On a alors :

Théorème 7. — *Pour q fixe, les fonctions $u_{R,G}(p, q)$ et $v_{R,G}(p, q)$ sont les images par* μ_Ω de $u_{\Omega,G}(p, q)$ *et* $v_{\Omega,G}(p, q)$.

Pour le démontrer, nous étendrons les applications λ_Ω et μ_Ω aux espaces de fonctions surharmoniques positives. Lorsque u est harmonique sur R, il est facile de voir que

$$\lambda_\Omega(u)(p) = u(p) - \int u\, d\,\omega_p^\Omega$$

Cette formule s'étend sans modification aux fonctions surharmoniques; elle donne en particulier $\lambda_\Omega\left(\mathcal{G}_R^{p_0}\right) = \mathcal{G}_\Omega^{p_0}$

Pour un potentiel de Green, on aura donc $\lambda_\Omega\ (U_R^\sigma) = U_\Omega^{\sigma_\Omega}$ en appelant σ_Ω la restriction de σ à Ω.

Inversement, si $p_0 \in \Omega$ on est amené de façon naturelle à poser $\mu_\Omega\left(\mathcal{G}_\Omega^{p_0}\right) = \mathcal{G}_R^{p_0}$ (par exemple, en ôtant de la surface R le point p_0, ce qui ramène au cas harmonique); si $p_0 \in \complement\Omega$ on aura évidemment $\mu_\Omega\left(\mathcal{G}_\Omega^{p_0}\right) = 0$. Plus généralement, on posera $\mu_\Omega\ (U_\Omega^\tau) = U_R^\tau$ pour toute mesure de Radon τ sur Ω qui se laisse prolonger en une mesure sur R. On notera qu'ici encore $\lambda_\Omega \circ \mu_\Omega$ est l'application identique, tandis que les potentiels de Green invariants par $\mu_\Omega \circ \lambda_\Omega$ sont ceux des mesures pour lesquelles Ω est un noyau de masses.

Pour une fonction φ surharmonique $\geqslant 0$ dans Ω s'annulant continument à la frontière, $\mu_\Omega(\varphi)$, définie par linéarité, est la plus petite fonction surharmonique positive sur R qui majore φ et dont les masses associées comprennent celles de φ.

Dans ces conditions, il est clair que pour $q \in G$ l'image par μ_Ω de $\mathcal{G}_G(f(p),q)$ est $S_{R,G}(p,q) = \mathcal{G}_G(f(p),q) + H_{R,G}(p,q)$, alors que celle de $N_\Omega(p,q)$ est $N_R(p,q)$, puisque le support de ν_q est contenu dans Ω; d'où le théorème dans ce cas. D'autre part, si $q \in \complement G$, $u_{\Omega,G}(p,q)$ et $u_{R,G}(p,q)$ sont nulles.

Enfin $v^{\Omega,G}(p,q)$ est la limite des moyennes de $u_{\Omega,G}(p,q)$, de sorte que l'on arrive au résultats indiqué par deux applications du théorème de LEBESGUE (pour h harmonique, $\mu_\Omega(h)$ s'obtient comme limite croissante d'intégrales) (14).

COROLLAIRE : Pour que f soit de type Bl (resp. Bl_1) dans un domaine G rencontré par f (R), il faut et il suffit que $u_{R,G}(p,q)$ soit singulière (resp. nulle); pour que f soit localement de type Bl (resp. Bl_1) il faut et il suffit que la condition précédente soit vérifiée pour tout G.

Ce qui précède permet de préciser le lien entre la théorie de HEINS et celle de LEHTO. Si l'on considère l'ensemble d'accumulation de f suivant les lignes de GREEN de R (ou presque toutes les lignes de GREEN), les résultats de LEHTO ([**14**] [**15**] [**17**]) peuvent être exprimés comme suit dans la terminologie de HEINS :

THÉORÈME 8. — *Soit f une application de caractéristique bornée de R dans* S *et soit* A *l'ensemble d'accumulation de f suivant les lignes de* GREEN *régulières issues d'un point $p \in$ R (ou seulement suivant un ensemble de lignes de* GREEN *régulières dont le complémentaire est de mesure de* GREEN *nulle). L'application f est de type* Bl *dans tout domaine composant de* $\complement \overline{A}$ *rencontré par f* (R).

En effet, soit G un tel domaine. $\mathcal{G}_G(f(r),q)$ tend vers 0 avec $\mathcal{G}_R(p,r)$ sur presque toute ligne de GREEN régulière; comme

$$u_{R,G}(r,q) \leqslant \mathcal{G}_G(f(r),q) + H_{R,G}(r,q)$$

toute fonction harmonique positive *bornée* qui minore $u_{R,G}(r,q)$ est nulle, d'après le théorème 25 de M. BRELOT et G. CHOQUET [4] et le théorème 1 *bis* de ma Thèse [**19**].

En particulier, si A est vide (et on se ramène à ce cas si A est de capacité nulle), le résultat précédent est valable pour G = S, cette surface étant alors greenienne en vertu du théorème 6 *bis*. Donc

COROLLAIRE : *Si f est de caractéristique bornée et si $f(r)$ s'éloigne à l'infini sur* S *suivant presque toute ligne de* GREEN *régulière issue de p, f est de type* Bl.

---

(14) Il en résulte que $v_{R,G}(p,q)$ est la *composante quasi-bornée* de $u_{R,G}(p,q)$, puisque μ_Ω transforme une fonction quasi-bornée (resp. singulière) en une fonction quasi-bornée (resp. singulière).

6. — FONCTIONS MÉROMORPHES DANS LE DISQUE UNITÉ; APPLICATION A LA CLASSIFICATION DES SURFACES DE RIEMANN

Dans le cas des fonctions méromorphes dans le disque unité, on peut établir une réciproque du théorème 8.

En effet, soit $f(z)$ une fonction méromorphe et de caractéristique bornée dans $D = \{|z| < 1\}$. D'après le théorème de FATOU-NEVANLINNA, elle possède une limite radiale $f^*(e^{i\theta})$ en presque tout point $e^{i\theta}$ de $\{|z| = 1\}$. En utilisant la formule (4) du § 2, on voit que :

THÉORÈME 9. — *Si $f(z)$, méromorphe et de caractéristique bornée dans le disque unité, est de type* Bl *dans un domaine* G *du plan complexe, l'ensemble des points $e^{i\theta}$ en lesquels $f^*(e^{i\theta}) \in G$ est de mesure (linéaire) nulle.*

Soit w un point « ordinaire » de G pour f (c'est-à-dire un point tel que $u_{D,G}(z, w) = 0$) Comme

$$u_{D,G}(0, w) = \lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{G}_G^w(f(re^{i\theta}))\, d\theta$$

on a $\mathcal{G}_G^w(f^*(e^{i\theta})) = 0$ presque partout, d'où le théorème.

On en déduit *qu'une fonction méromorphe et de caractéristique bornée dans le disque unité ne peut être localement de type* Bl *dans le plan complexe tout entier.*

En effet, on peut recouvrir le plan complexe par deux domaines greeniens G_1 et G_2. Si une fonction méromorphe f de caractéristique bornée dans D était de type Bl dans G_1 et G_2, « presque toutes » ses limites radiales ne pourraient appartenir à aucun de ces deux domaines, ce qui est absurde.

Ce résultat s'étend aux fonctions définies sur une surface de Riemann quelconque. Soit R une surface greenienne, $\hat{R}$ son revêtement universel identifié à D, $p(z)$ la projection canonique de $\hat{R}$ sur R. A toute fonction f méromorphe dans R, on associe la fonction $\hat{f}$ méromorphe dans D définie par $\hat{f}(z) = f[p(z)]$; $\hat{f}$ est de caractéristique bornée en même temps que f ([19], p. 180 et 190), et est de type Bl en même temps que f ([11], théorème 21, 1). L'impossibilité signalée pour $\hat{f}$ s'étend donc à f. Ainsi :

THÉORÈME 10. — *Une fonction méromorphe de caractéristique bornée ne peut être localement de type* Bl *dans tout le plan complexe.*

Application à la classification.

Suivant les notations de L. SARIO [20] nous désignerons par 0_{HB} (resp. 0_{AM_0}) les classes des surfaces de Riemann sur lesquelles n'existe aucune fonction harmonique bornée (resp. aucune fonction méromorphe de caractéristique bornée) non constante (15). Un théorème de HEINS ([**11**], th. 18, 1) montre que si $R \in O_{HB}$ toute fonction méromorphe non constante sur R est localement de type *Bl*. On déduit donc du théorème 10 que

THÉORÈME 11. — *La classe* O_{HB} *est contenue dans la classe* O_{AM_0}

L'inclusion de O_{HB} dans O_{AM_0} est stricte. On peut construire en effet une surface de Riemann qui appartient à la seconde de ces classes sans appartnir à la première. Par exemple, si R_1 est une des surfaces de Riemann construites par HEINS dans son mémoire [**9**] (§ 2, p. 298 et § 6 p. 305; dans les deux cas, il s'agit d'un revêtement ramifié hyperelliptique du plan des z, sur lequel on a « greffé » une infinité de feuillets σ_n) on peut prendre pour $R = R_1 - \Delta$, Δ étant un disque fermé tout entier contenu dans un seul des σ_n. Le raisonnement de P. J. MYRBERG (*Ann. Acad. Sc. Fen,* A, I, 58) montre en effet que toute fonction méromorphe f à caractéristique bornée sur R est une fonction uniforme de z (donc une fonction rationnelle) (16), mais alors, puisque R_1 est non gréenienne, f ne devrait prendre toute valeur complexe qu'un nombre fini de fois au voisinage d'un point de R ou de la frontière idéale de R_1 (17), ce qui n'est pas le cas puisqu'il y a une infinité de feuillets σ_n.

---

(15) Il s'ait des classes appelées $\mathcal{C}_{AB}$ et $\mathcal{C}_{AM_0}$ dans ma thèse.

(16) cf [**19**] pp. 192-193.

(17) En effet $\mathcal{G}_R^p$ admet une borne inférieure > 0 dans un voisinage convenable de tout point de R ou de la frontière idéale de R_1; la finitude de $N_R(p, q)$ entraîne donc celle de $\sum_{p \in R} m(p, q)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Ahlfors. — Uber eine Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen. *Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys. Math.* 8, n° 10 (1935).

[2] R. Bader. — Fonctoins à singularités polaires sur des domaines compacts et des surfaces de Rieman ouvertes. *Thèse* Paris 1954, et *Annales de l'E. N. S.*, (3) 71 (1954), pp. 243-300.

[3] M. Brelot. — Minorantes sousharmoniques, extrémales et capacités. *Journal de Math*, 9e série, 24 (1945), pp. 1-32.

[4] M.Brelot et G. Choquet. — Espaces et lignes de Green. *Annales de l'Institut* Fourier, 3 (1951), pp. 199-263.

[5] H. Cartan. — Sur la fonction de croissance attachée à une fonction méromorphe de deux variables et ses applications aux fonctions méromorphes d'une variable. *Comptes Rendus,* 189 (1929), pp. 521-523.

[6] H. Cartan. — Théorie du potentiel newtonien. Energie, capacité, suites de potentiels. *Bull. Soc. Math. France,* 73 (1945), pp. 74-106.

[7] O. Frostman. — Potentiel d'équilibre et capacité des ensemlbes, avec quelques applications à la théorie des fonctions *Thèse* Lund (1935) et *Meddel. Lunds Univ. Math. Sem.*, 3 (1935).

[8] Gunnar af hallstrom. — Uber meromorphe Funktionen mit mehrfach zusammenhängenden Existenzgebieten. *Thèse* Abo, (1939).

[9] M. Heins. — Riemann surfaces of infinite genus. *Annals of Math.*, 2nd series, 55 (1952), pp. 296-317.

[10] M. Heins. — Studies in the conformal mapping of Riemann surfaces, I, II, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 39 (1953), pp. 322-324 et 40 (1954), pp. 302-305.

[11] M. Heins. — On the Lindelof principle. Annals of Math., 2nd séries, 61 (1955), pp. 440-473.

[12] S. Johansson. — Herstellung automorpher Potentiale bei beliebiger Hauptkreisgruppen. *Acta. Soc. Sci. Fenn,* 41, ns 2, 1912.

[13] O. Lehto. — A majorant principle in the theory of functions. *Math. Scand.*, 1 (1953), pp. 5-17.

[14] O. Lehto. — On the distribution of values of meromorphic functions of bounded characteristic. *Acta Math.* 91 (1954), pp. 87-112.

[15] O. Lehto. — On meromorphic functions whose values lie in a given domain *Ann. Acad. Sci. Fenn.* A, I, 160 (1953).

[16] O. Lehto. — On an extension of the concept of deficiency in the theory of meromorphic functions. *Math. Scand.* 1 (1953), pp. 207-212.

[17] O. Lehto. — Value distribution and boundary behaviour of a function of bounded characteristic and the Riemann surface of its inverse function. *Ann. Acad. Sci. Fenn.* A, I, 177 (1954).

[18] R. Nevanlinna. — *Eindeutige Analytische Funktionen.* Berlin, 1936; 2e édition 1953.

[19] M. Parreau. — Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analytiques et la classification des surfaces de Riemann *Thèse* Paris 1952, et *Annales de l'Institut* Fourier, 3 (1951), pp. 103-197.

[20] L. Sario. — Sur la classification des surfaces de Riemann. *11 Congrès Math. Scand.* Trondeheim 1949.