ANNALES MATHÉMATIQUES BLAISE PASCAL

P. KRÉE

Exponentielles et fonctionnelles de Schwinger en analyse gaussienne non commutative

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 3, nº 1 (1996), p. 227-242
<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1996__3_1_227_0>

Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 3, N° 1, 1996, pp.227-242

EXPONENTIELLES ET FONCTIONNELLES DE SCHWINGER EN ANALYSE GAUSSIENNE NON COMMUTATIVE

P. Krée
Institut de Mathématiques de Jussieu
Université de PARIS VI

«The exponential ... is the most important function in Mathematics» [R] Chap.1, p.1.

Resumé : En vue de plonger l'analyse gaussienne usuelle dans une analyse bosonique et fermionique plus générale, on commence par définir et par étudier les exponentielles et les Transformées de Laplace (TL) associées. Ces dernières sont en fait les fonctionnelles de Schwinger.

Summary : In order to imbed usual Gaussian analysis into a more general bosonic and fermionic analysis we begin with the definition and with the study of corresponding exponentials and Laplace Transforms (TL). The last ones are, in fact, the Schwinger functionals.

I - INTRODUCTION

1. Généralités

Le groupe de recherche de A. Badrikian et notre équipe ont collaboré pour étudier dans le cadre des probabilités et de l'analyse réelle classique, l'analyse gaussienne et ses interactions avec la physique classique [B], [BK], [DKW]. Nous avons a cette occasion beaucoup apprécié les grandes qualités humaines et de chercheur de A. Badrikian. Cet exposé au colloque dédié à la mémoire de Albert concerne des travaux faits dans l'optique de la géométrie Non Commutative (NC). Le but est de créer une analyse complexe NC plus générale, qui interagit avec la physique quantique, et où l'analyse gaussienne classique trouve un cadre naturel plus général mais très différent de son cadre classique. On commence pour ça par étudier les exponentielles NC et ce qui correspond à la TL. L'existence d'un tel plongement n'est pas surprenante. En effet dans plusieurs travaux qui sont à la base de l'analyse gaussienne classique comme par exemple ceux créant l'isométrie de Wiener-Segal, le calcul différentiel de L. Gross généralisé, le calcul pseudo différentiel gaussien, les methodes combinant l'algèbre, l'analyse complexe et l'analyse fonctionnelle sont fondamentales [S], [EDP∞], [K_1], [L] ... Les exposés récents du même type [B], [K_2], [K_3] montrent que cette approche se prêtait très bien aux interactions avec l'analyse stochastique car elle montrait tout de suite que les opérateurs différentiels fondamentaux sont le gradient généralisé et la divergence δ alors que l'analyse stochastique suggérait que les opérateurs différentiels fondamentaux sont le gradient pour les fonctions usuelles et l'opérateur nombre. Cette approche permet aussi de choisir dans chaque cas des espaces fonctionnels adaptés de trajectoires et de classes de fonctions, ce qui permet par exemple de résoudre le problème de la représentations des martingales quantiques [K_3]. Elle est aussi plus générale puisqu'elle s'applique aussi aux processus de Poisson et de Levy [D].

L'exposé oral concernait beaucoup les aspects fermioniques developpés avec E. Carlen [CK]. Mais comme ces aspects présentés seuls peuvent sembler éloignées de la géométrie et de l'analyse gaussienne, l'exposé écrit qui suit concerne aussi les aspects bosoniques, donc aussi [HK].

L'auteur remercie P. Malliavin pour son intérêt pour ces travaux.

2. Principe de la démarche

Partons de la physique en considérant un oscillateur harmonique supposé au départ classique avec un Nombre de Degrés de Liberté (NDL) égal à un. L'énergie de cet opérateur étant

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + m\,\omega^2\, q^2/2 \qquad (I.1)$$

l'état statistique de cet oscillateur à la température T est donné par la mesure de probabilité

$$f(q,p) \longrightarrow E^{cl}(f) = \int\int f\ \rho \mathcal{D}q\mathcal{D}p \text{ où } \rho(q,p) = Z^{-1}e^{-\beta H(q,p)} \qquad (I.2)$$

où Z est choisi pour que $E^{cl}(1) = 1$ et où $\beta = (kT)^{-1}$. On sait que la perturbation de tels oscillateurs conduit encore aujourd'hui à des travaux extrêmement intéressants, que dans le cas non perturbé E^{cl} est conservé par le flot hamiltonien, que q et p sont indépendantes et gaussiennes centrées. Mais (I.2) n'est plus valable si NDL est infini. De la même manière de nombreux problèmes mathématiques très intéressants apparaissent quand on perturbe l'oscillateur harmonique quantique d'énergie H(Q,P). Comme le montre le chapitre 3 de [M] le cas NDL = 1 est trivial. L'énergie a alors des niveaux d'énergie quantifiés $E_n = h\omega(n+\frac{1}{2})$. Notant alors ψ_n une fonction d'onde normalisée correspondant à E_n, l'état statistique de l'oscillateur harmonique quantique est modélisé par l'état suivant

$$f = f(Q,P) \longrightarrow E(f) = Tr(\rho f) \text{ où } \rho = Z^{-1}\sum_{0}^{\infty} e^{-\beta E_n}\psi_n \otimes \psi_n \tag{I.3}$$

où Z est choisi pour que $E(1) = 1$. Là encore E est conservé par le flot hamiltonien. Mais Q et P ne sont plus indépendantes, quoique leurs lois soient gaussiennes. Mais la formule (I.3) n'est plus valable si NDL est infini. Et comme le montre [M] la technique des fonctions caracteristiques NC ne permet ni de perturber le cas NDL = 1, ni même d'étudier des systèmes libres où NDL est infini. On a donc besoin d'un outil et d'un calcul pour travailler avec ces états E en dimension quelconque ou pour perturber ces états. On va commencer pour ça à étudier mathématiquement les fonctionnelles de Schwinger.

Pour faire le lien avec l'analyse gaussienne il faut commencer par tout complexifier, puis la repenser en termes algébriques et en termes géométriques, de façon à travailler avec les espaces de Heisenberg de [C]. Comme ce deuxième travail est déjà fait [B], [K_2], [K_3] on part avec les concepts fondamentaux d'espace gaussien dualisé

$$(M_Q \subset Z_Q ... H_Q \subset \Omega_Q, E_Q) \tag{I.4}$$

et d'homomorphismes associés.A droite de ce schéma on retrouve la notion usuelle d'espace probabilisé gaussien. Au milieu les trois petits points symbolisent la dualité entre l'espace reproduisant H_Q et son dual Z_Q. Le sous espace M_Q du dual de Ω_Q, qui apparait tout à gauche, est fondamental. En effet M_Q doit être choisi au mieux pour chaque problème, et de plus [B], [K_2], [K_3] montrent que l'algèbre symetrique $S(M_Q)$ identifée aux polynomes cylindriques réels sur Ω_Q est vraiment l'ossature algébrique de la théorie, les concepts purement ensemblistes étant auxiliaires. En effet $S(M_Q)$ étant une algèbre, elle a un calcul différentiel associé qui intéragit avec la théorie de la mesure. Ainsi en analyse gaussienne classique, on est amené à grossir cette ossature à l'aide de complétions très variées. D'abord une complétion est nécessaire pour définir les exponentielles sur M_Q , ce qui permet ensuite de définir les TL

$$u \longrightarrow \int e^{u.x} dE_Q(x) = e^{\frac{\|u\|^2}{2}} \tag{I.5}$$

puis d'autres complétions sont nécessaires pour définir les L^p pour $p < \infty$, les espaces de Sobolev gaussiens ...

Par conséquent on commence par introduire les complexifiés $M = M_Q + i\ M_Q$ de M_Q et $Z = Z_Q + i\ Z_Q$ de Z ; ainsi la compléxifiée $\mathcal{A}_Q = S(M)$ de $S(M_Q)$ est une algèbre involutive commutative. Puis en ajoutant aux variables du type Q des variables du type P on va introduire une algèbre involutive non commutative $\mathcal{A}$ où $\mathcal{A}_Q$ se plonge. L'algèbre $\mathcal{A}$ a donc un calcul différentiel associé. Puis considérant $\mathcal{A}$ comme une donnée de base on va introduire des complétions très variées de $\mathcal{A}$.

II - L'ALGEBRE INVOLUTIVE $\mathcal{A} = Hb(M \otimes \overline{M})$ ET SON CALCUL DIFFERENTIEL

1. Généralités sur les algèbres $Hb(X)$

On travaille avec des espaces vectoriels et des algèbres (associatives) sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La théorie des algèbres de Heisenberg et le calcul différentiel associé se développent en imitant les théories correspondantes pour les algèbres de Clifford [CK], mais en remplacant la catégorie des espaces quadratiques $(X.q)$ par celle des espaces alternés. Un tel espace (X, φ) est défini par un espace vectoriel X muni d'une forme bilinéaire alternée. Etant donnés deux espaces alternés (X, φ) et (Y, φ') un homomorphisme de (X, φ) vers (Y, φ') est défini par toute application linéaire L de X dans Y telle que $\varphi'(Lx, Lx') = \varphi(x, x')$. Une application h de (X, φ) à valeurs dans une algèbre unifère A est dite de Heisenberg si

$$h(x)\ h(x') - h(x')\ h(x) = \varphi(x, x').$$

Comme pour les algèbres de Clifford, l'algèbre de Heisenberg $Hb(X)$ est définie par une certaine application linéaire $J : X \longrightarrow Hb(X)$ et par une propriété universelle disant que toute application de Heisenberg de source (X, φ) à valeurs dans une algèbre unifère A quelconque se prolonge à $Hb(X)$ en un homomorphisme.

L'existence se prouve en considérant la surjection canonique de l'algèbre tensorielle $T(X) = \oplus T_j(X)$ sur $Hb(X) = T(X)/\mathcal{T}(\varphi)$ où $\mathcal{T}(\varphi)$ est l'ideal bilatère engendré par les éléments du type $x \otimes x' - x' \otimes x - \varphi(x, x')$. On note $Hb_j(X)$ l'image par J de $T_j(X)$. Noter que dans le cas particulier où (X, φ) est totalement dégénéré i.e., $\varphi = 0$, alors $Hb(X) = S(X)$. On obtient ainsi un foncteur Hb de la catégorie des espaces quadratiques à valeurs dans la catégorie des algèbres unifères, qui à la somme orthogonale de tout couple d'espaces alternés (X_j, φ_j) avec $j = 1$ ou 2, fait correspondre le produit tensoriel des algèbres $Hb(X_j)$. Les dérivations directionnelles ∇_u dans $Hb(X)$ sont définies en partant de la proposition suivante concernant les dérivations dans $T(X)$ puis en passant au quotient par $\mathcal{T}(\varphi)$.

2. Lemme

Soit u arbitraire dans le dual algébrique X^* de l'espace vectoriel X.

a) Il existe une et une seule application linéaire ∇_u dans $T(X)$ telle que $\nabla_u 1 = 0$ et

$$\forall x \quad \forall t \in T(X) \quad \nabla_u(x \otimes t) = u(x)t + x \otimes \nabla_u t. \qquad (II.1)$$

De plus ∇_u est une dérivation telle que

$$\forall u \text{ et } v \in X^* \quad \nabla_u \nabla_v - \nabla_v \nabla_u = 0. \tag{II.2}$$

b) Finalement pour toute forme bilinéaire alternée φ sur X, ∇_u laisse stable l'ideal $\mathcal{T}(\varphi)$.

Considérant alors l'espace alterné totalement dégénéré $(X^*, 0)$, (II.2) montre que l'application $u \to \nabla_u$ à valeurs dans $End(Hb(X))$ est Heisenberg. D'où un homomorphisme d'algèbres $S(X^*) \longrightarrow End(Hb(X))$ que l'on note $\theta \to \nabla_\theta$. On obtient ainsi des formules analogues à celles concernant les polynômes cylindriques. Par exemple, on se ramène facilement au cas où $n = \dim X$ est fini. On considère alors une base $(\xi_j) = (\xi_1, ...\xi_n)$ de X et la base dual (x_j) de X^*, et l'on utilise des multi-indices $\alpha = (\alpha_j) = (\alpha_1, ...\alpha_n)$; $\beta = (\beta_j)$. Notant alors ∇_j la dérivation dans la direction de x_j on obtient comme pour tout monôme ξ^β usuel

$$\nabla_i(\xi^\beta) = \beta_i \, \xi^{\beta - 1_i} \tag{II.3}$$

où par convention le membre de droite est nul si $\beta_i = 0$. Plus généralement si $\theta = x^\alpha = x_1^{x_1} ... x_n^{x_n}$, ∇_θ est noté ∇^α et $\nabla^\alpha(\xi^\beta)$ se calcule comme si ξ^β était un monome usuel. On définit de même les derivées globales. D'où des formules et un calcul qui sont les mêmes que pour les polynômes usuels.

3. Proposition (translation externe et formule de Taylor)

Pour tout espace alterné (X, φ) on note $(X \oplus X, \varphi + 0)$ la somme orthogonale de (X, φ) et de $(X, 0)$; et pour tout x de X, l'élément correspondant de la deuxième copie de X est noté x'.

a) L'application $T : x \longrightarrow x + x'$ est de Heisenberg. Elle se prolonge donc en un homomorphisme $\tilde{T} : Hb(X) \longrightarrow Hb(X \oplus X)$ noté $\xi \longrightarrow F(\xi + \xi')$ appelé translation externe.

b) Pour $n = \dim X$ fini et pour toute base (ξ_i) de X orthogonale par rapport à s, on a pour tout élément $F(\xi) = \Sigma f_\beta \xi^\beta$ de $Hb(X)$

$$F(\xi + \xi') = \sum_\alpha \nabla^\alpha F(\xi) \, \xi'^\alpha / \alpha! = \sum_\ell \nabla^\ell F(\xi) . \xi'^{\otimes \ell} / \ell! \tag{II.4}$$

Il est utile de noter que l'élément F de $Hb(X)$ ne s'interprète pas intuitivement (et rigoureusement si $\varphi = 0$) comme une fonction sur X, mais comme une fonction sur tout espace U en dualité avec X. D'ailleurs pour retrouver la formule de Taylor usuelle $F(\xi + a) = ...$ à partir de (II.4), on note que pour a dans U, l'application $V : x + y' \to x + a(y')$ de $X \oplus X$ dans $Hb(X)$ est de Heisenberg. Donc la composée de $\widetilde{T}$ et de $\widetilde{V}$ est un endomorphisme $F \to F(\xi + a)$ de $Hb(X)$ appellé translation interne d'intensité a et $F(\xi + a)$ se deduit de (II.4) en y remplacant les ξ'_i par les composantes a_i de a.

4. Proposition (dérivations et commutateurs)

Soit (X,φ) *un espace alterné et soit* L *linéaire de* X *dans* X^* *définie par* $L(x) = \varphi\ (.,x)$. *Alors pour tout* x *fixé*

$$\forall F \in Hb(X) \quad \nabla_{L(x)}F = [F,x] \tag{II.5}$$

En effet $\nabla_{L(x)}$ et $[.,x]$ sont des dérivations sur l'algèbre $Hb(X)$ qui coïncident en degré 1.

5. Définition des expressions ordonnées d'éléments et des produits de Wick

a) Soit $b = (e_j)_1^N$ *une base ordonnée de l'espace alterné* (X,φ) *de dimension finie* N. *Posant* $\xi_j = \mathcal{J}(e_j)$, *on appelle expression ordonnée* $F(\xi)$ *de toute* F *de* $Hb(X)$ *l'expression de* F *comme combinaision linéaire des monômes* ξ^α *où les* ξ_j *sont ordonnés dans l'ordre croissant des indices* j. *On appelle produit de Wick de deux éléments* F *et* G *de* $Hb(X)$ *l'élément :* $F(\xi)\ G(\xi)$ *: de* $Hb(X)$ *dont l'expression ordonnée se déduit du produit* $F(\xi)\ G(\xi)$ *en replaçant les* ξ_j *dans l'ordre croissant des indices mais sans tenir compte des relations de commutation.*

b) Considérons par exemple le cas particulier où X *est la somme* $X_1 \oplus X_2$ *de deux espaces en dualité de dimension* n, *munis de deux bases ordonnées* (e_j) *et* (ε_j) *en dualité et telle que :*

$$\varphi(e_i,e_j) = \varphi(\varepsilon_i,\varepsilon_j) = 0 \ \ et \ \varphi(e_i,\varepsilon_j) = \delta_{ij}.$$

Posant $b = (e_1,e_2,...,e_n,\varepsilon_1,...,\varepsilon_n), \xi_i = \mathcal{J}\ (e_i)$ *et* $\eta_j = \mathcal{J}(\varepsilon_j)$ *tous les* ξ_i *et tous les* η_j *commutent entre eux et* $[\xi_j,\eta_j] = \delta_{ij}$. *L'expression ordonnée de* $F(\xi,\eta)$ *de tout élément* F *de* $Hb(X_1 \oplus X_2)$ *est donc l'expression de* F *comme combinaison linéaire des monômes* $\xi^\alpha\eta^\beta$.

En utilisant (II.5) on peut démontrer ceci

6. Théorème (expression ordonnée de tout produit)

Les notations sont celles du point b). Alors quels que soient F *et* G *dans* $Hb(X_1 \oplus X_2)$

$$(FG)\ (\xi,\eta) = \textstyle\sum_\alpha : \frac{\nabla_\eta^\alpha\ G(\xi,\eta)\ \nabla_\xi^\alpha\ G(\xi,\eta)}{\alpha!} : \tag{II.6}$$

On introduit maintenant des involutions.

On rappelle que l'anti-espace d'un espace vectoriel complexe M est l'espace vectoriel $\overline{M}$ défini pour le groupe additif de M et par le produit par les scalaires $\lambda; m) \to \overline{\lambda}m$. On note alors $m \to \overline{m}$ l'anti-isomorphisme $M \to \overline{M}$ défini par l'application identique de M. Les algèbres de Heisenberg involutives sont construites en utilisant ceci.

7. Théorème

Soit (X,φ) un espace alterné complexe avec une conjugaison compatible C i.e., telle que $\varphi(Cx,Cx') = \overline{\varphi(x',x)}$.

a) Alors C se prolonge d'une seule manière en une involution sur $Hb(X)$.

b) De plus soit A une algèbre involutive et soit L une application de Heisenberg de X dans A telle que $L(Cx) = L(x)^*$. Alors l'homomorphisme $\tilde{L}$ associé à L est involutif.

Une telle application L est dite $*$-Heisenberg.

8. L'algèbre involutive $Hb(M \oplus \overline{M})$

On rappelle que «le» complexifié de tout espace vectoriel complexe est tout couple (V^c, inj) formé par un espace complexe V^c et par une application $\mathbb{R}$-linéaire inj de V dans V^c telle que toute application $\mathbb{R}$-linéaire de V dans un espace complexe W admet un seul prolongement en une application $\mathbb{C}$-linéaire de V^c dans W.

On peut complexifier de plusieurs manières tout espace vectoriel réel V mais tout complexifié V^c de V est isomorphe à $V + iV$ muni de sa structure complexe usuelle. L'espace $V + iV$ est appellé le complexifié en $x + iy$ de V. Considérons ainsi un espace complexe M dense dans l'hilbertien Z et l'espace réel sous jacent M_r. Le complexifie en $z + \overline{z}$ de M_r est défini par

$$\begin{aligned} M_r &\xrightarrow{inj} M \oplus \overline{M} \\ z &\longrightarrow (z + \overline{z})/\sqrt{2} \end{aligned} \qquad (II.7)$$

Ici $\sqrt{2}$ qui peut être remplacé a priori par tout réel non nul a été choisi pour que inj soit isométrique. Le produit scalaire (z, z') est noté $\overline{z}.z'$ pour simplifier. Alors la complexifiée de l'application bilinéaire $\varphi'(z.z') = i\ Im\ \overline{z}.z'$ est la forme bilinéaire alternée suivante sur $X = M \oplus \overline{M}$

$$\varphi(u + \overline{u}', v + \overline{v}') = \overline{u}'.v - u.\overline{v}' \qquad (II.8)$$

Parfois φ est remplacé par $h\varphi$ où $h \geq 0$ représente la constante de Planck. On note que $(M \oplus \overline{M}, \varphi)$ muni de sa conjugaison naturelle $u + \overline{u}' \to u' + \overline{u}$ verifie les hypothèses de (II.4). Par consequent $Hb(M \oplus \overline{M})$ est involutive.

On a des calculs similaires dans le cas fermionique mais où les algèbres de Heisenberg sont remplacées par des algèbres de Clifford [CK].

9. Debut de l'étude des opérateurs de convolution

Soit (X,φ) alterné et soit g une série formelle sur X. L'opérateur de convolution de symbole g dans $Hb(X)$ est défini comme étant l'application linéaire suivante de $Hb(X)$ dans lui-même :

$$f(\xi) \longrightarrow \langle f(\xi + \xi'), g(x') \rangle \qquad (II.7)$$

où les crochets symbolisent une contraction relative aux lettres duales ξ' et x', c'est-à-dire entre $S(X)$ et les séries formelles.

L'étude de ces opérateurs se ramène immédiatement au cas de la dimension finie. Alors si (e_j) et (ε_j) sont des bases duales dans X et X^* de dim. n, l'application (II.7) est notée ∇_g car vu (II.4)

$$g(x) = \Sigma g_\beta \frac{\nabla^\beta}{\alpha!} \Longrightarrow \nabla_g = \Sigma g_\alpha \frac{\nabla^\alpha}{\alpha!}. \qquad (II.10)$$

Ainsi les ∇_g forment une algèbre commutative unifère isomorphe à l'algèbre Pôl (X) des séries formelles sur X. Pour g fixé, dim X finie, et pour tout multi-indice α le polynôme caracteristique d'ordre α de ∇_g est défini par

$$H_\alpha(\xi) = \nabla_g(e^\alpha) = \langle(\xi + \xi')^\alpha, g(x')\rangle. \qquad (II.11)$$

D'où immédiatement de nombreuses relations algébriques entre ces polynômes, qui sont analogues à celles connues pour les polynomes de Hermite dans le cas particulier où $X = \mathbb{R}, \varphi = 0$ et $g(x) = \exp -\frac{x^2}{2}$.

Pour définir en général la fonction génératrice des H_α, on introduit pour tout entier N fixé et pour toute forme linéaire $u = \Sigma u_j\ \varepsilon_j = \Sigma u_j x_j$ sur X la combinaison suivante des égalités (II.11)

$$\textstyle\sum_{|\alpha|\leq N} \frac{H_\alpha(\xi)u^\alpha}{\alpha!} = \langle\sum_{|\alpha|\leq N} \frac{(\xi + \xi')^\alpha u^\alpha}{\alpha!}, g(x')\rangle \qquad (II.12)$$

et on cherche à passer à la limite quand $N \to \infty$. Le cas où $\varphi = 0$ est trivial car tous les termes du développement de $(\xi+\xi')^\alpha$ commutent, et il a apparait à droite une exponentielle usuelle qu'on peut définir comme élément d'un complété de $S(X)$. Le cas où $\varphi \neq 0$ est moins facile car il apparait à droite une exponentielle non commutative, a définir dans un complété convenable de $Hb(X)$. On verra à la section IV, quatre théorèmes qui permettent de faire tendre N vers l'infini dans (II.12). Mais donnons d'abord des exemples.

III - DEUX EXEMPLES D'ALGEBRES INVOLUTIVES $Hb(X_1 \oplus X_2)$

1. Relation avec les symboles classiques

Considérons la somme $Z_r = Z_Q \oplus Z_p$ de deux copies d'un même espace euclidien, Z_r est muni de l'application bilinéaire alternée

$$\varphi'(q + p, q' + p') = i\ (q.p' - p.q') \qquad (III.1)$$

Munissons la somme des complexifés $X_1 = Z_Q^c$ et $X_2 = Z_p^c$ en $x + iy$ des espaces réels Z_Q et Z_p, de la complexifiée φ'^c de φ'. On se propose de montrer que l'application des resultats qui précèdent à l'espace alterné $(X_1 \oplus X_2, \varphi'^c)$ muni d'une base b obtenue en justaposant deux copies d'une base orthonormée de Z_Q donne en fait le debut du calcul pseudo différentiel classique. En effet l'espace de L. Schwartz $\mathcal{S} = \mathcal{S}(Z_Q)$ étant plongé dans $L^2(Z_Q, dq)$ soit $\mathcal{B}$ l'algèbre involutive des applications linéaires continues de $\mathcal{S}$, dont l'adjoint induit un opérateur linéaire continu de $\mathcal{S}$. Par exemple, pour u et v arbitraires dans Z_Q, $\mathcal{B}$ contient l'opérateur Q_u de produit par la forme linéaire $u.q$ sur Z_Q et aussi l'opérateur $P_v = i^{-1}\nabla_v$. On vérifie alors que l'application $R : u+v \to Q_v + P_u$ de $X_1 \oplus X_2$ dans $\mathcal{B}$ est $*$-Heisenberg. Elle définit donc un homomorphisme

$$Hb\,(X_1 \oplus X_2) \xrightarrow{\tilde{R}} \mathcal{B}$$

qui composé avec l'application σ de symbole classique définit une bijection linéaire

$$Hb(X_1 \oplus X_2) \xrightarrow{\sigma\circ\tilde{R}} S(X_1 \oplus X_2).$$

Pour que cette bijection soit un isomorphisme d'algèbres, il faut remplacer le produit dans $S(X_1 \oplus X_2)$ correspondant au produit des fonctions polynômes par le produit défini par la formule exprimant le symbole classique de $\tilde{R}(FG)$ à l'aide des symboles de $\tilde{R}(F)$ et de $\tilde{R}(G)$.

2. Relation avec les symboles de Wick en dimension finie

Pour tout espace hermitien M; munissons $X_1 \oplus X_2 = M \oplus \overline{M}$ de la forme alternée définie par (II.8). On peut aussi appliquer les resultats qui précèdent à $(M \oplus \overline{M}, \varphi)$ et a la base b de $M \oplus \overline{M}$ obtenue en juxtaposant toute base orthonormée (e_i) de M avec la base $(\overline{e}_i)$ de $\overline{M}$. On voit de même que l'algèbre involutive $Hb(X_1 \oplus X_2)$ est dans ce cas isomorphe à l'algèbre des opérateurs linéaires F de Fock (M) dont le symbole de Wick $F^w(\overline{u}, u)$ appartient à $S(M \oplus \overline{M})$. Mais pour que l'application $F \to F^w$ soit un isomorphisme d'algèbres de $Hb(M \oplus \overline{M})$ sur $S(M \oplus \overline{M})$, on doit remplacer le produit usuel des polynômes sur $M \oplus \overline{M}$ par un produit tel que $F^w G^w = (F \circ G)^w$. Les techniques cylindriques de [K$_1$], [EDP∞], [KR] et en particulier le lemme suivant permettent d'etendre la théorie en dimension quelconque.

3. Lemme des Systèmes Cohérents Uniformément Bornés [K$_1$], [EDP ∞]

Soit B un espace de Banach complexe muni d'une famille filtrante croissante (B_α) de sous espaces de Banach dont la réunion est dense dans B. Notant i_α et $i_{\alpha\beta}$ les injections canoniques $B_\alpha \to B$ et $B_\alpha \to B_\beta$, soit SCUB l'ensemble des Systèmes $v. = (v_\alpha)$ dans ΠB_α qui sont Cohérents et Uniformement Bornés au sens suivant

$$B_\alpha \subset B_\beta \Longrightarrow v_\alpha = i^*_{\alpha\beta}\,(v_\beta)$$

et

$$\|v\| = \sup \|v_\alpha\| < \infty.$$

C'est clairement un espace normé

a) Alors l'application $A : \ell \to (i_\alpha^*(\ell))_\alpha$ est une isométrie de B sur $SCUB$ qui est donc complet.

b) Supposons qu'il existe pour tout B_α une application linéaire isométrique j_α de $'B_\alpha$ dans $'B$ telle que $i_\alpha^*\, j_\alpha(u) = u$ pour tout u dans $'B_\alpha$. On suppose aussi que $\bigcup Im\ j_\alpha$ est dense dans $'B$. Alors

$$\forall u \in' B \quad j_\alpha \circ i_\alpha^*(u) \longrightarrow u \text{ dans } 'B.$$

Pour prouver a), il suffit de remarquer que A est l'adjointe de l'injection canonique de $\bigcup B_\alpha$ dans B et que cette injection est isométrique. Pour prouver b), on note que les normes des applications linéaires $L_\alpha = j_\alpha \circ i_\alpha^*$ de $'B$ dans lui-même sont uniformement majorées et que L_α coïncide avec l'application identique de $'B$ sur $V = \bigcup Im\ j_\alpha$. En effet pour tout $v = j_\alpha(u)$ de V on a $L_\alpha v = j_\alpha\, i_\alpha^*\, j_\alpha(u) = j_\alpha(u) = v$. Comme V est dense dans $'B$ on termine par un argument en $\varepsilon/2$.

IV - EXPONENTIATION DANS CERTAINES ALGEBRES TOPOLOGIQUES

1. Définition

Une algèbre unifère $\mathcal{B}$ est appellée bien topologisée si $\mathcal{B}$ est muni d'une topologie localement convexe separée telle que $\mathcal{B}$ soit sequentiellement complet et telle que le produit soit sequentiellement continu. En particulier une algèbre involutive unifère $\mathcal{B}$ est dite bien topologisée si de plus l'involution est sequentiellement continue.

2. Définition de l'exponentielle exp (sb) pour $s \in S$

Soit $\mathcal{B}$ une algèbre bien topologisée. Soit b un élément de $\mathcal{B}$ et soit S un ouvert connexe du plan complexe contenant l'origine. On dit que exp (sb) existe pour s dans S s'il existe un fonction holomorphe G de S dans $\mathcal{B}$ telle que $G(0) = 1, G'(0) = b$ et

$$s \text{ et } s' \in S \text{ avec } s + s' \in S \Longrightarrow G(s+s') = G(s)G(s') \tag{IV.1}$$

Comme une telle fonction G est unique si elle existe on pose exp $(sb) = G(s)$.

Notons que si exp (sb) existe pour s dans un certain ouvert S comme ci-dessus, alors nécessairement $G^{(k)}(0) = b^k$ et

$$\exists r > 0 \quad \forall p_k \quad \textstyle\sum_0^\infty p_k(b^k)\, r^k/k! < \infty \tag{IV.2}$$

et l'on retrouve ainsi le cas particulier où $\mathcal{B}$ est une algèbre involutive unifère de Banach.

3. Théorème 1 (deux propriétés de l'exponentielle)

a) Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ deux algèbres unifères bien topologisées et soit h un homomorphisme séquentiellement continu de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}_1$. Si b dans $\mathcal{B}$ est tel que exp (sb) existe pour tout s, alors exp $sh(b)$ existe pour tout s et c'est h (exp (sb)).

b) Soient a et b deux éléments de $\mathcal{B}$ tels que exp(sa) et exp(sb) existent pour tout s et tels que existe λ complexe satisfaisant

$$[a,b] = \lambda 1 \tag{IV.3}$$

Alors exp s(a + b) existe pour tout s et

$$e^{s(a+b)} = e^{sa}e^{sb}e^{-\lambda s^2/2} = e^{sb}e^{sa}e^{+\lambda s^2/2} \tag{IV.4}$$

c) Soit $\mathcal{B}$ une $*$-algèbre unifère bien topologisée et soit b un élément de cette algèbre tel que sb soit exponentiable pour tout s. Alors $\bar{s}b^*$ peut être exponentié et

$$e^{\bar{s}b^*} = (e^{sb})^* \tag{IV.5}$$

Commençons par deux exemples commutatifs.

4. Les algèbres bien topologisées $\mathcal{F}_\theta(V)$ et $\mathcal{G}_{\theta'}(V)$

On renvoie pour les details à [KO] et [O]. Pour tout $\theta \geq 1$ on pose $\frac{1}{\theta'} = 1 - \frac{1}{\theta}$. Pour tout espace hermitien V, l'espace $\mathcal{F}_\theta(V)$ des fonctions entières f sur V à croissance exponentielle d'ordre θ et de type arbitrairement petit est une algèbre de Fréchet nucléaire commutative bien topologisée. Pour toute base orthonormée de V les developpements de Taylor des éléments f de $\mathcal{F}_\theta(V)$ sont ainsi caractérisés topologiquement

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\theta(V) = \{f = \Sigma f_\alpha v^\alpha, \forall m = 1,2,...,\\ q'_m(f) = (\Sigma|\alpha|!^{\frac{2}{\theta}} m^{|\alpha|}\ |f_\alpha|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty\}\end{aligned} \tag{IV.6}$$

L'antidual est donc l'espace $\mathcal{G}_{\theta'}(V)$ des fonctions $g = \Sigma g_\alpha v^\alpha$ sur V telles que pour un certain entier m :

$$\|g\|_m = (\Sigma|\alpha|!^{\ \frac{2}{\theta'}}\ m^{-|\alpha|}\ |g_\alpha|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty \tag{IV.7}$$

l'antidualité étant définie par

$$(f,g) = \Sigma\alpha!\ \overline{f}_\alpha\ g_\alpha \tag{IV.8}$$

De plus la topologie d'antidual fort est limite inductive des topologies des espaces hilbertiens définis par (III.7). De plus $\mathcal{G}_{\theta'}(V)$ fort est aussi l'espace des fonctions entières d'ordre θ' sur V dont le type est arbitrairement grand. L'algèbre $\mathcal{G}_{\theta'}(V)$ est aussi bien topologisée. Noter qu'on a un isomorphisme

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{\theta'}(V) \longrightarrow{}' \mathcal{F}_\theta(V) \text{ fort}\\ g \to E_g : f \to \Sigma\alpha!\overline{f}_\alpha\ g_\alpha\end{aligned} \tag{IV.9}$$

tel que $E_g(v^\alpha) = \alpha! g_\alpha$ pour tout multi-indice α. On en déduit que g coïncide avec la fonction suivante appellée la transformée de Laplace de E_g

$$u \longrightarrow \widehat{E}_g(u) = E_g(e^u) \tag{IV.10}$$

Noter que $\mathcal{F}_\theta(V)$ et $\mathcal{G}_{\theta'}(V)$ ne dependent pas en fait de la structure hermitienne de V.

5. Théorème 2 d'extension de ∇_g à $\widehat{Hb(X)}_\theta$

Soit $\theta \geq 1$. Soit (X, φ) un espace alterné complexe et soit $\mathcal{B} = \widehat{Hb(X)}_\theta$ le completé de $Hb(X)$ pour la topologie induite par $\mathcal{F}_\theta(X)$.

a) Alors la translation externe se prolonge d'une seule manière en une application linéaire continue

$$\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}\hat{\oplus}\widehat{S(X)}_\theta \tag{IV.11}$$

b) On suppose g inversible, g et $g^{-1} \in \mathcal{G}_{\theta'}(X)$. Alors $\{\nabla_g$ se prolonge en un homéomorphisme

$$\mathcal{B} \xrightarrow{\nabla_g} \mathcal{B} \tag{IV.12}$$

Notons que cet enoncé et sa preuve ne supposent pas que le produit de $Hb(X)$ se prolonge en une application sequentiellement continue $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, pour deux raisons. D'une part la formule de Taylor est la même que dans le cas commutatif ; de plus (III.12) est la composée de (III.11) avec l'application linéaire continue $\mathrm{Id}_\mathcal{B} \otimes g$. Le théorème 2 est suffisant pour étudier la limite pour $N \rightarrow \infty$ du membre de gauche de (II.12).

6. Théorème 3 de passage à la limite dans (II.12)

Les hypothèses et les notations étant celles du théorème 2, on suppose encore deux choses :

a) Pour le produit prolongeant continuement celui de $Hb(X), \mathcal{B}$ est une algèbre bien topologisée.

b) Pour toute forme linéaire $u = \Sigma u_j \xi_j$ sur X, $\xi u = \Sigma \xi_j u_j$ peut être exponentié dans $\mathcal{B}$.

Alors on a l'égalité suivante dans $\mathcal{B}$

$$\sum\nolimits_\beta \frac{H_\beta(\xi) u^\beta}{\beta!} = e^{\xi u}\, g(u) \tag{IV.13}$$

Cette formule donne la fonction génératrice des polynômes H_α. Le théorème suivant donne des cas NC interessants où les hypothèses a) et b) sont satisfaites et il donne aussi explicitement $\exp(\xi u)$.

7. Théorème 4

Les notations sont celles de la partie b) de la définition 5 du paragraphe 2. On munit $S(X_1 \oplus X_2)$ du produit non commutatif $F; G \rightarrow FG$ défini par le théorème 6 du paragraphe 2. Alors pour tout $\theta \geq 1$, ce produit est continu pour la topologie induite par $\mathcal{F}_\theta(X_1 \oplus X_2)$ sur $S(X_1 \oplus X_2)$. Dans ces conditions $\mathcal{B} = Hb(X_1 \oplus X_2)_\theta$ est une algèbre bien topologisée.

Le théorème 1 montre alors que l'élément $\xi v + \eta u$ de $\mathcal{B}$ peut être exponentié dans $\mathcal{B}$ pour tout (u, v) fixé dans $X_1 \oplus X_2$. De plus

$$e^{\xi v+\eta u} = e^{\xi v}\ e^{\eta u}\ e^{-u.v/2} = e^{\eta u}\ e^{\xi v}\ e^{+u.v/2} \tag{IV.14}$$

Cette théorie s'applique en particulier aux deux exemples de la section III.

On notera la différence suivante avec la théorie commutative. Dans celle ci les «états cohérents»

$$\mathcal{E}^u = \sum_\alpha \frac{H_\alpha(\xi)u^\alpha}{\alpha!}\ g^{-1}(u) \tag{III.15}$$

sont des éléments de L^2, alors qu'ici ces exponentielles sont des opérateurs linéaires.

V - FONCTIONNELLES DE SCHWINGER (OU FONCTIONNELLES GENERATRICES)

On peut aussi [HK] étendre au cas NC la théorie de l'orthogonalité des polynômes de Hermite, la théorie de la transformation unitaire de [S] et aussi la théorie du calcul différentiel et des espaces de Sobolev gaussiens de [K$_1$], [EDP∞]. Vues les techniques cylindriques on peut se ramener au cas de la dimension finie. La première étape consiste à trouver des extensions NC des mesures gaussiennes E_Q.

1. Définition

L'espace M étant hermitien, on munit $X = M \oplus \overline{M}$ de la forme alternée φ. Pour tout $\theta \geq 1$, on note $Hb(M \oplus \overline{M})_\theta$ l'algèbre involutive $Hb(M \oplus \overline{M})$ munie de la topologie induite par $\mathcal{F}_\theta(M \oplus \overline{M})$. La fonction génératrice de toute forme linéaire continue E sur $Hb(M \oplus \overline{M})_\theta$ est définie comme la fonction suivante sur $M \oplus \overline{M}$

$$\widehat{E}(\overline{u}, u') = E_{\overline{z},z}(e^{\overline{z}u'+z\overline{u}}) = e^{-\frac{u'\overline{u}}{2}}\ E(e^{\overline{z}u'}e^{z\overline{u}}) \tag{V.1}$$

On définit encore la fonction génératrice normale et la fonction génératrice anti-normale de E par

$$\widehat{E}^N(\overline{u}, u') = e^{\frac{\overline{u}.u'}{2}}\ \widehat{E}(\overline{u}, u') = E(e^{\overline{z}u'}\ e^{z\overline{u}}) \tag{V.2}$$

$$\widehat{E}^A(\overline{u}, u') = e^{-\frac{\overline{u}.u'}{2}}\ \widehat{E}(\overline{u}, u') = E(e^{z\overline{u}}\ e^{\overline{z}u'}) \tag{V.3}$$

La fonction génératrice normale $\widehat{E}^N$ de E permet de calculer tous les moments $m_{\alpha\beta}$ de E comme dans le cas commutatif, les produits $\overline{z}^\alpha z^\beta$ étant dans l'ordre normal

$$m_{\alpha\beta} = E(\overline{z}^\alpha z^\beta) \Longrightarrow \widehat{E}^N(\overline{u}, u') = \Sigma\ \frac{m_{\alpha\beta}}{\alpha!\beta!}\ u'^\alpha\ \overline{u}^\beta \tag{V.4}$$

Comme l'action de toute forme linéaire continue E sur $Hb(M \oplus \overline{M})_\theta$ ne fait pas intervenir la structure d'algèbre, on peut appliquer ici les résultats sur la transformation de Laplace des formes linéaires continues sur $\mathcal{F}_\theta(M \oplus \overline{M})$.

2. Théorème

Pour tout espace hermitien M et pour tout $\theta \geq 1$, l'application $E \longrightarrow \widehat{E}^N$ realise un isomorphisme topologique :

$$Hb\,(M \oplus \overline{M})'_\theta \longrightarrow \mathcal{G}_{\theta'}\,(M \oplus \overline{M}). \tag{V.5}$$

3. Retour à l'oscillateur harmonique

Par la transformation de Bargmann, l'état statistique de cet oscillateur peut être interprété comme un état sur l'algèbre des opérateurs continus de Fock ($\mathbb{C}$). A des constantes près cet état s'écrit avec $0 \leq c < 1$

$$B \longrightarrow G'_c(B) = Tr(\rho B),\ \text{où}\ \rho = (1-c)\sum_0^\infty\ c^\ell\ \frac{\overline{u}^\ell}{\ell!^{\frac{1}{2}}} \otimes \frac{u^\ell}{\ell!^{\frac{1}{2}}} \tag{V.6}$$

Les moments de G'_c sont donc

$$G'_c\,(\overline{z}^k z^\ell) = \delta_{k\ell}\ \frac{c^k}{(1-c)^k}\ k!. \tag{V.7}$$

Mais par ailleurs pour tout $t \geq 0$, la forme linéaire continue G_t sur $Hb(\mathbb{C} \oplus \overline{\mathbb{C}})_2$ telle que

$$\widehat{G_t}^N\,(\overline{u}, u') = e^{t\overline{u}u'} \tag{V.8}$$

a d'après (V.4) les moments suivants

$$G_t(\overline{z}^k z^\ell) = \delta_{k\ell} k! t^k \tag{V.9}$$

En comparant (V.7) et (V.9) on en déduit deux choses. D'abord si $t = \frac{c}{1-c}$, l'état statistique G'_c a pour fonction génératrice normalisée exp $t\overline{u}u'$. Ensuite la forme linéaire continue G_t sur $Hb(\mathbb{C} \oplus \overline{\mathbb{C}})_2$ dont la fonction génératrice normalisée est (V.8) est un état sur $Hb(\mathbb{C} \oplus \overline{\mathbb{C}})$ ce qui n'était pas evident a priori. Par produit tensoriel et translation de tels états on en déduit ceci

4. Définition des états quasi-libres et théorème

L'espace M étant hermitien, $X = M \oplus \overline{M}$ est muni de la forme alternée φ définie par (II.8). Pour toute forme sesquilinéaire positive $B(\overline{u}, u')$ sur M et pour toute forme linéaire ℓ sur M, la fonction suivante est clairement un élément de $\mathcal{G}_2(M \oplus \overline{M})$

$$\widehat{G}^N\,(\overline{u}, u') = e^{B(\overline{u},u') + \ell(\overline{u}) + \overline{\ell(\overline{u'})}} \tag{V.10}$$

Alors la forme linéaire continue G sur $Hb(M \oplus \overline{M})_2$ dont la fonction génératrice normalisée est (V.10) est un état sur $Hb(M \oplus \overline{M})$.

Ces états coïncident avec les états quasilibres de [BR]. La suite de la théorie utilise essentiellement les exponentielles $\mathcal{E}^u$.

References

[B] **P. Bernard**, *Méthodes mathématiques d'étude des vibrations aléatoires et analyse sur les espaces gaussiens.* Thèse de doctorat d'état à l'Université de Clermont (octobre 1990).

[BK] **P. Bernard et P. Krée**, *Pullback of measures and singular conditioning in Probabilistic Methods in Applied Physics.* Lecture Notes in Physics n°451, Springer Verlag (1995) pp.182-198.

[BR] **O. Bratelli and D. W. Robinson**, *Operators algebras and quantum statistical mechanics.* Vol. I and II, Springer Verlag, New York 1979 and 1981.

[CK] **E. Carlen and P. Krée**, *Non Commutative Geometry and Fermionic Calculus I, II, III.* Preprints (1995).

[C] **A. Connes**, *Non Commutative Geometry.* Academic Press (1995).

[D] **A. Dermoune**, *Méthodes de distributions en analyse stochastique.* Thèse à l'Université P. et M. Curie (novembre 1992).

[DKW] **A. Dermoune, P. Krée et L. Wu**, *Calcul Stochastique non adapté par rapport à la mesure aléatoire de Poisson.* Séminaire de Probabilités, XXII, LNM 1321 (1980) pp.477-484.

[EDP∞] **M. et P. Krée, B. Lascar, C. M. Marle, M. Marias, L. Nachbin Sjögren, W. Schachermayer ...**, *Travaux publiés dans le seminaire Equations aux Dérivées Partielles en Dimension Infinie.* (P. Krée ed.), publié par l'Institut H. Poincaré, quatre volumes I (1974-1975) ... à IV (1977-1978).

[HK] **E. Hutin et P. Krée**, *Non Commutative Analysis for Heisenberg Spaces.* I, Preprint (mai 1995).

[K_1] **P. Krée**, *Solutions Faibles d'Equations aux Dérivées Fonctionnelles.* Séminaire P. Lelong 1974-75. Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag I in LNM n°410, pp.142-181 et II in LNM n°474, pp.16-47.

[K_2] **P. Krée**, *La théorie des distributions en dimension quelconque et l'intégrale stochastique* in Stochastic Analysis and related topics (Korezlioglu and Ustunel ed.), Lecture Notes in Mathematics 1316, Springer Verlag (1988) pp.170-233.

[K_3] **P. Krée**, *Dimension free stochastic calculus in the distribution sense* in Stochastic Ana. Paths. Int. and Dynamics. K. Elworthy and J.C. Zambini ed. In Pitman Res. Notes in Maths. n°200, Longman ed. (1988).

[KO] **P. Krée et H. Ouerdiane**, *Holomorphy and Gaussian analysis*. Prepublication n°37 de l'Institut de Mathématiques de Jussieu (septembre 1995).

[KR] **P. Krée and R. Raczka**, *Kernels and symbols of operators in quantum field theory*. Annales de l'Institut H. Poincaré. Section A, Vol.XXVIII, n°1 (1978) pp.41-73.

[L] **B. Lascar**, *Equations aux dérivées partielles en dimension infinie*. Thèse d'état à l'Université P. et M. Curie (1977). Des resumés et des réferences des 10 articles constituant cette thèse sont donnés par B. Lascar dans LNM n°644 (1978) pp.286-313.

[M] **P. A. Meyer**, *Quantum Probability for Probabilists*. Lecture Notes in Mathematics n°1538, Springer Verlag (1993).

[O_1] **H. Ouerdiane**, *Dualité et Opérateurs de convolution dans certains espaces de fonctions entières de type exponentiel*. Abhandlungen aus der Math. Séminar Univ. Hambourg Band 54 (1983) pp.276-283.

[O_2] **H. Ouerdiane**, *Holomorphie en dimension infinie. Applications à l'analyse gaussienne et aux probabilités*. Thèse de doctorat d'état à l'Université de Tunis (octobre 1994). Certains résultats sont annoncés dans le preprint n°572 (1993) du BIBOS. Université de Bielefeld (Allemagne).

[R] **W. Rudin**, *Real and complexe analysis*. 2nd Ed. Mac Graw Hill (1974).

[S] **I. Segal**, *Tensor algebras over Hilbert spaces*. Trans. Am. Math. Soc., 81 (1956) pp.106-134.