

VASILE GRADINARU

## **La méthode de Fourier pour des équations abstraites**

*Annales mathématiques Blaise Pascal*, tome 3, n° 2 (1996), p. 111-116

[http://www.numdam.org/item?id=AMBP\\_1996\\_\\_3\\_2\\_111\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1996__3_2_111_0)

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://math.univ-bpclermont.fr/ambp/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## LA MÉTHODE DE FOURIER POUR DES EQUATIONS ABSTRAITES

VASILE GRADINARU

**ABSTRACT.** We will prove the Fourier's method for the heat equation with mixed limit conditions Dirichlet-Neumann. The results are completed with a study concerning initial values and for abstract equations, too. The spectral theory that we resorted to paves the way to apply the principle of this method to other type of equations.

**RÉSUMÉ.** On prouve la méthode de Fourier pour des équations de la chaleur avec des conditions aux limites mixtes du type Dirichelet-Neumann. Les résultats sont approfondis avec une étude sur les données initiales et pour des équations abstraites. La théorie spectrale utilisée donne des idées pour l'adaptation de la méthode aux autres types des équations.

### 1. INTRODUCTION

L'idée de la décomposition dans la base de Fourier pour une équation abstraite formulée dans un cadre hilbertien donne une méthode pour le traitement unitaire et élémentaire des plusieurs types d'équations aux dérivées partielles ( pour différentes conditions aux limites - voir §4). Dans la suite on se mettra dans le cas d'une équation parabolique. Une étude pour les équations des ondes est entre-temps parue dans [3]. Vu les résultats ci-dessous, l'application aux problèmes d'ordre supérieur sera évidente.

On peut trouver la même idée, sans être pourtant développées, dans [5,§7]. Le résultat principal de ce travail est le théorème de régularité de §3, point de départ pour toute étude numérique ultérieure. La démonstration se fonde sur le théorème de §1, une extension d'un résultat connu ([1], [3]) qui semble ne pas être déjà publié, sinon dans la version de [3].

Je remercie le professeur Gh.Moroşanu pour les discussions sur ce sujet.

### 2. THÉORIE SPECTRALE ABSTRAITE

Soient  $V, H$  deux espaces de Hilbert avec les produits scalaires  $(\cdot, \cdot)$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et les normes correspondantes  $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_H$  tels que :

$V \subset H \equiv H' \subset V^*$  (l'injection canonique de  $V$  dans  $H$  est compacte)  
 $V$  est dense dans  $H$ .

**Théorème.** Il existe  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset V, (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset ]0, \infty[$  telles que :

- (i)  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une base hilbertienne orthonormale en  $V$ ;
- (ii)  $(\sqrt{\lambda_n} u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une base hilbertienne orthonormale en  $H$ ;
- (iii)  $(\lambda_n u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une base hilbertienne orthonormale en  $V^*$ ;
- (iv)  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite croissante à  $\infty$ .

**Démonstration:** On peut trouver la démonstration dans [3]. Soient:

$J : V \rightarrow V^*, R : V^* \rightarrow V, R = J^{-1}$  l'isomorphisme de Riesz,

$Q = R|_V : V \rightarrow V$ . On voit que  $\forall v_1, v_2 \in V : (Qv_1, v_2) = \langle v_1, v_2 \rangle$ . Evidemment  $Q$  linéaire,  $\text{Ker } Q = \{0\}$ . De plus  $Q$  est un opérateur compact.

Soit la suite

$$(\varphi_n) \subset V, \|\varphi_n\| \leq c.$$

Alors il existe une sous-suite  $(\varphi_{n_j})$  convergente dans  $H$  et telle que  $(\varphi_{n_j})$  converge faiblement dans  $V$ . Donc  $\varphi \in V$  et

$$\|Q\varphi_{n_j} - Q\varphi\|_V = \sup\{(Q(\varphi_{n_j} - \varphi), \psi) \mid \psi \in V, \|\psi\|_V \leq 1\} =$$

$$\sup\{\langle \varphi_{n_j} - \varphi, \psi \rangle \mid \psi \in V, \|\psi\|_V \leq 1\} \leq c, \|Q\varphi_{n_j} - Q\varphi\|_H \rightarrow 0$$

$$(\text{car } \|\psi\|_V \leq 1 \Rightarrow \|\psi\|_H \leq c).$$

De plus,  $Q$  est autoadjoint:  $(Qv_1, v_2) = \langle v_1, v_2 \rangle = (v_1, Qv_2)$ . Par le théorème de Hilbert-Schmidt [1, p.283] on déduit qu'il existe  $(\mu_n) \subset ]0, \infty[$ ,  $\mu_n \searrow 0$  une suite de valeurs propres et  $(u_n) \subset V$  les vecteurs propres correspondants qui forment une base hilbertienne orthonormale dans  $V$ . Donc

$$Qu_n = \mu_n u_n \Rightarrow Ju_n = J\left(\frac{1}{\mu_n} \cdot Qu_n\right) = \lambda_n u_n \text{ où } \lambda_n = \frac{1}{\mu_n};$$

On a pour tout  $\varphi \in V$ :

$$(Qu_n, \varphi) = \langle u_n, \varphi \rangle \Rightarrow \left(\frac{1}{\lambda_n} u_n, \varphi\right) = \langle u_n, \varphi \rangle \Leftrightarrow (u_n, \varphi) = \lambda_n \langle u_n, \varphi \rangle \text{ et}$$

aussi

$$0 = (u_n, u_m) = \lambda_n \cdot \langle u_n, u_m \rangle \Rightarrow \langle u_n, u_m \rangle = 0 \text{ pour } n \neq m.$$

Soit  $h \in H$  tel que  $\langle h, \sqrt{\lambda_n} u_n \rangle = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Par le théorème de Lax-Milgram [6, p.92] avec  $B(u, v) = (u, v)$  on déduit qu'il existe unique  $\tilde{u} \in V$  tel que

$$(\tilde{u}, v) = \langle h, v \rangle, \forall v \in V \text{ d'où } (\tilde{u}, u_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \tilde{u} = 0 \Rightarrow h = 0$$

Donc (ii) est vérifiée. Ensuite

$(\lambda_n u_n, \lambda_m u_m)_* = (R(\lambda_n u_n), R(\lambda_m u_m)) = (J^{-1}(\lambda_n u_n), J^{-1}(\lambda_m u_m)) = (u_n, u_m)$ . Soit  $v^* \in V^*$  tel que  $(v^*, \lambda_n u_n)_* = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Alors

$$(v^*, h)_* = 0, \forall h \in H, \quad (1)$$

car  $(\sqrt{\lambda_n} u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une base hilbertienne dans  $H$ . Comme  $H$  est dense dans  $V^*$  on a

$$\forall \epsilon > 0 \exists h_\epsilon \in H \text{ avec } \|v^* - h_\epsilon\|_*^2 < \epsilon \Rightarrow \|v^*\|_*^2 - 2(v^*, h_\epsilon)_* + \|h_\epsilon\|_*^2 < \epsilon$$

$$\text{et de (1) on obtient } \|v^*\|_*^2 < \epsilon, \forall \epsilon > 0 \Rightarrow v^* = 0.$$

### 3. FORMULATION DU PROBLÈME ET LA MÉTHODE DE FOURIER

Soit le problème:

$$(P) \quad \begin{cases} y'(t) + Jy(t) = f(t), & 0 < t < T \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

avec

$$(H_1) \quad y_0 \in H, f \in L^2(0, T; H).$$

On va chercher la solution  $y(t)$  de la forme

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)u_n \tag{2}$$

d'où formellement

$$\begin{cases} b'_n(t) + \lambda_n b_n(t) = f_n(t) \\ b_n(0) = y_{0n} \end{cases}$$

avec  $y_{0n} = (y_0, u_n) = \lambda_n \langle y_0, u_n \rangle$ ,  $f_n(t) = \lambda_n \langle f(t), u_n \rangle$  presque pour tout  $t \in ]0, T[$ ,  $y_0 \in H \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_{0n}^2}{\lambda_n} < \infty$ ;  $f(t) \in H \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(t)^2}{\lambda_n} < \infty$ . Alors

$$b_n(t) = y_{0n}e^{-\lambda_n t} + \int_0^t f_n(s)e^{\lambda_n(s-t)} ds. \tag{3}$$

**Théorème.** Supposons toutes les hypothèses satisfaites. Alors la solution  $y$  donnée par (2) et (3) appartient à  $C([0, T]; V) \cap H^1([0, T]; V^*)$  étant l'unique solution faible de (P).

**Démonstration:** On a

$$[b_n(t)]^2 \leq 2y_{0n}^2 e^{-2\lambda_n t} + 2 \left[ \int_0^t f_n(s)e^{\lambda_n(s-t)} ds \right]^2 \leq 2y_{0n}^2 e^{-2\lambda_n t} + \frac{1 - e^{-2\lambda_n t}}{\lambda_n} \int_0^t f_n^2(s) ds.$$

On fixe  $\delta > 0$ ,  $\delta < T \Rightarrow \exists n_\delta : \lambda_n e^{-2\lambda_n t} < 1 \Rightarrow \forall t \in [\delta, T]$  on a:

$$[b_n(t)]^2 \leq \frac{2y_{0n}^2}{\lambda_n} + \int_0^t \frac{f_n^2(s)}{\lambda_n} ds \leq \frac{2y_{0n}^2}{\lambda_n} + \int_0^T \frac{f_n^2(s)}{\lambda_n} ds$$

Mais  $\left\| \sum_{n=m}^p b_n(t)u_n \right\|_V^2 = \sum_{n=m}^p [b_n(t)]^2 < \epsilon$  pour  $p > m > N_\epsilon$ ,  $N_\epsilon$  indépendant de  $t$  (car  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_{0n}^2}{\lambda_n} < \infty$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2(s)}{\lambda_n} = \|f(s)\|_H^2$ ). Donc la série  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)u_n$  converge en  $V$  uniformément en  $t \in [\delta, T]$  et sa somme  $y \in C([\delta, T]; V)$ .

Comme  $\delta$  est arbitraire,  $y \in C([0, T]; V)$ .

De plus

$$\begin{aligned} b'_n(t) &= -\lambda_n e^{-\lambda_n t} y_{0n} + f_n(t) - \lambda_n \int_0^t e^{\lambda_n(s-t)} f_n(s) ds \Rightarrow \\ \frac{1}{3}[b'_n(t)]^2 &\leq \lambda_n^2 e^{-2\lambda_n t} y_{0n}^2 + f_n^2(t) + \lambda_n^2 \left( \int_0^t e^{\lambda_n(s-t)} f_n(s) ds \right)^2 \leq \\ &\leq \lambda_n^2 e^{-2\lambda_n t} y_{0n}^2 + f_n^2(t) + \frac{\lambda_n}{2} \int_0^t f_n^2(s) ds. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{3}[b'_n(t)]^2 \leq \lambda_n^2 e^{-2\lambda_n t} y_{0n}^2 + f_n^2(t) + \frac{\lambda_n}{2} \int_0^t f_n^2(s) ds \tag{4}$$

Alors

$$\frac{[b'_n(t)]^2}{\lambda_n^2} \leq c \left[ y_{0n}^2 e^{-2\lambda_n t} + \frac{f_n^2(t)}{\lambda_n^2} + \frac{1}{2} \int_0^T \frac{f_n^2(s)}{\lambda_n} ds \right]$$

On en déduit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{b'_n(t)}{\lambda_n} \right)^2 \leq c (1 + \|f(T)\|_H^2).$$

Mais  $\left\| \sum_{n=m}^p \frac{b'_n(t)}{\lambda_n} \lambda_n u_n \right\|_{V^*}^2 = \sum_{n=m}^p \left( \frac{b'_n(t)}{\lambda_n} \right)^2$  donc  $\sum_{n=1}^{\infty} b'_n(t) u_n$  converge en  $L^2(0, T, V^*)$ .

Montrons que  $y$  est une solution faible de (P) :

$$(y'(t), u_n) + (y(t), u_n) = \left( \sum_{j=1}^{\infty} b'_j(t) u_j, u_n \right) + \left( \sum_{j=1}^{\infty} b_j(t) u_j, u_n \right) = \frac{1}{\lambda_n} b'_n(t) + b_n(t) = \frac{f_n(t)}{\lambda_n} = \langle f(t), u_n \rangle \text{ presque pour tout } t \Rightarrow (y'(t), \varphi) + (Jy(t), \varphi) = (f(t), \varphi),$$

$\forall \varphi \in V$  presque pour tout  $t$ , donc  $y$  est une solution faible de (P). De plus

$$y(0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0) u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (y_0, u_n) u_n = y_0.$$

L'unicité provient du fait que les développements, de la solution dans espace  $H$  et dans l'espace  $L^2(0, T; H)$  sont uniques.

**Proposition.**

- 1)  $y_0 \in H, f \in L^2(0, T; H) \Rightarrow y \in C([0, T]; V) \cap H^1([0, T]; V^*)$
- 2)  $y_0 \in V, f \in L^2(0, T; H) \Rightarrow y \in C([0, T]; V) \cap H^1([0, T]; V^*)$
- 3)  $y_0 \in H, f \in L^2(0, T; V)$  et de(4)  $\Rightarrow y \in C([0, T]; V) \cap H^1([0, T]; H)$
- 4)  $y_0 \in V, f \in L^2(0, T; V) \Rightarrow y \in C([0, T]; V) \cap H^1([0, T]; H)$
- 5)  $y_0 \in H, f \in H^1([0, T]; H) \Rightarrow y \in C([0, T]; V) \cap C^1([0, T]; H)$

**Démonstration:** 1)-4) sont évidentes de la démonstration précédente. Prouvons 5).

On a :

$$b'_n(t) = -\lambda_n e^{-\lambda_n t} y_{0n} + f_n(0) e^{-\lambda_n t} + \int_0^t e^{\lambda_n(s-t)} f'_n(s) ds \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3} [b'_n(t)]^2 \leq \lambda_n^2 e^{-2\lambda_n t} y_{0n}^2 + f_n^2(0) + \frac{1}{2} \int_0^T \frac{[f'_n(s)]^2}{\lambda_n} ds \Rightarrow$$

$$\frac{[b'_n(t)]^2}{\lambda_n} \leq 3\lambda_n^2 e^{-2\lambda_n t} \frac{y_{0n}^2}{\lambda_n} + 3 \frac{f_n^2(0)}{\lambda_n} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\lambda_1} \int_0^T \frac{[f'_n(s)]^2}{\lambda_n} ds.$$

Mais

$$\left\| \sum_{n=m}^p \frac{b'_n(t)}{\sqrt{\lambda_n}} \sqrt{\lambda_n} u_n \right\|_H^2 = \sum_{n=m}^p \frac{[b'_n(t)]^2}{\lambda_n}$$

Donc  $\sum_{n=1}^{\infty} b'_n(t) u_n$  converge uniformément dans  $C^1([\delta, T]; H)$ .

4. APPLICATIONS

On peut utiliser cette méthode pour plusieurs types d'opérateurs différentiels. Le plus rapidement est de voir l'effet des résultats ci-dessus pour l'étude du problème de la propagation de la chaleur. Soit un ouvert borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , de classe  $C^1$ . La température peut être maintenue à 0 (ou contrôlée) sur toute la frontière  $\partial\Omega$ , ou seulement sur une partie  $\Gamma_1$ , sur le complémentaire  $\partial\Omega \setminus \Gamma_1$  étant connu le flux de la chaleur (0 aussi).

1°) Soient  $V = H_0^1(\Omega)$ ,  $H = L^2(\Omega)$  avec les produits scalaires

$$(v_1, v_2) = \int_{\Omega} \nabla v_1 \cdot \nabla v_2 dx, \langle h_1, h_2 \rangle = \int_{\Omega} h_1 h_2 dx.$$

Alors (P) s'écrit

$$\begin{cases} y_t - \Delta y = f, & x \in \Omega, t \in ]0, T[ \\ y = 0, & x \in \partial\Omega, t \in ]0, T[ \\ y(0, x) = y_0(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

2°) Soient  $V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$ ,  $H = L^2(\Omega)$  avec les produits scalaires (voir [4,p20])

$$(v_1, v_2) = \int_{\Omega} \nabla v_1 \cdot \nabla v_2 dx, \langle h_1, h_2 \rangle = \int_{\Omega} h_1 h_2 dx, \text{ où } \Gamma_1 \subset \partial\Omega.$$

Alors on peut considérer (P):

$$\begin{cases} y_t - \Delta y = f, & x \in \Omega, t \in ]0, T[ \\ y = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_1 \\ y(0, x) = y_0(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

**Rémarques**

1) Si dans l'exemple 2°) on prend  $y_0 \in V$ ,  $Jy_0 \in V$  et  $f \in H^1([0, T]; H)$ , on obtient  $y \in C([0, T], V) \cap C^1([0, T]; H)$ , c'est-à-dire la solution classique.

2) Le cas non homogène peut être réduit au cas homogène pour appliquer les résultats ci-dessus (voir aussi [2,p35].)

**Bibliographie**

[1] Kolmogorov A.N., Fomin S.V., "Elementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza", Nauka, Moscou, 1989

[2] Lions J.L., Magenes E., "Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications", tome 2, Dunod, Paris 1968.

[3] Morosanu Gh., Sburlan S., "Multiple orthogonal sequences method and applications", An.St.Univ. "Ovidius", Constantza, 3(1995)

[4] Nečas J., "Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques", Masson et Academia, Paris et Prague, 1967

[5] Raviart P.A., Thomas J.M., "Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles", Masson, Paris, 1988.

[6] Yosida, Y, "*Functional Analysis*", Springer-Verlag, 1978

**Gradinaru Vasile**

**Faculté des Mathématiques; Section des Mathématiques Appliquées,  
Univ. "Al.I.Cuza", Iasi, Roumanie, cour.élec: gradinar@uaic.ro**