R. LE VAVASSEUR

Les groupes d'ordre 16p, p étant un nombre premier impair

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2e série, tome 5, nº 1 (1903), p. 63-123
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1903_2_5_1_63_0>

LES GROUPES D'ORDRE $16p$,

p ÉTANT UN NOMBRE PREMIER IMPAIR,

PAR M. R. LE VAVASSEUR,

à Toulouse.

J'ai divisé la discussion en trois Parties. Dans la première Partie (A), je suppose que le groupe cherché admet un sous-groupe d'ordre p, conjugué de lui-même; I étant ce sous-groupe, G le groupe cherché, je prends pour $\frac{G}{\Gamma}$ successivement les 14 groupes connus d'ordre 16 (nos 2, 3, ..., 15). J'ai ainsi 25 groupes. Pour savoir s'ils sont distincts, j'énumère dans chacun d'eux le nombre d'opérations d'ordre donné (nos 16, 17, ..., 40).

Dans la deuxième Partie (B), j'arrive au cas où il n'y a pas dans le groupe cherché de sous-groupe d'ordre p conjugué de lui-même, mais où il y a un sous-groupe d'ordre 16, conjugué de lui-même (nos 41, 42, ..., 56).

Dans la troisième Partie (C), j'envisage le cas où le groupe cherché d'ordre $16p$ n'admet ni sous-groupe d'ordre p conjugué de lui-même, ni sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même (nos 57, 58, ..., 67).

A la fin est un Tableau résumant les résultats obtenus.

1. Le groupe cherché a au moins un sous-groupe d'ordre p.

L'égalité

$$16p = pm(1 + hp) \quad (^1)$$

donne

$$16 = m(hp + 1).$$

Donc, pour $p > 7$, le groupe admet un sous-groupe d'ordre p conjugué de lui-même.

Pour $p = 7$, on peut supposer $h = 1$, $m = 2$.

Pour $p = 5$, » $h = 3$, $m = 1$.

Pour $p = 3$, » $h = 1$; $m = 4$ ou $h = 5$, $m = 1$.

(1) *Voir* § 21, p. 18 de mon Mémoire sur l'*Énumération des groupes d'opérations*, édité chez Hermann, 8, rue de la Sorbonne, ou chez Privat (Toulouse).

2. (A). Nous supposerons d'abord que le groupe admet un sous-groupe d'ordre p conjugué de lui-même.

I. Ce sous-groupe Γ étant d'ordre p, $\frac{G}{\Gamma}$ est du type G_{16} (¹). On a

$$a^{16} = b^p = 1, \qquad ba = ab^\alpha \qquad \text{avec} \qquad \alpha^{16} \equiv 1 \pmod p.$$

Si $\alpha = 1$, on a

$$G_{16p} = G_{16} G_p.$$

Si α appartient à l'exposant 2, le groupe sera désigné par G^1_{16p},

»	4,	»	G^2_{16p},
»	8,	»	G^3_{16p},
»	16,	»	G^4_{16p}.

3. II. $\frac{G}{\Gamma}$ est du type $G_8 G_2$:

$$(a'^8 = b'^2 = 1,\ a'b' = b'a').$$

On a

$$a^8 = b^2 = 1, \qquad ab = ba, \qquad c^p = 1,$$

puis

$$ca = ac^\alpha, \qquad \alpha^8 \equiv 1 \pmod p,$$
$$cb = bc^\beta, \qquad \beta^2 \equiv 1 \pmod p.$$

(1). $\alpha = \beta = 1$ donne

$$G_8 G_2 G_p = G_{8p} G_2 = G_{2p} G_8.$$

(2). Soit $\beta = 1$, $\alpha \neq 1$.

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Si } \alpha \text{ appartient à l'exposant} & 2 \pmod p, & \text{on a} & G^1_{8p} G_2 \\ \quad » & 4 \quad » & » & G^2_{8p} G_2 \\ \quad » & 8 \quad » & » & G^3_{8p} G_2 \end{array}\right\} (²).$$

(3). Soit $\alpha = 1$, $\beta = -1$, on a $G^1_{2p} G_8$.

(4). Soit $\beta = -1$, $\alpha \neq 1$.

Si $\alpha = -1$, $ca = ac^{-1}$, $cb = bc^{-1}$, $cab = ac^{-1}b = abc$.

On peut poser $ab = a'$.

On retrouvera $G^1_{2p} G_8$.

Si α appartient à l'exposant 4 (mod p) on a le groupe G^5_{16p} :

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba, \qquad ca = ac^\alpha, \qquad cb = bc^{-1}$$

[α appartient à l'exposant 4 (mod p)].

(¹) *Loc. cit.*, Chap. VI.

(²) *Loc. cit.*, Chap. VIII.

Si α appartient à l'exposant 8 $(\bmod p)$, α^4 appartient à l'exposant 2 $(\bmod p)$:

$$ca^4 = a^4 c^{-1}, \qquad cb = bc^{-1}, \qquad ca^4 b = a^4 bc.$$

Posons $a^4 b = b'$, on retrouve $G^3_{8p} G_2$.

4. III. $\frac{G}{\Gamma}$ est du type $(G_4)^2$:

$$(a'^4 = b'^4 = 1, \ a'b' = b'a').$$

On a

$$a^4 = b^4 = c^p = 1, \qquad ab = ba, \qquad ca = ac^\alpha, \qquad cb = bc^\beta,$$

avec

$$\alpha^4 \equiv \beta^4 \equiv 1 \qquad (\bmod p).$$

(1). $\alpha = \beta = 1$ donne

$$(G_4)^2 G_p = G_{4p} G_4.$$

(2). $\alpha = 1$, $\beta \neq 1$ donne

$$G^1_{4p} G_4 \quad \text{et} \quad G^2_{4p} G_4 \quad (^1).$$

(3). $\alpha = -1$, $\beta \neq 1$.

Soit $ca = ac^{-1}$, $cb = bc^{-1}$, alors $cab = abc$.

Posons $ab = b'$, on retrouve $G^1_{4p} G_4$.

Si β appartient à l'exposant 4 $(\bmod p)$

$$ca = ac^{-1}, \qquad cb^2 = b^2 c^{-1};$$

donc

$$cab^2 = ab^2 c.$$

Posons $ab^2 = a'$, on retrouve $G^2_{4p} G_4$.

(4). α et β appartiennent tous deux à l'exposant 4 $(\bmod p)$.

Alors α et β sont racines de la congruence $x^2 + 1 \equiv 0 \ (\bmod p)$.

Si l'on suppose $\alpha = \beta$, on a

$$ca^3 = a^3 c^{\alpha^3}, \qquad cb = bc^\alpha, \qquad ca^3 b = a^3 c^{\alpha^3} b = a^3 bc.$$

Posons $a^3 b = b'$, on retrouve $G^2_{4p} G_4$.

Si α est différent de β, on a

$$\alpha\beta \equiv 1 \qquad (\bmod p),$$

$$ca = ac^\alpha, \qquad cb = bc^\beta, \qquad cab = ac^\alpha b = abc^{\alpha\beta} = abc.$$

On retrouve encore $G^2_{4p} G_4$.

---

(1) *Loc. cit.*, Chap. V.

5. IV. $\frac{G}{\Gamma} = G_4(G_2)^2$:

$$a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1, \qquad ab = ba, \qquad ac = ca, \qquad bc = cb,$$

$$\begin{array}{llll} da = ad^\alpha & \text{avec} & \alpha^4 \equiv 1 & (\operatorname{mod} p), \\ db = bd^\beta & \text{avec} & \beta^2 \equiv 1 & (\operatorname{mod} p), \\ dc = cd^\gamma & \text{avec} & \gamma^2 \equiv 1 & (\operatorname{mod} p). \end{array}$$

(1). $\alpha = \beta = \gamma = 1$, on a

$$G_4(G_2)^2 G_p = G_{4p}(G_2)^2 = G_{2p} G_4 G_2.$$

(2). $\beta = \gamma = 1$, $\alpha \not\equiv 1$, on a

$$G_{4p}^1(G_2)^2, \quad G_{4p}^2(G_2)^2.$$

(3). $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = -1$ donne

$$G_{2p}^1 G_4 G_2.$$

(4). $\beta = \gamma = -1$, $db = bd^{-1}$, $dc = cd^{-1}$; donc

$$dbc = bcd.$$

On pourra donc toujours supposer $\beta = 1$.
(5). $\beta = 1$, $\gamma = -1$, $\alpha \not\equiv 1$.
Si $\alpha = -1$, $da = ad^{-1}$, $dc = cd^{-1}$, $dac = acd$.
Posant $ac = a'$, on retrouve $G_{2p}^1 G_4 G_2$.
Si α appartient à l'exposant 4 (mod p), a^2c est permutable avec d.
On pourra prendre $a^2c = c'$ à la place de c comme opération génératrice.
On trouve $G_{4p}^2(G_2)^2$.

6. V. $\frac{G}{\Gamma} = (G_2)^4$:

$$a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = e^p = 1,$$

$$\begin{array}{lll} ab = ba, & ac = ca, & ad = da, \\ bc = cb, & bd = db, & cd = dc, \end{array}$$

$$ea = ae^\alpha, \quad eb = be^\beta, \quad ec = ce^\gamma, \quad ed = de^\delta, \quad \alpha^2 \equiv \beta^2 \equiv \gamma^2 \equiv \delta^2 \equiv 1 \pmod p.$$

En transformant e par toutes les opérations du groupe d'ordre 16, on trouve, comme exposants de l'opération transformée :

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \alpha\beta,\ \alpha\gamma,\ \alpha\delta,\ \beta\gamma,\ \beta\delta,\ \gamma\delta,\ \beta\gamma\delta,\ \gamma\delta\alpha,\ \delta\alpha\beta,\ \alpha\beta\gamma,\ \alpha\beta\gamma\delta.$$

Si $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$, tous ces exposants sont égaux à 1.
Si $\delta = -1$, $\alpha = \beta = \gamma = 1$, on trouve

$$1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ -1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ -1.$$

Si $\gamma = \delta = -1$, $\alpha = \beta = 1$, on trouve

$$1,\ 1,\ -1,\ -1,\ 1,\ -1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ 1.$$

Si $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = \delta = -1$, on trouve

$$1,\ -1,\ -1,\ -1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1.$$

Si $\alpha = \beta = \gamma = \delta = -1$, on trouve

$$-1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1.$$

On n'obtient donc que les deux groupes suivants :

$$(G_2)^4 G_p = G_{2p}(G_2)^3 \qquad \text{et} \qquad G^1_{2p}(G_2)^3.$$

7. VI. $\dfrac{G}{\Gamma} = G^1_8 G_2$ (1). On a

$$a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1, \qquad ab = ba^3, \qquad ac = ca, \qquad bc = cb,$$

$$\begin{aligned} da &= ad^\alpha && \text{avec} && \alpha^4 \equiv 1 && (\mathrm{mod}\, p),\\ db &= bd^\beta && \text{avec} && \beta^2 \equiv 1 && (\mathrm{mod}\, p),\\ dc &= cd^\gamma && \text{avec} && \gamma^2 \equiv 1 && (\mathrm{mod}\, p); \end{aligned}$$

mais

$$dab = abd^{\alpha\beta}, \qquad dba^3 = ba^3 d^{\alpha^3\beta}.$$

Donc, puisque $ab = ba^3$, on a

$$\alpha^2 \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod}\, p).$$

(1). $\alpha = \beta = \gamma = 1$ donne $G^1_8 G_2 G_p = G^1_8 G_{2p}$ (1).
(2). $\alpha = -1$, $\beta = \gamma = 1$ donne $G^4_{8p} G_2$ (2).
(3). $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$ donne $G^5_{8p} G_2$ (2).
(4). $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = -1$ donne $G^1_8 G^1_{2p}$.

(1) *Loc. cit.*, Chap. IV.
(2) *Loc. cit.*, Chap. VIII.

(5). $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = -1$, $dbc = bcd$. Posons $bc = b'$; on trouve

$$a^4 = b'^2 = c^2 = 1, \quad ab' = b'a^3, \quad ac = ca, \quad b'c = cb',$$
$$da = ad, \quad db' = b'd, \quad dc = cd^{-1}.$$

On retombe sur $G_8^1 G_{2p}^1$.

(6). $\beta = 1$, $\gamma = \alpha = -1$; $dac = acd$. Posons $ac = a'$; il vient

$$a'^4 = b^2 = c^2 = d^4 = 1, \quad a'b = ba'^3, \quad a'c = ca', \quad bc = cb,$$
$$da' = a'd, \quad db = bd, \quad dc = cd^{-1}.$$

On retrouve $G_8^1 G_{2p}^1$.

(7). $\gamma = 1$, $\alpha = \beta = -1$, $dab = abd$. Posons $ab = b'$; on a

$$a^4 = b'^2 = c^2 = d^4 = 1, \quad ab' = b'a^3, \quad ac = ca, \quad b'c = cb',$$
$$da = ad^{-1}, \quad db' = b'd, \quad dc = cd.$$

On retrouve $G_{8p}^4 G_2$ [*voir* (2), même numéro].

(8). $\alpha = \beta = \gamma = -1$. Posons $ab = b'$; on a

$$a^4 = b'^2 = c^2 = d^4 = 1, \quad ab' = b'a^3, \quad ac = ca, \quad b'c = cb',$$
$$da = ad^{-1}, \quad db' = b'd, \quad dc = cd^{-1}.$$

On retrouve $G_8^1 G_{2p}^1$ [*voir* (6)].

8. VII. $\dfrac{G}{\Gamma} = G_8^2 G_2$:

$$a^4 = b^4 = c^2 = d^p = 1, \quad a^2 = b^2, \quad ab = ba^3, \quad ac = ca, \quad bc = cb,$$
$$da = ad^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha^4 \equiv 1 \pmod p,$$
$$db = bd^\beta \quad \text{avec} \quad \beta^4 \equiv 1 \pmod p,$$
$$dc = cd^\gamma \quad \text{avec} \quad \gamma^2 \equiv 1 \pmod p,$$

mais

$$dab = abd^{\alpha\beta}, \quad dba^3 = ba^3 = d^{\alpha^3\beta}.$$

Comme $ab = ba^3$, on a

$$\alpha^2 \equiv 1 \pmod p,$$

a^2 est permutable avec d, donc aussi $b^2 = a^2$; et par suite on a

$$\beta^2 \equiv 1 \pmod p.$$

On peut toujours supposer $\alpha = 1$, car si l'on a $\alpha = -1$, $\beta = 1$, on peut permuter a et b (on a $ba = ab^3$).

Si $\alpha = -1$, $\beta = -1$, $dab = abd$; on peut poser $ab = a'$, car $a'b = ba'^3$.

(1). $\alpha = \beta = \gamma = 1$ donne $G_8^2 G_2 G_p = G_8^2 G_{2p}$.

(2). $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = -1$ donne $G_{8p}^6 G_2$ (1).

(3). $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = -1$ donne $G_8^2 G_{2p}^1$.

(4). $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = -1$, $dbc = bcd$.

Posons $bc = b'$; on a

$$a^4 = b'^4 = c^2 = d^p = 1, \quad a^2 = b'^2, \quad ab' = b'a^3, \quad ac = ca, \quad b'c = cb',$$
$$ad = da, \quad db' = b'd, \quad dc = cd^{-1}.$$

On retrouve $G_8^2 G_{2p}^1$.

9. VIII. $\frac{G}{\Gamma} = G_{16}^1$:

On a
$$a^8 = b^2 = 1, \quad ab = ba^5 \quad (^2).$$
$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^5;$$
puis
$$ca = ac^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha^8 \equiv 1 \pmod p,$$
$$cb = bc^\beta \quad \text{avec} \quad \beta^2 \equiv 1 \pmod p.$$

Mais, d'une part
$$cab = abc^{\alpha\beta},$$
d'autre part
$$cba^5 = ba^5 c^{\alpha^5 \beta},$$
d'où l'on déduit
$$\alpha^4 \equiv 1 \pmod p.$$

(1). $\alpha = \beta = 1$ donne $G_{16}^1 G_p$.

(2). $\beta = 1$, $\alpha \neq 1$, on a

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^5, \quad ca = ac^\alpha, \quad cb = bc.$$

Si α appartient à l'exposant 2 (mod p), on aura le groupe G_{16p}^6.
» 4 » G_{16p}^7.

(3). $\alpha = +1$, $\beta = -1$.

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^5, \quad ca = ac, \quad cb = bc^{-1}$$

définissent G_{16p}^8.

(4). $\beta = -1$, $\alpha \neq 1$.

---

(1) *Loc. cit.*, Chap. VIII.

(2) *Loc. cit.*, Chap. VI.

Si $\alpha = -1$, on a

$$ca = ac^{-1}, \qquad cb = bc^{-1} \qquad \text{donc} \qquad cab = abc.$$

On pourra poser $ab = a'$; alors, comme $ab = ba^5$, $a'^2 = a^6$, $a'^8 = 1$,

$$a'b = ab^2 = ba^5 b, \qquad a'^4 = a^4, \qquad a'^5 = a^5 b \qquad \text{donc} \qquad a'b = ba'^5.$$

On retrouve G^8_{16p}.

Les formules

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^5, \qquad ca = ac^\alpha, \qquad cb = bc^{-1},$$

où α appartient à l'exposant $4 \pmod p$, définissent G^9_{16p}.

Je rappelle, pour la clarté de ce qui précède, le Tableau suivant des opérations de G^1_{16} (1).

8	a	$a\alpha$		ab		$ab\alpha$
4	α	α^3		α^3	$b\alpha$	α
2	α^2	α^2	b	α^2	α^2	α^2

10. IX. $\dfrac{G}{\Gamma} = G^4_{16}$:

$$a^2 = b^2 = c^4 = 1, \qquad ab = bac^2, \qquad ac = ca, \qquad bc = cb,$$

4			α	$a\alpha$	$b\alpha$	ab	
2	a	b	α^2	α^2	α^2	α^2	$ab\alpha$

$(c = \alpha)$ (2)

On a :

$$a^2 = b^2 = c^4 = d^p = 1, \qquad ac = ca, \qquad bc = cb, \qquad ab = bac^2,$$

$$da = ad^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha^2 \equiv 1 \pmod p$$
$$db = bd^\beta \quad \text{avec} \quad \beta^2 \equiv 1 \pmod p$$
$$dc = cd^\gamma \quad \text{avec} \quad \gamma^4 \equiv 1 \pmod p$$

Mais

$$dab = abd^{\alpha\beta}, \qquad dbac^2 = bac^2 d^{\alpha\beta\gamma^2} \qquad \text{donc} \qquad \gamma = \pm 1.$$

(1). $\alpha = \beta = \gamma = 1$ donne $G^4_{16}\, G_p$.

---

(1) *Loc. cit.*, Chap. VI.

(2) *Loc. cit.*, Chap. VI.

(2). $\alpha = \beta = 1, \gamma = -1$ donne G^{10}_{16p} :

$$a^2 = b^2 = c^4 = d^p = 1, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac^2,$$
$$da = ad, \quad db = bd, \quad dc = cd^{-1}.$$

(3). $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = 1$ donne G^{11}_{16p} :

$$a^2 = b^2 = c^4 = d^p = 1, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac^2,$$
$$da = ad, \quad db = bd^{-1}, \quad dc = cd.$$

(4). $\alpha = -1, \beta = \gamma = 1$ redonne G^{11}_{16p}. Il suffit, pour le voir, de permuter a et b, dans les équations précédentes.

(5). $\alpha = 1, \beta = \gamma = -1$; $da = ad$, $db = bd^{-1}$, $dc = cd^{-1}$, $dabc = abcd$. Soit $abc = b'$; on a

$$a^2 = b'^2 = c^4 = 1, \quad ac = ca, \quad b'c = cb',$$
$$ab' = a^2bc = bca.a = bac.a = abc.ac^2 = b'ac^2,$$
$$da = ad, \quad db' = b'd, \quad dc = cd^{-1}.$$

On retrouve G^{10}_{16p}.

(6). $\alpha = -1, \beta = 1, \gamma = -1$ redonne G^{10}_{16p}.

(7). $\alpha = \beta = -1, \gamma = 1$: $abc = a'$ est d'ordre 2. On a

$$a'^2 = b^2 = c^4 = 1, \quad a'b = abcb = ab^2c = bac^2bc = babc^3 = ba'c^2,$$
$$a'c = ca', \quad bc = cb.$$

D'ailleurs, si $da = ad^{-1}$, $db = bd^{-1}$, $dc = cd$, on en conclut

$$da' = a'd.$$

On retrouve G^{11}_{16p}.

(8). $\alpha = \beta = \gamma = -1$; alors

$$dabc = abcd^{-1}.$$

Le groupe G^{12}_{16p} a, pour équations de définition,

$$a^2 = b^2 = c^4 = d^p = 1, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac^2,$$
$$da = ad^{-1}, \quad db = bd^{-1}, \quad dc = cd^{-1}.$$

11. X. $\frac{G}{\Gamma} = G^2_{16}$ (1) :

$$a^4 = b^4 = 1, \quad ab = ba^3 \quad \text{ou bien} \quad a^2 = \alpha, \quad b^2 = \beta, \quad \alpha^2 = \beta^2 = 1, \quad ab = ba\alpha.$$

(1) *Loc. cit.*, Chap. VI.

Rappelons le Tableau des opérations de G_{16}^{2} :

4	a	b	ab	
2	α	β	β	$\alpha\beta$

On a

$$a^4 = b^4 = c^p = 1, \qquad ab = ba^3, \qquad ca = ac^{\alpha}, \qquad cb = bc^{\beta},$$

avec

$$\alpha^4 \equiv \beta^4 \equiv 1 \qquad (\operatorname{mod} p).$$

Mais $ab = ba^3$, or

$$cab = abc^{\alpha\beta}, \qquad cba^3 = ba^3 c^{\alpha^3\beta};$$

Donc on a

$$\alpha^2 \equiv 1 \qquad (\operatorname{mod} p).$$

(1). $\alpha = \beta = 1$ donne $G_{16}^{2} G_p$.

(2). $\beta = 1$, $\alpha = -1$:

$$a^4 = b^4 = c^p = 1, \qquad ab = ba^3, \qquad ca = ac^{-1}, \qquad cb = bc$$

définissent le groupe G_{16p}^{13}.

(3). Soit $\alpha = 1$, $\beta \neq 1$:

$$a^4 = b^4 = c^p = 1, \qquad ab = ba^3, \qquad cb = bc^{\beta}.$$

Si $\beta = -1$, on a le groupe G_{16p}^{14}.

Si β appartient à l'exposant 4 (mod p), on a le groupe G_{16p}^{15}.

(4). Soit enfin $\alpha = -1$, $\beta \neq 1$.

Si $\beta = -1$, $ca = ac^{-1}$, $cb = bc^{-1}$, donc

$$cab = abc.$$

Posons $ab = b'$, d'où $b'^2 = b^2$, donc

$$a^4 = b'^4 = c^p = 1, \qquad ab' = b'a^3, \qquad ca = ac^{-1}, \qquad cb' = b'c.$$

On retrouve G_{16p}^{13}.

Si β appartient à l'exposant 4 (mod p), on a

$$ca = ac^{-1}, \qquad cb^2 = b^2c^{-1}, \qquad \text{donc} \qquad cab^2 = ab^2c.$$

Posons $ab^2 = a'$, $a'^2 = a^2$.

Donc

$$a'^4 = b^4 = 1 = c^p, \qquad a'b = ab^3 = b^3a^3 = b(ab^2)^3 = ba'^3, \qquad ca' = a'c, \qquad cb = bc^{\beta}.$$

On retrouve G_{16p}^{15}.

12. XI. $\frac{G}{\Gamma} = G_{16}^{3}$ [1]:

$$a^4 = b^2 = c^2 = 1, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac.$$

Rappelons le Tableau des opérations :

$$(a^2 = \alpha, \quad b^2 = \alpha^2 = \beta^2 = 1, \quad ab = ba\beta),$$

Ordre 4	a		ab	
Ordre 2	α	b	$\alpha\beta$	β

On a

$$a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac,$$

$$\begin{array}{lll} da = ad^{\alpha} & \text{avec} \quad \alpha^4 \equiv 1 & (\text{mod}\, p), \\ db = bd^{\beta} & \text{avec} \quad \beta^2 \equiv 1 & (\text{mod}\, p), \\ dc = cd^{\gamma} & \text{avec} \quad \gamma^2 \equiv 1 & (\text{mod}\, p). \end{array}$$

Mais, tout d'abord,

$$dab = abd^{\alpha\beta}, \quad dbac = bacd^{\alpha\beta\gamma}.$$

Comme $ab = bac$, j'en conclus

$$\gamma \equiv 1 \quad (\text{mod}\, p).$$

(1). $\alpha = \beta = 1$ donne $G_{16}^{3}\, G_p$.
(2). $\beta = 1$, $\alpha \not\equiv 1$. On a, comme équations de définition,

$$a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac,$$
$$da = ad^{\alpha}, \quad db = bd, \quad dc = cd.$$

Si $\alpha = -1$, ces équations définissent G_{16p}^{16}.
Si α appartient à l'exposant 4 (mod p), ces équations définissent G_{16p}^{17}.
(3). Soit $\beta = -1$, $\alpha = 1$, on a le groupe G_{16p}^{18}, défini par les équations

$$a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac,$$
$$da = ad, \quad db = bd^{-1}, \quad cd = dc.$$

(4). Soit $\alpha \not\equiv 1$, $\beta = -1$.
Si $\alpha = -1$, $da = ad^{-1}$, $db = bd^{-1}$, donc

$$dab = abd.$$

---

[1] *Loc. cit.*, Chap. VI.

Posons $ab = a'$, on a

$$a'^4 = b^2 = c^2 = 1, \qquad a'c = ca', \qquad bc = cb, \qquad a'b = ab^2 = bacb = babc = ba'c.$$

On retrouve G_{16p}^{18}.

Si α appartient à l'exposant 4 :

$$da^2 = a^2 d^{-1}, \qquad db = bd^{-1}, \qquad da^2 b = a^2 bd.$$

Posant $a^2 b = b'$, on retrouve G_{16p}^{18}.

13. XII. $\frac{G}{\Gamma} = G_{16}^5$ (1):

$$a^4 = \alpha, \qquad b^2 = \alpha, \qquad \alpha^2 = 1, \qquad ab = ba^3\alpha.$$

Tableau des opérations.

8	a	a^3				
4	a^2	$a^2\alpha$	b	ab	$a^2 b$	$a^3 b$
2	α	α	α	α	α	α

On a

$$a^8 = b^4 = c^p = 1, \qquad a^4 = b^2, \qquad ab = ba^7,$$

$$ca = ac^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha^8 \equiv 1 \pmod{p},$$
$$cb = bc^\beta \quad \text{avec} \quad \beta^4 \equiv 1 \pmod{p}.$$

Mais

$$cab = abc^{\alpha\beta}, \qquad cba^7 = ba^7 c^{\alpha^7\beta}.$$

Donc on a

$$\alpha^6 \equiv 1 \pmod{p}, \qquad \alpha = \pm 1.$$

J'en conclus

$$ca^4 = a^4 c,$$

donc

$$cb^2 = b^2 c,$$

donc

$$\beta = \pm 1.$$

(1). Si $a = \beta = 1$, on a le groupe $G_{16}^5\, G_p$.

(2). Si $\alpha = 1$, $\beta = -1$, on trouve G_{16p}^{19}, dont les équations de définition sont

$$a^8 = b^4 = c^p = 1, \qquad a^4 = b^2, \qquad ab = ba^7, \qquad ac = ca, \qquad cb = bc^{-1}.$$

(1) *Loc. cit.*, Chap. VI.

(3). Si $\alpha = -1$, $\beta = +1$, on trouve G_{16p}^{20}.

$$a^8 = b^4 = c^p = 1, \quad a^4 = b^2, \quad ab = ba^7, \quad ca = ac^{-1}, \quad bc = cb.$$

(4). Si $\alpha = \beta = -1$, $ca = ac^{-1}$, $cb = bc^{-1}$, donc

$$cab = abc.$$

Posons $ab = b'$; on a

$$a^8 = b'^4 = c^p = 1, \quad a^4 = b'^2, \quad ab' = b'a^7, \quad ca = ac^{-1}, \quad b'c = cb'.$$

Donc on retrouve G_{16p}^{20}.

14. XIII. $\frac{G}{\Gamma} = G_{16}^6$ (1):

$$a^4 = \alpha, \quad b^2 = \alpha^2 = 1, \quad ab = ba^3.$$

Tableau des opérations.

8	a	a^3				
4	a^2	$a^2\alpha$		ab		a^3b
2	α	α	b	α	a^2b	α

On a

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^3,$$

$$ca = ac^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha^8 \equiv 1 \pmod{p},$$
$$cb = bc^\beta \quad \text{avec} \quad \beta^2 \equiv 1 \pmod{p}.$$

Mais

$$cab = abc^{\alpha\beta}, \quad cba^3 = ba^3c^{\alpha^3\beta};$$

donc

$$\alpha^2 \equiv 1 \pmod{p}.$$

(1). $\alpha = \beta = 1$ donne $G_{16}^6 G_p$.

(2). $\alpha = 1$, $\beta = -1$. Les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^3, \quad ac = ca, \quad cb = bc^{-1}$$

définissent G_{16p}^{21}.

(3). $\alpha = -1$, $\beta = 1$. Le groupe G_{16p}^{22} est défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^3, \quad ca = ac^{-1}, \quad cb = bc.$$

(1) *Loc. cit.*, Chap. VI.

(4). $\alpha = \beta = -1$, G_{16p}^{23} est défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^3, \qquad ca = ac^{-1}, \qquad cb = bc^{-1}.$$

15. XIV. $\frac{G}{\Gamma} = G_{16}^{7}$ (1):

$$a^4 = \alpha, \qquad b^2 = \alpha^2 = 1, \qquad ab = ba^3\alpha.$$

Voici le Tableau des opérations

8	a	a^3				
4	a^2	$a^2\alpha$				
2	α	α	b	ab	$a^2 b$	$a^3 b$

On a

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^7,$$

$$ca = ac^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha^8 \equiv 1 \pmod p,$$

$$cb = bc^\beta \quad \text{avec} \quad \beta^2 \equiv 1 \pmod p.$$

Mais

$$cab = abc^{\alpha\beta}, \qquad cba^7 = ba^7 c^{\alpha^7\beta},$$

d'où, puisque $ab = ba^7$,

$$\alpha^6 \equiv 1 \pmod p, \qquad \text{donc} \qquad \alpha = \pm 1.$$

(1). $\alpha = \beta = 1$ donne $G_{16}^{7} G_p$.
(2). $\alpha = 1$, $\beta = -1$ donne le groupe G_{16p}^{24}, défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^{-1}, \qquad ca = ac, \qquad cb = bc^{-1}.$$

(3). $\alpha = -1$, $\beta = 1$ donne le groupe G_{16p}^{25}, défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^{-1}, \qquad ca = ac^{-1}, \qquad cb = bc.$$

(4). $\alpha = \beta = -1$, $ca = ac^{-1}$, $cb = bc^{-1}$, $cab = abc$.
Or posons $ab = b'$.
On a

$$a^8 = b'^2 = 1, \qquad ab' = b'a^7.$$

On retrouve G_{16p}^{25}.

16. Il reste maintenant à chercher si les 25 groupes G_{16p}^{λ} trouvés ($\lambda = 1, 2, \ldots, 25$)

---

(1) *Loc. cit.*, Chap. VI.

sont bien distincts. Pour cela, énumérons dans chacun d'eux le nombre d'opérations d'ordre donné.

Soit d'abord G_{16p}^{1} :

$$a^{16} = b^{p} = 1, \qquad ab^{-1} = ba,$$

a^2 est une opération d'ordre 8, conjuguée d'elle-même dans le groupe total.

On a

$$b^{-\mu} a = ab^{\mu}, \qquad \text{donc} \qquad (ab^{\mu})^2 = a^2,$$

pour toute valeur de μ.

$a^{2\lambda+1} b^{\mu}$, quel que soit μ, est d'ordre 16.

On a donc $8p$ opérations d'ordre 16.

$a^2 b^{\mu}$, $a^6 b^{\mu}$, $a^{10} b^{\mu}$, $a^{14} b^{\mu}$ (μ premier avec p) sont d'ordre $8p$.

Cela fait $4(p-1)$ opérations d'ordre $8p$.

$a^4 b^{\mu}$, $a^{12} b^{\mu}$ (μ premier avec p) sont d'ordre $4p$, d'où $2(p-1)$ opérations d'ordre $4p$.

$a^8 b^{\mu}$ (μ premier avec p) est d'ordre $2p$, d'où $(p-1)$ opérations d'ordre $2p$.

b^{μ} (μ premier avec p) est d'ordre p, d'où $(p-1)$ opérations d'ordre p.

a^2, a^6, a^{10}, a^{14} donnent 4 opérations d'ordre 8.

a^4, a^{12} donnent 2 opérations d'ordre 4.

a^8 est d'ordre 2.

Ainsi, G_{16p}^{1} a :

$8p$	opérations d'ordre	16,
$4(p-1)$	»	$8p$,
$2(p-1)$	»	$4p$,
$p-1$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
4	»	8,
2	»	4,
1	opération d'ordre	2.

17. G_{16p}^{2} est défini par les équations

$$a^{16} = b^{p} = 1, \qquad ba = ab^{\alpha},$$

où α appartient à l'exposant $4 \pmod{p}$; $p-1$ doit être divisible par 4; *exemples :* $p = 5, 13, 17, \ldots$.

On a

$$b^{\alpha'} a = ab \qquad \text{avec} \qquad \alpha' \alpha \equiv 1 \pmod{p}.$$

α' est différent de 1

$$ab^{\mu} = b^{\alpha'\mu}a,$$
$$(ab^{\mu})^2 = b^{\alpha'\mu}a^2 b^{\mu} = a^2 b^{\mu(1-\alpha')},$$
$$(ab^{\mu})^4 = a^2 b^{\mu(1-\alpha')} a^2 b^{\mu(1-\alpha')} = a^4.$$

Donc ab^{μ} est d'ordre 16, quel que soit μ.

De même

$$(a^2 b^{\mu})^2 = a^4.$$

$a^2 b^{\mu}$ est d'ordre 8, quel que soit μ.

Ainsi, $a^{2\lambda+1} b^{\mu}$, quel que soit μ, est d'ordre 16;

$a^{2(2\lambda+1)} b^{\mu}$, quel que soit μ, est d'ordre 8.

$a^{4(2\lambda+1)} b^{\mu}$ (μ premier avec p) est d'ordre $4p$.

$a^8 b^{\mu}$ (μ premier avec p) est d'ordre $2p$.

b^{μ} (μ premier avec p) est d'ordre p.

$a^{4(2\lambda+1)}$ est d'ordre 4, a^8 d'ordre 2.

G^2_{16p} a :

$8p$	opérations d'ordre	16,
$4p$	»	8,
$2(p-1)$	»	$4p$,
$p-1$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
2	»	4,
1	opération d'ordre	2.

18. G^3_{16p} est défini par les équations

$$a^{16} = b^p = 1, \qquad ba = ab^{\alpha},$$

où α appartient à l'exposant $8 \pmod{p}$; $p-1$ est divisible par 8; *exemples :* $p = 17, 41, \ldots$.

Alors on a

$$b^{\alpha'}a = ab, \qquad \alpha'\alpha \equiv 1 \pmod{p}, \qquad b^{\alpha'\mu}a = ab^{\mu}, \qquad (ab^{\mu})^2 = b^{\alpha'\mu}a^2 b^{\mu}.$$

Mais

$$b^{\alpha'^2\mu}a^2 = a^2 b^{\mu}.$$

Donc

$$(ab^{\mu})^2 = b^{(\alpha'+\alpha'^2)\mu}a^2 = a^2 b^{\alpha^2\mu(\alpha'+\alpha'^2)} = a^2 b^{\mu(\alpha+1)}$$
$$(ab^{\mu})^4 = b^{(\alpha'+\alpha'^2)\mu} a^4 b^{\mu(\alpha+1)} = b^{(\alpha'+\alpha'^2)\mu-(\alpha+1)\mu} a^4 = a^4 b^{-(\alpha'+\alpha'^2)\mu+(\alpha+1)\mu}.$$

Enfin

$$(ab^{\mu})^8 = a^8.$$

Donc, $a^{2\lambda+1} b^{\mu}$, quel que soit μ, est d'ordre 16;

$a^{2(2\lambda+1)} b^{\mu}$, quel que soit μ, est d'ordre 8;

$a^{4(2\lambda+1)} b^{\mu}$, quel que soit μ, est d'ordre 4.

$a^8 b^{\mu}$ (μ premier avec p) est d'ordre $2p$.

b^{μ} (μ premier avec p) est d'ordre p, et a^8 d'ordre 2.

G^3_{16p} a :

$8p$	opérations d'ordre	16,
$4p$	»	8,
$2p$	»	4,
$p-1$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
1	opération d'ordre	2.

19. G^4_{16p}, $a^{16} = b^p = 1$, $ba = ab^{\alpha}$, α appartient à l'exposant 16 (mod p), $p-1$ sera divisible par 16; *exemples :* $p = 17, 97, \ldots$.

$$b^{\lambda} a^{\mu} \quad = a^{\mu} b^{\lambda\alpha^{\mu}},$$

$$(b^{\lambda} a^{\mu})^2 = b^{\lambda} a^{2\mu} b^{\lambda\alpha^{\mu}} = a^{2\mu} b^{\lambda(\alpha^{\mu}+\alpha^{2\mu})},$$

$$(b^{\lambda} a^{\mu})^{\rho} = a^{\rho\mu} b^{\lambda(\alpha^{\mu}+\alpha^{2\mu}+\ldots+\alpha^{\rho\mu})} = a^{\rho\mu} b^{\lambda\alpha^{\mu}\frac{\alpha^{\rho\mu}-1}{\alpha^{\mu}-1}}.$$

Si α appartient à l'exposant 16 (mod p), pourvu que μ ne soit pas égal à 16, $\alpha^{\mu}-1$ sera différent de zéro.

Donc, on aura

$$(b^{\lambda} a^{\mu})^{16} = 1.$$

Donc, $a^{2\lambda+1} b^{\mu}$, quel que soit μ, est d'ordre 16;

$a^{2(2\lambda+1)} b^{\mu}$, quel que soit μ, est d'ordre 8;

$a^{4(2\lambda+1)} b^{\mu}$, quel que soit μ, est d'ordre 4;

$a^8 b^{\mu}$, quel que soit μ, est d'ordre 2.

b^{μ} (μ premier avec p) est d'ordre p.

G^4_{16p} a :

$8p$	opérations d'ordre	16,
$4p$	»	8,
$2p$	»	4,
p	»	2,
$p-1$	»	p.

20. G^5_{16p} est défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba, \qquad ca = ac^{\alpha}, \qquad cb = bc^{-1},$$

où α appartient à l'exposant $4 \pmod{p}$

$$c^\lambda a^\mu b^\nu = a^\mu c^{\lambda\alpha^\mu} b^\nu = a^\mu b^\nu c^{(-1)^\nu \lambda\alpha^\mu},$$

$$(c^\lambda a^\mu b^\nu)^2 = c^\lambda a^{2\mu} b^{2\nu} c^{(-1)^\nu\lambda\alpha^\mu} = a^{2\mu} b^{2\nu} c^{(-1)^\nu\lambda\alpha^\mu + (-1)^{2\nu}\lambda\alpha^{2\mu}},$$

$$(c^\lambda a^\mu b^\nu)^\rho = a^{\rho\mu} b^{\rho\nu} c^{(-1)^\nu\lambda\alpha^\mu + (-1)^{2\nu}\lambda\alpha^{2\mu} + \ldots + (-1)^{\rho\nu}\lambda\alpha^{\rho\mu}}.$$

ν ne peut prendre que deux valeurs.

1° Soit $\nu = 0$:

$$(c^\lambda a^\mu)^\rho = a^{\rho\mu} c^{\lambda\alpha^\mu \frac{\alpha^{\rho\mu}-1}{\alpha^\mu - 1}}.$$

Si μ n'est pas multiple de 4, $\alpha^\mu - 1$ est différent de zéro.

Donc, on a

$$(c^\lambda a^\mu)^4 = a^{4\mu}, \qquad \mu \not\equiv 0 \pmod{4}.$$

2° Soit $\nu = 1$:

$$(c^\lambda a^\mu b)^\rho = a^{\rho\mu} b^\rho c^{-\lambda[\alpha^\mu - \alpha^{2\mu} + \ldots + (-1)^\rho \alpha^{\rho\mu}]} = a^{\rho\mu} b^\rho c^{\lambda\alpha^\mu \frac{(-1)^{\rho+1}\alpha^{\rho\mu}-1}{\alpha^\mu+1}}.$$

Soit $\rho = 2\rho'$:

$$(c^\lambda a^\mu b)^{2\rho'} = a^{2\rho'\mu} c^{-\lambda\alpha^\mu \frac{1+\alpha^{2\mu}}{1+\alpha^\mu}},$$

α appartient à l'exposant $4 \pmod{p}$. Donc, si μ est impair, $1 + \alpha^\mu$ est différent de zéro, $1 + \alpha^{2\mu}$ est nul, puisque $\alpha^2 = -1$.

Donc,

$$(c^\lambda a^{2\mu+1} b)^{2\rho} = a^{2\rho(2\mu+1)},$$

a^4 est une opération conjuguée d'elle-même.

Revenons à la formule

$$(c^\lambda a^{2\mu} b)^\rho = a^{2\mu\rho} b^\rho c^{-\lambda\alpha^{2\mu} + \lambda\alpha^{\mu 4} - \ldots + (-1)^\rho \lambda\alpha^{2\mu\rho}}.$$

Soit $\rho = 2\rho'$:

$$(c^\lambda a^{2\mu} b)^{2\rho'} = a^{4\mu\rho'} c^{-\lambda[(-1)^\mu - (-1)^{2\mu} + \ldots - (-1)^{2\mu\rho'}]}.$$

Si $\mu = 2\mu' + 1$, l'exposant de c sera

$$-\lambda(-1-1-\ldots-1) = +2\lambda\rho',$$

donc

$$(c^\lambda a^{2(2\mu+1)} b)^{2\rho} = a^{4\rho(2\mu+1)} c^{2\lambda\rho}$$

et, par suite,

$$(c^\lambda a^{2(2\mu+1)} b)^4 = c^{4\lambda}.$$

Si donc λ est premier avec p, $c^\lambda a^{2(2\mu+1)} b$ est d'ordre $4p$.

Si μ est pair,

$$\mu = 2\mu', \qquad (c^{\lambda} a^{4\mu'} b)^{2p} = 1,$$

$c^{\lambda} a^{4\mu'} b$ est d'ordre 2.

En résumé :

				Cela donne	
$c^{\lambda} a^{2\mu+1} b$	(λ premier avec p)	est d'ordre	8	$4(p-1)$	opérations.
$c^{\lambda} a^{2(2\mu+1)} b$	»	»	$4p$	$2(p-1)$	»
$c^{\lambda} a^{4\mu} b$	»	»	2	$2(p-1)$	»
$c^{\lambda} a^{2\mu+1}$	»	»	8	$4(p-1)$	»
$c^{\lambda} a^{2(2\mu+1)}$	»	»	4	$2(p-1)$	»
$c^{\lambda} a^{4}$	»	»	$2p$	$(p-1)$	»
c^{λ}	»	»	p	$(p-1)$	»
	$a^{2\mu+1} b^{\nu}$, $\nu = 1, 2$	»	8	8	»
	$a^{2(2\mu+1)} b^{\nu}$, $\nu = 1, 2$	»	4	4	»
$a^{4\mu} b^{\nu}$, $\mu, \nu = 1, 2$	(sauf $\mu = \nu = 2$)	»	2	3	»

Donc G_{16p}^{5} contient

$2(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$p-1$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$8p$	»	8,
$2p+2$	»	4,
$2p+1$	»	2.

21. G_{16p}^{6} est défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^5, \qquad ca = ac^{-1}, \qquad cb = bc.$$

Rappelons le Tableau des opérations de G_{16}^{1} :

8	a	$a\alpha$		ab		$ab\alpha$
4	α	α^3		α^3	$b\alpha$	α
2	α^2	α^2	b	α^2	α^2	α^2

Le groupe $\{a, b\}$ contient donc

8	opérations d'ordre	8,
4	»	4,
3	»	2.

Puisque $cb = bc$, $bc^\lambda = c^\lambda b$.

bc^λ (λ premier avec p) sera d'ordre $2p$; cela donne $(p-1)$ opérations d'ordre $2p$.

c^λ (λ premier avec p) sera d'ordre p; d'où $p-1$ opérations d'ordre p.

$$ca = ac^{-1}, \quad \text{donc} \quad c^{-1}a = ac, \quad (ac)^2 = a^2.$$

Donc $a^{2\lambda+1}c^\mu$ (μ premier avec p) sera d'ordre 8.

Cela donne $4(p-1)$ opérations d'ordre 8.

$$cab = abc^{-1}, \quad (cab)^2 = c\alpha^3 c^{-1} = \alpha^3.$$

Donc $a^{2\lambda+1}bc^\mu$ (μ premier avec p) est d'ordre 8; d'où $4(p-1)$ opérations d'ordre 8.

α est une opération conjuguée d'elle-même.

Donc $\alpha^{2\lambda+1}b^\mu c^\lambda$ (λ premier avec p) est d'ordre $4p$; de là $4(p-1)$ opérations d'ordre $4p$.

$\alpha^2 b^\mu c^\lambda$ (λ premier avec p) est d'ordre $2p$; de là $2(p-1)$ opérations d'ordre $2p$.

G^6_{16p} a donc :

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$3(p-1)$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$8p$	»	8,
4	»	4,
3	»	2,

22. G^7_{16p} est défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^5, \quad ca = ac^\alpha, \quad cb = bc,$$

où α appartient à l'exposant 4 (mod p).

On a toujours, pour le groupe $\{a, b\}$,

8	opérations d'ordre	8,
4	»	4,
3	»	2.

bc^λ (λ premier avec p) sera d'ordre $2p$, d'où $p-1$ opérations d'ordre $2p$,

c^λ (λ premier avec p) sera d'ordre p, d'où $p-1$ opérations d'ordre p.

$$c^\lambda a^\mu = a^\mu c^{\lambda\alpha^\mu}, \qquad (c^\lambda a^\mu)^2 = c^\lambda a^{2\mu} c^{\lambda\alpha^\mu} = a^{2\mu} c^{\lambda(\alpha^\mu+\alpha^{2\mu})},$$

$$(c^\lambda a^\mu)^\rho = a^{\rho\mu} c^{\lambda(\alpha^\mu+\alpha^{2\mu}+\ldots+\alpha^{\rho\mu})} = a^{\rho\mu} c^{\lambda\alpha^\mu \frac{\alpha^{\rho\mu}-1}{\alpha^\mu-1}}.$$

Si μ est incongru à zéro (mod 4), $\alpha^\mu - 1$ sera différent de zéro.

Donc

$$(c^\lambda a^{2\mu+1})^4 = a^4;$$

$a^{2\mu+1} c^\lambda$ est d'ordre 8; d'où $4(p-1)$ opérations d'ordre 8.

$$(c^\lambda a^{2(2\mu+1)})^2 = a^4;$$

$a^{2(2\mu+1)} c^\lambda$ est d'ordre 4; d'où $2(p-1)$ opérations d'ordre 4.
$a^4 c^\lambda$ est d'ordre $2p$; d'où $(p-1)$ opérations d'ordre $2p$.

$$c^\lambda a^\mu b = a^\mu c^{\lambda\alpha^\mu} b = a^\mu b c^{\lambda\alpha^\mu},$$

$$(c^\lambda a^\mu b)^2 = c^\lambda a^{6\mu} c^{\lambda\alpha^\mu} = a^{6\mu} c^{\lambda(\alpha^\mu+\alpha^{6\mu})} = c^{-\lambda(\alpha^\mu+\alpha^{6\mu})} a^{6\mu},$$

$$(c^\lambda a^\mu b)^4 = a^{4\mu}.$$

$c^\lambda a^{2\mu+1} b$ est donc d'ordre 8, ce qui donne $4(p-1)$ opérations d'ordre 8,
$c^\lambda a^{2(2\mu+1)} b$ est donc d'ordre 4, ce qui donne $2(p-1)$ opérations d'ordre 4,
$c^\lambda a^4 b$ est donc d'ordre $2p$, ce qui donne $p-1$ opérations d'ordre $2p$.
G^7_{16p} a donc :

$3(p-1)$	opérations d'ordre	$2p$,
$p-1$	»	p,
$8p$	»	8,
$4p$	»	4,
3	»	2.

23. G^8_{16p} a pour équations de définition

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^5, \qquad ca = ac, \qquad cb = bc^{-1}.$$

On a toujours, pour le groupe $\{a, b\}$,

8	opérations d'ordre	8,
4	»	4,
3	»	2.

$c^{-\lambda} b = bc^\lambda$, $(bc^\lambda)^2 = 1$; d'où $p-1$ opérations d'ordre 2.

c^λ donne $(p-1)$ opérations d'ordre p.
$a^\mu bc^\lambda = c^{-\lambda}a^\mu b$, $(a^\mu bc^\lambda)^2 = (a^\mu b)^2$, quel que soit λ.
Donc

$a^{2\mu+1}bc^\lambda$	est d'ordre	8;	d'où	$4(p-1)$	opérations d'ordre	8,
$a^{2(2\mu+1)}bc^\lambda$	»	4;	»	$2(p-1)$	»	4,
a^4bc^λ	»	2;	»	$(p-1)$	»	2,
$a^{2\mu+1}c^\lambda$	»	$8p$;	»	$4(p-1)$	»	$8p$,
$a^{2(2\mu+1)}c^\lambda$	»	$4p$;	»	$2(p-1)$	»	$4p$,
a^4c^λ	»	$2p$;	»	$(p-1)$	»	$2p$.

G^8_{16p} possède :

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$8p$,
$2(p-1)$	»	$4p$,
$p-1$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$4p+4$	»	8,
$2p+2$	»	4,
$2p+1$	»	2.

24. G^9_{16p} est défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^5, \qquad ca = ac^\alpha, \qquad cb = bc^{-1},$$

α appartient à l'exposant $4 \pmod p$.

On a toujours, pour le groupe $\{a, b\}$,

8	opérations d'ordre	8,
4	»	4,
3	»	2.

$c^{-\lambda}b = bc^\lambda$, $(bc^\lambda)^2 = 1$; d'où $p-1$ opérations d'ordre 2.
c^λ donne $p-1$ opérations d'ordre p.

$a^{2\mu+1}c^\lambda$	est d'ordre	8 (*voir* n° **22**),	d'où	$4(p-1)$	opérations d'ordre	8,
$a^{2(2\mu+1)}c^\lambda$	»	4	»	$2(p-1)$	»	4,
a^4c^λ	»	$2p$,	»	$(p-1)$	»	$2p$,

$$a^\mu bc^\lambda = a^\mu c^{-\lambda}b, \qquad c^{-\alpha}a = ac, \qquad c^{\alpha\lambda}a = ac^{-\lambda}, \qquad c^{\alpha^\mu\lambda}a^\mu = a^\mu c^{-\lambda},$$

$$a^\mu bc^\lambda = c^{\alpha^\mu\lambda}a^\mu b, \qquad (a^\mu bc^\lambda)^2 = c^{\alpha^\mu\lambda}(a^\mu b)^2c^\lambda = c^{\alpha^\mu\lambda}a^{6\mu}c^\lambda = c^{\lambda(\alpha^\mu-1)}a^{6\mu} = a^{6\mu}c^{\lambda(1-\alpha^\mu)}$$

et

$$(a^{\mu} bc^{\lambda})^4 = a^{4\mu}.$$

$(a^{2\mu+1} bc^{\lambda})^4 = a^4$; c'est une opération d'ordre 8; d'où $4(p-1)$ opérations d'ordre 8.

$(a^{2(2\mu+1)} bc^{\lambda})^4 = 1$; d'où $2(p-1)$ opérations d'ordre 4.

$a^4 bc^{\lambda}$ est d'ordre 2; d'où $p-1$ opérations d'ordre 2.

G^9_{16p} a :

$p-1$	opérations d'ordre	$2p$,
$p-1$	»	p,
$8p$	»	8,
$4p$	»	4,
$2p+1$	»	2.

25. G^{10}_{16p} est défini par les équations

$$a^2 = b^2 = c^4 = d^p = 1, \qquad ac = ca, \qquad bc = cb, \qquad ab = bac^2,$$
$$da = ad, \qquad db = bd, \qquad dc = cd^{-1}.$$

Le groupe des opérations $\{a, b, c\}$ a pour Tableau :

$$\begin{array}{c||c|c|c|c|c|c||}
4 & & & c & ac & ab & \\
\hline
2 & a & b & c^2 & c^2 & c^2 & abc
\end{array}$$

$\{a, b, c\}$ donne donc

		8	opérations d'ordre	4,
		7	»	2,
d^{λ}	donne	$(p-1)$	»	p,
ad^{λ}	donne	$(p-1)$	»	$2p$,
bd^{λ}	donne	$(p-1)$	»	$2p$.

$dc)^2 = c^2$, dc est d'ordre 4.

$c^3 d^{\lambda}$, cd^{λ}	donnent	$2(p-1)$	opérations d'ordre	4,
$c^2 d^{\lambda}$	donne	$(p-1)$	»	$2p$,
bcd^{λ}, $bc^3 d^{\lambda}$	donnent	$2(p-1)$	»	4,
acd^{λ}, $ac^3 d^{\lambda}$	donnent	$2(p-1)$	»	4,
$bc^2 d^{\lambda}$, $ac^2 d^{\lambda}$	donnent	$2(p-1)$	»	$2p$,
abd^{λ}	donne	$p-1$	»	$4p$.

$abcd^\lambda = d^{-\lambda} abc$, donc $(abcd^\lambda)^2 = 1$.

$abcd^\lambda$, abc^3d^λ	donnent	$2(p-1)$	opérations d'ordre	2,
abc^2d^λ	donne	$(p-1)$	»	$2p$.

G_{16p}^{10} admet :

$2(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$5(p-1)$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$6p+2$	»	4,
$2p+5$	»	2.

26. G_{16p}^{11} a pour équations de définition

$$a^2 = b^2 = c^4 = d^p = 1,\quad ac = ca,\quad bc = cb,\quad ab = bac^2,$$
$$da = ad,\quad db = bd^{-1},\quad dc = cd.$$

$\{a, b, c\}$ donne

		8	opérations d'ordre	4,
		7	»	2,
d^λ	donne	$(p-1)$	»	p,
ad^λ	donne	$(p-1)$	»	$2p$,
bd^λ	donne	$(p-1)$	»	2,
cd^λ, c^3d^λ	donnent	$2(p-1)$	»	$4p$,
c^2d^λ	donne	$(p-1)$	»	$2p$,
bcd^λ, bc^3d^λ	donnent	$2(p-1)$	»	4,
acd^λ, ac^3d^λ	donnent	$2(p-1)$	»	$4p$,
bc^2d^λ	donne	$p-1$	»	2,
ac^2d^λ	donne	$p-1$	»	$2p$,

$$abd^\lambda = ad^{-\lambda}b = d^{-\lambda}ab,\qquad (abd^\lambda)^2 = c^2.$$

$abc^\mu d^\lambda$ donne

$4(p-1)$ opérations d'ordre 4.

Bref G_{16p}^{11} a

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$3(p-1)$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$6p+2$	»	4,
$2p+5$	»	2.

27. G_{16p}^{12} a pour équations de définition

$$a^2 = b^2 = c^4 = d^p = 1, \qquad ac = ca, \qquad bc = cb, \qquad ab = bac^2,$$
$$da = ad^{-1}, \qquad db = bd^{-1}, \qquad dc = cd^{-1}.$$

$\{a, b, c\}$ donne

		8	opérations d'ordre	4,
		7	»	2,
d^λ	donne	$p-1$	»	p,
ad^λ, bd^λ, cd^λ, c^3d^λ	donnent	$4(p-1)$	»	2,
c^2d^λ	donne	$p-1$	»	$2p$,
bcd^λ, bc^3d^λ	donnent	$2(p-1)$	»	$4p$,
acd^λ, ac^3d^λ	donnent	$2(p-1)$	»	$4p$,
bc^2d^λ, ac^2d^λ	donnent	$2(p-1)$	»	2,
abd^λ, abc^2d^λ	donnent	$2(p-1)$	»	$4p$,
$abcd^\lambda$, abc^3d^λ	donnent	$2(p-1)$	»	2.

G_{16p}^{12} possède :

$6(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$p-1$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
8	»	4,
$8p-1$	»	2.

28. G_{16p}^{13} est défini par les équations

$$a^4 = b^4 = c^p = 1, \qquad ab = ba^3, \qquad ca = ac^{-1}, \qquad cb = bc.$$

Le Tableau des opérations de $\{a, b\}$ est

4	a	b	ab	
2	α	β	β	$\alpha\beta$

$\{a, b\}$ contient :

		12	opérations d'ordre	4,
		3	»	2,
c^λ	donne	$p-1$	»	p,
ac^λ, a^3c^λ	donnent	$2(p-1)$	»	4,
bc^λ, b^3c^λ	donnent	$2(p-1)$	»	$4p$,
a^2c^λ, b^2c^λ	donnent	$2(p-1)$	»	$2p$,
abc^λ, ab^3c^λ, a^3bc^λ, $a^3b^3c^\lambda$, ab^2c^λ, $a^3b^2c^\lambda$	donnent	$6(p-1)$	»	4,
a^2bc^λ, $a^2b^3c^\lambda$	donnent	$2(p-1)$	»	$4p$,
$a^2b^2c^\lambda$	donne	$p-1$	»	$2p$.

Bref G_{16p}^{13} a

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$3(p-1)$	»	$2p$,
$p-1)$	»	p,
$8p+4$	»	4,
3	»	2.

Remarque : $4p$ opérations, savoir : a, a^3, ab^2, a^3b^2, ac^λ, a^3c^λ, ab^2c^λ, $a^3b^2c^\lambda$ ont pour carré α.

$4p+4$ opérations, savoir : b, b^3, ab, ab^3, a^2b, a^3b, a^2b^3, a^3b^3, abc^λ, ab^3c^λ, a^3bc^λ, $a^3b^3c^\lambda$ ont pour carré β.

29. G_{16p}^{14} est défini par les équations

$$a^4 = b^4 = c^p = 1, \qquad ab = ba^3, \qquad ca = ac, \qquad cb = bc^{-1}.$$

$\{a, b\}$ contient

		12	opérations d'ordre	4,
		3	»	2,
c^λ	donne	$(p-1)$	»	p,
ac^λ, a^3c^λ, ab^2c^λ, $a^3b^2c^\lambda$	donnent	$4(p-1)$	»	$4p$,
bc^λ, b^3c^λ, $a^\mu bc^\lambda$, $a^\mu b^3c^\lambda$	donnent	$8(p-1)$	»	4 (carré β),
a^2c^λ, b^2c^λ, $a^2b^2c^\lambda$	donnent	$3(p-1)$	»	$2p$.

On remarquera qu'il y a $8p$ opérations d'ordre 4 ayant pour carré β et 4 seulement ayant pour carré α.

Donc G_{16p}^{14} diffère de G_{16p}^{13}, bien qu'ayant le même nombre d'opérations d'ordre donné que ce dernier groupe, savoir :

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$3(p-1)$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$8p+4$	»	4,
3	»	2.

30. G_{16p}^{15} est défini par les équations

$$a^4 = b^4 = c^p = 1, \qquad ab = ba^3, \qquad ca = ac, \qquad cb = bc^\beta,$$

où β appartient à l'exposant $4 \pmod p$.

$\{a, b\}$ contient

		12	opérations d'ordre	4,
		3	»	2,
c^λ	donne	$p-1$	»	p,
ac^λ, a^3c^λ	donnent	$2(p-1)$	»	$4p$,

$$(cb)^2 = cb^2c^\beta = c^{1-\beta}b^2 = b^2c^{\beta-1} \quad \text{donc} \quad (cb)^4 = 1,$$

bc^λ, b^3c^λ	donnent	$2(p-1)$	opérations d'ordre	4,
a^2c^λ	donne	$p-1$	»	$2p$,
b^2c^λ	donne	$p-1$	»	2,
a^2bc^λ, $a^2b^3c^\lambda$, abc^λ, a^3bc^λ, ab^3c^λ, $a^3b^3c^\lambda$, ab^2c^λ, $a^3b^2c^\lambda$	donnent	$8(p-1)$	»	4,
$a^2b^2c^\lambda$	donne	$p-1$	»	2.

Donc G_{16p}^{15} a

$2(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$p-1$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$10p+2$	»	4,
$2p+1$	»	2.

31. G_{16p}^{16} a pour équations de définition

$$a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac,$$
$$da = ad^{-1}, \quad db = bd, \quad dc = cd.$$

Le Tableau des opérations de $\{a, b, c\}$ est

4	a		ab	
2	$a^2 = \alpha$	b	$\alpha c = \alpha\beta$	$c = \beta$

D'où

		8	opérations d'ordre	4,
		7	»	2,
d^λ	donne	$(p-1)$	»	p,
ad^λ, a^3d^λ	donnent	$2(p-1)$	»	4,
a^2d^λ, bd^λ, cd^λ	donnent	$3(p-1)$	»	$2p$,
$a^{2\mu+1}bd^\lambda$, $a^{2\mu+1}cd^\lambda$, $a^{2\mu+1}bcd^\lambda$	donnent	$6(p-1)$	»	4,
a^2bd^λ, a^2cd^λ, a^2bcd^λ, bcd^λ	donnent	$4(p-1)$	»	$2p$.

G_{16p}^{16} possède

$7(p-1)$	opérations d'ordre	$2p$,
$p-1$	»	p,
$8p$	»	4,
7	»	2.

32. G_{16p}^{17} est défini par les équations

$$a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1, \quad ac = ca, \quad cb = cb, \quad ab = abc,$$
$$da = ad^{\alpha}, \quad db = bd, \quad dc = cd,$$

où α appartient à l'exposant 4 (mod p).

Le groupe $\{a, b, c\}$ donne

		8	opérations d'ordre	4,
		7	»	2,
d^{λ}	donne	$(p-1)$	»	p,
ad^{λ}, a^3d^{λ}	donnent	$2(p-1)$	»	4,
a^2d^{λ}	donne	$(p-1)$	»	2,
bd^{λ}, cd^{λ}, bcd^{λ}	donnent	$3(p-1)$	»	$2p$,
abd^{λ}, a^3bd^{λ}, $abcd^{\lambda}$, acd^{λ}, a^3cd^{λ}, a^3bcd^{λ}	donnent	$6(p-1)$	»	4,
a^2bd^{λ}, a^2cd^{λ}, a^2bcd^{λ}	donnent	$3(p-1)$	»	2.

G_{16p}^{17} a

$3(p-1)$	opérations d'ordre	$2p$,
$8p$	»	4,
$p-1$	»	p,
$4p+3$	»	2.

33. G_{16p}^{18} a pour équation de définition

$$a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac,$$
$$da = ad, \quad db = bd^{-1}, \quad dc = cd,$$

$\{a, b, c\}$ donne

		8	opérations d'ordre	4,
		7	»	2,
d^{λ}	donne	$p-1$	»	p,
ad^{λ}, a^3d^{λ}	donnent	$2(p-1)$	»	$4p$,
a^2d^{λ}, cd^{λ}, a^2cd^{λ}	donnent	$3(p-1)$	»	$2p$,
bd^{λ}, bcd^{λ}, a^2bd^{λ}, a^2bcd^{λ}	donnent	$4(p-1)$	»	2,
abd^{λ}, a^3bd^{λ}, $abcd^{\lambda}$, a^3bcd^{λ}	donnent	$4(p-1)$	»	4,
acd^{λ}, a^3cd^{λ}	donnent	$2(p-1)$	»	$4p$.

G_{16p}^{18} possède

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$3(p-1)$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$4p+4$	»	4,
$4p+3$	»	2.

34. G_{16p}^{19} est défini par les équations

$$a^8 = b^4 = c^p = 1, \quad a^4 = b^2, \quad ab = ba^7, \quad ca = ac, \quad cb = bc^{-1},$$

$\{a, b\}$ a pour Tableau d'opérations

8	a	a^3				
4	a^2	$a^2\alpha$	b	ab	a^2b	a^3b
2	α	α	α	α	α	α

donc $\{a, b\}$ donne

		4	opérations d'ordre	8,
		10	»	4,
		1	opération d'ordre	2,
c^λ	donne	$p-1$	opérations d'ordre	p,
$a^{2\mu+1}c^\lambda$	donne	$4(p-1)$	»	$8p$,
$a^{2(2\mu+1)}c^\lambda$	donne	$2(p-1)$	»	$4p$,
a^4c^λ	donne	$p-1$	»	$2p$,
$a^\mu bc^\lambda$	donne	$8(p-1)$	»	4.

Donc G_{16p}^{19} a

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$8p$.
$2(p-1)$	»	$4p$,
$p-1$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
4	»	8,
$8p+2$	»	4,
1	opération d'ordre	2.

35. G_{16p}^{20} est défini par les équations

$$a^8 = b^4 = c^p = 1, \quad a^3 = b^2, \quad ab = ba^7, \quad ca = ac^{-1}, \quad cb = bc,$$

$\{a, b\}$ donne

		4	opérations d'ordre	8,
		10	»	2,
		1	opération d'ordre	2,
c^λ	donne	$(p-1)$	opérations d'ordre	p,
$a^{2\mu+1}c^\lambda$	donne	$4(p-1)$	»	8,
$a^{2(2\mu+1)}c^\lambda$, $a^{2(2\mu+1)}bc^\lambda$, a^4bc^λ	donnent	$5(p-1)$	»	$4p$,
a^4c^λ, bc^λ	donnent	$2(p-1)$	»	$2p$,
$a^{2\mu+1}bc^\lambda$	donne	$4(p-1)$	»	4.

Donc G_{16p}^{20} a

$5(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$2(p-1)$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$4p$	»	8,
$4p+6$	»	4,
1	opération d'ordre	2.

36. Le groupe G_{16p}^{21} est défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^3, \qquad ac = ca, \qquad cb = bc^{-1}.$$

Le Tableau des opérations de $\{a, b\}$ est

8	a	a^3				
4	a^2	$a^2\alpha$		ab		a^3b
2	α	α	b	α	a^2b	α

Par suite, $\{a, b\}$ donne

		4	opérations d'ordre	8,
		6	»	4,
		5	»	2,
c^λ	donne	$p-1$	»	p,
$a^{2\mu+1}c^\lambda$	donne	$4(p-1)$	»	$8p$,
$a^{2(2\mu+1)}c^\lambda$	donne	$2(p-1)$	»	$4p$,
a^4c^λ	donne	$p-1$	»	$2p$,
bc^λ, $a^{2(2\mu+1)}bc^\lambda$, a^4bc^λ	donnent	$4(p-1)$	»	2,
$a^{2\mu+1}bc^\lambda$	donne	$4(p-1)$	»	4.

Bref G_{16p}^{21} a

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$8p$,
$2(p-1)$	»	$4p$,
$p-1$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
4	»	8,
$4p+2$	»	4,
$4p+1$	»	2.

37. Le groupe G_{16p}^{22} a pour équations de définitions

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^3, \qquad ca = ac^{-1}, \qquad cb = bc.$$

$\{a, b\}$ donne

		4	opérations d'ordre	8,
		6	»	4,
		5	»	2,
c^λ	donne	$p-1$	»	p,
$a^{2\mu+1}c^\lambda$	donne	$4(p-1)$	»	8,
$a^{2(2\mu+1)}c^\lambda$	donne	$2(p-1)$	»	$4p$,
a^4c^λ, bc^λ, $a^{2(\mu+1)}bc^\lambda$, a^4bc^λ	donnent	$5(p-1)$	»	$2p$,
$a^{2\mu+1}bc^\lambda$	donne	$4(p-1)$	»	4.

Bref, on a, pour le groupe G_{16p}^{22},

$2(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$5(p-1)$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$4p$	»	8,
$4p+2$	»	4,
5	»	2.

38. G_{16p}^{23} est défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^3, \qquad ca = ac^{-1}, \qquad cb = bc^{-1}$$

$\{a, b\}$ donne

		4	opérations d'ordre	8,
		6	»	4,
		5	»	2,
c^λ	donne	$p-1$	»	p,
$a^{2\mu+1}c^\lambda$	donne	$4(p-1)$	»	8,
$a^{2(2\mu+1)}c^\lambda$, $a^{2\mu+1}bc^\lambda$	donnent	$6(p-1)$	»	$4p$,
a^4c^λ	donne	$p-1$	»	$2p$,
bc^λ, $a^{2(2\mu+1)}bc^\lambda$, a^4bc^λ	donnent	$4(p-1)$	»	2.

Donc G_{16p}^{23} a

$6(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$p-1$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$4p$	»	8,
6	»	4,
$4p+1$	»	2.

39. G_{16p}^{24} a pour équations de définition

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^7, \qquad ca = ac, \qquad cb = bc^{-1}.$$

Le Tableau des opérations de $\{a, b\}$ est

8	a	a^3				
4	a^2	$a^2\alpha$				
2	α	α	b	ab	a^2b	a^3b

Donc $\{a, b\}$ donne

		4	opérations d'ordre	8,
		2	»	4,
		9	»	2,
c^λ	donne	$p-1$	»	p,
$a^{2\mu+1}c^\lambda$	donne	$4(p-1)$	»	$8p$,
$a^{2(2\mu+1)}c^\lambda$	donne	$2(p-1)$	»	$4p$,
a^4c^λ	donne	$p-1$	»	$2p$,
$a^\mu bc^\lambda$	donne	$8(p-1)$	»	2.

G_{16p}^{24} possède

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$8p$,
$2(p-1)$	»	$4p$,
$p-1$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
4	»	8,
2	»	4,
$8p+1$	»	2.

40. Enfin G_{16p}^{25} est défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^7, \qquad ca = ac^{-1}, \qquad bc = cb.$$

Le groupe $\{a, b\}$ donne

		4	opérations d'ordre	8,
		2	»	4,
		9	»	2,
c^λ	donne	$(p-1)$	»	p,
$a^{2\mu+1}c^\lambda$	donne	$4(p-1)$	»	8,
$a^{2(2\mu+1)}c^\lambda$	donne	$2(p-1)$	»	$4p$,
a^4c^λ, $a^{2\mu}bc^\lambda$	donnent	$5(p-1)$	»	$2p$,
$a^{2\mu+1}bc^\lambda$	donne	$4(p-1)$	»	2.

G_{16p}^{25} a

$2(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$5(p-1)$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$4p$	»	8,
2	»	4,
$4p+5$	»	2.

41. B. J'arrive au cas où il n'y a pas dans le groupe cherché de sous-groupe d'ordre p conjugué de lui-même; alors supposons qu'il y ait un sous-groupe d'ordre 16, conjugué de lui-même.

Supposons que le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est G_{16}.

Soit a une opération d'ordre 16. Elle engendre G_{16}.

Pour engendrer G_{16}, on peut remplacer a par

$$a, \text{ ou } a^3, \text{ ou } a^5, a^7, a^9, a^{11}, a^{13}, a^{15}.$$

Le groupe des isomorphismes de G_{16} est d'ordre 8.

Ces isomorphismes sont, l'isomorphisme identique, 1, puis

$$\begin{aligned}
s &= (a, a^3, a^9, a^{11})(a^2, a^6)(a^4, a^{12})(a^5, a^{15}, a^{13}, a^7)(a^{10}, a^{14}),\\
s^2 &= (a, a^9)(a^3, a^{11})(a^5, a^{13})(a^7, a^{15}),\\
s^3 &= (a, a^{11}, a^9, a^3)(a^2, a^6)(a^4, a^{12})(a^5, a^7, a^{13}, a^{15})(a^{10}, a^{14}),\\
t &= (a, a^5, a^9, a^{13})(a^2, a^{10})(a^3, a^{15}, a^{11}, a^7)(a^6, a^{14}),\\
st &= (a, a^{15})(a^2, a^{14})(a^3, a^{13})(a^4, a^{12})(a^5, a^{11})(a^6, a^{10})(a^7, a^9),\\
s^2 t &= (a, a^{13}, a^9, a^5)(a^2, a^{10})(a^3, a^7, a^{11}, a^{15})(a^6, a^{14}),\\
s^3 t &= (a, a^7)(a^2, a^{14})(a^3, a^5)(a^4, a^{12})(a^6, a^{10})(a^9, a^{15})(a^{11}, a^{13}).
\end{aligned}$$

On a

$$s^4 = t^4 = 1, \qquad s^2 = t^2, \qquad st = ts.$$

De là résulte que si b est une opération d'ordre p, permutable avec le groupe G_{16}, elle est nécessairement permutable avec toutes les opérations de G_{16}.

On retombe sur le groupe $G_{16} G_p$.

42. Soit $G_8 G_2$ le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même

$$\alpha^8 = \beta^2 = 1.$$

On pourra remplacer (pour engendrer le sous-groupe)

$$\begin{array}{lll}
\alpha & \text{par} & \alpha,\ \alpha^3,\ \alpha^5,\ \alpha^7,\ \alpha\beta,\ \alpha^3\beta,\ \alpha^5\beta,\ \alpha^7\beta,\\
\beta & \text{par} & \beta,\ \alpha^4\beta.
\end{array}$$

Le groupe des isomorphismes de $G_8 G_2$ est donc d'ordre 16.

Il n'y a donc aucun isomorphisme d'ordre impair.

Donc, si une opération d'ordre p est permutable avec $G_8 G_2$, elle sera permutable avec toutes les opérations de ce groupe.

On retrouve $G_8 G_2 G_p$.

43. Soit $(G_4)^2$ le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même.

Soient $a^4 = b^4 = 1$, $ab = ba$.

Voici le Tableau des opérations :

4	a	a^3	b	ab	$a^2 b$	$a^3 b$	ab^2	$a^3 b^2$	b^3	ab^3	$a^2 b^3$	$a^3 b^3$
2	a^2	a^2	b^2	$a^2 b^2$	b^2	$a^2 b^2$	a^2	a^2	b^2	$a^2 b^2$	b^2	$a^2 b^2$

Il y a 12 opérations d'ordre 4 :

$$\begin{array}{lll} 4 & \text{ont pour carré} & a^2, \\ 4 & \text{»} & b^2, \\ 4 & \text{»} & a^2 b^2, \end{array}$$

On pourra prendre pour opération génératrice a' l'une des 12 opérations d'ordre 4, puis ensuite, pour b', l'une des 8 opérations d'ordre 4 n'ayant pas même carré que a'.

En tout, cela donne

$$12.8 = 96 \text{ isomorphes.}$$

Or,

$$96 = 3.32.$$

Puisque 3^1 est la plus grande puissance de 3 qui divise 96, les isomorphismes d'ordre 3 se partagent en groupes cycliques d'ordre 3 formant une suite complète de sous-groupes conjugués dans le groupe total des isomorphismes.

Soient $c^3 = 1$.

Posons

$$ac = cb, \qquad bc = ca^\alpha b^\beta;$$

d'où

$$a^\alpha b^\beta c = a^\alpha c a^{\alpha\beta} b^{\beta^2} = c a^{\alpha\beta} b^{\alpha+\beta^2}.$$

On devra donc avoir

$$\beta^2 + \alpha \equiv 0, \qquad \alpha\beta \equiv 1 \pmod 4.$$

Donc

$$\beta^3 \equiv -1 \pmod 4,$$

d'où

$$\beta = 3, \qquad \alpha = 3.$$

Le groupe G_{48}^{26} sera défini par les équations

$$a^4 = b^4 = c^3 = 1, \qquad ab = ba,$$
$$\bar{c} = (a, b, a^3 b^3).$$

44. Le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est $G_4(G_2)^2$. On a

$$a^4 = b^2 = c^2 = 1, \qquad ab = ba, \qquad ac = ca, \qquad bc = cb.$$

4	a	a^3		ab		$a^3 b$		ac		$a^3 c$		abc		$a^3 bc$
2	a^2	a^2	b	a^2	$a^2 b$	a^2	c	a^2	$a^2 c$	a^2	bc	a^2	$a^2 bc$	a^2

Pour avoir le groupe des isomorphismes, on peut remplacer a par l'une des

8 opérations d'ordre 4, soit a'; puis b par l'une des 6 opérations b, a^2b, c, a^2c, bc, a^2bc, soit b'; ensuite c par l'une des 4 opérations d'ordre 2 qui restent après que l'on a exclu b' et a'^2b'.

Le groupe des isomorphismes est donc d'ordre

$$8.6.4 = 3.64 = 192.$$

Les isomorphismes d'ordre 3 se partagent en groupes d'ordre 3 formant une suite complète unique de sous-groupes conjugués.

Si l'on se reporte aux considérations faites dans un Mémoire antérieur (1), on a ici, $m_4 = 1$, $ad = da$, par exemple (en supposant $d^3 = 1$),

$$\overline{d} = (a^\alpha b, a^\alpha c, a^\alpha bc).$$

On trouve ainsi le groupe décomposable $G_{12}^3 G_4$ (2).

45. Le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est $(G_2)^4$. L'ordre du groupe des isomorphismes est

$$(16-1)(16-2)(16-4)(16-8) = 15.14.12.8 = 2^6.3^2.5.7 = 20\,160.$$

On a

$$m_2 \equiv 15 \qquad (\text{mod}\, p) \quad (3).$$

Si $p = 7$, peut-on avoir $m_2 = 8$?

Soit

$$a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = e^7 = 1,$$

a, b, c, d étant deux à deux permutables.

Les opérations avec lesquelles e est permutable forment un groupe, car si l'on a

$$ae = ea, \qquad be = eb,$$

on aura

$$abe = aeb = eab.$$

Or il faudrait, en prenant les 8 opérations d'ordre 2 et en y ajoutant l'opération identique, ce qui fait 9 opérations, que ces 9 opérations constituent un sous-groupe de $(G_2)^4$.

Mais 9 ne divise pas 2^4. Donc c'est impossible.

On peut avoir $m_2 = 1$,

$$ae = ea;$$

(1) *Loc. cit.* au commencement du Chapitre VIII.

(2) *Loc. cit.*, Chap. V.

(3) *Loc. cit.* au commencement du Chapitre VIII.

puis

$$\bar{e} = (b, c, d, bc, cd, bcd, bd)(ab, ac, ad, abc, acd, abcd, abd).$$

On trouve ainsi $G_{56}^{8} G_2$ (¹).

D'ailleurs, dans le groupe des isomorphismes de $(G_2)^4$, il y a une suite complète unique de sous-groupes conjugués d'ordre 7.

46. Faisons $p = 5$.

On peut supposer $m_2 = 10$, ou $m_2 = 5$, ou $m_2 = 0$.

Mais les opérations de $(G_2)^4$ permutables avec e forment un groupe. On en déduit qu'on a nécessairement $m_2 = 0$; autrement l'ordre du groupe des opérations de $(G_2)^4$ permutables avec e serait 6, ou 11, ce qui est impossible puisque ces nombres ne divisent pas 2^4.

On peut supposer, par exemple, qu'on a

$$\bar{e} = (a, b, c, d, abcd)(ab, bc, cd, abc, bcd)(ac, bd, abd, ad, acd).$$

Introduisons les exposants imaginaires de Galois.

Prenons comme congruence fondamentale

$$x^4 \equiv x^3 + x^2 + x + 1 \pmod 2.$$

Voyons à quel exposant appartient x :

$$x^1 = x, \qquad x^2 = x^2, \qquad x^3 = x^3, \qquad x^4 \equiv x^3 + x^2 + x + 1,$$
$$x^5 \equiv x^4 + x^3 + x^2 + x \equiv 1.$$

Donc x appartient à l'exposant 5 et G_{80}^{27} est défini par les équations

$$a^{(2,\, x^4+x^3+x^2+x+1)} = b^5 = 1, \qquad ab = ba^x.$$

On remarquera d'ailleurs que les sous-groupes d'ordre 5 du groupe des isomorphismes de $(G_2)^4$ font partie d'une suite complète unique de sous-groupes conjugués.

47. Soit $p = 3$. On aura

$$m_2 = 15,\ 12,\ 9,\ 6,\ 3,\ 0.$$

Pour $m_2 = 15$, on aurait un sous-groupe d'ordre 3 conjugué de lui-même.

Les opérations de $(G_2)^4$ permutables avec e devant former un groupe, les hypothèses $m_2 = 12,\ 9,\ 6$ sont exclues.

(¹) *Loc. cit.*, fin du Chapitre VIII.

Soit $m_2 = 3$.

On aurait, par exemple,

$$e^3 = 1, \qquad ce = ec, \qquad de = ed,$$
$$\bar{c} = (a, b, ab).$$

On trouve ainsi $G_{12}^3(G_2)^2$.

Soit enfin $m_2 = 0$.

Appelons b la transformée de a par l'opération e :

$$ae = eb.$$

Soit ensuite $be = ec'$, et par suite $c'e = ea$.

On a

$$abc'e = eabc'; \qquad \text{donc} \qquad abc' = 1, \qquad c' = ab.$$

Bref, on pourra prendre pour $\bar{e}$ l'isomorphisme suivant :

$$\bar{e} = (a, b, ab)(c, d, cd)(ac, bd, abcd)(ad, bcd, abc)(bc, abd, acd).$$

Introduisons les exposants imaginaires de Galois.

Prenons la congruence fondamentale

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{2}.$$

On a vu que x, x^2, x^3, $x^3 + x^2 + x + 1$ appartiennent à l'exposant 5, $1 + x$ appartient à l'exposant 15.

Il en est de même de $1 + x^2 \equiv (1 + x)^2$, de $x + x^2 + x^3 \equiv (1 + x)^4$, de $(1 + x + x^2) \equiv (1 + x)^7$, de $1 + x^3 \equiv (1 + x)^8$, de $1 + x + x^3 \equiv (1 + x)^{11}$, de $x + x^2 \equiv (1 + x)^{13}$ et de $x + x^3 \equiv (1 + x)^{14}$.

Les deux seuls nombres appartenant à l'exposant 3 sont

$$1 + x^2 + x^3 \quad \text{et} \quad x^2 + x^3 \qquad [1 + x^2 + x^3 \equiv (1 + x)^5; \quad x^2 + x^3 \equiv (1 + x)^{10}].$$

Si l'on envisage le groupe des isomorphismes de $(G_2)^4$, ou plutôt le groupe des substitutions linéaires simplement isomorphe, j'observe que, puisqu'on a $m_2 = 0$, les substitutions d'ordre 3 correspondront à des congruences caractéristiques ayant toutes leurs racines imaginaires.

Cette congruence caractéristique sera donc

$$\sigma^4 + \sigma^3 + \sigma^2 + \sigma + 1 \equiv 0 \pmod{2}$$

ou

$$\sigma^4 + \sigma^3 + 1 \equiv 0$$

ou

$$\sigma^4 + \sigma^2 + 1 \equiv 0$$

ou

$$\sigma^4 + \sigma + 1 \equiv 0.$$

Cette congruence caractéristique est d'ailleurs donnée par la formule

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\sigma & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}+\sigma & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+\sigma & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}+\sigma \end{vmatrix} \equiv 0 \quad (^1).$$

G_{48}^{28} sera défini par les équations

$$a^{(2,\, x^4+x^3+x^2+x+1)} = b^3 = 1, \qquad ab = ba^{x^3+x^2}.$$

48. Le groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est $G_8^1 G_2$

$$a^4 = b^2 = c^2 = 1, \qquad ab = ba^3, \qquad ac = ca, \qquad bc = cb.$$

4	a	a^3						ac	a^3c					
2	a^2	a^2	b	ab	a^2b	a^3b	c	a^2	a^2	a^2c	bc	abc	a^2bc	a^3bc

L'ordre du groupe des isomorphismes est 64.

En effet, on peut remplacer a par l'une des 4 opérations a, a^3, ac, a^3c; puis b par l'une des 8 opérations b, ab, a^2b, a^3b, bc, abc, a^2bc, a^3bc; enfin c par l'une des 2 opérations c, a^2c.

Cela fait en tout 64 isomorphismes.

Donc, il n'y a pas d'isomorphisme d'ordre premier impair.

Autrement : on a

$$m_4 \equiv 2 \pmod p, \qquad \text{donc} \qquad m_4 = 2;$$

donc l'opération d, d'ordre p, est permutable avec a et c.

Ensuite il y a 11 opérations d'ordre 2.

Si $p = 7$, m_2 est au moins égal à 4 (puisque d est permutable avec a^2, c, a^2c).

D'ailleurs m_2 ne peut pas être égal à 4 : il n'y a pas dans le groupe $G_8^1 G_2$ de sous-groupe d'ordre 5.

Si $p = 5$, l'hypothèse $m_2 = 6$ est inacceptable : il n'y a pas dans le groupe $G_8^1 G_2$ de sous-groupe d'ordre 7.

(1) *Loc. cit.*, Chap. VII. — *Voir* aussi Chap. VIII.

Si $p=3$, $m_2=8$, 5. C'est impossible : il n'y a pas dans $G_8^1 G_2$ de sous-groupe d'ordre 6, ou 9.

49. Le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est $G_8^2 G_2$:

$$a^2=b^2=\alpha, \qquad \alpha^2=c^2=1, \qquad ab=ba\alpha, \qquad ac=ca, \qquad bc=cb,$$

4	a	b	ab	$a\alpha$	$b\alpha$	$ab\alpha$		ac	bc	abc		$ac\alpha$	$bc\alpha$	$abc\alpha$
2	α	α	α	α	α	α	c	α	α	α	$c\alpha$	α	α	α

On peut remplacer a par l'une des douze opérations a, b, ab, $a\alpha$, $b\alpha$, $ab\alpha$, ac, bc, abc, $ac\alpha$, $bc\alpha$, $abc\alpha$; soit a' ; puis b par l'une des 8 opérations d'ordre 4 qui restent, après qu'on a effacé a', $a'c$, $a'\alpha$, $a'c\alpha$; enfin c peut être remplacé par l'une des deux opérations c, $c\alpha$.

Le groupe des isomorphismes est donc d'ordre

$$12.16=192.$$

D'après cela, il y a, dans le groupe des isomorphismes, une suite complète unique de sous-groupes conjugués d'ordre 3.

Soit d une opération d'ordre 3. Je dis que d est nécessairement permutable avec α.

En effet, si d n'est pas permutable avec α, il n'est permutable avec aucune des opérations d'ordre 4, qui toutes ont pour carré α. On aurait, par exemple, $ad=da'$, a' étant d'ordre 4.

Mais on en déduit $a^2 d = da'^2$, donc $\alpha d = d\alpha$. Il y a contradiction. Donc d est permutable avec α, et, par suite, avec c et $c\alpha$.

Il y a six groupes d'ordre 4, donc on a

$$m_4 \equiv 6 \qquad (\bmod 3) \quad (^1).$$

L'hypothèse $m_4=6$ doit être écartée (7 ne divise pas 16).

Donc $m_4=3$ ou $m_4=0$.

Soit $m_4=3$; si d est permutable avec a, b, ab, il est aussi permutable avec ac, bc, abc, donc on aurait $m_4=6$.

Mais, s'il est permutable avec ac, il est permutable avec a, puisqu'il est déjà permutable avec c.

Donc l'hypothèse $m_4=3$ doit être écartée.

(1) *Loc. cit.*, le commencement du Chapitre VIII.

Reste $m_4 = 0$, qui donne $G_{24}^7 G_2$ ([1]),

$$a^2 = b^2 = \alpha, \qquad \alpha^2 = c^2 = d^3 = 1,$$
$$ab = ba\alpha, \qquad ac = ca, \qquad bc = cb, \qquad dc = cd, \qquad \overline{d} = (a, ab, b).$$

50. Le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est G_{16}^1 :

$$(a^8 = b^2 = 1, \; ab = ba^5).$$

Le Tableau des opérations est le suivant :

8	a	a^3	a^5	a^7		ab		$a^3 b$		$a^5 b$		$a^7 b$
4	a^2	a^6	a^2	a^6		a^6	$a^2 b$	a^2		a^6	$a^6 b$	a^2
2	a^4	a^4	α^4	a^4	b	a^4	a^4	a^4	$a^4 b$	a^4	a^4	a^4

On peut remplacer a par l'une des 8 opérations a, a^3, a^5, a^7, ab, $a^3 b$, $a^5 b$, $a^7 b$, et b par l'une des 2 opérations b, $a^4 b$, ce qui donne 16 pour l'ordre du groupe des isomorphismes; donc, il n'y a pas d'isomorphisme de degré impair.

51. Le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est G_{16}^4 ([2]) :

$$a^2 = b^2 = c^4 = 1, \qquad ab = bac^2, \qquad ac = ca, \qquad bc = cb;$$

il a, pour Tableau de ses opérations,

4			ab			abc^2	c	c^3	ac	bc		ac^3	bc^3	
2	a	b	c^2	ac^2	bc^2	c^2	e^2	c^2	c^2	c^2	abc	c^2	c^2	abc^3

On peut remplacer a par l'une des 6 opérations a, b, ac^2, bc^2, abc, abc^2.

a étant ainsi remplacé par a', on peut choisir pour b l'une des 4 opérations qui restent quand on a supprimé a' et $a'c^2$. On peut enfin remplacer l'opération c par c ou c^3.

Cela fait en tout $48 = 3 . 2^4$ isomorphismes.

Il y aura donc, en particulier, une suite complète unique de sous-groupes conjugués d'ordre 3.

On pourra, par exemple, prendre

$$\overline{d} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & abc & c \end{pmatrix}$$

([1]) *Loc. cit.*, fin du Chapitre VIII.

([2]) *Loc. cit*, Chap. VI.

ou

$$\overline{d} = (a, b, abc)(ab, ac^3, bc^3)(ac^2, bc^2, abc^3)(ac, bc, abc^2).$$

Le groupe G_{48}^{29} est alors défini par les équations

$$a^2 = b^2 = c^2 = d^3 = 1, \qquad ab = bac^2, \qquad ac = ca, \qquad bc = cb, \qquad cd = dc,$$
$$\overline{d} = (a, b, abc).$$

52. Le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est G_{16}^2 :

$$a^4 = b^4 = 1, \qquad ab = ba^3.$$

Le Tableau des opérations est ici, en posant $a^2 = \alpha$, $b^2 = \beta$, $ab = ba\alpha$:

4	a	$a\alpha$	b	ab	$b\alpha$	$ab\alpha$	$a\beta$		$a\alpha\beta$	$b\beta$	$ab\beta$	$b\alpha\beta$	$ab\alpha\beta$
2	α	α	β	β	β	β	α	$\alpha\beta$	α	β	β	β	β

a pourra être remplacé par l'une des 4 opérations a, $a\alpha$, $a\beta$, $a\alpha\beta$.
b » 8 b, ab, $b\alpha$, $ab\alpha$, $b\beta$, $ab\beta$, $b\alpha\beta$, $ab\alpha\beta$.

L'ordre du groupe des isomorphismes est 32.

Il n'y a pas d'isomorphisme d'ordre impair.

53. Le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est G_{16}^3 :

$$a^2 = \alpha, \qquad b^2 = \alpha^2 = \beta^2 = 1, \qquad ab = ba\beta,$$

4	a	$a\alpha$		ab		$ab\alpha$		$a\beta$	$a\alpha\beta$		$ab\beta$		$ab\alpha\beta$	
2	α	α	b	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	β	α	α	$b\beta$	$\alpha\beta$	$b\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$b\alpha$

a pourra être remplacé par l'une des 8 opérations a, $a\alpha$, ab, $ab\alpha$, $a\beta$, $a\alpha\beta$, $ab\beta$, $ab\alpha\beta$; b, par l'une des 4 opérations b, $b\beta$, $b\alpha$, $b\alpha\beta$.

Cela donne 32 pour l'ordre du groupe des isomorphismes.

Il n'y a pas d'isomorphisme d'ordre impair.

54. Le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est G_{16}^4 :

$$a^4 = b^2 = \alpha, \qquad \alpha^2 = 1, \qquad ab = ba^3\alpha.$$

8	a	a^3	$a\alpha$	$a^3\alpha$								
4	a^2	$a^2\alpha$	a^2	$a^2\alpha$	b	ab	a^2b	a^3b	$b\alpha$	$ab\alpha$	$a^2b\alpha$	$a^3b\alpha$
2	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α

a peut être remplacé par l'une des 4 opérations a, a^3, $a\alpha$, $a^3\alpha$, et b par l'une des 8 opérations $a^\lambda b$, $\lambda = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

On a donc un groupe d'isomorphismes d'ordre 32.

Donc, pas d'isomorphisme d'ordre premier impair.

55. Le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est G_{16}^6 :

$$a^4 = \alpha, \qquad b^2 = \alpha^2 = 1, \qquad ab = ba^3.$$

8	a	a^3	$a\alpha$	$a^3\alpha$								
4	a^2	$a^2\alpha$	a^2	$a^2\alpha$		ab		a^3b		$ab\alpha$		$a^3b\alpha$
2	α	α	α	α	b	α	a^2b	α	$b\alpha$	α	$a^2b\alpha$	α

On pourra remplacer a par l'une des 4 opérations $a^{2\lambda+1}$, $\lambda = 0, 1, 2, 3$, et b, par l'une des 4 opérations $a^{2\lambda}b$, $\lambda = 0, 1, 2, 3$.

Le groupe des isomorphismes est donc d'ordre 16.

Il n'y a pas d'isomorphismes d'ordre premier impair.

56. Enfin, le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est G_{16}^7 :

$$a^4 = \alpha, \qquad b^2 = \alpha^2 = 1, \qquad ab = ba^3\alpha.$$

8	a	a^3	$a\alpha$	$a^3\alpha$								
4	a^2	$a^2\alpha$	a^2	$a^2\alpha$								
2	α	α	α	α	b	ab	a^2b	a^3b	$b\alpha$	$ab\alpha$	$a^2b\alpha$	$a^3b\alpha$

On pourra remplacer a par l'une des 4 opérations $a^{2\lambda+1}$, $\lambda = 0, 1, 2, 3$, et b par l'une des 8 opérations $a^\lambda b$, $\lambda = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Le groupe des isomorphismes est d'ordre 32.

Il n'y a donc pas d'isomorphisme d'ordre premier impair.

57. (C). Soit maintenant à considérer le cas où le groupe cherché d'ordre $16p$ n'admet ni sous-groupe d'ordre p conjugué de lui-même, ni sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même.

Alors $p = 7, 5$, ou 3 (*voir* n° 1).

Si $p = 5$, on a

$$16 = m(5h+1); \qquad \text{d'où} \qquad h = 3, \qquad m = 1,$$

il y a alors 16 sous-groupes conjugués d'ordre 5, d'où 64 opérations d'ordre 5.

Reste $80 - 64 = 16$ opérations; il y a donc nécessairement un sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même.

Le cas $p = 5$ peut donc être écarté.

58. Envisageons le cas $p = 7$.

L'ordre du groupe est

$$7.16 = 112.$$

Il y a 8 groupes conjugués d'ordre 7 (n° 1), donc 48 opérations d'ordre 7.

Ensuite on a

$$16.7 = 16m(2h+1) \quad (^1).$$

Donc

$$7 = m(2h+1) \qquad \text{avec} \qquad h \neq 0.$$

Donc

$$h = 3.$$

Cela donne 7 groupes conjugués d'ordre 16.

Appelons n le nombre des opérations communes à tous ces groupes transformés d'ordre 16. On a

$$48 + 7(16 - n) + n \leqq 112$$

ou

$$48 - 6n \leqq 0,$$

$$n \geqq 8.$$

Or, d'autre part, n ne peut être supérieur à 8.

Donc

$$n = 8.$$

Ainsi, il y a un sous-groupe d'ordre 8, conjugué de lui-même.

Le sous-groupe conjugué de lui-même, d'ordre maximum, aura donc pour son ordre un multiple de 8.

Ce sera un groupe d'ordre 56.

Ce sous-groupe d'ordre 56 doit contenir un sous-groupe d'ordre 8 conjugué de lui-même, mais ne doit contenir aucun sous-groupe d'ordre 7 conjugué de lui-même.

Seul le groupe G_{56}^{8} (2) répond aux conditions imposées.

Remarquons, à cause de l'égalité

$$48 + 7.8 + 8 = 112,$$

que le groupe pourra contenir des opérations d'ordre 7, ou 16, ou 8, ou 4, ou 2, mais aucune opération d'un autre ordre (sauf l'opération identique).

---

(1) *Loc. cit.*, n° 21, p. 18.

(2) *Loc. cit.*, Chap. VIII.

On a

$$a^{(2,x^3+x+1)} = b^7 = 1, \qquad ab = ba^x,$$

$$a^x = b, \qquad a^{x^2} = c, \qquad a^{x^3} = a^{x+1} = ab, \qquad a^{x^4} = a^{x^2+x} = bc,$$

$$a^{x^5} \equiv a^{x^3+x^2} = a^{x^2+x+1} = abc,$$

$$a^{x^6} = a^{x^3+x^2+x} = a^{x^2+1} = ac, \qquad a^{x^7} = a^{x^3+x} = a,$$

donc

$$a^2 = b^2 = c^2 = d^7 = 1, \qquad ab = ba, \qquad ac = ca, \qquad bc = cb,$$

$$\overline{d} = (a, b, c, ab, bc, abc, ac).$$

A ce groupe d'ordre 56, il faut adjoindre une opération e, d'ordre 2 ou 4 (puisque e^2 doit faire partie du groupe d'ordre 56).

De plus, e ne sera permutable avec aucune des opérations d'ordre 7, puisque autrement on aurait une opération d'ordre 14. D'après la remarque faite plus haut, cela est impossible.

Soit

$$de = ea^\lambda b^\mu c^\nu d^\rho,$$

$$(de)^2 = de^2 a^\lambda b^\mu c^\nu d^\rho.$$

Mais

$$e^2 = a^\alpha b^\beta c^\gamma,$$

donc

$$(de)^2 = d\alpha^{\lambda+\alpha} b^{\mu+\beta} c^{\nu+\gamma} d^\rho = d^{1+\rho} a^{\lambda'} b^{\mu'} c^{\nu'}.$$

Comme de doit être d'ordre 2 ou 4 (car on a vu que le groupe d'ordre 112 envisagé contient, comme opérations d'ordre 7, les 48 opérations d'ordre 7 du groupe G_{56}^8)

$$1 + \rho = 0, \qquad \rho = -1.$$

Donc

$$de = ea^\lambda b^\mu c^\nu d^{-1}.$$

Je dis que e ne peut être permutable à deux opérations d'ordre 2 que d transforme l'une dans l'autre.

En effet, soient m et m_1 deux opérations d'ordre 2, telles que l'on ait

$$me = em, \qquad m_1 e = em_1, \qquad md = dm_1.$$

On a, d'une part,

$$m\,de = ema^\lambda b^\mu c^\nu d^{-1},$$

et d'autre part

$$dm_1 e = ea^\lambda b^\mu c^\nu d^{-1} m_1.$$

Donc

$$m\,d^{-1} = d^{-1} m_1$$

ou

$$dm = m_1 d,$$

d'où

$$m\,d^2 = dm_1 d = d^2 m_1,$$

ce qui est inexact.

Considérons les 21 isomorphismes d'ordre 2 du groupe $\{a, b, c\}$ (1).

Ces 21 isomorphismes forment une suite complète unique de sous-groupes conjugués d'ordre 2.

Ils sont de la forme $(a, b)(c, abc)$.

Les 3 opérations d'ordre 2 qu'ils transforment chacune en elle-même forment un groupe avec l'opération identique.

Soit $[1, a_1, a_2, a_3]$ ce groupe.

On a

$$[1, a_1, a_2, a_3]\,d = d[1, a'_1, a'_2, a'_3],$$

d n'étant permutable à aucune opération d'ordre 2.

Donc a'_1 n'est pas égale à a_1, ni a'_2 à a_2, ni a'_3 à a_3.

D'ailleurs, il est impossible que a'_1, a'_2, a'_3 soient les opérations a_1, a_2, a_3 rangées dans un autre ordre, car, si l'on avait, par exemple, $a_1 d = da_2$, e, d'après la remarque faite plus haut, ne serait permutable ni à a_1, ni à a_2.

Donc, il faut que les trois opérations a'_1, a'_2, a'_3 soient distinctes de a_1, a_2, a_3. Or ceci est impossible, car si l'on prend deux sous-groupes d'ordre 4 quelconques du groupe $\{a, b, c\}$, ils auront toujours deux opérations communes.

Bref, le groupe cherché n'existe pas.

59. Soit maintenant $p = 3$.

Il peut y avoir 16 ou 4 groupes transformés d'ordre 3 (n° 1). D'autre part

$$3 = m(2h + 1).$$

Comme on a $h \neq 0$, il y aura 3 groupes transformés d'ordre 16.

16 groupes transformés d'ordre 3 donnent 32 opérations d'ordre 3 ; il y aurait donc un sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même. L'hypothèse est à rejeter.

Ainsi, prenons le cas de 4 groupes transformés d'ordre 3.

Appelons d le nombre des opérations communes aux groupes transformés d'ordre 16.

On a

$$8 + 3(16 - d) + d \leqq 48$$

ou

$$8 - 2d \leqq 0, \qquad d \geqq 4.$$

Il y aura donc un sous-groupe d'ordre 4, ou d'ordre 8, conjugué de lui-même,

(1) *Loc. cit.*, Chap. VIII.

ce qui entraîne pour le groupe cherché un sous-groupe conjugué de lui-même maximum d'ordre 24.

Ce sous-groupe d'ordre 24 ne doit pas avoir de sous-groupe d'ordre 3 conjugué de lui-même.

Tels sont les groupes G_{24}^7, G_{24}^9, $G_{12}^3\,G_2$ (¹).

Prenons d'abord G_{24}^7 :

$$a^2 = b^2 = \alpha, \qquad c^3 = \alpha^2 = 1, \qquad ab = ba\alpha, \qquad \bar{c} = (a, ab, b).$$

Voici le Tableau des opérations :

4	a	$a\alpha$	b	$b\alpha$	ab	$ab\alpha$
2	α	α	α	α	α	α

6	ac	$c\alpha$	bc	abc
3	abc^2	c^2	ac^2	bc^2
2	α	α	α	α
3	$ac\alpha$	c	$bc\alpha$	$abc\alpha$
6	$abc^2\alpha$	$c^2\alpha$	$ac^2\alpha$	$bc^2\alpha$

Le groupe des isomorphismes cogrédients sera ici d'ordre 12; cela tient à la présence de l'opération α, qui est conjuguée d'elle-même dans le groupe considéré.

D'une façon générale, si G est un groupe, Γ le sous-groupe formé des opérations de G conjuguées d'elles-mêmes, le groupe des isomorphismes cogrédients sera simplement isomorphe à $\frac{G}{\Gamma}$.

Pour trouver le groupe total des isomorphismes, nous pourrons procéder comme il suit :

1° On choisit pour a l'une des six opérations a, $a\alpha$, b, $b\alpha$, ab, $ab\alpha$.

2° Soit a' l'opération choisie, on prendra pour b l'une des 6 opérations précédentes, à l'exception de a' et de $a'\alpha$; soit b'.

3° Parmi les 6 opérations d'ordre 3, c, c^2, ac^2, bc^2, abc^2, $ac\alpha$, $bc\alpha$, $abc\alpha$, il faudra choisir une opération c' telle que

$$c' = (a', a'b', b').$$

(¹) *Loc. cit.*, fin du Chapitre VIII.

Or, écrivons d'abord le groupe des isomorphismes cogrédients :

$$\begin{aligned}
\overline{a} &= (c,\ abc\alpha)(b,\ b\alpha)(c\alpha,\ abc)(c^2,\ bc^2)(c^2\alpha,\ bc^2\alpha)(ac,\ bc)\\
&\qquad (ac\alpha,\ bc\alpha)(ac^2,\ abc^2)(ac^2\alpha,\ abc^2\alpha)(ab,\ ab\alpha),\\
\overline{b} &= (c,\ ac\alpha)(a,\ a\alpha)(c\alpha,\ ac)(c^2,\ abc^2)(c^2\alpha,\ abc^2\alpha)(bc,\ abc)\\
&\qquad (bc\alpha,\ abc\alpha)(bc^2,\ ac^2)(bc^2\alpha,\ ac^2\alpha)(ab,\ ab\alpha),\\
\overline{ab} &= (c,\ bc\alpha)(b,\ b\alpha)(a,\ a\alpha)(c\alpha,\ bc)(abc,\ ac)(c^2,\ ac^2)(bc^2,\ abc^2)\\
&\qquad (c^2\alpha,\ ac^2\alpha)(bc^2\alpha,\ abc^2\alpha)(abc\alpha,\ ac\alpha),\\
\overline{c} &= (a,\ ab,\ b)(a\alpha,\ ab\alpha,\ b\alpha)(ac,\ abc,\ bc)(ac\alpha,\ abc\alpha,\ bc\alpha)\\
&\qquad (ac^2,\ abc^2,\ bc^2)(ac^2\alpha,\ abc^2\alpha,\ bc^2\alpha),\\
\overline{ac} &= (a,\ ab,\ b\alpha)(a\alpha,\ ab\alpha,\ b)(c,\ bc\alpha,\ abc\alpha)(c\alpha,\ bc,\ abc)\\
&\qquad (c^2,\ ac^2,\ bc^2)(c^2\alpha,\ ac^2\alpha,\ bc^2\alpha),\\
\overline{bc} &= (a,\ ab\alpha,\ b)(a\alpha,\ ab,\ b\alpha)(c,\ abc\alpha,\ ac\alpha)(c\alpha,\ abc,\ ac)\\
&\qquad (c^2,\ bc^2,\ abc^2)(c^2\alpha,\ bc^2\alpha,\ abc^2\alpha),\\
\overline{abc} &= (a,\ ab\alpha,\ b\alpha)(a\alpha,\ ab,\ b)(c,\ ac\alpha,\ bc\alpha)(c\alpha,\ ac,\ bc),\\
&\qquad (c^2,\ abc^2,\ ac^2)(c^2\alpha,\ abc^2\alpha,\ ac^2\alpha),\\
\overline{c^2} &= (a,\ b,\ ab)(a\alpha,\ b\alpha,\ ab\alpha)(ac,\ bc,\ abc)(ac\alpha,\ bc\alpha,\ abc\alpha)\\
&\qquad (ac^2,\ bc^2,\ abc^2)(ac^2\alpha,\ bc^2\alpha,\ abc^2\alpha),\\
\overline{ac^2} &= (a,\ b,\ ab\alpha)(a\alpha,\ b\alpha,\ ab)(c,\ ac\alpha,\ abc\alpha)(c\alpha,\ ac,\ abc)\\
&\qquad (c^2,\ abc^2,\ bc^2)(c^2\alpha,\ abc^2\alpha,\ bc^2\alpha).\\
\overline{bc^2} &= (a,\ b\alpha,\ ab\alpha)(a\alpha,\ b,\ ab)(c,\ bc\alpha,\ ac\alpha)(c\alpha,\ bc,\ ac)\\
&\qquad (c^2,\ ac^2,\ abc^2)(c^2\alpha,\ ac^2\alpha,\ abc^2\alpha),\\
\overline{abc^2} &= (a,\ b\alpha,\ ab)(a\alpha,\ b,\ ab\alpha)(c,\ abc\alpha,\ bc\alpha)(c\alpha,\ abc,\ bc)\\
&\qquad (c^2,\ bc^2,\ ac^2)(c^2\alpha,\ bc^2\alpha,\ ac^2\alpha).
\end{aligned}$$

D'après la manière indiquée plus haut pour former les isomorphismes, si l'on fait $a' = a$, $b' = b$, on a

$$c' = c.$$

Si $a' = a$, $b' = b\alpha$, alors

$$c' = (a,\ ab\alpha,\ b\alpha), \qquad \text{donc} \qquad c' = abc\alpha.$$

On retrouve ainsi l'isomorphisme cogrédient $\overline{a}$.

Soit $a' = a$, $b' = ab$, alors

$$c' = (a,\ b\alpha,\ ab),$$

donc

$$c' = abc^2.$$

On a alors

$$\bar{d} = (b, ab, b\alpha, ab\alpha)(c, abc^2, abc\alpha, ac^2)$$
$$(ac, bc^2\alpha, bc, c^2\alpha)(c\alpha, abc^2\alpha, abc, ac^2\alpha)(ac\alpha, bc^2, bc\alpha, c^2).$$

$\left[\text{En effet, } \bar{d} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & ab & abc^2 \end{pmatrix}.\right]$

On voit maintenant que l'on a

$$\bar{d}^2 = \bar{a}.$$

Vient ensuite

$$\overline{ad} = \overline{d^3} = (b, ab\alpha, b\alpha, ab)(c, ac^2, abc\alpha, abc^2)(ac, c^2\alpha, bc, bc^2\alpha)$$
$$(c\alpha, ac^2\alpha, abc, abc^2\alpha)(ac\alpha, c^2, bc\alpha, bc^2)\ldots,$$

Le groupe des isomorphismes est d'ordre $24 = 3.2^3$.

Il en résulte que les sous-groupes d'ordre 3 formeront une suite complète unique de sous-groupes conjugués.

Cela posé, il s'agit d'obtenir un groupe d'ordre 48, dans lequel le sous-groupe G_{24}^7 envisagé soit un sous-groupe conjugué de lui-même.

On a d'abord le groupe $G_{24}^7 G_2$ déjà trouvé.

Si l'on veut prendre une opération d, d'ordre 4, permutable avec toutes les opérations de G_{24}^7, il faudra que l'on ait

$$d^2 = \alpha.$$

Mais alors, on aura

$$ad = da, \qquad a^2 = d^2 = \alpha.$$

Donc $ad = d'$ sera d'ordre 2.

On retrouve $G_{24}^7 G_2$.

Si l'opération d donne le même isomorphisme que a, par exemple, alors on aurait $ad = da$.

Ensuite ad serait permutable avec toutes les opérations de G_{24}^7, et serait d'ordre 2 ou 4.

C'est un cas déjà examiné.

L'isomorphisme fourni par d sera donc un isomorphisme contragrédient.

60. Étudions de plus près le groupe des isomorphismes de G_{24}^7.

C'est un groupe d'ordre 24 qui ne contient pas de sous-groupe d'ordre 3 conjugué de lui-même.

Il y a donc une suite complète de 4 sous-groupes conjugués d'ordre 3.

Or continuons l'énumération des isomorphismes; on a encore

$$\overline{bd} = (a, a\alpha)(b, ab)(ac, abc^2\alpha)(c\alpha, bc^2\alpha)(c^2\alpha, abc)(bc, ac^2\alpha)$$
$$(ac\alpha, abc^2)(c, bc^2)(c^2, abc\alpha)(ac^2, bc\alpha)(ab\alpha, b\alpha),$$

$$\overline{abd} = (a, a\alpha)(b, ab\alpha)(b\alpha, ab)(c\alpha, c^2\alpha)(bc, abc^2\alpha)(abc, bc^2\alpha)$$
$$(ac, ac^2\alpha)(c, c^2)(bc\alpha, abc^2)(abc\alpha, bc^2)(ac\alpha, ac^2),$$

$$\overline{cd} = (a, b\alpha, a\alpha, b)(c, abc^2, bc\alpha, bc^2)(c\alpha, abc^2\alpha, bc, bc^2\alpha)$$
$$(c^2, ac\alpha, ac^2, abc\alpha)(c^2\alpha, ac, ac^2\alpha, abc),$$

$$\overline{acd} = (a, b\alpha)(ab, ab\alpha)(a\alpha, b)(c, c^2)(c\alpha, c^2\alpha)(bc\alpha, ac^2)(bc, ac^2\alpha)$$
$$(abc\alpha, abc^2)(abc, abc^2\alpha)(bc^2ac\alpha)(bc^2\alpha, ac),$$

$$\overline{bcd} = (a, b)(a\alpha, b\alpha)(ab, ab\alpha)(c, ac^2)(c\alpha, ac^2\alpha)(abc, bc^2\alpha)(abc\alpha, bc^2)$$
$$(ac, abc^2\alpha)(ac\alpha, abc^2)(c^2, bc\alpha)(c^2\alpha, bc),$$

$$\overline{abcd} = (a, b, a\alpha, ba)(c, bc^2, bc\alpha, abc^2)(c\alpha, bc^2\alpha, bc, abc^2\alpha)$$
$$(c^2, abc\alpha, ac^2, ac^2\alpha)(c^2\alpha, abc, ac^2\alpha, ac),$$

$$\overline{c^2d} = (a, ab)(a\alpha, ab\alpha)(b, b\alpha)(c, abc^2)(c\alpha, abc^2\alpha)(ac, c^2\alpha)(ac\alpha, c^2)$$
$$(bc, ac^2\alpha)(bc\alpha, ac^2)(abc, bc^2\alpha)(abc\alpha, bc^2),$$

$$\overline{ac^2d} = (a, ab, a\alpha, ab\alpha)(c, bc^2, ac\alpha, ac^2)(c\alpha, bc^2\alpha, ac, ac^2\alpha)$$
$$(abc, abc^2\alpha, bc, c^2\alpha)(abc\alpha, abc^2, bc\alpha, c^2),$$

$$\overline{bc^2d} = (a, ab\alpha)(a\alpha, ab)(b, b\alpha)(c, c^2)(c\alpha^2, c^2\alpha)(bc, bc^2\alpha)$$
$$(ac, abc^2\alpha)(ac\alpha, abc^2)(ac^2, abc\alpha)(ac^2\alpha, abc),$$

$$\overline{abc^2d} = (a, ab\alpha, a\alpha, ab)(c, ac^2, ac\alpha, bc^2)(c\alpha, ac^2\alpha, ac, bc^2\alpha)$$
$$(abc, c^2\alpha, bc, abc^2\alpha)(abc\alpha, c^2, bc\alpha, abc^2).$$

Soit

$$\overline{bd} = a', \qquad \bar{c} = b'.$$

On a

$$a'^2 = 1, \qquad b'^3 = 1,$$

$$a'b' = (a, ab\alpha, a\alpha, ab)(c, ac^2, ac\alpha, bc^2)(ac, bc^2\alpha, c\alpha, ac^2\alpha)$$
$$(abc^2\alpha, abc, c^2\alpha, bc)(abc^2, abc\alpha, c^2, bc\alpha).$$

Donc

$$a'^2 = b'^3 = 1, \qquad (a'b')^4 = 1.$$

Donc, le groupe des isomorphismes de G_{24}^7 est isomorphe avec le groupe G_{24}^9, ou le groupe symétrique de 4 lettres.

61. Le groupe G_{24}^9 est bien connu : on voit donc, par cette remarque qui termine le n° 60, que les isomorphismes contragrédients d'ordre 4 du groupe G_{24}^7 forment une suite complète de 3 groupes conjugués d'ordre 4.

Les isomorphismes contragrédients d'ordre 2 forment une suite complète de 6 groupes conjugués d'ordre 2.

Prenons d'abord un isomorphisme contragrédient d'ordre 4.

(Puisque $\overline{d^2} = \overline{a}$, on aura $d^2 = a$, $d^4 = a^2 = \alpha$.)

Posons

$$a^4 = b^2 = \alpha, \qquad c^3 = \alpha^2 = 1.$$

$$\overline{a} = (b,\ a^2 b,\ b\alpha,\ a^2 b\alpha)(c,\ a^2 bc^2,\ a^2 bc\alpha,\ a^2 c^2)(a^2 c,\ bc^2\alpha,\ bc,\ c^2\alpha),$$
$$(c\alpha,\ a^2 bc^2\alpha,\ a^2 bc,\ a^2 c^2\alpha,)(a^2 c\alpha,\ bc^2,\ bc\alpha,\ c^2);$$

$$\overline{c} = (a^2,\ a^2 b,\ b)(a^2\alpha,\ a^2 b\alpha,\ b\alpha)(a^2 c,\ a^2 bc,\ bc)(a^2 c\alpha,\ a^2 bc\alpha,\ bc\alpha),$$
$$(a^2 c^2,\ a^2 bc^2,\ bc^2)(a^2 c^2\alpha,\ a^2 bc^2\alpha,\ bc^2\alpha).$$

D'ailleurs on a

$$ac = a^2 c^2 a = a^2 c.ca = ca^2 bca = ca^3 c^2\alpha,$$

$$a^3 c^2\alpha.c = a^3\alpha = c.c^2 a^3\alpha = c.a^3 bc,$$

$$a^3 bc.c = a^3 bc^2 = a^3 ca^2 c = aca^2 ba^2 c = acbc = ca^3 c^2\alpha bc = ca^3 c^2\alpha ca^2 = ca.$$

On a donc

$$\overline{c} = (a,\ a^3 c^2\alpha,\ a^3 bc).$$

Posons $ab = b'$, d'où

$$a^8 = 1, \qquad b'^2 = 1,$$

car

$$ab = a^2 ba\alpha, \qquad b = aba^5, \qquad ab = ba^3,$$
$$(ab)^2 = ab^2 a^3 = a^4 b^2 = \alpha^2 = 1.$$

On a donc

$$a^8 = b'^2 = 1, \qquad ab' = b'a^3,$$

puis

$$\overline{c} = (a,\ a^7 c^2,\ a^2 b'c)(b',\ b'c^2,\ b'c),$$

car

$$abc = aca^2 = ca^7 c^2 a^2 = ca^7.a^2 bc^2 = c.abc^2 = cb'c^2,$$

$$b'c^2.c = b' = c.c^2 b' = c.c^2 ab = c.a^7 c^2.c^2 b = c.a^7 cb = c.a^7 a^2 bc = c.abc = cb'c,$$

enfin

$$b'c.c = b'c^2 = abc^2 = abc.c = aca^2 c = ca^7 c^2 a^2 c = ca^7.a^2 bc^3 = cb'.$$

Le groupe G_{48}^{30} sera donc défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^3 = 1, \qquad ab = ba^3,$$

$$\overline{c} = (a,\ a^7 c^2,\ a^2 bc)(b,\ bc^2,\ bc).$$

62. Prenons maintenant un isomorphisme contragrédient, d'ordre 2.

Soient $a^2 = b^2 = \alpha$, $c^3 = \alpha^2 = 1$, $ab = ba\alpha$, $\bar{c} = (a, ab, b)$, $d^2 = \alpha^m$,

$$\bar{d} = (a, a\alpha)(b, ab)(ac, abc^2\alpha)(c\alpha, abc^2\alpha)(c\alpha, bc^2\alpha)(c^2\alpha, abc)$$
$$(bc, ac^2\alpha)(ac\alpha, abc^2)(c, bc^2)(c^2, abc\alpha)(ac^2, bc\alpha)(ab\alpha, b\alpha).$$

Considérons l'opération $bd = d'$.

On a

$$bd = dab,$$
$$(bd)^2 = bd^2ab = bab\alpha^m = ab^2\alpha^{m+1} = a\alpha^m.$$

Donc

$$d'^2 = a\alpha^m, \qquad a = d'^2\alpha^m,$$
$$d'^4 = a^2 = \alpha.$$

D'autre part,

$$\bar{d'} = (b, ab, b\alpha, ab\alpha)(c, abc^2, abc\alpha, ac^2)$$
$$(c\alpha, abc^2\alpha, abc, ac^2\alpha)(c^2, ac\alpha, bc^2, bc\alpha)$$
$$(c^2\alpha, ac, bc^2\alpha, bc).$$

On retrouve, par conséquent, le groupe G_{48}^{30}.

63. Je me propose, avant de terminer la discussion, d'énumérer les opérations de ce groupe G_{48}^{30} (1).

G_{48}^{30} est défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^3 = 1, \qquad ab = ba^3,$$
$$\bar{c} = (a, a^7c^2, a^2bc)(b, bc^2, bc).$$

On a d'abord le Tableau I :

8	a	a^3					
4	a^2	$a^2\alpha$		ab		a^3b	
2	α	α	b	α	a^2b	α	

ce qui donne

4 opérations d'ordre 8,
6 » 4,
5 » 2.

Maintenant $(ac)^2 = acac$, mais

$$a^2bc.c = ca, \qquad ca = a^2bc^2;$$

(1) Le lecteur désireux de suivre simplement la discussion pourra passer ce numéro.

donc

$$(ac)^2 = a.a^2bc^2.c = a^3b,$$
$$(ac)^3 = a^3bac = a^6bc = a^2bc\alpha,$$
$$(ac)^4 = \alpha, \qquad (ac)^5 = ac\alpha, \qquad (ac)^6 = a^3b\alpha.$$

On a

$$\begin{aligned}\bar{c} = {} & (a^2, ab, a^3b\alpha)(a^2c, abc, a^3bc\alpha)(a^2c^2, abc^2, a^3bc^2\alpha)(a, a^3c^2\alpha, a^2bc) \\ & (a^2\alpha, ab\alpha, a^3b)(a^2c\alpha, abc\alpha, a^3bc)(a^2c^2\alpha, abc^2\alpha, a^3bc^2)(a\alpha, a^3c^2, a^2bc\alpha) \\ & (b, bc^2, bc)(a^3, a^2bc^2\alpha, ac\alpha)(ac^2, a^3c\alpha, a^2b) \\ & (b\alpha, bc^2\alpha, bc\alpha)(a^3\alpha, a^2bc^2, ac)(ac^2\alpha, a^3c, a^2b\alpha).\end{aligned}$$

En effet, puisque

$$ac = ca^3c^2\alpha, \qquad a^2c = cab,$$

on a

$$(a^3c^2\alpha)^2 = ab;$$

donc

$$(a^3c^2\alpha)^3 = aba^3c^2\alpha = a^2bc^2\alpha.$$

De même

$$(a^2bc)^2 = a^3b\alpha, \qquad (a^2bc)^3 = a^3ba^2bc\alpha = a^9b^2c\alpha = ac\alpha.$$

On peut écrire le Tableau II :

8	ac	$a^2bc\alpha$	a^3c^2	a^2bc^2
4	a^3b	$a^3b\alpha$	ab	$ab\alpha$
2	α	α	α	α

ce qui donne

8 opérations d'ordre 8.

Maintenant

$$(a^2c)^2 = a^2ca^2c = a^2.a^3b\alpha.c^2 = abc^2,$$
$$(a^2c)^3 = a^2cabc^2 = a^2.a^2c.c^2 = \alpha.$$

De là le Tableau III :

6	a^2c	abc	$c\alpha$	$a^3bc\alpha$
3	abc^2	$a^3bc^2\alpha$	c^2	a^2c^2
2	α	α	α	α
3	$a^2c\alpha$	$abc\alpha$	c	a^3bc
6	$abc^2\alpha$	a^3bc^2	$c^2\alpha$	$a^2c^2\alpha$

qui donne

8 opérations d'ordre 6

et

8 opérations d'ordre 3.

Puis enfin le Tableau IV :

$$2 \parallel a^3c \mid bc \mid bc^2 \mid ac^2 \parallel$$

qui donne

8 opérations d'ordre 2.

Ces deux Tableaux sont justifiés par les égalités suivantes :

$$(a^3c)^2 = a^3ca^3c = a^3.ac\alpha.c^2 = 1,$$
$$(bc)^2 = bcbc = b.bc^2.c = 1,$$

$$\begin{cases} (abc)^2 = abcabc = ab.a^2c^2 = a^7bc^2 = a^3bc^2\alpha, \\ (abc)^3 = abca^3bc^2\alpha = ab.abc\alpha.c^2\alpha = \alpha; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a^3bc)^2 = a^3bca^3bc = a^3b.abc\alpha.c = a^2c^2, \\ (a^3bc)^3 = a^3bca^2c^2 = a^3b.a^3b\alpha = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a^3c^2)^2 = a^3c^2a^3c^2 = a^3.a^2bc\alpha.c^2 = ab, \\ (a^3c^2)^3 = aba^3c^2 = a^2bc^2; \end{cases}$$

$$(bc^2)^2 = bc^2bc^2 = b.bc.c^2 = 1,$$
$$(ac^2)^2 = ac^2ac^2 = a.a^3c\alpha.c^2 = 1.$$

Le groupe G_{18}^{30} a donc

12	opérations d'ordre	8,
6	»	4,
13	»	2,
8	»	6,
8	»	3.

64. Passons au groupe $G_{12}^3 G_2$, défini par les équations

$$a^2 = b^2 = c^3 = d^2 = 1, \quad ab = ba, \quad ad = da, \quad bd = db, \quad cd = cd,$$
$$\overline{c} = (a, b, ab), \quad \overline{c^2} = (a, ab, b).$$

Voici d'abord le Tableau des opérations :

$2 \parallel a,\ b,\ d,\ ab,\ ad,\ bd,\ abd$

6	cd	acd	bcd	$abcd$
3	c^2	bc^2	abc^2	ac^2
2	d	d	d	d
3	c	ac	bc	abc
6	c^2d	bc^2d	abc^2d	ac^2d

car

$$\begin{cases} (ac)^2 = acac = a.abc^2 = bc^2, \\ acbc^2 = a.ac.c^2 = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} bc.bc = b.ac.c = abc^2, \\ bc.abc^2 = b.bc.c^2 = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} abc.abc = ab.bc.c = ac^2, \\ abc.ac^2 = ab.abc^3 = 1. \end{cases}$$

65. Cherchons tous les isomorphismes de $G_{12}^3 G_2$.

Écrivons d'abord les isomorphismes cogrédients.

Soit l'opération a; elle est permutable avec b et d :

$$ca = abc, \qquad bca = babc = ac,$$
$$c^2a = bc^2 = a.abc^2, \qquad abc^2a = ab.bc^2 = ac^2.$$

Donc on a

$$\bar{a} = (c, bc)(c^2, abc^2)(ac, abc)(ac^2, bc^2)(cd, bcd)(c^2d, abc^2d)(acd, abcd)(ac^2d, bc^2d),$$
$$cb = ac = b.abc, \qquad c^2b = abc^2 = b.ac^2.$$

Donc

$$\bar{b} = (c, abc)(c^2, ac^2)(bc, ac)(bc^2, abc^2), (cd, abcd)(c^2d, ac^2d)(bcd, acd)(bc^2d, abc^2d),$$
$$\overline{ab} = (c, ac)(c^2, bc^2)(abc, bc)(abc^2, ac^2)(cd, acd)(c^2d, bc^2d)(abcd, bcd)(abc^2d, ac^2d),$$
$$\bar{c} = (a, b, ab)(ac, bc, abc)(ac^2, bc^2, abc^2)(ad, bd, abd)(acd, bcd, abcd)(ac^2d, bc^2d, abc^2d),$$
$$\overline{c^2} = (a, ab, b)(ac, abc, bc)(ac^2, abc^2, bc^2)(ad, abd, bd)(acd, abcd, bcd)(ac^2d, abc^2d, bc^2d),$$
$$\overline{ac} = (a, b, ab)(c, abc, bc)(c^2, ac^2, abc^2)(ad, bd, abd)(cd, abcd, bcd)(c^2d, ac^2d, abc^2d),$$
$$\overline{bc} = (a, b, ab)(c, ac, abc)(c^2, bc^2, ac^2)(ad, bd, abd)(cd, acd, abcd)(c^2d, bc^2d, ac^2d),$$
$$\overline{abc} = (a, b, ab)(c, bc, ac)(c^2, abc^2, bc^2)(ad, bd, abd)(cd, bcd, acd)(c^2d, abc^2d, bc^2d),$$
$$\overline{ac^2} = (a, ab, b)(c, ac, bc)(c^2, bc^2, abc^2)(ad, abd, bd)(cd, acd, bcd)(c^2d, bc^2d, abc^2d),$$
$$\overline{bc^2} = (a, ab, b)(c, bc, abc)(c^2, abc^2, ac^2)(ad, abd, bd)(cd, bcd, abcd)(c^2d, abc^2d, ac^2d),$$
$$\overline{abc^2} = (a, ab, b)(c, abc, ac)(c^2, ac^2, bc^2)(ad, abd, bd)(cd, abcd, acd)(c^2d, ac^2d, bc^2d).$$

Nous pouvons maintenant énumérer les suites complètes d'opérations conjuguées du groupe.

(1). L'opération identique. (2). L'opération d.

(3). a, b, ab. (4). ad, bd, abd.

(5). c, bc, abc, ac. (6). c^2, abc^2, ac^2, bc^2.

(7). cd, bcd, $abcd$, acd. (8). c^2d, abc^2d, ac^2d, bc^2d.

Dans chaque isomorphisme l'opération d joue un rôle à part et ne pourra être remplacée que par elle-même.

a pourra être remplacé par a, b, ab (3 combinaisons possibles).

Soit a' l'opération choisie pour a.

b pourra être prise parmi les 3 opérations a, b, ab, à l'exclusion de l'opération a' (2 combinaisons possibles).

Appelons b' l'opération choisie pour b.

Reste à choisir c' par la condition

$$\overline{c'} = (a', b', a'b') \qquad \text{(4 combinaisons possibles).}$$

En tout, il y a 24 isomorphismes.

Nous venons de dire que a ne peut être remplacé que par a, b, ou ab.

On peut se demander pourquoi il est impossible de remplacer a par ad, par exemple.

Soit, je suppose, $a' = ad$, $b' = bd$, alors

$$a'b' = ab.$$

Mais il n'existe pas d'opération c' telle que

$$\overline{c'} = (ad, bd, ab),$$

et il est clair que, sur trois opérations d'ordre 2 telles que l'une soit le produit des deux autres, il y en aura deux (ou il n'y en aura aucune) contenant d, jamais trois.

Cela posé, on a

$$\overline{f} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & ab & c^2 \end{pmatrix} = (b, ab)(c, c^2)(bd, abd)(cd, c^2d)(ac, ac^2)$$
$$(acd, ac^2d)(bc^2, abc)(bc^2d, abcd)(bc, abc^2)(bcd, abc^2d).$$

Puis

$$\overline{acf} = (a, ab)(c, bc^2, abc, abc^2)(c^2, ac, ac^2, bc)$$
$$(ad, abd)(cd, bc^2d, abcd, abc^2d)(c^2d, acd, ac^2d, bcd).$$

Posons $\overline{f} = \alpha$, $\overline{ac} = \beta$.

On a

$$\alpha^2 = \beta^3 = 1, \qquad (\alpha\beta)^4 = 1.$$

Le groupe des isomorphismes est donc du type G_{24}^{9}.

66. Revenons au groupe cherché, d'ordre 48.

Une opération d'ordre 2 ou 4, permutable avec toutes les opérations a, b, c, d, donnerait un groupe d'ordre 48 dans lequel il y aurait un sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même.

Nous retrouverions un groupe déjà obtenu.

Si nous prenons une opération e donnant les mêmes isomorphismes que a, b, ou ab, par exemple que a, alors ae serait une opération permutable avec toutes les opérations de $G_{12}^{3} G_2$. ae serait d'ailleurs d'ordre 2 ou 4, et, par suite, il y aurait encore un sous-groupe d'ordre 16, conjugué de lui-même.

Une seule combinaison est donc possible. C'est la suivante :

$$a^2 = b^2 = c^3 = d^2 = e^2 = 1, \quad ab = ba, \quad ad = da, \quad bd = db, \quad cd = dc, \quad ed = de,$$
$$\overline{c} = (a, b, ab), \qquad \overline{e} = (b, ab)(c, c^2).$$

L'opération d se sépare, le groupe est décomposable.

D'ailleurs

$$bebe = babe^2 = a,$$
$$\overline{be} = (b, ab)(c, bc^2, bc, ac^2)(ac, abc^2, abc, c^2).$$

Donc (1) on trouve $G_{24}^{9} G_2$.

67. Reste à examiner le groupe G_{24}^{9} lui-même.

C'est le groupe symétrique de 4 lettres.

G_{24}^{9} est défini par les équations

$$a^2 = b^2 = c^3 = d^2 = 1, \qquad \overline{c} = (a, b, ab), \qquad \overline{d} = (b, ab)(c, c^2) \quad (2),$$

Voici d'abord le Tableau de ses opérations :

2	a	b	ab	d	ad	cd	c^2d	bcd	abc^2d

4	bd	abd	acd	$abcd$	bc^2d	ac^2d
2	a	a	b	b	ab	ab

3	c	ac	bc	abc
3	c^2	bc^2	abc^2	ac^2

(1) *Loc. cit.*, fin du Chapitre VIII.

(2) *Loc. cit.*, fin du Chapitre VIII.

Pour écrire le groupe de ses isomorphismes cogrédients, soit

$$1=1,\quad a=2,\quad b=3,\quad ab=4;\quad c=5,\quad bc=6,\quad ac=7,\quad abc=8,$$
$$c^2=9,\quad bc^2=10,\quad ac^2=11,\quad abc^2=12;\quad d=13,\quad ad=14,$$
$$cd=15,\quad c^2d=16,\quad bcd=17,\quad abc^2d=18;\quad bd=19,$$
$$abd=20,\quad acd=21,\quad abcd=22,\quad ac^2d=23,\quad bc^2d=24.$$

Voici les isomorphismes cogrédients :

$$\overline{2}=(5,6)(9,12)(7,8)(10,11)(15,17)(16,18)(21,22)(23,24)=\overline{a},$$
$$\overline{3}=(5,8)(9,11)(6,7)(10,12)(13,14)(16,18)(19,20)(23,24)=\overline{b},$$
$$\overline{4}=(5,7)(6,8)(9,10)(11,12)(13,14)(15,17)(19,20)(21,22)=\overline{ab},$$
$$\overline{5}=(2,3,4)(7,6,8)(11,10,12)(13,15,16)(14,17,18)(19,22,23)(20,21,24)=\overline{c},$$
$$\overline{7}=(2,3,4)(5,8,6)(9,11,12)(13,15,18)(14,17,16)(19,22,24)(20,21,23)=\overline{ac},$$
$$\overline{6}=(2,3,4)(5,7,8)(9,10,11)(13,17,18)(14,15,16)(19,21,24)(20,22,23)=\overline{bc},$$
$$\overline{8}=(2,3,4)(5,6,7)(9,12,10)(13,17,16)(14,15,18)(19,21,23)(20,22,24)=\overline{abc},$$
$$\overline{9}=(2,4,3)(7,8,6)(11,12,10)(13,16,15)(14,18,17),(19,23,22)(20,24,21)=\overline{c^2},$$
$$\overline{11}=(2,4,3)(5,7,6)(9,10,12)(13,16,17)(14,18,15)(19,23,21)(20,24,22)=\overline{ac^2},$$
$$\overline{10}=(2,4,3)(5,6,8)(9,12,11)(13,18,15)(14,16,17)(19,24,22)(20,23,21)=\overline{bc^2},$$
$$\overline{12}=(2,4,3)(5,8,7)(9,11,10)(13,18,17)(14,16,15)(19,24,21)(20,23,22)=\overline{abc^2},$$
$$\overline{13}=(3,4)(5,9)(7,11)(6,12)(10,8)(19,20)(15,16)(21,23)(17,18)(22,24)=\overline{d},$$
$$\overline{14}=(3,4)(5,12)(6,9)(7,10)(8,11)(15,18)(16,17)(19,20)(21,24)(22,23)=\overline{ad},$$
$$\overline{19}=(3,4)(5,10,6,11)(7,12,8,9)(13,14)(15,16,17,18)(21,23,22,24)=\overline{bd},$$
$$\overline{20}=(3,4)(5,11,16,10)(7,9,8,12)(13,14)(15,18,17,16)(21,24,22,23)=\overline{abd},$$
$$\overline{15}=(2,4)(5,9)(6,10)(7,12)(8,11)(13,16)(14,18)(19,24)(20,23)(21,22)=\overline{cd},$$
$$\overline{21}=(2,4)(5,10,8,12)(6,9,7,11)(13,16,14,18)(15,17)(19,24,20,23)=\overline{acd},$$
$$\overline{17}=(2,4)(5,11)(6,12)(7,10)(8,9)(13,18)(14,16)(19,23)(20,24)(21,22)=\overline{bcd},$$
$$\overline{22}=(2,4)(5,12,8,10)(6,11,7,9)(13,18,14,16)(15,17)(19,23,20,24)=\overline{abcd}.$$
$$\overline{16}=(2,3)(5,9)(6,11)(7,10)(8,12)(13,15)(14,17)(19,21)(20,22)(23,24)=\overline{c^2d}.$$
$$\overline{23}=(2,3)(5,11,7,12)(6,9,8,10)(13,15,14,17)(16,18)(19,21,20,22)=\overline{ac^2d},$$
$$\overline{24}=(2,3)(5,12,7,11)(6,10,8,9)(13,17,14,15)(16,18)(19,22,20,21)=\overline{bc^2d},$$
$$\overline{18}=(2,3)(5,10)(6,12)(7,9)(8,11)(13,17)(14,15)(19,22)(20,21))(23,24)=\overline{abc^2d}.$$

Voici, d'après cela, les suites complètes d'opérations conjuguées :

(1). L'opération identique,

(2). a, b, ab,

(3). c, bc, ac, abc, c^2, bc^2, ac^2, abc^2,

(4). d, ad, cd, c^2d, bcd, abc^2d,

(5). bd, abd; acd, $abcd$; ac^2d, bc^2d.

Y a-t-il des isomorphismes contragrédients?

Cherchons l'ordre total du groupe des isomorphismes.

On pourra prendre pour a l'une des trois opérations a, b, ab (3 combinaisons possibles).

Soit a' l'opération choisie pour a.

On pourra prendre ensuite pour b l'une des deux opérations qui restent, après qu'on a supprimé a' (2 combinaisons possibles).

Soit b' l'opération choisie pour b.

Il faudra ensuite choisir c parmi les 8 opérations

$$c,\quad bc,\quad ac,\quad abc,\quad c^2,\quad bc^2,\quad ac^2,\quad abc^2,$$

de façon que, en appelant c' l'opération choisie pour c, on ait

$$c' = (a',\ b',\ a'b') \qquad \text{(4 combinaisons possibles).}$$

Enfin d devra être choisi parmi les 6 opérations

$$d,\quad ad,\quad cd,\quad c^2d,\quad bcd,\quad abc^2d,$$

de façon que, en appelant d' l'opération choisie, on ait

$$d' = (a',\ a'b')(c',\ c'^2),$$

d' sera ainsi complètement déterminé.

L'ordre du groupe des isomorphismes est donc 24.

Autrement : partons des équations de définition

$$a'^2 = b'^3 = 1, \qquad (a'b')^4 = 1.$$

Prenons pour b' l'une des huit opérations d'ordre 3.

Parmi les opérations de la suite (4) il y en a trois qui, avec l'une des opérations de la suite (3), donnent comme produit une opération d'ordre 4.

Par exemple, avec c, il faut prendre ad, ou bcd, ou abc^2d, car

$$cad = abcd, \qquad cbcd = ac^2d, \qquad cabc^2d = bd.$$

Donc l'ordre du groupe des isomorphismes est bien 24.

Il n'y a pas d'isomorphismes contragrédients.

On appelle *groupe complet* un groupe qui n'admet pas d'opération conjuguée d'elle-même, à l'exception de l'opération identique, et qui n'a pas d'isomorphismes contragrédients.

Le groupe G_{24}^{9} est donc un groupe complet (1).

Le théorème suivant a d'ailleurs été démontré (2) :

Un groupe qui contient un groupe complet comme sous-groupe conjugué de lui-même est le produit direct du groupe complet et d'un autre groupe.

Il en résulte que le seul groupe possible d'ordre 48 admettant G_{24}^{9} comme sous-groupe conjugué de lui-même est $G_{24}^{9} G_2$.

Résumé des groupes d'ordre 16p (p premier impair).

$$G_{16p} = G_{16} G_p, \qquad G_8 G_2 G_p = G_{8p} G_2 = G_{2p} G_8,$$

$$G_{8p}^1 G_2, \quad G_{8p}^2 G_2, \quad G_{8p}^3 G_2, \quad G_{2p}^1 G_8,$$

$$(G_4)^2 G_p = G_{4p} G_4, \qquad G_{4p}^1 G_4, \qquad G_{4p}^2 G_4,$$

$$G_4 (G_2)^2 G_p = G_{4p} (G_2)^2 = G_{2p} G_4 G_2,$$

$$G_{4p}^1 (G_2)^2, \quad G_{4p}^2 (G_2)^2, \quad G_{2p}^1 G_4 G_2,$$

$$G_p (G_2)^4 = G_{2p} (G_2)^3, \qquad G_{2p}^1 (G_2)^3,$$

$$G_8^1 G_2 G_p = G_8^1 G_{2p}, \qquad G_{8p}^4 G_2, \qquad G_{8p}^5 G_2, \qquad G_8^1 G_{2p}^1,$$

$$G_8^2 G_2 G_p = G_8^2 G_{2p}, \qquad G_{8p}^6 G_2, \qquad G_8^2 G_{2p}^1,$$

$$G_{16}^1 G_p, \quad G_{16}^2 G_p, \quad G_{16}^3 G_p, \quad G_{16}^4 G_p, \quad G_{16}^5 G_p, \quad G_{16}^6 G_p, \quad G_{16}^7 G_p,$$

$$G_{12}^3 G_4, \quad G_{12}^3 (G_2)^2, \quad G_{56}^8 G_2, \quad G_{24}^7 G_2, \quad G_{24}^9 G_2.$$

G_{16p}^1 $[a^{16} = b^p = 1,\ ba = ab^\alpha,\ \alpha$ appartient à l'exposant $2 \pmod p)]$,

G_{16p}^2 $[a^{16} = b^p = 1,\ ba = ab^\alpha,\ \alpha$ appartient à l'exposant $4 \pmod p)]$,

G_{16p}^3 $[a^{16} = b^p = 1,\ ba = ab^\alpha,\ \alpha$ appartient à l'exposant $8 \pmod p)]$,

G_{16p}^4 $[a^{16} = b^p = 1,\ ba = ab^\alpha,\ \alpha$ appartient à l'exposant $16 \pmod p)]$,

G_{16p}^5 $[a^8 = b^2 = c^p = 1,\ ab = ba,\ ca = ac^\alpha,\ cb = bc^{-1}$,
α appartient à l'exposant $4 \pmod p)]$,

---

(1) *Voir* O. Hölder, *Bildungzusammengesetzter Gruppen* (*Math. Ann.*, Vol. XLVI, 1895, p. 325).

(2) *Voir* Burnside, *Theory of Groups of finite order*, théorème V, § 165.

G^{6}_{16p} $(a^8 = b^2 = c^p = 1,\ ab = ba^5,\ ca = ac^{-1},\ cb = bc)$,

G^{7}_{16p} $[a^8 = b^2 = c^p = 1,\ ab = ba^5,\ ca = ac^{\alpha},\ cb = bc,$
α appartient à l'exposant $4 \pmod p]$,

G^{8}_{16p} $(a^8 = b^2 = c^p = 1,\ ab = ba^5,\ ca = ac,\ cb = bc^{-1})$,

G^{9}_{16p} $[a^8 = b^2 = c^p = 1,\ ab = ba^5,\ ca = ac^{\alpha},\ cb = bc^{-1}$
α appartient à l'exposant $4 \pmod p]$,

G^{10}_{16p} $(a^2 = b^2 = c^4 = d^p = 1,\ ac = ca,\ bc = cb,\ ab = bac^2,\ da = ad,\ db = bd,\ dc = cd^{-1})$,

G^{11}_{16p} $(a^2 = b^2 = c^4 = d^p = 1,\ ac = ca,\ bc = cb,\ ab = bac^2,\ da = ad,\ db = bd^{-1},\ dc = cd)$,

G^{12}_{16p} $(a^2 = b^2 = c^4 = d^p = 1,\ ac = ca,\ bc = cb,\ ab = bac^2,\ da = ad^{-1},\ db = bd^{-1},\ dc = cd)$,

G^{13}_{16p} $(a^4 = b^4 = c^p = 1,\ ab = ba^3,\ ca = ac^{-1},\ cb = bc)$,

G^{14}_{16p} $(a^4 = b^4 = c^p = 1,\ ab = ba^3,\ ca = ac,\ cb = bc^{-1})$,

G^{15}_{16p} $[a^4 = b^4 = c^p = 1,\ ab = ba^3,\ ca = ac,\ cb = bc^{\alpha},$
α appartient à l'exposant $4 \pmod p]$,

G^{16}_{16p} $(a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1,\ ac = ca,\ bc = cb,\ ab = bac,\ da = ad^{-1},\ db = bd,\ dc = cd)$,

G^{17}_{16p} $[a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1,\ ac = ca,\ bc = cb,\ ab = bac,\ da = ad^{\alpha},\ db = bd,\ dc = cd,$
α appartient à l'exposant $4 \pmod p]$,

G^{18}_{16p} $(a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1,\ ac = ca,\ bc = cb,\ ad = bac,\ da = ad,\ db = bd^{-1},\ dc = cd)$,

G^{19}_{16p} $(a^8 = b^4 = c^p = 1,\ a^4 = b^2,\ ab = ba^7,\ ca = ac,\ cb = bc^{-1})$,

G^{20}_{16p} $(a^8 = b^4 = c^p = 1,\ a^4 = b^2,\ ab = ba^7,\ ca = ac^{-1},\ cb = bc)$,

G^{21}_{16p} $(a^8 = b^2 = c^p = 1,\ ab = ba^3,\ ac = ca,\ cb = bc^{-1})$,

G^{22}_{16p} $(a^8 = b^2 = c^p = 1,\ ab = ba^3,\ ca = ac^{-1},\ cb = bc)$,

G^{23}_{16p} $(a^8 = b^2 = c^p = 1,\ ab = ba^3,\ ca = ac^{-1},\ cb = bc^{-1})$,

G^{24}_{16p} $(a^8 = b^2 = c^p = 1,\ ab = ba^7,\ ca = ac,\ cb = bc^{-1})$,

G^{25}_{16p} $(a^8 = b^2 = c^p = 1,\ ab = ba^7,\ ca = ac^{-1},\ cb = bc)$,

G^{26}_{48} $[a^4 = b^4 = c^3 = 1,\ ab = ba,\ \bar{c} = (a,\ b,\ a^3 b^3)]$,

G^{27}_{80} $(a^{(2,x^4+x^3+x^2+x+1)} = b^5 = 1,\ ab = ba^{x})$,

G^{28}_{48} $(a^{(2,x^4+x^3+x^2+x+1)} = b^3 = 1,\ ab = ba^{x^3+x^2})$,

G^{29}_{48} $[a^2 = b^2 = c^4 = d^3 = 1,\ ab = bac^2,\ ac = ca,\ bc = cb,\ cd = dc,\ \bar{d} = (a,\ b,\ abc)]$,

G^{30}_{48} $[a^8 = b^2 = c^3 = 1,\ ab = ba^3,\ \bar{c} = (a,\ a^7 c^2,\ a^2 bc)(b,\ bc^2,\ bc)]$.