

SUR LE MORPHISME DE BARTH

PAR JOSEPH LE POTIER ET ALEXANDER TIKHOMIROV

RÉSUMÉ. – Soit F un faisceau semi-stable de rang 2 et de classes de Chern $c_1 = 0$ et $c_2 = n$ sur le plan projectif. La courbe β_F des droites de saut de F , dans le plan projectif dual, est de degré n . Soient M_n l'espace de modules des classes d'équivalence de faisceaux semi-stables de rang 2 et classes de Chern $(0, n)$ sur le plan projectif, et C_n l'espace projectif des courbes de degré n dans le plan projectif dual. Le morphisme de Barth

$$\beta: M_n \longrightarrow C_n$$

associe à la classe du faisceau F la courbe β_F . Nous démontrons que, si $n \geq 4$, ce morphisme est génériquement injectif. L'image de β est une sous-variété fermée de dimension $4n - 3$ de C_n ; comme conséquence de notre résultat, le degré de l'image est donné par le nombre de Donaldson d'indice $4n - 3$ du plan projectif.

© 2001 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

ABSTRACT. – Let F be a rank-2 semi-stable sheaf on the projective plane, with Chern classes $c_1 = 0$, $c_2 = n$. The curve β_F of jumping lines of F , in the dual projective plane, has degree n . Let M_n be the moduli space of equivalence classes of semi-stable sheaves of rank 2 and Chern classes $(0, n)$ on the projective plane and C_n be the projective space of curves of degree n in the dual projective plane. The Barth morphism

$$\beta: M_n \longrightarrow C_n$$

associates the point β_F to the class of the sheaf F . We prove that this morphism is generically injective for $n \geq 4$. The image of β is a closed subvariety of dimension $4n - 3$ of C_n ; as a consequence of our result, the degree of this image is given by the Donaldson number of index $4n - 3$ of the projective plane.

© 2001 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

Soit n un entier ≥ 2 . Étant donné un faisceau semi-stable F de rang 2 et de classes de Chern $c_1 = 0, c_2 = n$ sur le plan projectif complexe, la cohomologie $H^q(F(i))$ est nulle pour $q = 0$ et $i \leq 0$, ou pour $q = 2$ et $i \geq -2$. Il résulte du théorème de Riemann–Roch que $\dim H^1(F(-1)) = \dim H^1(F(-2)) = n$, et $\dim H^1(F) = n - 2$. On dit qu'une droite $\ell \subset \mathbb{P}_2$ est de saut pour F si la restriction $F|_\ell$ n'est pas isomorphe au fibré trivial de rang 2 sur ℓ . Cohomologiquement ceci signifie aussi $H^1(F(-1)|_\ell) \neq 0$ de sorte que l'ensemble des droites de saut de F est le support du conoyau du morphisme canonique de faisceaux localement libres de rang n sur le plan projectif dual

$$H^1(F(-2)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(-1) \longrightarrow H^1(F(-1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}.$$

D'après le théorème de Grauert et Müllich [2], ce support est de dimension 1 : autrement dit, le déterminant du morphisme ci-dessus définit une courbe β_F de degré n dans le plan projectif dual qu'on appelle la courbe des droites de saut de F .

On désigne par M_n l'espace de modules des classes de S-équivalence (cf. §2) de faisceaux semi-stables de rang 2 et de classes de Chern $(0, n)$ sur \mathbb{P}_2 . C'est une variété projective irréductible et normale de dimension $4n - 3$, localement factorielle [5]. Les points qui représentent des faisceaux singuliers constituent une hypersurface ∂M_n . On considère d'autre part le système linéaire complet \mathcal{C}_n des courbes de degré n dans le plan projectif dual : c'est un espace projectif de dimension $\frac{1}{2}n(n+3)$. On dispose d'un morphisme $\beta : M_n \rightarrow \mathcal{C}_n$ qui associe à la classe d'équivalence d'un faisceau semi-stable F la courbe β_F de ses droites de saut : c'est le morphisme de Barth. On sait que ce morphisme est un isomorphisme pour $n = 2$, et que pour $n = 3$, c'est un morphisme de degré 3. Pour $n \geq 2$, on sait par ailleurs [13] que la restriction de β à l'ouvert des faisceaux localement libres (obligatoirement μ -stables) est quasi-finie. La courbe des droites de saut d'un faisceau singulier est obligatoirement réductible ; ainsi, le morphisme de Barth est un morphisme fini au-dessus de l'ouvert des courbes irréductibles. On sait d'autre part d'après Barth [3] que l'image de β rencontre l'ouvert des courbes lisses.

Le but principal de cet article est la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME 1.1. – *Pour $n \geq 4$, le morphisme de Barth est génériquement injectif.*

Ceci signifie qu'il existe un ouvert de Zariski non vide U de M_n tel que la restriction de β à U soit injective. On sait par ailleurs que l'image réciproque du fibré $\mathcal{O}(1)$ est le fibré déterminant \mathcal{D} de Donaldson. Les nombres de Donaldson du plan projectif sont définis par

$$q_{4n-3} = \int_{M_n} c_1(\mathcal{D})^{4n-3}$$

et sont maintenant bien connus [6,7,18]. On a par exemple

$$q_{13} = 54, \quad q_{17} = 2540, \quad q_{21} = 233208.$$

COROLLAIRE 1.2. – *L'image du morphisme de Barth est une sous-variété fermée de \mathcal{C}_n de dimension $4n - 3$ et de degré q_{4n-3} .*

La variété $\mathcal{L} = \beta(M_4)$ est donc une hypersurface irréductible de $\mathcal{C}_4 = \mathbb{P}_{14}$, de degré 54, constituée de quartiques dites de Lüroth : les courbes génériques de \mathcal{L} sont les quartiques lisses qui sont circonscrites à un pentagone complet (cf. § 5.4). De même, les courbes génériques de $\beta(M_5)$ sont les quintiques lisses circonscrites à un hexagone complet : ce sont les quintiques dites de Darboux ; la variété $\beta(M_5)$ est une sous-variété fermée de codimension 3 de $\mathcal{C}_5 = \mathbb{P}_{20}$ de degré 2540.

Le théorème¹ se démontre par récurrence sur n , à partir du cas $n = 4$, qui n'est nullement évident. Pour $n = 4$, il s'obtient en mettant en évidence un diviseur $\mathcal{D}_2 \subset M_n$ satisfaisant aux conditions suivantes, sur un ouvert non vide \mathcal{D}_2^* de \mathcal{D}_2 :

- les fibres de β qui rencontrent \mathcal{D}_2^* sont réduites à un point.
- le morphisme β est non ramifié en tout point de \mathcal{D}_2^* .

En particulier, la restriction de β à cet ouvert \mathcal{D}_2^* est injective. La construction d'un tel diviseur résulte de l'étude de l'image réciproque $\beta^{-1}(\mathcal{S}_4)$ de l'hypersurface $\mathcal{S}_4 \subset \mathcal{C}_4$ des quartiques

¹ Le théorème 1.1 est vrai en fait si le corps de base k est algébriquement clos et de caractéristique 0, ce qu'on supposera désormais.

singulières ; cette hypersurface a trois composantes irréductibles dont l'une est le bord ∂M_n et deux autres composantes irréductibles notées \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 . La composante \mathcal{D}_2 apparaît en fait avec multiplicité 2, et le bord ∂M_4 avec multiplicité 3 (cf. théorème 6.10). Les points du diviseur \mathcal{D}_2 sont les classes des faisceaux semi-stables F de rang 2, de classes de Chern $(0, 4)$ qui ont au moins une droite de saut ℓ d'ordre ≥ 2 , c'est-à-dire telle que $\dim H^1(F(-1)|_\ell) \geq 2$. Une description commode des composantes \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 s'obtient à partir de la description de M_4 comme contraction d'un espace de modules S_4 de systèmes cohérents semi-stables (Γ, Θ) où Θ est faisceau cohérent pur de dimension 1 de caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi = 6$, dont l'idéal de Fitting définit une conique c (appelée support schématique de Θ) et Γ un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $H^0(\Theta)$ (cf. théorème 4.9). Un point général de \mathcal{D}_2 provient d'un système linéaire (Γ, Θ) où Θ est un faisceau inversible de degré total 5, semi-stable sur une conique singulière c de \mathbb{P}_2 . Nous avons en fait généralisé cet énoncé au sous-schéma $P_n \subset M_n$ des faisceaux de Poncelet, dont on peut décrire une modification en introduisant l'espace de modules S_n des systèmes cohérents semi-stables (Γ, Θ) où Θ est un faisceau cohérent pur de dimension un dont le support schématique est une conique, de caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi = n + 2$, et Γ un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $H^0(\Theta)$. Les schémas S_n et P_n sont des variétés irréductibles et normales de dimension $2n + 5$ et on dispose d'un morphisme birationnel $S_n \rightarrow P_n$. Dans le cas $n = 4$, on a $P_4 = M_4$ et ce morphisme est l'éclatement de la sous-variété des faisceaux spéciaux. D'autres propriétés géométriques de S_n et P_n sont décrites dans les propositions 4.5 et 4.8.

Pour $n \geq 5$, on étudie le comportement des fibres de β au voisinage d'un point suffisamment général de $B = \beta(\partial M_n)$. Les points de ∂M_n représentent des faisceaux singuliers ; ceux qui n'ont qu'un seul point singulier s'insèrent dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow k(x) \longrightarrow 0$$

où x est le point singulier de F , $k(x)$ le faisceau structural du point x , et E le bidual de F ; ce faisceau localement libre E est stable de classes de Chern $c_1 = 0, c_2 = n - 1$. La courbe des droites de saut de F est alors $\beta_F = \beta_E + \tilde{x}$, où \tilde{x} est la droite du plan projectif dual \mathbb{P}_2^* définie par le pinceau de droites de \mathbb{P}_2 passant par x . Ainsi, un point général de B représente une courbe de degré n qui se décompose en une droite et la courbe, de degré $n - 1$, des droites de saut de E . Un résultat de Strømme permet d'affirmer qu'au-dessus d'un point général q de B , on ne trouve que des classes de faisceaux F singuliers, et ceci en un seul point ; l'hypothèse de récurrence permet de dire que le faisceau localement libre E et le point singulier sont parfaitement déterminés à isomorphisme près par la courbe q ; la fibre $\beta^{-1}(q)$ est alors isomorphe à la droite projective $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(E_x)$ ainsi associée à q . On considère alors la factorisation de Stein

$$\begin{array}{ccc} M_n & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & \tilde{\mathcal{C}}_n \\ & \searrow \beta & \downarrow \nu \\ & & \mathcal{C}_n \end{array}$$

Le morphisme $\tilde{\beta}$ est birationnel ; au-dessus d'un point général $q \in B$, la fibre de ν est réduite à un point. On est ramené à prouver qu'au-dessus d'un ouvert non vide de B , le morphisme ν est non ramifié : c'est la principale difficulté de la démonstration. Nous traduirons en fait directement sur β comment interpréter cette condition de non ramification (cf. proposition 13.1).

Les faisceaux de Poncelet, ainsi que les faisceaux de Hulsbergen, jouent un grand rôle dans l'étude présentée ici. Un faisceau semi-stable F de rang 2 et classes de Chern $(0, n)$ sur le

plan projectif est dit de Poncelet si $F(1)$ a au moins deux sections linéairement indépendantes. Comme nous l'avons déjà dit, les faisceaux de Poncelet constituent un sous-schéma fermé irréductible P_n de M_n de dimension $2n + 5$ si $n \geq 4$ (cf. proposition 4.8); pour $n = 4$, tous les faisceaux semi-stables sont de Poncelet. M. Toma a démontré dans [24] que pour $n \geq 5$ la restriction du morphisme de Barth à ce fermé P_n est encore génériquement injective². L'image de P_n est la variété des courbes dites de Poncelet de degré n ; les courbes lisses qui passent par les sommets d'un polygone à $n + 1$ côtés circonscrit à une conique lisse forment un ensemble dense dans le fermé $\beta(P_n)$ des courbes de Poncelet. Le calcul du degré de cette sous-variété fermée irréductible $\beta(P_n)$ de dimension $2n + 5$ de \mathcal{C}_n se ramène encore à un calcul de nombres d'intersection sur la variété M_n . Par exemple, pour $n = 5$, il existe un faisceau universel \mathbf{F} sur $M_5 \times \mathbb{P}_2$, et le degré de $\beta(P_5)$ est donné par

$$\int_{M_5} c_2(\mathrm{pr}_{1!}(\mathbf{F}(1))) c_1(\mathcal{D})^{15}.$$

Les faisceaux dits de Hulsbergen sont les faisceaux semi-stables F de rang 2 et de classe de Chern $(0, n)$ tels que $F(1)$ aient au moins une section non nulle. Si $n \leq 5$, c'est le cas de tous les faisceaux semi-stables; pour $n \geq 6$ ils constituent (cf. [17], théorème 4.7) un fermé irréductible H_n de M_n de dimension $3n + 2$. L'image de H_n par le morphisme de Barth β est encore un fermé irréductible de dimension $3n + 2$ qui contient comme ensemble dense les points représentant les courbes lisses de degré n passant par les sommets d'un polygone quelconque à $n + 1$ côtés; ces courbes sont appelées courbes de Darboux de degré n . Une question intéressante qui à notre connaissance n'est pas résolue est de déterminer si la restriction de β au fermé H_n est encore génériquement injective. Pour $n = 5$, on a $H_5 = M_5$ et ceci est donc vrai. Si c'était encore le cas pour $n \geq 6$, le degré du fermé des courbes de Darboux pourrait encore se calculer comme nombre d'intersection sur l'espace de modules M_n .

Voici le plan de cet article : les sections 2 et 3 sont consacrées à des rappels sur la notion de stabilité et semi-stabilité des faisceaux algébriques cohérents et des systèmes cohérents. Dans la section 4, nous étudions les faisceaux de Poncelet et les singularités des courbes de Poncelet de degré n associées à ces faisceaux de Poncelet dans la section 5 : l'énoncé obtenu étend aux systèmes cohérents considérés dont le support schématique peut être une conique singulière un résultat bien connu (cf. Maruyama [20], Trautmann [25], Vallès [27]) pour les systèmes linéaires sur les coniques lisses. Ceci permet l'étude dans la section 6 du diviseur de M_4 des faisceaux semi-stables dont la courbe des droites de saut associée est singulière. Les sections 7 et 8 sont la clé de la démonstration dans le cas $n = 4$: on associe à une quartique singulière générale q l'unique conique p qui passe par les 6 points de contact des tangentes issues du point singulier; écrire que cette conique est singulière revient à écrire que la quartique q est la courbe des droites de saut d'un fibré de Poncelet associé à un pinceau de diviseurs de degré 5 sur une conique singulière; de plus, cette conique singulière et le pinceau sont déterminés de façon unique à partir de la quartique. Cette présentation simplifie beaucoup l'esquisse que nous avons présentée dans [16]. De plus le point fondamental de la démonstration, à savoir le calcul du rang de β au point générique du diviseur \mathcal{D}_2 n'y était pas abordé. C'est l'étude des équations du fermé $\beta(\mathcal{D}_2)$ qui permet de calculer ce rang dans la section 9 : on montre qu'au-dessus d'une telle quartique de Lüroth, le morphisme de Barth est non ramifié; ceci s'obtient par un calcul de dérivée, en déformant la conique et le pinceau. Dans les sections 10 à 14 on démontre, par récurrence sur n , le théorème principal.

² Curieusement, la démonstration de M. Toma ne marche pas pour $n = 4$.

2. L'espace de modules $M_X(c)$

On rappelle ici les notions de stabilité et semi-stabilité [22]. Soit $(X, \mathcal{O}_X(1))$ une variété projective lisse polarisée de dimension n . On désigne par $K(X)$ le groupe de Grothendieck des classes de \mathcal{O}_X -modules cohérents ; il est équipé de la forme quadratique entière q définie par $q(u) = \chi(u^2)$, dont la forme polaire associée est notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si F est un faisceau algébrique cohérent sur X , on désigne par P_F le polynôme de Hilbert de F . Si Y est une section hyperplane, on désigne par h la classe de \mathcal{O}_Y , de sorte que $\langle F, h^i \rangle$ est la caractéristique d'Euler–Poincaré de la restriction de F à une intersection complète générale de i sections hyperplanes. Le polynôme de Hilbert de F est donné par la formule

$$P_F(m) = \langle F, (1 - h)^{-m} \rangle = \sum_{n \geq i \geq 0} C_{m+i-1}^i \langle F, h^i \rangle.$$

Ces définitions s'étendent aux classes de Grothendieck $c \in K(X)$. Le noyau de la forme quadratique q est constitué des classes $c \in K(X)$ dont le rang et les classes de Chern, vues dans l'anneau d'équivalence numérique sont nuls. En particulier, le polynôme de Hilbert d'une telle classe est identiquement nul. On désigne par $K_{\text{num}}(X)$ l'algèbre quotient

$$K_{\text{num}}(X) = K(X) / \ker q.$$

Sur $K_{\text{num}}(X)$ la forme quadratique a encore un sens ; de même, le polynôme de Hilbert P_c d'une classe $c \in K_{\text{num}}(X)$ a un sens. Si la variété X est une surface, et si $c \in K_{\text{num}}(X)$ a pour rang r , classe de Chern c_1 et caractéristique d'Euler–Poincaré χ , la forme quadratique et le polynôme de Hilbert sont donnés par les formules suivantes :

$$q(c) = 2r\chi + c_1^2 - r^2\chi(\mathcal{O}_X),$$

$$P_c(m) = \frac{1}{2} \langle c, h^2 \rangle m(m + 1) + \langle c, h \rangle m + \chi.$$

Quand X est le plan projectif, la classe h est la classe du faisceau structural d'une droite ; on a $K(X) = \mathbb{Z}^3$ et la forme quadratique ci-dessus est unimodulaire. Alors $K_{\text{num}}(X) = K(X)$.

DÉFINITION 2.1. – Soit F un faisceau algébrique cohérent de dimension d^3 sur X . On appelle multiplicité de F le nombre entier r défini par $r = r(F) = \langle F, h^d \rangle$.

Si le faisceau F est sans torsion, on a $r = \text{rang}(F) \cdot \text{degré}(X)$. Si F est de dimension $n - 1$, la multiplicité r est aussi le degré de la variété de Fitting de F . Une classe de Grothendieck c de $K(X)$ est dite de dimension $\leq d$ si elle appartient à l'idéal $F_d K(X)$ engendré par les classes des faisceaux cohérents de dimension $\leq d$. Si c est de dimension d , la multiplicité de c est le nombre $\langle c, h^d \rangle$. Une classe de Grothendieck $c \in K(X)$ est dite ≥ 0 si le polynôme de Hilbert

$$m \mapsto \langle c, (1 - h)^{-m} \rangle$$

est ≥ 0 ; s'il n'est pas nul, ceci signifie qu'il existe un entier $j \geq 0$ tel que $\langle c, h^i \rangle = 0$ pour $i > j$ et $\langle c, h^j \rangle > 0$. Les classes c de polynôme de Hilbert nul constituent un sous-groupe N de $K(X)$. La relation ci-dessus définit une relation d'ordre sur le groupe abélien quotient $K(X)/N$. On écrit $c \equiv 0$ si c est de polynôme de Hilbert nul.

³ La dimension d'un faisceau algébrique cohérent est la dimension de son support.

DÉFINITION 2.2. – (Pureté) Un \mathcal{O}_X -module cohérent F de dimension d est dit *pur* s’il n’a pas de sous-module cohérent non nul de dimension $< d$.

DÉFINITION 2.3. – (Semi-stabilité) Soit F un \mathcal{O}_X -module cohérent de dimension d , de multiplicité r et classe de Grothendieck c . On dit que F est *semi-stable* si

(i) il est pur de dimension d

(ii) pour tout sous-module cohérent non nul $F' \subset F$, de classe de Grothendieck c' et de multiplicité r' , on a

$$\frac{c'}{r'} \leq \frac{c}{r}.$$

On définit de même la notion de *stabilité* en demandant l’inégalité stricte lorsque F' est distinct de F .

Soit $c \in K_{\text{num}}(X)$ une classe de Grothendieck de dimension d et de multiplicité r . On considère la catégorie des faisceaux semi-stables F de dimension d , de multiplicité r tels que $rc(F) \equiv r(F)c$. C’est une catégorie abélienne, artinienne et noethérienne. Elle a donc des filtrations de Jordan–Hölder. Deux faisceaux cohérents F et G sont dits *S-équivalents* s’ils ont même classe de Grothendieck et si leurs gradués de Jordan–Hölder sont isomorphes.

THÉORÈME 2.4. – Soit $c \in K_{\text{num}}(X)$.

(i) Il existe un espace de modules grossier $M_X(c)$ pour les faisceaux semi-stables F de dimension d , de classe de Grothendieck c .

(ii) L’espace de modules $M_X(c)$ est un schéma projectif dont les points sont les classes de S-équivalence de faisceaux semi-stables.

Ce résultat, énoncé sous une forme voisine, est démontré avec cette généralité par C. Simpson [22] ; il étend l’énoncé bien connu de Gieseker et Maruyama [19].

3. Systèmes cohérents

Soit $(X, \mathcal{O}_X(1))$ une variété algébrique projective et lisse, de dimension n , polarisée.

DÉFINITION 3.1. – On appelle système cohérent de dimension d sur X un couple $\Lambda = (\Gamma, F)$ formé d’un faisceau algébrique cohérent F de dimension d sur X et d’un sous-espace vectoriel $\Gamma \subset H^0(F)$.

Un morphisme de systèmes cohérents $\Lambda = (\Gamma, F) \longrightarrow \Lambda' = (\Gamma', F')$ est la donnée d’un morphisme de faisceaux algébriques cohérents $f : F \longrightarrow F'$ tel que $f(\Gamma) \subset \Gamma'$. Les systèmes cohérents constituent une catégorie additive. On peut la plonger dans une catégorie abélienne en introduisant la notion de système algébrique [9] : un système algébrique est un triplet $\Lambda = (\Gamma, i, F)$ où F est un faisceau algébrique, Γ un espace vectoriel et $i : \Gamma \longrightarrow H^0(F)$ une application linéaire. Un morphisme de systèmes algébriques

$$\Lambda = (\Gamma, i, F) \longrightarrow \Lambda' = (\Gamma', i', F')$$

est un couple (f, g) où $f : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ est une application linéaire et $g : F \longrightarrow F'$ un morphisme de faisceaux algébriques tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{f} & \Gamma' \\ i \downarrow & & \downarrow i' \\ H^0(F) & \xrightarrow{g} & H^0(F') \end{array}$$

soit commutatif. Les systèmes algébriques constituent une catégorie abélienne qui a suffisamment d'objets injectifs. En particulier, on peut définir, étant donnés deux systèmes cohérents $\Lambda = (\Gamma, F)$ et $\Lambda' = (\Gamma', F')$ les espaces vectoriels $\text{Ext}^q(\Lambda, \Lambda')$. Ce sont des espaces vectoriels de dimension finie, et on a une suite exacte longue

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(\Lambda, \Lambda') \longrightarrow \text{Hom}(F, F') \longrightarrow \text{Hom}(\Gamma, H^0(F')/\Gamma') \longrightarrow \\ \text{Ext}^1(\Lambda, \Lambda') \longrightarrow \text{Ext}^1(F, F') \longrightarrow \text{Hom}(\Gamma, H^1(F')) \longrightarrow \dots$$

On associe à un système cohérent $\Lambda = (\Gamma, F)$ la classe de Grothendieck dans $K(X)$

$$c(\Lambda) = \dim \Gamma + c(F).$$

DÉFINITION 3.2. – Un système cohérent $\Lambda = (\Gamma, F)$ de dimension d est dit semi-stable si F est pur de dimension d et si pour tout sous-module $F' \subset F$ non nul de multiplicité r' , on a, en posant $\Gamma' = \Gamma \cap H^0(F')$ et $\Lambda' = (\Gamma', F')$

$$\frac{c(\Lambda')}{r'} \leq \frac{c(\Lambda)}{r}.$$

Ceci signifie donc que $\dim \Gamma'/r' \leq \dim \Gamma/r$ et en cas d'égalité $c(F')/r' \leq c(F)/r$.

Quand on fixe le polynôme de Hilbert de F on obtient une famille de systèmes cohérents semi-stables (Γ, F) qui est limitée. On peut évidemment définir la notion de filtration de Jordan–Hölder pour de tels systèmes cohérents : ceci tient encore au fait qu'une classe $c \in K(X)$ de dimension d et de multiplicité r étant donnée la catégorie $\mathcal{S}(c)$ des systèmes cohérents $\Lambda = (\Gamma, F)$ de multiplicité r , tels que $rc(\Lambda) \equiv r(F)c$, est une catégorie abélienne, noethérienne et artinienne. Deux systèmes cohérents de dimension d et multiplicité r sont S-équivalents s'ils ont même classe de Grothendieck et si leurs gradués de Jordan–Hölder sont isomorphes. Soient k un entier, et $c \in K_{\text{num}}(X)$; il existe alors pour les systèmes cohérents $\Lambda = (\Gamma, F)$ tels que $\dim \Gamma = k, c(F) = c$ un espace de modules grossier $\text{Syst}_X(c, k)$; c' est un schéma projectif dont les points sont les classes de S-équivalence de systèmes cohérents semi-stables [15,9].

4. Faisceaux de Poncelet

Soit n un entier ≥ 4 . On considère l'espace de modules M_n des classes de S-équivalence de faisceaux semi-stables de rang 2, de classes de Chern $(0, n)$ sur le plan projectif. C'est une variété irréductible de dimension $4n - 3$; elle est lisse si n est impair ; quand n est pair, elle est normale et localement factorielle ; son lieu singulier est de dimension $2n$ et constitué des classes d'équivalence de faisceaux strictement semi-stables. Dans cet espace de modules, les classes qui se représentent par un faisceau singulier constituent une hypersurface notée ∂M_n .

Soit F un faisceau semi-stable de rang 2 et de classes de Chern $(0, n)$. On a $H^2(F(j)) = 0$ pour $j \geq -3$. La suite des nombres de Hodge $j \mapsto \dim H^1(F(j))$ d'un tel faisceau semi-stable est strictement décroissante pour $j \geq 0$ jusqu'à ce qu'elle s'annule (cf. [10], lemme 1.1) ; pour $1 \leq j \leq n - 2$ on a donc $\dim H^1(F(j)) \leq n - 2 - j$, et pour $j \geq n - 2$ on a $H^1(F(j)) = 0$. D'après la formule de Riemann–Roch, on a en outre

$$\dim H^0(F(j)) - \dim H^1(F(j)) = \chi(j) := (j + 1)(j + 2) - n.$$

En particulier, $\dim H^0(F(1)) \leq 3$.

DÉFINITION 4.1. – Un faisceau semi-stable F de rang 2, de classes de Chern $(0, n)$ est appelé faisceau de Poncelet s’il satisfait à l’une des conditions équivalentes

$$\begin{aligned} \dim H^0(F(1)) &\geq 2, \\ \dim H^1(F(1)) &\geq n - 4. \end{aligned}$$

Les classes d’équivalence de faisceaux de Poncelet constituent un fermé de M_n sous-jacent à un sous-schéma fermé P_n défini de la manière suivante : quand n est impair, il existe un faisceau universel \mathbf{F} sur $M_n \times \mathbb{P}_2$ paramétré par M_n et le sous-schéma P_n est défini par l’idéal de Fitting d’indice $n - 5$ (cf. Lang [11] p. 483) du faisceau $R^1\text{pr}_{1*}(\mathbf{F}(1))$. Quand n est pair, il n’existe plus de faisceau universel. Si F est semi-stable de classe de Grothendieck $2 - nh^2$, le faisceau $F(\ell)$ est engendré par ses sections et $H^q(F(\ell)) = 0$ pour $q \geq 1$ et $\ell \geq n - 1$. Considérons pour $\ell \geq n - 1$ un espace vectoriel H de dimension $\chi(\ell)$, le fibré vectoriel $E = H \otimes \mathcal{O}(-\ell)$ et le schéma de Hilbert $R = \text{Hilb}(E, 2 - nh^2)$ des faisceaux cohérents quotients de E de classe de Grothendieck $2 - nh^2$. L’espace de modules M_n est le quotient de l’ouvert R^{ss} des points semi-stables par l’action du groupe réductif $SL(H)$. Il existe alors un faisceau universel \mathbf{F} paramétré par R^{ss} et le schéma P_n est le quotient de Mumford du sous-schéma fermé défini par l’idéal de Fitting d’indice $n - 5$ du faisceau $R^1\text{pr}_{1*}(\mathbf{F}(1))$.

4.1. Construction des faisceaux de Poncelet

Considérons un système cohérent semi-stable $\Lambda = (\Gamma, \Theta)$ de classe de Grothendieck $c = 2h + nh^2$ et tel que $\dim \Gamma = 2$. Le faisceau cohérent Θ est un faisceau pur de dimension 1, de classe de Grothendieck $c = 2h + nh^2$: sa multiplicité est 2 et sa caractéristique d’Euler–Poincaré est $\chi = n + 2$; le support schématique d’un tel faisceau est une conique c . Le faisceau Θ peut alors être vu comme un \mathcal{O}_c -module ; les points au voisinage desquels ce faisceau n’est pas un \mathcal{O}_c -module libre sont dits points singuliers de Θ . Un tel système cohérent définit un élément de $\text{Ext}^1(\check{\Theta}, \mathcal{O}) \otimes \Gamma^* = \text{Ext}^1(\check{\Theta}, \Gamma^* \otimes \mathcal{O})$ où le faisceau $\check{\Theta}$ est le dual, défini par

$$\check{\Theta} = \underline{\text{Ext}}^1(\Theta, \mathcal{O}) = \Theta^* \otimes_{\mathcal{O}_c} \mathcal{O}_c(2).$$

On en déduit une extension

$$(4.1) \quad 0 \longrightarrow \Gamma^* \otimes \mathcal{O} \longrightarrow F(1) \longrightarrow \check{\Theta} \longrightarrow 0.$$

DÉFINITION 4.2. – Un faisceau semi-stable de rang 2 et de classes de Chern $(0, n)$ est dit spécial si $\dim H^0(F(1)) = 3$.

THÉORÈME 4.3. – On pose $S_n = \text{Syst}(2h + nh^2, 2)$.

- (i) Le faisceau F construit ci-dessus est un faisceau de Poncelet de classes de Chern $(0, n)$.
- (ii) Le morphisme canonique

$$\pi : S_n \longrightarrow P_n$$

qui associe à la classe du système cohérent semi-stable (Γ, Θ) la classe du faisceau F est surjectif ; c’est un isomorphisme au-dessus de l’ouvert de P_n des classes de faisceaux de Poncelet non spéciaux.

On obtient ainsi un diagramme de variétés projectives

$$\begin{array}{ccc} S_n & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{C}_2 = \mathbb{P}_5 \\ \pi \downarrow & & \\ P_n & & \end{array}$$

dans lequel le morphisme π est le morphisme décrit ci-dessus ; le morphisme σ associe à un point de $\text{Syst}(2h + nh^2, 2)$ représenté par un système cohérent (Γ, Θ) la conique \mathfrak{c} définie par le support schématique de Θ . On vérifiera aux paragraphes 4.3 et 4.4 que S_n et P_n sont des schémas intègres (et même normaux) de dimension $2n + 5$. Il résulte de l'énoncé ci-dessus que le morphisme π est birationnel.

Démonstration. – D'après le corollaire 4.22 de [15], le système cohérent $(\Gamma, F(1))$ est semi-stable. Pour en déduire que F est semi-stable, la démonstration est identique à celle qui est donnée dans le lemme 6.6 de [15]. La suite exacte (4.1) montre que le faisceau F est bien un faisceau de Poncelet. Réciproquement, soient F un faisceau de Poncelet, et Γ un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $H^0(F(1))$. Alors la démonstration du lemme 6.6 de [15] montre que le système cohérent $(\Gamma, F(1))$ est semi-stable. Soit $\check{\Theta}$ le conoyau du morphisme d'évaluation $\Gamma \otimes \mathcal{O} \xrightarrow{\text{ev}} F(1)$, et $\Theta = \underline{\text{Ext}}^1(\check{\Theta}, \mathcal{O})$. Alors Θ est un faisceau pur de dimension 1, de classe de Grothendieck $2h + nh^2$ et l'inclusion canonique $\Gamma^* \hookrightarrow \text{Ext}^1(\check{\Theta}, \mathcal{O}) = H^0(\Theta)$ obtenue en appliquant le foncteur $\text{Hom}(-, \mathcal{O})$ à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Gamma \otimes \mathcal{O} \xrightarrow{\text{ev}} F(1) \longrightarrow \check{\Theta} \longrightarrow 0$$

définit un système cohérent semi-stable (Γ^*, Θ) de dimension 1 d'après le corollaire 4.22 de [15], et le faisceau de Poncelet associé est isomorphe à F . Pour obtenir un isomorphisme au-dessus de l'ouvert des faisceaux non spéciaux, il suffit de travailler en familles et d'utiliser les propriétés de modules grossiers. \square

4.2. Description des faisceaux spéciaux

On désigne par Q le fibré quotient canonique de rang 2 sur \mathbb{P}_2 .

PROPOSITION 4.4. – Soit F un faisceau semi-stable de rang 2 et de classes de Chern $(0, n)$ sur le plan projectif. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) le faisceau F est spécial ;
- (ii) $\dim H^1(F(1)) = n - 3$;
- (iii) pour tout $1 \leq i \leq n - 2$, on a $\dim H^1(F(i)) = n - 2 - i$;
- (iv) le faisceau F a une droite de saut d'ordre $n - 1$;
- (v) il existe une droite $\ell \subset \mathbb{P}_2$ et une suite exacte

$$0 \longrightarrow Q^* \longrightarrow F \longrightarrow \mathcal{O}_\ell(1 - n) \longrightarrow 0.$$

Dans ces conditions la droite de saut d'ordre $n - 1$ est unique.

Démonstration. – Les assertions (i) et (ii) sont évidemment équivalentes d'après le théorème de Riemann–Roch, et (iii) implique trivialement (ii).

Montrons que (i) \Rightarrow (iii). Soit un F un faisceau spécial ; considérons un système cohérent semi-stable (Γ, Θ) où Θ est de classe de Grothendieck $2h + nh^2$ de support une conique \mathfrak{c} et Γ de dimension 2, et tel que le faisceau semi-stable associé soit isomorphe à F . Le faisceau $\check{\Theta}$, qui a pour caractéristique d'Euler–Poincaré $\chi(\check{\Theta}) = 4 - n$ est alors instable car sinon, le faisceau structural $\mathcal{O}_\mathfrak{c}$ étant stable de caractéristique d'Euler–Poincaré 1, par semi-stabilité $H^0(\check{\Theta}) = 0$, et on aurait alors $\dim H^0(F(1)) = 2$, ce qui contredit le fait que F est spécial. Il en résulte que Θ est un faisceau instable de dimension 1. Le support de Θ est donc obligatoirement une conique \mathfrak{c} singulière ; plus précisément, la filtration de Harder–Narasimhan de Θ montre qu'il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow \Theta' \longrightarrow \Theta \longrightarrow \Theta'' \longrightarrow 0$$

où Θ' et Θ'' sont des faisceaux inversibles sur des droites ℓ' et ℓ'' , de degrés respectifs a' et a'' tels que $a' > a''$. On a bien sûr $a' + a'' = n$. Le fait que (Γ, Θ) soit semi-stable implique en outre que $a' \leq n - 1$ ou ce qui revient au même $a'' \geq 1$. Par dualité on a alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow \check{\Theta}'' \longrightarrow \check{\Theta} \longrightarrow \check{\Theta}' \longrightarrow 0.$$

Puisque $\check{\Theta}'' = \mathcal{O}_{\ell''}(-a'' + 1)$, et que $\check{\Theta}'$ est un faisceau inversible de degré $-a' + 1 < 0$, le fait que F soit spécial est équivalent à $a'' = 1$ ou encore à $a' = n - 1$. Si c'est le cas on a une surjection $F(1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\ell''}(-n + 2)$ ce qui signifie que ℓ'' est une droite de saut d'ordre $n - 1$; ceci démontre (iii).

Montrons que (iii) \Rightarrow (iv). Dire que ℓ est une droite de saut d'ordre $n - 1$ signifie que l'on a un morphisme non nul $F \longrightarrow \mathcal{O}_{\ell}(1 - n)$: ceci implique $H^1(F(n - 3)) \neq 0$. D'après le comportement de la suite $i \mapsto \dim H^1(F(i))$ décrite en préambule ceci implique que $\dim H^1(F(i)) = n - 2 - i$ pour $1 \leq i \leq n - 2$, ce qui démontre (iv).

Montrons que (i) équivaut à (v). On a vu que si (i) est vrai, il existe une droite ℓ et un morphisme surjectif $F \longrightarrow \mathcal{O}_{\ell}(1 - n)$. Le noyau K d'un tel morphisme est un faisceau sans torsion de rang 2 de classes de Chern $(-1, 1)$. Montrons qu'il est semi-stable : soit L un sous-faisceau maximal de rang 1 de K . Puisque L est aussi un sous-faisceau de F , on a $c_1(L) \leq 0$. Il s'agit de montrer en fait que $c_1(L) \leq -1$. Mais au cas où $c_1(L) = 0$, on aurait à cause de la semi-stabilité de K

$$c_2(L) \geq \frac{n}{2}$$

et d'autre part le quotient K/L serait sans torsion de rang 1 et aurait pour classe de Chern

$$\frac{1 - h + h^2}{1 + c_2(L)h^2} = 1 - h + (1 - c_2(L)h^2).$$

Ainsi $n/2 \leq c_2(L) \leq 1$ et $n \leq 2$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Ceci démontre donc qu'un tel sous-faisceau n'existe pas. Puisque Q^* est le seul faisceau semi-stable de classes de Chern $(-1, 1)$ le faisceau K est isomorphe à Q^* . Ceci démontre (v). Évidemment (v) entraîne l'existence d'une droite de saut d'ordre $n - 1$. Qu'une telle droite de saut soit unique résulte du fait que $\text{Hom}(Q^*, \mathcal{O}_{\ell}(1 - n)) = 0$ pour $n > 2$. \square

Un faisceau spécial F est obligatoirement stable; il s'écrit de manière unique comme extension

$$0 \longrightarrow Q^* \longrightarrow F \longrightarrow \mathcal{O}_{\ell}(1 - n) \longrightarrow 0$$

ils constituent une sous-variété Σ_n lisse et irréductible de dimension $2n + 2$ qui ne rencontre pas le lieu singulier de M_n .

4.3. Le schéma $S_n = \text{Syst}(2h + nh^2, 2)$

PROPOSITION 4.5. – Soit n un entier ≥ 4 .

(i) Le schéma S_n est irréductible et normal de dimensions $2n + 5$.

(ii) L'ouvert des points stables de S_n est localement intersection complète. En particulier, si n est impair, S_n est localement intersection complète.

Démonstration. – La démonstration nécessite l'introduction du schéma de Hilbert qui permet la construction de S_n , à cause de la présence de points semi-stables quand n est pair. Elle peut être simplifiée pour n impair car dans ce cas tous les points semi-stables sont stables; en outre

les faisceaux stables Θ sont obligatoirement localement libres sur leur support [14]. Si (Γ, Θ) est un système cohérent semi-stable représentant un point de S_n , Θ est engendré par ses sections et $H^1(\Theta) = 0$. On considère un espace vectoriel H de dimension $N = n + 2$. Soient $c = 2h + nh^2$, et $\text{Hilb}(H \otimes \mathcal{O}, c)$ le schéma de Hilbert des faisceaux quotient de classe de Grothendieck c . Désignons par R_n^{ss} le sous-schéma ouvert de

$$R_n := \text{Grass}(2, H) \times \text{Hilb}(H \otimes \mathcal{O}, c)$$

des couples (Γ, Θ) satisfaisant aux conditions suivantes

- (a) $H^1(\Theta) = 0$;
- (b) l'application linéaire $H \rightarrow H^0(\Theta)$ est inversible ;
- (c) le couple (Γ, Θ) définit un système cohérent semi-stable.

L'espace de modules S_n est un bon quotient de R_n^{ss} par l'action naturelle du groupe $\text{PGL}(H)$, et l'action de $\text{PGL}(H)$ est libre sur l'ouvert R_n^s des points stables. Désignons pour $(\Gamma, \Theta) \in R_n^{ss}$ par K le noyau du morphisme $H \otimes \mathcal{O} \rightarrow \Theta$. Au voisinage d'un tel point, l'espace de modules R_n est isomorphe (cf. [9]) au schéma des zéros d'un morphisme d'un germe de schéma lisse d'espace tangent de Zariski $\text{Hom}(\Gamma, H^0(\Theta)/\Gamma) \times \text{Hom}(K, \Theta)$ à valeurs dans $\text{Ext}^1(K, \Theta)$. Il résulte du lemme de Krull que toutes les composantes irréductibles sont de dimension $\geq 2n + \dim \text{Hom}(K, \Theta) - \dim \text{Ext}^1(K, \Theta) = 2n + \chi(K, \Theta) = 2n + 4 + N^2$. Considérons la projection canonique

$$\rho : R_n^{ss} \rightarrow S_n \xrightarrow{\sigma} \mathcal{C}_2 = \mathbb{P}_5.$$

Au-dessus de l'ouvert des coniques lisses, ce morphisme est lisse de dimension relative $2n + N^2 - 1$, et la fibre au-dessus d'un point est isomorphe à $\text{Grass}(2, H) \times \text{PGL}(H)$; par conséquent l'image réciproque U de cet ouvert est irréductible de dimension $2n + 4 + N^2$. On va démontrer que R_n^{ss} est un schéma irréductible localement intersection complète de dimension $2n + 4 + N^2$, donc de Cohen-Macaulay. Il suffit de vérifier que le complémentaire de cet ouvert U est de dimension $< 2n + 4 + N^2$. Ceci résulte du lemme suivant :

LEMME 4.6. – *Les fibres du morphisme $\rho : R_n^{ss} \rightarrow \mathbb{P}_5$ sont de dimension $\leq 2n + N^2 - 1$.*

En fait, cet énoncé entraînant que R_n^{ss} est localement intersection complète et donc de Cohen-Macaulay, il résulte que ces fibres sont de Cohen-Macaulay de dimension $2n + N^2 - 1$: en particulier, les fibres du morphisme ρ sont pures de dimension $2n + N^2 - 1$.

Démonstration. – Supposons d'abord que la conique c soit réduite : au-dessus de c , il n'y a alors, à isomorphisme près, qu'un nombre fini $\Theta_1, \dots, \Theta_\ell$ de faisceau Θ , satisfaisant à la propriété suivante : pour tout quotient $\Theta \rightarrow \Theta''$ de multiplicité 1, $\chi(\Theta'') \geq 1$. Chacun de ces Θ_i est engendré par ses sections et on a $H^1(\Theta_i) = 0$; de plus, le groupe des automorphismes de Θ_i est réduit à k^* , sauf si Θ_i n'est pas localement libre sur c . On a donc un morphisme canonique

$$f_i : W_i = \text{Grass}(2, H) \times \text{Isom}(H, H^0(\Theta_i)) \rightarrow R_n;$$

désignons par W_i^{ss} l'image réciproque de l'ouvert R_n^{ss} des points semi-stables. Les fibres de f_i sont les trajectoires sous l'action libre du groupe $\text{Aut}(\Theta_i)$; par suite l'adhérence de l'image de W_i^{ss} est au plus de dimension $2n + N^2 - 1$. Ces fermés recouvrent la fibre, ce qui démontre l'énoncé dans le cas où c est réduite.

Supposons maintenant que la conique c soit une droite double ℓ^2 . Le faisceau Θ est ou localement libre, auquel cas son groupe d'automorphismes est de dimension 1, ou isomorphe à une extension

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_\ell(a) \rightarrow \Theta \rightarrow \mathcal{O}_\ell(b) \rightarrow 0$$

où a et b sont des entiers tels que $a + b = n, a \geq b \geq 1$. Une telle extension peut être scindée, auquel cas le groupe des automorphismes de Θ est de dimension $a - b + 3$ ou 4 suivant que $a > b$ ou $a = b$, ou non scindée, auquel cas le groupe des automorphismes est de dimension $a - b + 2$. Les extensions non scindées sont paramétrées par l'espace projectif $P_{a,b} = \mathbb{P}(\text{Ext}^1(\mathcal{O}_\ell(b), \mathcal{O}_\ell(a)))$, de dimension $a - b + 1$ et on dispose d'une extension universelle $\Theta_{a,b}$ sur $P_{a,b} \times \mathbb{P}^2$. Considérons le schéma $W_{a,b} = \text{Grass}(2, H) \times \underline{\text{Isom}}(H, \text{pr}_{1*}(\Theta_{a,b}))$ et le morphisme canonique $f_{a,b}: W_{a,b} \rightarrow R_n$. Désignons par $W_{a,b}^{ss}$ l'image réciproque de R_n^{ss} . On a donc deux morphismes

$$\begin{array}{ccc} W_{a,b}^{ss} & \xrightarrow{f_{a,b}} & R_n^{ss} \\ \nu \downarrow & & \\ P_{a,b} & & \end{array}$$

Considérons un point $\lambda \in P_{a,b}$ auquel est associée une extension Θ_λ et la fibre $\nu^{-1}(\lambda)$. La fibre de la restriction de $f_{a,b}$ à $\nu^{-1}(\lambda)$ est la trajectoire par l'action du groupe $\text{Aut}(\Theta_\lambda)$; cette action étant libre, on voit que le fermé $f_{a,b}(\nu^{-1}(\lambda))$ est de dimension $\leq 2n - a + b - 2 + N^2$. Par suite $\dim f_{a,b}(W_{a,b}) \leq 2n + N^2 - 1$. Les extensions scindées se traitent comme ci-dessus, et leur contribution fournit des fermés de dimension $< 2n + N^2 - 1$. Comme tous ces fermés recouvrent la fibre de ρ au-dessus du point défini par la conique c , ceci achève la démonstration du lemme 4.6.

Pour voir que R_n^{ss} est une variété normale, il reste d'après le critère de Serre à s'assurer que son ensemble singulier est de codimension ≥ 2 .

LEMME 4.7. – (i) Si $n = 4$ le schéma R_n^{ss} est une variété lisse.

(ii) Si $n > 4$, le fermé des points singuliers de R_n^{ss} est de codimension ≥ 3 .

Démonstration. – Il suffit d'après la description locale de vérifier que le fermé de R_n^{ss} des points $\Lambda = (\Gamma, \Theta)$ tels que $\text{Ext}^2(\Theta, \Theta) \neq 0$ est vide si $n = 4$ ou de codimension ≥ 3 si $n > 5$. On a évidemment $\text{Ext}^2(\Theta, \Theta) = 0$ si Θ est localement libre, ou si le support de Θ est dégénéré en deux droites distinctes. Si Θ est porté par une droite double ℓ^2 , et non localement libre, il s'écrit comme extension

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_\ell(a) \rightarrow \Theta \rightarrow \mathcal{O}_\ell(b) \rightarrow 0$$

avec $a \geq b - 1$, et alors $\text{Ext}^2(\Theta, \Theta) \simeq \text{Ext}^2(\mathcal{O}_\ell(a), \mathcal{O}_\ell(b))$ et par suite

$$\dim \text{Ext}^2(\Theta, \Theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } a - b \leq 2, \\ a - b - 2 & \text{si } a \geq b + 3. \end{cases}$$

Puisque $a \leq n - 1$ et $a + b = n$, ce fermé est vide dans le cas $n = 4$; dans le cas $n \geq 5$, l'énoncé résulte du lemme 4.6. \square

Il en résulte que R_n^{ss} et par suite S_n est une variété normale; puisque sur l'ouvert des points stables l'action de $\text{PGL}(H)$ est libre, on voit que S_n est un schéma irréductible et normal de dimension $2n + 5$. Ceci démontre l'assertion (i). Pour démontrer (ii), il suffit de remarquer qu'au voisinage d'un point stable $\Lambda = (\Gamma, \Theta)$ de S_n le schéma S_n est localement isomorphe (cf. Min He, [9]) au schéma des zéros d'un morphisme défini sur un germe de schéma lisse d'espace tangent de Zariski $\text{Ext}^1(\Lambda, \Lambda)$ et à valeurs dans $\text{Ext}^2(\Lambda, \Lambda)$. Or $\sum_i (-1)^i \dim \text{Ext}^i(\Lambda, \Lambda) = -4 - 2n$ et puisque Λ est stable, $\dim \text{Hom}(\Lambda, \Lambda) = 1$. Donc

$$\dim \text{Ext}^1(\Lambda, \Lambda) - \dim \text{Ext}^2(\Lambda, \Lambda) = 2n + 5.$$

Par suite, S_n est localement intersection complète au voisinage de Λ . Ceci achève la démonstration de la proposition 4.5.

4.4. Le schéma P_n des faisceaux de Poncelet

PROPOSITION 4.8. –

- (i) *Le schéma P_n est irréductible et normal de dimension $2n + 5$.*
- (ii) *L'ouvert des points stables de P_n est de Cohen–Macaulay.*

Démonstration. – Il résulte de l'énoncé ci-dessus que P_n est irréductible de dimension $2n + 5$. Soit ℓ un entier $\geq n - 1$, et K un espace vectoriel de dimension $\chi(\ell)$. Le schéma P_n est obtenu par passage au quotient sous le groupe réductif $SL(K)$ d'un sous-schéma déterminantiel P'_n d'un ouvert lisse \mathcal{H}^{ss} de $\mathcal{H} = \text{Hilb}(E, 2 - nh^2)$, où $E = K \otimes \mathcal{O}(-\ell)$. Soit \mathbf{F} le faisceau universel sur \mathcal{H}^{ss} . Il existe des fibrés vectoriels A et B sur \mathcal{H}^{ss} de rangs respectifs a et $b = a + n - 6$ et un morphisme de fibrés vectoriels dont le noyau est $\text{pr}_{1*}(\mathbf{F}(1))$ et le conoyau $R^1\text{pr}_{1*}(\mathbf{F}(1))$. Le schéma P'_n est défini par l'idéal des mineurs $a - 1 \times a - 1$ de ce morphisme ; il est de dimension $2n + 4 + \chi(\ell)^2$. Considérons en effet le morphisme canonique $R_n^{ss} \rightarrow M_n$ qui associe au couple (Γ, Θ) la classe du faisceau F défini par l'extension

$$0 \rightarrow \Gamma^* \otimes \mathcal{O} \rightarrow F(1) \rightarrow \tilde{\Theta} \rightarrow 0.$$

Cette construction définit en fait une famille \mathbf{F}' de faisceaux F paramétrée par R_n^{ss} de sorte que si on introduit le fibré des repères de $R' = \text{Isom}(K \otimes \mathcal{O}_{R_n^{ss}}, \text{pr}_{1*}(\mathbf{F}'))$ on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} R' & \xrightarrow{q} & R_n^{ss} \\ p \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}^{ss} & \xrightarrow{r} & M_n \end{array}$$

Il résulte du théorème précédent que R' est un schéma de Cohen–Macaulay irréductible et normal de dimension $2n + 4 + N^2 + \chi(\ell)^2$. Les morphismes verticaux sont $GL(H)$ -équivalents ; le morphisme p a pour image P'_n . Au-dessus de l'ouvert $U' \subset \mathcal{H}^{ss}$ des faisceaux quotients non spéciaux le morphisme p est un fibré principal de groupe structural $GL(H)$ et de base le sous-schéma $P'_n \cap U'$. Donc $\dim P'_n = 2n + 4 + \chi(\ell)^2$ est irréductible de codimension $2(n - 4)$. Localement c'est l'image réciproque par un morphisme de schémas lisses d'un sous-schéma de Cohen–Macaulay ; puisqu'il est de la bonne dimension, il est donc de Cohen–Macaulay. L'ensemble singulier de R' est de codimension ≥ 3 et invariant par $GL(H)$, et la trace dans U' de son image est l'ensemble singulier de $P'_n \cap U'$. Donc cet ensemble singulier est de codimension ≥ 3 . Il en résulte que P'_n est une variété normale d'après le critère de Serre. Sur l'ouvert des points stables de P'_n , qui est non vide, l'action de $\text{PGL}(K)$ est libre ; le quotient P_n est donc une variété irréductible et normale de dimension $2n + 5$. Ceci démontre (i).

Soit $x \in P_n$ un point stable, et \mathcal{O}_x l'anneau local de M_n en x . Au-dessus de $\text{Spec}(\hat{\mathcal{O}}_x) \times \mathbb{P}_2$, il existe une famille universelle, ce qui dispense de se placer sur le schéma de Hilbert. Le même argument que ci-dessus montre alors que le complété de l'anneau local de P_n en x est de Cohen–Macaulay. Puisque profondeur et dimension sont conservées par passage au complété, on voit que P_n est lui-même de Cohen–Macaulay en x . D'où (ii). \square

Considérons le morphisme $\pi : S_n \rightarrow P_n$. L'image réciproque du sous-schéma Σ_n des faisceaux spéciaux est un diviseur de Weil ; il correspond aux systèmes cohérents (Γ, Θ) stables

tels que le faisceau Θ sous-jacent soit extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\ell'}(n-1) \longrightarrow \Theta \longrightarrow \mathcal{O}_{\ell''}(1) \longrightarrow 0$$

où ℓ' et ℓ'' sont deux droites de \mathbb{P}_2 . Un tel système cohérent est stable ; on obtient ainsi un fermé de S_n défini par les systèmes cohérents satisfaisant à la condition déterminantielle $H^1(\Theta(-3)) \neq 0$. C'est un diviseur de Weil ; nous ignorons si ce diviseur est un diviseur de Cartier si $n \geq 5$. C'est vrai pour $n = 4$. Dans ce cas, on a $P_4 = M_4$, le sous-schéma Σ_4 est une sous-variété lisse de codimension 3 qui évite les points singuliers de M_4 ; le résultat suivant est démontré dans [15] :

THÉORÈME 4.9. – *Le morphisme $\pi : S_4 \longrightarrow M_4$ est l'éclaté de M_4 le long de Σ_4 .*

Les seuls points singuliers de S_4 sont les points strictement semi-stables. Ceci ne reste pas vrai pour S_n , pour $n \geq 5$.

5. Courbe des droites de saut

Soient (Γ, Θ) un système cohérent semi-stable de classe de Grothendieck $c = 2h + nh^2$ et tel que $\dim \Gamma = 2$, et F le faisceau de Poncelet de classes de Chern $(0, n)$ associé dans la correspondance décrite au §4.1 ci-dessus. La courbe β_F des droites de saut de F , dite courbe de Poncelet, peut en fait se décrire directement en termes de systèmes cohérents ; on introduit pour ceci le diagramme standard associé à la variété d'incidence des couples (droites, points) :

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\text{pr}_2} & \mathbb{P}_2 \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \\ \mathbb{P}_2^* & & \end{array}$$

La courbe des droites de saut $q = \beta_F$ de F est définie par l'idéal de Fitting du faisceau pur de dimension un sur le plan projectif dual $R^1 \text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^*(F(-1)))$.

5.1. Le faisceau $\mathcal{G} = \text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^*(\Theta))$

LEMME 5.1. – (i) *Sur le plan projectif dual, l'image directe $R^1 \text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^*(\Theta))$ est nulle, et le faisceau $\mathcal{G} = \text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^*(\Theta))$ est un faisceau algébrique cohérent sans torsion de rang 2, de classes de Chern $(n, \frac{1}{2}n(n+1))$.*

(ii) *Ce faisceau est non singulier en tout point $\check{\ell}$ définissant une droite ℓ non contenue dans le support de Θ .*

(iii) *Soit $\check{\ell}$ un point de \mathbb{P}_2^* , définissant une droite ℓ de \mathbb{P}_2 . Le morphisme canonique*

$$\mathcal{G}_{\check{\ell}} \otimes_{\mathcal{O}_{\check{\ell}}} k \longrightarrow H^0(\Theta|_{\ell})$$

est un isomorphisme ; de plus, on a un isomorphisme canonique

$$\text{Tor}_1(\mathcal{G}_{\check{\ell}}, k) \simeq H^0(\underline{\text{Tor}}_1(\Theta, \mathcal{O}_{\ell})).$$

Démonstration. – De la condition de semi-stabilité de (Γ, Θ) , on déduit $H^1(\Theta(i)) = 0$ pour $i \geq -2$, ce qui exprime le fait que le faisceau Θ n'est pas trop instable. Le faisceau Θ étant pur, il

en est de même de son image réciproque sur $\mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2$; ceci implique la condition de transversalité $\text{Tor}_i^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2}}(\mathcal{O}_D, \Theta) = 0$ pour $i > 0$. De la résolution de \mathcal{O}_D sur $\mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2$

$$(5.1) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1, -1) \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow 0$$

et du fait que $H^1(\Theta(-1)) = H^1(\Theta) = 0$ on déduit que $R^1 \text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^*(\Theta)) = 0$; de plus, on a la présentation de l'image directe $\mathcal{G} = \text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^*(\Theta))$

$$(5.2) \quad 0 \longrightarrow K \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(-1) \xrightarrow{\alpha} H \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

où $K = H^0(\Theta(-1))$ et $H = H^0(\Theta)$; d'après la formule de Riemann–Roch, ces espaces vectoriels sont de dimensions respectives n et $n + 2$. Il en résulte que le faisceau \mathcal{G} est un faisceau de rang 2 et de profondeur ≥ 1 en tout point ℓ , et de classes de Chern $(n, \frac{1}{2}n(n + 1))$. Les assertions (ii) et (iii) sont évidentes si le support de Θ est lisse, car alors $\text{pr}_2^*(\Theta)$ est fini et plat sur \mathbb{P}_2^* et elles résultent du théorème de changement de base. Ce n'est plus le cas si le faisceau Θ a son support singulier ; pour obtenir le fait que \mathcal{G} est sans torsion, il suffit d'après le critère de Serre de remarquer que l'ensemble singulier de \mathcal{G} est fini. Par dévissage, il suffit en fait de vérifier le lemme suivant, qui est beaucoup plus précis, et conduit en même temps à l'assertion (iii) :

LEMME 5.2. – Soit ℓ une droite de \mathbb{P}_2 , et i un entier ≥ 0 . Désignons par $\check{\ell}$ le point de \mathbb{P}_2^* défini par ℓ , et par $Q = Q_{\mathbb{P}_2^*}$ le fibré quotient universel de rang 2 sur le plan projectif dual ; soit t une section de Q dont le schéma des zéros est le point $\check{\ell}$.

(i) L'isomorphisme canonique $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1)) \simeq H^0(Q_{\mathbb{P}_2^*})$ induit un isomorphisme de faisceaux

$$\text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^*(\mathcal{O}_\ell(i))) \simeq \mathfrak{m}_{\check{\ell}}^i(i).$$

(ii) Le diagramme associé à cet isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathcal{O}(i)) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{O}_\ell(i)) \\ \wr \downarrow & & \wr \downarrow \\ H^0(S^i Q) & \xrightarrow{t^i} & H^0(\mathfrak{m}_{\check{\ell}}^i(i)) \end{array}$$

dans lequel la seconde flèche horizontale est définie par le morphisme $Q \longrightarrow \mathcal{O}(1) = \wedge^2 Q$ associé à t est commutatif.

(iii) On a $R^1 \text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^*(\mathcal{O}_\ell(i))) = 0$.

Démonstration. – On a $S^i Q = \text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^*(\mathcal{O}(i)))$. Supposons choisies des coordonnées (x, y, t) dans $V^* = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1))$ de sorte que l'équation de ℓ soit $t = 0$. La résolution standard de \mathcal{O}_ℓ conduit immédiatement à l'assertion (iii), et fournit en outre, par application du foncteur $\text{pr}_{1*} \text{pr}_2^*$, une résolution

$$0 \longrightarrow S^{i-1} Q \xrightarrow{\tau} S^i Q \longrightarrow \text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^*(\mathcal{O}_\ell(i))) \longrightarrow 0,$$

où le morphisme τ est la multiplication par t , considérée comme section de $V^* = H^0(Q)$. On a un morphisme $S^i Q \longrightarrow \mathfrak{m}_{\check{\ell}}^i(i)$, qui s'annule sur l'image de τ ; il induit donc un morphisme

$$\text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^*(\mathcal{O}_\ell(i))) \longrightarrow \mathfrak{m}_{\check{\ell}}^i(i)$$

qui est évidemment un isomorphisme en dehors du point $\check{\ell}$. Le premier membre est un faisceau sans torsion ; par suite, ce morphisme est donc injectif. Les deux membres ayant les mêmes classes de Chern, c'est un isomorphisme. Ceci démontre l'assertion (i). Quant à l'assertion (ii), il suffit de constater que le diagramme de faisceaux sur \mathbb{P}_2^*

$$\begin{array}{ccc} \text{pr}_{1*}\text{Pr}_2^*(\mathcal{O}(i)) & \longrightarrow & \text{pr}_{1*}\text{Pr}_2^*(\mathcal{O}_\ell(i)) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ S^i Q & \xrightarrow{t^i} & \mathfrak{m}_\ell^i(i) \end{array}$$

est commutatif. Ceci résulte trivialement de la construction de l'isomorphisme de droite. \square

Fin de la démonstration du lemme 5.1. – Le lemme 5.2 ci-dessus entraîne bien sûr l'assertion (ii) du lemme 5.1. Pour vérifier l'assertion (iii), on utilise l'isomorphisme donné dans la catégorie dérivée des espaces vectoriels par la formule de changement de base

$$R\text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^*(\Theta)) \otimes_{\mathcal{O}_\ell}^L k \simeq R\text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^*(\Theta) \otimes^L \mathcal{O}_\ell).$$

Compte tenu du fait que la projection pr_2 est un morphisme plat, le second membre est aussi $R\text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^*(\Theta) \otimes^L \mathcal{O}_\ell)$. La cohomologie du premier membre est l'aboutissement d'une suite spectrale

$$'E_2^{p,q} = \text{Tor}_{-p}^{\mathcal{O}_\ell}(R^q\text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^*(\Theta)), k).$$

L'assertion (iii) est évidente si le support de Θ est lisse. Si ce support est une conique singulière, le fait que le système cohérent (Γ, Θ) soit semi-stable implique qu'il existe une suite exacte $0 \rightarrow \Theta' \rightarrow \Theta \rightarrow \Theta'' \rightarrow 0$ où Θ' et Θ'' sont des faisceaux inversibles de degrés positifs sur des droites ℓ' et ℓ'' de \mathbb{P}_2 . Il résulte du lemme 5.2 ci-dessus que $'E_2^{p,q}$ est nul sauf si $q = 0$ et $p = 0$ ou -1 . Considérons la deuxième suite spectrale, de même aboutissement,

$$''E_2^{p,q} = R^p\text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^*(\underline{\text{Tor}}_{-q}(\Theta, \mathcal{O}_\ell))).$$

Du fait que $\underline{\text{Tor}}_1(\mathcal{O}_\ell, \mathcal{O}_\ell) = \mathcal{O}_\ell(-1)$ on déduit encore du lemme 5.2 que $''E_2^{p,q} = 0$ sauf si $p = 0$ et $q = 0$ ou $q = -1$. Ceci conduit au résultat attendu. \square

5.2. Description de la courbe $q = \beta_F$

Considérons le morphisme canonique sur le plan projectif dual

$$\varphi : \Gamma \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*} \longrightarrow \text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^*(\Theta)) = \mathcal{G}.$$

PROPOSITION 5.3. – *Le morphisme φ est génériquement injectif, et son conoyau a même idéal de Fitting que le faisceau $R^1\text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^*(F(-1)))$.*

Démonstration. – Le noyau de l'homomorphisme canonique

$$\Gamma \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2} \longrightarrow \Theta$$

est isomorphe à $F^*(-1)$, et son conoyau à $\underline{\text{Ext}}^1(F, \mathcal{O}(-1))$. En considérant une droite générique, on est ramené pour vérifier la première assertion, à constater que $H^0(F^*(-1)|_\ell) = 0$,

ou ce qui revient au même par dualité que $H^1(F(-1)|_\ell) = 0$. Il suffit de prendre pour ℓ une droite qui n'est pas de saut pour F . Considérons maintenant les projections pr_i figurant dans le diagramme standard. Les faisceaux $R^1\text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^*(F(-1)))$ et $\underline{\text{Ext}}_{\text{pr}_1}^1(\text{pr}_2^*(F), \mathcal{O}_D(0, -1))$ sont deux faisceaux cohérents de dimension 1 sur \mathbb{P}_2^* de même idéal de Fitting (cf. [10], lemme 3.4) : ceci peut se voir par exemple en utilisant une présentation de F comme faisceau de cohomologie d'une monade, d'où on déduit en fait un isomorphisme

$$(5.3) \quad \underline{\text{Ext}}_{\text{pr}_1}^1(\text{pr}_2^*(F), \mathcal{O}_D(0, -1)) \simeq \underline{\text{Ext}}^1(R^1\text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^*(F(-1))), \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(-1)).$$

Soit $\check{\Theta} = \underline{\text{Ext}}^1(\Theta, \mathcal{O})$. En appliquant le foncteur $\underline{\text{Hom}}_{\text{pr}_1}(\text{pr}_2^*(-), \mathcal{O}_D)$ à la suite exacte

$$(5.4) \quad 0 \longrightarrow \Gamma^* \otimes \mathcal{O} \longrightarrow F(1) \longrightarrow \check{\Theta} \longrightarrow 0$$

on obtient la suite exacte sur \mathbb{P}_2^*

$$0 \longrightarrow \Gamma \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*} \xrightarrow{v} \underline{\text{Ext}}_{\text{pr}_1}^1(\text{pr}_2^*(\check{\Theta}), \mathcal{O}_D) \longrightarrow \underline{\text{Ext}}_{\text{pr}_1}^1(\text{pr}_2^*(F(1)), \mathcal{O}_D) \longrightarrow 0.$$

En considérant la résolution (5.1) de la variété d'incidence D , on obtient exactement pour le faisceau $\underline{\text{Ext}}_{\text{pr}_1}^1(\text{pr}_2^*(\check{\Theta}), \mathcal{O}_D)$, la présentation (5.2), ce qui montre qu'il est isomorphe à \mathcal{G} , le morphisme v s'identifiant au morphisme induit par le morphisme d'évaluation, c'est-à-dire à φ . \square

COROLLAIRE 5.4. – *La courbe des droites de saut de F est donnée par l'idéal de Fitting du conoyau du morphisme $\varphi : \Gamma \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*} \longrightarrow \mathcal{G}$.*

Il résulte de l'isomorphisme (5.3) que le conoyau de φ est pur de dimension 1, et que son support schématisé est une courbe qui coïncide avec la courbe $\mathfrak{q} = \beta_F$ des droites de saut de F . Il résulte du lemme 5.1 qu'une droite ℓ définit un point de β_F si et seulement si l'application linéaire $\varphi_\ell : s \mapsto s|_\ell$

$$\Gamma \longrightarrow H^0(\Theta|_\ell)$$

n'est pas inversible.

COROLLAIRE 5.5. – *Si le support de Θ est une conique singulière \mathfrak{c} , la courbe $\mathfrak{q} = \beta_F$ contient les points de \mathbb{P}_2^* correspondant aux droites ℓ contenues dans la conique et telles que $\chi(\Theta|_\ell) \geq 3$.*

COROLLAIRE 5.6. – *Si le support de Θ est une conique singulière \mathfrak{c} , une droite ℓ contenue dans la conique et telle que $\chi(\Theta|_\ell) \geq 4$ définit un point singulier $\check{\ell}$ de la courbe $\mathfrak{q} = \beta_F$.*

5.3. Étude des points singuliers

Il est fondamental pour la suite de pouvoir décider qu'une droite de saut ℓ de F définit ou non un point singulier de la courbe de Poncelet associée. C'est facile lorsque F provient d'un système linéaire $\Lambda = (\Gamma, \Theta)$ de $\text{Syst}(2h + nh^2, 2)$ sans point de base sur une conique \mathfrak{c} éventuellement singulière. Commençons par étendre cette notion aux systèmes cohérents (Γ, Θ) tels que Θ ne soit plus obligatoirement localement libre sur son support.

DÉFINITION 5.7. – On dit que le système cohérent (Γ, Θ) est sans point de base si le morphisme d'évaluation $\text{ev} : \Gamma \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2} \longrightarrow \Theta$ est surjectif.

Si le système cohérent (Γ, Θ) est sans point de base, le faisceau F associé est localement libre. Si le système cohérent (Γ, Θ) est stable et a un point de base a , on peut trouver un sous-faisceau $\Theta' \subset \Theta$ de multiplicité 2, de caractéristique d'Euler–Poincaré $\chi(\Theta') = n - 1$ tel que $\Gamma \subset H^0(\Theta')$. Le système cohérent (Γ, Θ') est encore semi-stable, et définit une courbe q' de degré $n - 1$. Il résulte du corollaire 5.4 que la courbe $q = \beta_F$ est décomposée en la courbe q' et une droite

$$q = q' + \check{a}$$

où \check{a} est la droite du plan projectif dual définie par le point a . En particulier, la courbe q est singulière. C'est aussi le cas si on part d'un système cohérent (Γ, Θ) strictement semi-stable : ceci impose que n est pair, et la courbe q est alors l'union de deux courbes de degré $m = n/2$, chacune d'elles étant l'union de m droites concourantes. L'énoncé suivant généralise l'énoncé bien connu pour les courbes de Poncelet associées à des systèmes linéaires sur des courbes lisses (Maruyama [20], Trautmann [24], Vallès [26]). Il est important pour la suite d'examiner les points singuliers des courbes de Poncelet associées à des systèmes cohérents semi-stables dont le support schématique est une conique singulière.

PROPOSITION 5.8. – *Soient $z \in H^0(\mathcal{O}(1))$ non nul et ℓ la droite d'équation $z = 0$. On suppose que*

- (i) *la droite ℓ n'est pas associée à Θ ;*
- (ii) *le système cohérent (Γ, Θ) est semi-stable et sans point de base.*

La droite ℓ définit un point singulier $\check{\ell}$ de la courbe q des droites de saut $q = \beta_F$ si et seulement si

$$z^2 H^0(\Theta(-2)) \cap \Gamma \neq 0.$$

Démonstration. – Puisque la droite ℓ n'est pas associée à Θ , le morphisme de multiplication par z

$$\Theta(-1) \xrightarrow{z} \Theta$$

est injectif, et il en est de même du morphisme induit sur les espaces de sections globales. On a alors $\dim H^0(\Theta|_\ell) = 2$ et ℓ est un point non singulier pour \mathcal{G} . Considérons la filtration décroissante $\Gamma_i = \Gamma \cap z^i H^0(\Theta(-i))$. Puisque (Γ, Θ) est sans point de base, on a $\dim z H^0(\Theta(-1)) \cap \Gamma \leq 1$. Si cette intersection est nulle, le morphisme de restriction $\varphi_\ell : \Gamma \rightarrow H^0(\Theta|_\ell)$ est injectif et donc c'est un isomorphisme. Donc ℓ n'appartient pas à la courbe q des droites de saut.

Supposons $z H^0(\Theta(-1)) \cap \Gamma \neq 0$. Alors ℓ définit un point de q . Il existe une section non nulle $s \in \Gamma$ de la forme $s = zt$, où t est une section de $\Theta(-1)$. L'espace tangent de Zariski à q en $\check{\ell}$ est le noyau de l'application linéaire tangente de Petri $d_{\check{\ell}}\varphi$ de φ au point $\check{\ell}$

$$T_{\check{\ell}}(\mathbb{P}_2^*) = H^0(\mathcal{O}_\ell(1)) \rightarrow \text{Hom}(\ker \varphi_\ell, \text{coker } \varphi_\ell).$$

Le noyau de φ_ℓ est le sous-espace vectoriel engendré par $s = tz$; l'application linéaire tangente de Petri $d_{\check{\ell}}\varphi$ est définie pour $\tau \in H^0(\mathcal{O}_\ell(1))$ par

$$d_{\check{\ell}}\varphi(\tau)(s) = p(\tau t|_\ell)$$

où p est la projection canonique $H^0(\Theta|_\ell) \rightarrow \text{coker } \varphi_\ell$.

Supposons $z^2 H^0(\Theta(-2)) \cap \Gamma \neq 0$. Il s'agit de vérifier que $\check{\ell}$ est un point singulier de q . La section s est alors divisible par z^2 , et t est divisible par z . Cette différentielle est alors nulle ; et

par conséquent le point $\tilde{\ell}$ est un point singulier de $q = \beta_F$. Réciproquement, si cette différentielle est nulle, $\tau t|_\ell$ appartient à l'image de φ_ℓ pour tout τ . Nous allons en déduire que $t|_\ell$ est nulle.

Soit c le support de Θ . Remarquons tout d'abord que le morphisme de restriction

$$H^0(\mathcal{O}_\ell(1)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{c \cap \ell}(1))$$

est un isomorphisme. Si ℓ ne rencontre aucun des points singuliers de Θ , l'espace vectoriel des sections $H^0(\Theta|_\ell)$ est un module libre de rang 1 sur l'algèbre $H^0(\mathcal{O}_{c \cap \ell})$. L'image de φ_ℓ est un sous-espace vectoriel de dimension 1, qui, d'après l'hypothèse (ii) n'est contenu dans aucun des sous-modules K_x de $H^0(\Theta|_\ell)$ des éléments s'annulant en un point x de $c \cap \ell$. Le stabilisateur de l'image de φ_ℓ dans le groupe des éléments inversibles $H^0(\mathcal{O}_{c \cap \ell})^*$ est réduit au sous-groupe k^* des homothéties. Donc, son orbite n'est pas réduite à un point. Il en résulte que $t|_\ell = 0$ et par suite la section s appartient à $\Gamma \cap z^2 H^0(\Theta(-2))$. Si ℓ rencontre un point singulier a de Θ , le module $\Theta|_\ell$ est de longueur 2, de support le point a et non isomorphe à $\mathcal{O}_{c \cap \ell}$. Donc $\Theta|_\ell$ est isomorphe à $k(a) \oplus k(a)$. Le morphisme de restriction $H^0(\Theta|_\ell) \longrightarrow \Theta \otimes k(a)$ est alors un isomorphisme. Puisque (Γ, Θ) est sans point de base, l'application linéaire $\varphi_\ell : \Gamma \longrightarrow H^0(\Theta|_\ell)$ est un isomorphisme et donc ℓ n'est pas de saut. \square

5.4. Exemple

On voit en particulier que si le support de Θ est une conique lisse c , le faisceau Θ est un faisceau inversible de degré $n + 1$ sur c ; si Γ contient une section qui a $n + 1$ zéros distincts, la courbe de saut $q = \beta_F$ passe par les $n(n + 1)/2$ sommets du polygone de \mathbb{P}_2^* à $n + 1$ côtés déterminé par ces $n + 1$ points. Ce polygone est circonscrit à la conique duale de c . De plus, l'interprétation ci-dessus permet d'étudier les singularités de la courbe β_F : ceci entraîne que si (Γ, Θ) est un système linéaire de degré $n + 1$ sans point de base sur une conique lisse, et si Γ ne contient pas de sections ayant 2 zéros doubles, la courbe $q = \beta_F$ est lisse (cf. Maruyama [20], Trautmann [25], Vallès [27]).

Réciproquement, étant donné un polygone à $n + 1$ côtés dans le plan projectif dual, circonscrit à une conique lisse c^* , ce polygone définit $n + 1$ points distincts sur une conique lisse c de \mathbb{P}_2 ; ces points sont les zéros d'une section s d'un fibré inversible Θ de degré $n + 1$ sur c . Les systèmes linéaires $\Gamma \subset H^0(\Theta)$ qui contiennent la section s constituent dans la grassmannienne $\text{Grass}(2, H^0(\Theta))$ des sous-espaces de dimension 2 de $H^0(\Theta)$ un espace projectif de dimension n ; d'après le corollaire 5.4, en restriction à cet espace projectif, le morphisme β est une homographie; cette homographie identifie cet espace projectif avec l'espace projectif des courbes de degré n passant par les sommets du pentagone donné (cf. Barth [3], Lemma 2). Par suite, toute courbe q de \mathbb{P}_2^* passant par les $n(n + 1)/2$ sommets d'un tel polygone définit un point de l'image de β . Une telle courbe q quand elle est lisse, est appelée classiquement une courbe de Poncelet associée à la conique c^* .

6. Faisceaux dont la courbe des droites de saut est singulière

On se limite dans les sections 6–9 au cas $n = 4$: la généralisation aux faisceaux de Poncelet de classe de Chern quelconque n'est pas évidente; nous ignorons par exemple si S_n est localement factorielle. Dans le cas $n = 4$, on a vu que l'espace de modules $S_4 = \text{Syst}(2h + 4h^2, 2)$ s'identifie à l'éclaté de M_4 le long d'une sous-variété lisse Σ_4 de codimension 3 qui évite les points singuliers. Tout comme M_4 c'est une variété irréductible, normale, localement factorielle. L'image \mathcal{L} du morphisme de Barth $\beta : M_4 \longrightarrow \mathcal{C}_4$ est une hypersurface dont les points

représentent les courbes de Poncelet de degré 4. Ces quartiques sont appelées quartiques de Lüroth ; l’hypersurface \mathcal{L} sera appelée hypersurface de Lüroth.

On pose dans la suite $c = 2h + 4h^2$. On note $\gamma = \beta \circ \pi : S_4 \rightarrow \mathcal{C}_4$ le morphisme qui associe à un système cohérent la courbe des droites de saut.

6.1. Le groupe de Picard de $S_4 = \text{Syst}(c, 2)$

On sait décrire le groupe de Picard de M_4 ; c’est un groupe abélien libre à 2 générateurs ([5,22]). Il résulte du théorème 2.4 que le groupe de Picard de S_4 est un groupe abélien libre à 3 générateurs. Le diviseur exceptionnel ϵ est exactement le diviseur des systèmes cohérents $\Lambda = (\Gamma, \Theta)$ tels que Θ soit instable. On se propose dans ce paragraphe de décrire une base explicite de $\text{Pic}(S_4)$.

On considère le groupe abélien libre $\tilde{K}(\mathbb{P}_2) = K(\mathbb{P}_2) \oplus \mathbb{Z}$, muni de la forme quadratique unimodulaire $(u, m) \mapsto \chi(u^2) + m^2$. Considérons une famille $\Lambda = (\Gamma, \Theta)$ de systèmes cohérents de S_4 paramétrée par une variété algébrique lisse S : ceci signifie que Θ est une famille S -plate de faisceaux cohérents de classe de Grothendieck c et que Γ est un sous-faisceau localement libre de $\text{pr}_{1*}(\Theta)$ induisant au-dessus de chaque point un système cohérent. On considère le morphisme de groupes abéliens

$$\lambda_\Lambda : \tilde{K}(\mathbb{P}_2) \rightarrow \text{Pic}(S)$$

défini par $(u, m) \mapsto \det \text{pr}_{1!}(\Theta.u) \otimes (\det \Gamma)^{\otimes m}$, où $\Theta.u$ désigne par abus le produit des classes $\Theta.\text{pr}_2^*(u)$ dans $K(S \times \mathbb{P}_2)$. Ce produit a un sens car Θ a une résolution localement libre de longueur 1. Pour tout faisceau inversible A sur S , considérons la famille $\Lambda \otimes \text{pr}_1^*(A) = (\Gamma \otimes \text{pr}_1^*(A), \text{pr}_1^*(A) \otimes \Theta)$. Il est alors clair que

$$\lambda_{\Lambda \otimes \text{pr}_1^*(A)}(u, m) = \lambda_\Lambda(u, m) \otimes A^{(c,u)+2m}.$$

Comme on l’a déjà vu, l’espace de modules S_4 se construit en quotientant un ouvert convenable \mathcal{G} d’une grassmannienne relative au-dessus d’un schéma Quot par l’action d’un groupe réductif. Cet ouvert paramètre une famille universelle de systèmes cohérents et par application du critère de descente de Kempf on peut alors construire un homomorphisme de groupes [16]

$$\lambda_{S_4} : (c, 2)^\perp \rightarrow \text{Pic}(S_4)$$

caractérisé par la propriété universelle suivante : pour toute famille $\Lambda = (\Gamma, \Theta)$ paramétrée par S , on a

$$\lambda_\Lambda(u, m) = f_\Lambda^*(\lambda_{S_4}(u, m))$$

où $f_\Lambda : S \rightarrow S_4$ est le morphisme modulaire associé à la famille.

PROPOSITION 6.1. – *Le morphisme canonique*

$$\lambda_{S_4} : (c, 2)^\perp \rightarrow \text{Pic}(S_4)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. – D’après le théorème 4.9, le groupe de Picard de l’espace de modules S_4 est évidemment somme directe du groupe de Picard de M_4 et du groupe engendré par le fibré inversible ϵ engendré par le diviseur exceptionnel. L’énoncé sera donc une conséquence de la description du groupe de Picard de M_4 et l’interprétation du diviseur exceptionnel. Considérons

une famille $\Lambda = (\Gamma, \Theta)$ de systèmes cohérents semi-stables paramétrée par S et la famille F de faisceaux semi-stables de classe de Grothendieck $2 - 4h^2$ associée, définie par l'extension canonique sur $S \times \mathbb{P}_2$

$$0 \longrightarrow \Gamma^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2} \longrightarrow F(1) \longrightarrow \check{\Theta} \longrightarrow 0$$

où $\check{\Theta} = \underline{\text{Ext}}^1(\Theta, \mathcal{O})$.

LEMME 6.2. – Soit ϵ le fibré inversible associé au diviseur exceptionnel. Dans $\text{Pic}(S_4)$, on a

$$\epsilon = -\lambda_{S_4}((1 - h)^3, 0).$$

Démonstration. – Le support du diviseur exceptionnel est le fermé des systèmes cohérents semi-stables (Γ, Θ) tels que Θ soit instable. Un tel faisceau a pour support une conique singulière et la filtration de Harder–Narasimhan de Θ s'écrit

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\ell'}(3) \longrightarrow \Theta \longrightarrow \mathcal{O}_{\ell''}(1) \longrightarrow 0$$

où ℓ' et ℓ'' sont deux droites de \mathbb{P}_2 . Donnons une description schématique de ce diviseur exceptionnel. On peut trouver une famille Λ paramétrée par une variété lisse et connexe S , telle que le morphisme modulaire f_Λ soit surjectif et telle que le morphisme

$$f_\Lambda^* : \text{Pic}(S_4) \longrightarrow \text{Pic}(S)$$

soit injectif. L'image réciproque dans S du diviseur exceptionnel est alors défini par l'idéal de Fitting du faisceau $R^1 \text{pr}_{1*}(\Theta(-3))$. Ce faisceau cohérent est de dimension homologique 1 et l'image directe $\text{pr}_{1*}(\Theta(-3))$ est nulle. En effet, soit $C \longrightarrow S$ le support schématique de Θ : c'est une conique relative, et $\Theta(-3)$ est un \mathcal{O}_C -module qu'on écrit comme conoyau d'un morphisme $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow \Theta(-3) \longrightarrow 0$ où $B = \mathcal{O}_C(-m)^N$ est un faisceau localement libre sur C suffisamment négatif. Alors par image directe on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{pr}_{1*}(\Theta(-3)) \longrightarrow R^1 \text{pr}_{1*}(A) \longrightarrow R^1 \text{pr}_{1*}(B) \longrightarrow R^1 \text{pr}_{1*}(\Theta(-3)) \longrightarrow 0.$$

Les faisceaux $R^1 \text{pr}_{1*}(A)$ et $R^1 \text{pr}_{1*}(B)$ sont localement libres. Ceci prouve que l'image directe $\text{pr}_{1*}(\Theta(-3))$ est sans torsion ; comme ce faisceau est génériquement nul, il est identiquement nul. Ceci entraîne que le sous-schéma défini par l'idéal de Fitting de $R^1 \text{pr}_{1*}(\Theta(-3))$ est le schéma des zéros d'une section non identiquement nulle du fibré inversible $-\det \text{pr}_{11}(\Theta(-3)) = -\lambda_\Lambda((1 - h)^3, 0)$. L'énoncé en résulte. \square

Posons pour tout $u \in K(\mathbb{P}_2)$, $\check{u} = u^* \otimes \omega_{\mathbb{P}_2}$, où $u \mapsto u^*$ désigne l'homomorphisme de conjugaison, qui envoie la classe d'un faisceau localement libre sur son dual⁴. Considérons l'homomorphisme $\lambda_\Theta : K(\mathbb{P}_2) \longrightarrow \text{Pic}(S)$ associé à la famille Θ (cf. [16], paragraphe 2.1), défini par $\lambda_\Theta(v) = \det \text{pr}_{11}(\Theta.u)$. On a par dualité de Serre pour tout $v \in K(\mathbb{P}_2)$

$$\text{pr}_{11}(\check{\Theta}(v)) = -\text{pr}_{11}(\Theta(\check{v}))^*$$

par suite $\lambda_{\check{\Theta}}(v) = \lambda_\Theta(\check{v})$. Considérons d'autre part l'homomorphisme $\lambda_F : K(\mathbb{P}_2) \longrightarrow \text{Pic}(S)$ associé à la famille F , défini par $\lambda_F(u) = \det \text{pr}_{11}(F(u))$ (cf. [16], paragraphe 2.1). On a

$$\lambda_F(u) = (\det \Gamma)^{\otimes -\chi(u(-1))} \otimes \lambda_\Theta(u^*(-2)) = \lambda_\Lambda(u^*(-2), -\chi(u(-1))).$$

⁴ Cette conjugaison est un automorphisme d'algèbre qui envoie h sur $h^* = -h - h^2$.

On est amené à introduire l’homomorphisme de groupes abéliens $K(\mathbb{P}_2) \longrightarrow \tilde{K}(\mathbb{P}_2)$ défini par $\xi : u \mapsto (u^*(-2), -\chi(u(-1)))$.

LEMME 6.3. – (i) On a $\langle \xi(u), (c, 2) \rangle = -\langle u, 2 - 4h^2 \rangle$.

(ii) L’image de ξ est le sous-groupe de $\tilde{K}(\mathbb{P}_2)$ des couples (v, m) tels que $\chi(v) + m = 0$.

Démonstration. – C’est un calcul facile, reposant sur la dualité de Serre, le fait que dans $K(\mathbb{P}_2)$ on ait $[\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-1)] = 1 - h$, et la définition de ξ . \square

Il en résulte que l’image par ξ de $(2 - 4h^2)^\perp$ est contenue dans $(c, 2)^\perp$. D’après le théorème 4.9, on a un scindage

$$\text{Pic}(S_4) = \text{Pic}(M_4) \oplus \mathbb{Z}\epsilon$$

où ϵ est la classe du diviseur exceptionnel. On a alors le diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & (2 - 4h^2)^\perp & \longrightarrow & (c, 2)^\perp & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & \lambda_{M_4} \downarrow & & \lambda_{S_4} \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Pic}(M_4) & \longrightarrow & \text{Pic}(S_4) & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où λ_{M_4} l’homomorphisme défini dans [16] et ρ est induit par l’homomorphisme $(v, m) \mapsto \chi(v) + m$. Cet homomorphisme est surjectif, par exemple parce que $(h^2, 0)$ appartient à $(c, 2)^\perp$. Il est en fait plus habile de remarquer que $((1 - h)^3, 0)$ appartient aussi à $(c, 2)^\perp$ et que l’on a $\chi((1 - h)^3) = 1$: ainsi, $((1 - h)^3, 0)$ réalise un scindage de la première suite exacte. La première flèche verticale est un isomorphisme d’après le théorème de Drézet. D’après le lemme 6.2, l’image de $((1 - h)^3, 0)$ par λ_{S_4} est $-\epsilon$. Par suite l’homomorphisme $\lambda_{S_4} : (c, 2)^\perp \longrightarrow \text{Pic}(S_4)$ est un isomorphisme. Ceci achève la démonstration de la proposition 6.1. \square

L’orthogonal $(1 - 2h^2)^\perp$ dans $K(\mathbb{P}_2)$ est engendré par $[\mathcal{O}_\ell(-1)] = h - h^2$ et $[\mathcal{O}(1)] - h^2 = (1 - h)^{-1} - h^2 = 1 + h$. Remarquons que

$$\xi(h - h^2) = (-h, 1); \quad \xi(1 + h) = ([\mathcal{O}(-3)] - h^2, 0).$$

DÉFINITION 6.4. – On pose

$$\begin{aligned} \mathfrak{d} &= \lambda_{M_4}(-h + h^2) = \lambda_{S_4}(h, -1), \\ \mathfrak{k} &= \lambda_{S_4}(h^2, 0). \end{aligned}$$

Le fibré inversible \mathfrak{d} ainsi défini à isomorphisme près est l’image réciproque du fibré déterminant de Donaldson \mathcal{D} sur M_4 .

COROLLAIRE 6.5. – (i) Le groupe de Picard $\text{Pic}(S_4)$ est un groupe abélien libre de rang 3, de base $\mathfrak{d}, \mathfrak{k}, \epsilon$.

(ii) L’image du groupe de Picard de M_4 est égale au sous-groupe de $\text{Pic}(S_4)$ engendré par les fibrés déterminant \mathfrak{d} et $\alpha = -\lambda_{M_4}(1 + h) = \mathfrak{k} + \epsilon$.

La classe \mathfrak{k} a une interprétation géométrique remarquable :

PROPOSITION 6.6. – Considérons le morphisme canonique $\sigma : S_4 \longrightarrow \mathcal{C}_2 = \mathbb{P}_5$. La classe \mathfrak{k} est l’image réciproque de la classe de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_5}(1)$ par σ .

Démonstration. – On utilise la famille universelle $\Lambda = (\Gamma, \Theta)$ de systèmes cohérents introduite dans la démonstration du lemme 6.2. Alors une résolution localement libre

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow \Theta \longrightarrow 0$$

fournit une section du fibré inversible sur $S \times \mathbb{P}_2$ défini par

$$\det B \otimes (\det A)^{-1} = \lambda_\Lambda(h^2, 0) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(2).$$

Cette section peut être vue comme un morphisme surjectif de fibrés sur S

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(2))^* \otimes \mathcal{O}_S \longrightarrow \lambda_\Lambda(h^2, 0).$$

On en déduit par la propriété universelle de l'espace projectif un morphisme $\tau : S \longrightarrow \mathbb{P}_5$ tel que $\tau^*(\mathcal{O}(1)) = \lambda_\Lambda(h^2, 0)$. Ce morphisme se factorise à travers σ suivant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f_\Lambda} & S_4 \\ & \searrow \tau & \downarrow \sigma \\ & & \mathbb{P}_5 \end{array}$$

Puisque d'après le choix de la famille universelle le morphisme induit par f_Λ sur les groupes de Picard est injectif, il en résulte que $\sigma^*(\mathcal{O}(1)) = \mathfrak{k}$.

6.2. Quatre diviseurs de S_4

Outre le diviseur exceptionnel ϵ de S_4 on va décrire trois autres diviseurs de S_4 .

Le bord ∂S_4 . Le bord ∂S_4 de S_4 est constitué des systèmes cohérents à point de base. On obtient ainsi un diviseur irréductible de S_4 qui n'est autre que l'image réciproque du bord ∂M_4 .

Le diviseur D_1 . On considère le sous-ensemble localement fermé des classes de systèmes cohérents stables (Γ, Θ) tels que le support c de Θ soit lisse, et tels qu'il existe une section s de Γ ayant deux zéros doubles. Autrement dit, il existe une droite ℓ d'équation $z = 0$ telle que $\Gamma \cap z^2 H^0(\Theta(-2)) \neq 0$. On désigne par D_1 son adhérence : c'est donc un diviseur de S_4 . D'après la proposition 5.8, la quartique de Lüroth associée à un point de ce diviseur est singulière au point de \mathbb{P}_2^* correspondant à la droite ℓ . Une telle quartique est appelée quartique de Lüroth singulière de type I.

Le diviseur D_2 . Considérons dans S_4 l'image réciproque du diviseur Δ des coniques singulières par le morphisme $\sigma : S_4 \longrightarrow \mathbb{P}_5$.

LEMME 6.7. – *Le diviseur $\sigma^{-1}(\Delta)$ est réduit.*

Démonstration. – En effet, il résulte de la suite exacte longue décrite dans la section 3 que le morphisme σ est une submersion sur l'ouvert U des systèmes cohérents $\Lambda = (\Gamma, \Theta)$ stables et tels que le faisceau Θ soit non singulier : dans cet ouvert, l'image réciproque de Δ est lisse car la conique associée en un point de ce diviseur est obligatoirement réduite, et donc Δ est lisse au point défini par cette conique. Il résulte du calcul effectué dans la démonstration du lemme 4.6 que le complémentaire de U dans S_4 est de codimension ≥ 2 ; ceci entraîne que $\sigma^{-1}(\Delta)$ est réduit. \square

Ce diviseur a deux composantes irréductibles : le diviseur exceptionnel ϵ , qui ne rencontre pas le fermé des points strictement semi-stables. L'autre composante D_2 est constituée de

l'adhérence de l'ensemble des classes d'isomorphisme de systèmes cohérents stables $\Lambda = (\Gamma, \Theta)$ tels que le support schématisé de Θ soit une conique singulière, et que Θ soit semi-stable : la description de ce fermé D_2 sera détaillée dans la section 8 ; nous verrons notamment qu'il est bien irréductible.

PROPOSITION 6.8. – *Dans le groupe de Picard $\text{Pic}(S_4)$ on a, en notation additive,*

$$\partial S_4 = 5\delta - 2\mathfrak{k} - 2\epsilon,$$

$$D_1 = 12\delta \bmod \epsilon,$$

$$D_2 = 3\mathfrak{k} - \epsilon.$$

La première assertion résulte de la formule qui donne le bord dans le groupe de Picard de M_4 (cf. par exemple Le Potier [17]) et du fait que ce bord ne contient pas la sous-variété Σ_4 des diviseurs spéciaux. La dernière égalité résulte de la définition du diviseur D_2 . La seconde assertion est plus difficile et résulte essentiellement de la formule de Porteous. Comme elle n'est pas indispensable pour la démonstration du théorème principal, nous n'aborderons pas ce calcul ici. Elle ne sera utilisée que dans le corollaire 9.4.

6.3. Le diviseur $\beta^{-1}(S_4)$

On désigne par \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 les images des diviseurs D_1 et D_2 de S_4 par le morphisme $\pi : S_4 \rightarrow M_4$. Puisque ces diviseurs D_1 et D_2 ne sont pas contenus dans le diviseur exceptionnel, \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont des diviseurs de M_4 . Le diviseur \mathcal{D}_2 a l'interprétation suivante, en termes de droites de saut :

LEMME 6.9. – *Le diviseur \mathcal{D}_2 de M_4 est le diviseur représentant les faisceaux semi-stables qui ont au moins une droite de saut d'ordre ≥ 2 .*

Ce lemme résulte de la description d'un point général de D_2 et sa démonstration est reportée à la fin de la section 8.

THÉORÈME 6.10. – *Soit $\beta : M_4 \rightarrow \mathcal{C}_4$ le morphisme de Barth. L'image réciproque du diviseur S_4 des quartiques singulières de \mathcal{C}_4 est le diviseur*

$$(6.1) \quad \beta^{-1}(S_4) = \mathcal{D}_1 + 2\mathcal{D}_2 + 3\partial M_4.$$

Démonstration. – Soit $\gamma = \beta \circ \pi : S_4 \rightarrow \mathcal{C}_4$ le morphisme de Barth. Il revient au même de vérifier que

$$(6.2) \quad \gamma^{-1}(S_4) = D_1 + 2D_2 + 3\partial S_4 \bmod \epsilon.$$

D'après la proposition 5.8, on a $\gamma(D_1) \subset S_4$ et le corollaire 5.6 permet de voir que $\gamma(D_2) \subset S_4$ (voir aussi section 8). L'image du bord ∂S_4 est contenu dans le fermé des quartiques réductibles, et l'image du diviseur exceptionnel est constitué de quartiques ayant au moins un point triple puisque c'est l'image par β de la variété Σ des faisceaux spéciaux. L'image d'un système cohérent qui n'appartient pas à l'un de ces diviseurs est une quartique lisse d'après la proposition 5.8. On a donc ensemblistement

$$\gamma^{-1}(S_4) = D_1 \cup D_2 \cup \partial S_4 \cup \epsilon.$$

D'après la proposition 6.8, dans le groupe de Picard $\text{Pic}(S_4)$ on a $D_1 = 12\delta \bmod \epsilon$, $D_2 = 3\mathfrak{k} \bmod \epsilon$ et $\partial S_4 = 5\delta - 2\mathfrak{k} \bmod \epsilon$. Compte tenu du fait que l'hypersurface S_4 est de degré 27, on a $\gamma^{-1}(S_4) = 27\delta$, d'où il résulte la formule attendue. \square

La formule (6.1) répond en partie à une question qui nous a été posée il y a une dizaine d'années par C. Peskine. Elle montre que β est transverse à S_4 sur un ouvert de \mathcal{D}_1 : pour obtenir le théorème 1.1 il suffirait donc de prouver que $\beta|_{\mathcal{D}_1}$ est génériquement injective. Nous ne savons malheureusement pas traiter cette question. Par contre, l'étude de $\beta|_{\mathcal{D}_2}$ est plus facile ; la formule ci-dessus dit que β n'est pas transverse à S_4 sur un ouvert \mathcal{D}_2 , ce qui complique la démonstration du théorème 1.1 dans le cas $n = 4$.

7. Géométrie des quartiques singulières

On pose $V = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1))^*$ de sorte que le plan projectif considéré est l'espace des droites vectorielles de V . On désigne par $\mathcal{C}_n = \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(n)))$ le système linéaire des courbes planes de degré n , et par $\mathcal{S}_n \subset \mathcal{C}_n$ l'hypersurface des courbes singulières. Si q est une courbe de degré n , représentée par un polynôme homogène $f \in S^n V^*$ la courbe polaire $q'(a)$ d'un point $a \in \mathbb{P}_2$ est la courbe de degré $n - 1$ définie par $x \mapsto \partial_x f \cdot a'$, où $\partial_x f$ désigne la différentielle de f au point x et a' est un vecteur non nul de V représentant le point a . Cette courbe polaire recoupe la courbe q aux points de contact x des tangentes à q issues de a . On s'intéresse ici aux quartiques singulières.

7.1. Conique associée à une quartique singulière

On se propose de montrer que dans le cas d'une quartique singulière suffisamment générale, les points de contact des tangentes issues du point singulier appartiennent à une conique p bien déterminée.

PROPOSITION 7.1. – Soit q une quartique plane singulière en un seul point double O , et q' la cubique polaire de O . On considère le nombre d'intersection $(q, q')_O$.

(i) On a $(q, q')_O \geq 6$, l'égalité n'ayant lieu que si q' intègre.

(ii) Si $(q, q')_O = 6$ l'intersection $q \cap q'$ est la réunion d'un sous-schéma de longueur 6 concentré en O , contenu dans le cône tangent en O à q et d'un sous-schéma de longueur 6 contenu dans une conique p ne passant pas par O .

Démonstration. – L'hypothèse assure que la quartique q est intègre, et donc le nombre d'intersection $(q, q')_O$ a un sens. On peut supposer que le point singulier O est l'origine dans le plan affine A défini par le complémentaire de la droite Δ d'équation $t = 0$, où $t \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1))$, qu'on prend pour droite de l'infini. On désigne par m_O l'idéal du point O . La quartique q est le schéma des zéros d'une section $f \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(4))$ s'écrivant

$$(7.1) \quad f = t^2 f_2 + t f_3 + f_4$$

où $f_i \in H^0(m_O^i(i)) \simeq H^0(\mathcal{O}_\Delta(i))$ est un polynôme homogène de degré i , de sorte que la cubique q' polaire de O est le schéma des zéros de la forme cubique

$$(7.2) \quad g = 2t f_2 + f_3.$$

Il résulte des formules (7.1) et (7.2) ci-dessus que q' et q ont même cône C à l'origine, défini par la forme quadratique f_2 . Le nombre d'intersection à l'origine $(q, q')_O$ est donné par

$$(q, q')_O = (t f_3 + 2f_4, 2t f_2 + f_3)_O.$$

Il en résulte que $(q, q')_O \geq 6$ avec égalité si et seulement si les formes binaires f_2 et f_3 n'ont pas de zéro commun sur Δ . Il revient au même de demander que le cône C et la cubique q' n'ont pas de composante commune, ou encore que la cubique q' est intègre, ce qui démontre (i).

Supposons que $(q, q')_O = 6$. Sur la droite de l'infini Δ les formes binaires f_2 et f_3 n'ont pas de zéro en commun. Le complexe de Koszul associé à (f_3, f_2) montre qu'il existe une forme linéaire ϕ et une forme quadratique ψ uniques telles que $f_4 = \phi f_3 + \psi f_2$. On a alors

$$(7.3) \quad f = (t^2 + \psi) f_2 + (t + \phi) f_3 = (t + \phi) g - (t^2 + 2t\phi - \psi) f_2.$$

La conique \mathfrak{p} d'équation $t^2 + 2t\phi - \psi = 0$ ne passe pas par l'origine. Le cycle intersection de la quartique q et de la cubique q' est donné par

$$(q, q') = (g, f_2)_O O + \sum_m (q', \mathfrak{p})_m m$$

ce qui démontre l'assertion (ii).

7.2. Le morphisme $q \mapsto (q', \mathfrak{p})$

On désigne par S_4 l'hypersurface de C_4 des quartiques singulières, et par S_4^* l'ouvert de S_4 des courbes singulières q ayant au plus un point singulier ordinaire O , satisfaisant à la condition $(q, q')_O = 6$, autrement dit telles que la polaire q' soit intègre.

On désigne de même par S_3 l'hypersurface de C_3 des cubiques singulières, et par S_3^* l'ouvert de S_3 des cubiques qui ont exactement un point double ordinaire.

On dispose d'un morphisme $S_4^* \rightarrow \mathbb{P}_2$ qui associe à la quartique q son unique point singulier O . Considérons en effet l'hypersurface S_4 des quartiques singulières. C'est l'image de la sous-variété \tilde{S}_4 lisse de codimension 3 de $C_4 \times \mathbb{P}_2$ des couples $(q, m) \in C_4 \times \mathbb{P}_2$ tels que $j_m f = 0$, où f désigne l'équation de q , et $j_m f$ le jet d'ordre un de f au point m , par la projection $(q, m) \mapsto q$. Cette projection a alors une section au-dessus de l'ouvert S_4^* . La composée de cette section avec la projection $\tilde{S}_4 \rightarrow \mathbb{P}_2$ fournit le morphisme annoncé. La même remarque vaut pour l'ouvert des cubiques intègres à point double ordinaire : on dispose d'un morphisme $S_3^* \rightarrow \mathbb{P}_2$.

PROPOSITION 7.2. – *Le morphisme*

$$S_4^* \rightarrow S_3^* \times C_2$$

qui associe à q le couple (q', \mathfrak{p}) est un isomorphisme sur un ouvert U de la variété des couples formés d'une cubique irréductible singulière en un point double ordinaire O et d'une conique ne passant pas par O .

Démonstration. – Les deux membres sont des ouverts de fibrés localement triviaux en espaces projectifs de dimension 11 au-dessus de \mathbb{P}_2 , et le morphisme ci-dessus est compatible avec cette projection, de sorte qu'on peut fixer le point singulier O , et choisir la droite de l'infini d'équation $t = 0$ ne passant pas par O . Toute cubique q' n'ayant qu'un point double ordinaire est le schéma des zéros d'une section de la forme $g = 2t f_2 + f_3$ où $f_i \in H^0(\mathfrak{m}_O^i(i)) = H^0(O_\Delta(i))$, et où f_2 est une forme quadratique non dégénérée. Toute conique \mathfrak{p} du plan ne passant pas par l'origine O a pour équation

$$t^2 + 2\phi t - \psi = 0$$

où $\phi \in H^0(\mathfrak{m}_O(1))$ et $\psi \in H^0(\mathfrak{m}_O^2(2))$, de sorte que le morphisme inverse est donné par $(q', \mathfrak{p}) \mapsto q$ où la quartique q a pour équation $f = 0$, où $f = t^2 f_2 + t f_3 + f_4$, et où f_4 se calcule par la formule

$$f_4 = \psi f_2 + \phi f_3.$$

En général, si ϕ et ψ sont quelconques, la quartique q ainsi construite peut être singulière en l'un des points d'intersection de q' et p , par exemple si $f_4 = 0$. Pour être sûr que O est le seul point singulier, il faut écrire que q est lisse en ces points, ce qui est une condition ouverte. \square

7.3. Calcul de la dérivée du morphisme $q \mapsto p$

Soient t une forme linéaire sur V , fixée une fois pour toutes, considérée comme équation de la droite de l'infini Δ , et ξ un vecteur tel que $\langle t, \xi \rangle = 1$. Le plan projectif contient le plan affine $A \subset V$ défini par l'équation $\langle t, x \rangle = 1$. On étudie les quartiques singulières au voisinage d'un point $O \in A$ fixé.

Tout vecteur de V s'écrit $x = \xi t + u$ avec $u \in W = \ker t$, de sorte que l'équation f de q s'écrit

$$f(\xi t + u) = \sum_i t^{4-i} f_i(\xi)(u)$$

où $i!f_i(\xi) = \partial_\xi^i f$ est la différentielle i -ième de f en ξ ; c' est un polynôme homogène de degré i sur W et $\xi \mapsto f_i(\xi)$ est homogène de degré $4 - i$ en ξ . Dire que q est singulière en ξ signifie que $f_0(\xi) = f_1(\xi) = 0$. La conique p associée a un sens si $f_2(\xi)$ et $f_3(\xi)$ n'ont pas de zéro en commun et a pour équation

$$t^2 + 2t\phi - \psi = 0$$

où la forme linéaire ϕ sur W et la forme quadratique ψ sur W sont définis par la condition de Koszul dans $H^0(\mathcal{O}_\Delta(4))$

(7.4)
$$f_3(\xi)\phi + f_2(\xi)\psi = f_4(\xi).$$

Soit O un point fixé dans le plan affine A . Pour tout $g \in H^0(\mathcal{O}(4))$, on écrit comme pour f

$$g(\xi t + u) = \sum_i t^{4-i} g_i(\xi)(u) \text{ mod } f.$$

L'espace vectoriel tangent à \tilde{S}_4 au point (q, O) est donné par les couples $(g, \xi) \in H^0(\mathcal{O}_q(4)) \times W$ tels que

$$\begin{aligned} g(O) &= 0, \\ g_1(O) + \partial_O f_1 \cdot \xi &= 0. \end{aligned}$$

Remarquons que du fait que $f_1(z) = \partial_z f$, $\partial_O f_1$ est aussi le Hessien $H_O f = 2f_2(O)$ vu comme application linéaire $W \rightarrow W^*$. Par dérivation de 7.4 au point (q, O) , on obtient

$$f_3(O)\dot{\phi} + f_2(O)\dot{\psi} + [g_3(O) + \partial_O f_3 \cdot \xi]\phi + [g_2(O) + \partial_O f_2 \cdot \xi]\psi = g_4(O)$$

ce qui détermine $\dot{\phi}$ et $\dot{\psi}$ en fonction de g et ξ . Si on identifie $H^0(\mathcal{O}_\Delta(i)) = S^i W^*$ avec son image dans $\text{Hom}(W, S^{i-1} W^*)$ on peut écrire $\partial_O f_i \cdot \xi = \frac{1}{i!} \partial_O^{i+1} f(\xi) = (i+1)f_{i+1}(O)(\xi)$. La quartique q a en O un point double ordinaire; désignons par $H_O f = 2f_2(O)$ le Hessien de f en O , vu comme application linéaire inversible $W \rightarrow W^*$. Les équations

$$\begin{aligned} H_O f(\xi) &= -g_1(O), \\ f_3(O)\dot{\phi} + f_2(O)\dot{\psi} &= g_4(O) - [g_3(O) + 4f_4(O) \cdot \xi]\phi - [g_2(O) + 3f_3(O) \cdot \xi]\psi \end{aligned}$$

permettent de calculer $(\xi, \dot{\phi}, \dot{\psi})$ et donc l'image du vecteur tangent g dans $H^0(\mathcal{O}_p(2))$.

7.4. Le diviseur \mathcal{L}_2^* de \mathcal{S}_4^*

On s'intéresse au diviseur noté \mathcal{L}_2^* de l'ouvert \mathcal{S}_4^* des quartiques singulières telles que la conique associée \mathfrak{p} soit singulière. Le cône tangent C au point singulier O d'une quartique $\mathfrak{q} \in \mathcal{S}_4^*$ coupe la quartique suivant deux points triples et l'on a d'après la formule (7.3)

$$(C, \mathfrak{q}) - (C, \mathfrak{q}')_O = (t + \phi, f_2);$$

l'intersection résiduelle est donc portée par la droite d'équation $t + \phi = 0$, polaire de O par rapport à la conique \mathfrak{p} associée à O .

PROPOSITION 7.3. – *Soit \mathfrak{q} une quartique de \mathcal{S}_4^* . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La droite définie par l'intersection résiduelle $(C, \mathfrak{q}) - (C, \mathfrak{q})_O$ est tangente à la quartique \mathfrak{q} .*

(ii) *La conique \mathfrak{p} associée à \mathfrak{q} est singulière.*

Si ces conditions sont satisfaites, la conique \mathfrak{p} a un seul point singulier qui est exactement le point de tangence de la droite portée par l'intersection résiduelle ci-dessus.

Démonstration. – On utilise la formule (7.3). On a vu ci-dessus

$$(f, t + \phi) = (t + \phi, \phi^2 + \psi) + (t + \phi, f_2).$$

L'intersection résiduelle $(t + \phi, \phi^2 + \psi)$ est l'intersection du cône quadratique issu de O défini par $\phi^2 + \psi \in H^0(\mathfrak{m}_O^2(2))$ et de la droite d'équation $t + \phi = 0$, qui ne passe pas par O . Cette intersection est un point double si et seulement si le discriminant $\Delta(\phi^2 + \psi)$ est nul. Ce discriminant est aussi celui de la forme quadratique définie sur V par $t^2 + 2t\phi - \psi$ ce qui conduit à l'équivalence de (i) et (ii). Puisque la quartique est irréductible, le nombre d'intersection $(f, t + \phi)$ est fini, et par suite la forme quadratique $\phi^2 + \psi$ n'est pas nulle. Alors le rang de la conique \mathfrak{p} est 2, et le noyau de la forme quadratique correspond au point de tangence de la droite d'équation $t + \phi = 0$. \square

8. Restriction du morphisme de Barth à D_2

Donnons d'abord une description détaillée du diviseur D_2 . Considérons un système cohérent (Γ, Θ) représentant un point stable de D_2 . Le faisceau Θ sous-jacent n'est jamais stable : il contient au moins un sous-faisceau cohérent Θ' de classe de Grothendieck $c/2$ et par stabilité, le sous-espace Γ ne rencontre pas $H^0(\Theta')$. Il s'écrit donc comme extension

$$(8.1) \quad 0 \longrightarrow (0, \Theta') \longrightarrow (\Gamma, \Theta) \longrightarrow (\Gamma'', \Theta'') \longrightarrow 0$$

où Θ' et Θ'' sont des faisceaux purs de classe $c/2$; ce sont donc des faisceaux inversibles de degré 2 sur des droites ℓ' et ℓ'' respectivement. Le système cohérent (Γ'', Θ'') définit un point de l'espace de modules $\text{Syst}(c/2, 2)$. Cet espace de modules est très facile à décrire :

LEMME 8.1. – *On a un isomorphisme canonique*

$$\text{Syst}(c/2, 2) \simeq \text{Hilb}^2(\mathbb{P}_2).$$

Démonstration. – Etant donné un système cohérent semi-stable $\Lambda = (\Gamma, \Theta)$ de classe de Grothendieck $c/2$, le faisceau Θ sous-jacent est isomorphe à un faisceau inversible $\mathcal{O}_\ell(2)$ sur

une droite ℓ de \mathbb{P}_2 ; à un tel système linéaire $(\Gamma, \mathcal{O}_\ell(2))$ on associe le sous-schéma de ℓ des zéros des quadriques singulières qui appartiennent à Γ . On obtient ainsi l'isomorphisme attendu. \square

Réciproquement, considérons l'ensemble des classes d'isomorphisme d'extensions (8.1); quand $\Lambda' = (0, \Theta')$ et $\Lambda'' = (\Gamma'', \Theta'')$ sont fixées, ces extensions sont classées à isomorphisme près par l'espace projectif $\mathbb{P}(\text{Ext}^1(\Lambda'', \Lambda'))$ des droites de $\text{Ext}^1(\Lambda'', \Lambda')$. De la suite exacte

$$(8.2) \quad 0 \longrightarrow \text{Hom}(\Theta'', \Theta') \longrightarrow \text{Hom}(\Gamma'', H^0(\Theta')) \longrightarrow \text{Ext}^1(\Lambda'', \Lambda') \longrightarrow \text{Ext}^1(\Theta'', \Theta') \rightarrow 0$$

il découle que l'espace vectoriel $\text{Ext}^1(\Lambda'', \Lambda')$ est de dimension 7. Considérons maintenant les systèmes cohérents universels Λ' et Λ'' paramétrés par $S = \mathbb{P}_2^* \times \text{Hilb}^2(\mathbb{P}_2)$, et le fibré vectoriel de rang 7 sur S défini par $\mathcal{V} = \underline{\text{Ext}}_{\mathbb{P}_1}^1(\Lambda'', \Lambda')$. Le fibré en espaces projectifs $\mathbb{P}(\mathcal{V})$ de rang 6 au-dessus de $\mathbb{P}_2^* \times \text{Hilb}^2(\mathbb{P}_2)$ associé à ce fibré vectoriel paramètre alors toutes les extensions (8.1).

LEMME 8.2. – Soit I le fermé de $\mathbb{P}(\mathcal{V})$ des points définissant un système cohérent instable.

(i) L'image de I est contenue dans le fermé des couples (Λ', Λ'') tels que le système linéaire $\Lambda'' = (\Gamma'', \Theta'')$ ait un point de base.

(ii) Le fermé I est de dimension 4 et la projection $I \longrightarrow \mathbb{P}_2^* \times \text{Hilb}^2(\mathbb{P}_2)$ est injective.

En particulier une fibre générale de $\mathbb{P}(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathbb{P}_2^* \times \text{Hilb}^2(\mathbb{P}_2)$ ne rencontre pas le fermé des points instables.

Démonstration. – Si le système cohérent (Γ, Θ) est instable, il existe un sous-faisceau F de Θ de multiplicité 1 tel que $\Gamma \subset H^0(F)$. Alors F n'est pas contenu dans Θ' et la projection $F \longrightarrow \Theta'$ est non nulle ; par suite c'est un plongement. Si c'est un isomorphisme, l'extension sous-jacente

$$(8.3) \quad 0 \longrightarrow \Theta' \longrightarrow \Theta \longrightarrow \Theta'' \longrightarrow 0$$

serait scindable : le faisceau F serait le graphe d'un morphisme $a : \Theta'' \longrightarrow \Theta'$ et le sous-espace Γ serait l'image de Γ'' par l'application linéaire $a : H^0(\Theta'') \longrightarrow H^0(\Theta')$. Mais en vertu de la suite exacte (8.2), ceci impliquerait que la classe dans $\text{Ext}^1(\Lambda'', \Lambda')$ de l'extension (8.1) serait nulle, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il en résulte qu'obligatoirement le morphisme $F \longrightarrow \Theta''$ n'est pas surjectif et a pour image le sous-faisceau F'' de Θ'' des sections qui s'annulent en un point $\alpha \in \ell''$. Ceci prouve que le système linéaire Λ'' a un point de base ce qui démontre (i).

Reste à trouver dans ce cas quels sont les points instables dans la fibre au-dessus de (Λ', Λ'') . Supposons d'abord $\Theta' \neq \Theta''$. Montrons que dans ce cas l'extension sous-jacente n'est pas scindable. Si cette extension était scindable, un tel scindage fournirait une projection $\Theta \longrightarrow \Theta'$ de noyau Θ'' et la restriction $F \longrightarrow \Theta'$ serait nulle ; dans la somme directe $H^0(\Theta) = H^0(\Theta') \oplus H^0(\Theta'')$ le sous-espace Γ proviendrait du sous-espace vectoriel Γ'' de Θ'' . Mais alors ceci signifierait que la suite exacte de systèmes cohérents (8.1) serait elle aussi scindable, ce qui est exclu par hypothèse. Le support de Θ' est une droite ℓ' d'équation $x = 0$. Le faisceau Θ est un faisceau inversible sur la conique \mathfrak{c} support de Θ ; on a $\Theta|_{\ell'} = \mathcal{O}_{\ell'}(3)$, et la suite exacte $0 \longrightarrow \Theta''(-1) \xrightarrow{x} \Theta \longrightarrow \Theta|_{\ell'} \longrightarrow 0$. Le morphisme induit $F \longrightarrow \Theta|_{\ell'}$ est nul. Donc $\Gamma = \Gamma'' = H^0(\Theta''(-1))$ et ce sous-espace vectoriel s'identifie au système linéaire des sections de Θ'' qui sont divisibles par x , c'est-à-dire des sections qui s'annulent au point singulier O de \mathfrak{c} . Dans ce cas, dans la fibre, il n'y a donc qu'un point instable : le sous-espace Γ est le noyau du morphisme de restriction $H^0(\Theta) \longrightarrow H^0(\Theta|_{\ell'})$.

Supposons maintenant $\Theta' = \Theta''$; le support de ces faisceaux est une droite ℓ . Montrons qu'alors l'extension (8.3) est scindable. On sait que F est isomorphe à $\mathcal{O}_\ell(1)$. L'extension induite

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_\ell(2) \longrightarrow \Theta_1 \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

est alors scindable ; ces extensions sont classées par $\text{Ext}^1(F, \Theta') \simeq H^0(\mathcal{O}_\ell(2))$, et le morphisme $\text{Ext}^1(\Theta'', \Theta') \rightarrow \text{Ext}^1(F, \Theta')$ induit par l'inclusion $F \hookrightarrow \Theta''$ s'identifie à l'application linéaire $H^0(\mathcal{O}_\ell(1)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_\ell(2))$. L'inclusion $F \hookrightarrow \Theta''$ est donnée par une section non nulle de $H^0(\mathcal{O}_\ell(1))$ et l'image de la classe de l'extension correspondant à Θ est nulle. Donc l'extension (8.3) est elle aussi scindable. Si on se donne un tel scindage, la classe de l'extension (8.1) a un représentant dans l'espace vectoriel $\text{Hom}(\Gamma'', H^0(F''))$ qui se calcule en écrivant que dans la somme directe $H^0(\Theta) = H^0(\Theta') \oplus H^0(\Theta'')$ le sous-espace Γ est le graphe d'une application linéaire $\alpha : \Gamma'' \rightarrow H^0(\Theta')$. Le faisceau F est l'image d'un morphisme de faisceaux $a : F'' \rightarrow \Theta'$, et le sous-espace Γ est l'image de $\Gamma'' = H^0(F'')$ par l'application linéaire $H^0(a) : \Gamma'' = H^0(F'') \rightarrow H^0(\Theta')$; l'application linéaire $\alpha = H^0(a)$ est donc le représentant cherché. Puisque $\text{Hom}(F'', \Theta') \simeq H^0(\mathcal{O}_\ell(1))$ l'application linéaire composée $H^0(\mathcal{O}_\ell(1)) \rightarrow \text{Hom}(\Gamma'', H^0(\Theta')) \rightarrow \text{Ext}^1(\Lambda'', \Lambda')$ est de rang 1 et son image est une droite vectorielle : cette classe définit un seul point $\mathbb{P}(\text{Ext}^1(\Lambda'', \Lambda'))$; par suite dans la fibre il n'y qu'un seul point instable.

Il résulte de cette description que se donner un point de I revient à se donner un couple (c, O) formé d'une conique singulière et d'un point singulier O de cette conique. Dans $\mathbb{P}(\mathcal{V})$ le fermé I des systèmes cohérents instables est donc de dimension 4 et ne rencontre pas les fibres au-dessus des points (Λ', Λ'') telles que Λ'' soit sans point de base. Ceci achève la démonstration. \square

L'ouvert $\mathbb{P}(\mathcal{V}) \setminus I$ paramètre une famille de système cohérents semi-stables. Rappelons que les points strictement semi-stables de S_4 constituent un fermé de codimension 5. La propriété de module grossier de S_4 fournit un morphisme dominant $\mathbb{P}(\mathcal{V}) \setminus I \rightarrow D_2$. Il en résulte en particulier que le diviseur D_2 est bien irréductible. L'énoncé qui suit entraîne en fait que ce morphisme est birationnel. Par composition avec le morphisme de Barth on obtient un morphisme

$$\mathbb{P}(\mathcal{V}) \setminus I \rightarrow \mathcal{C}_4$$

noté encore γ . On considère l'ouvert S_4^* et dans cet ouvert le diviseur \mathcal{L}_2^* introduit dans la section précédente.

THÉORÈME 8.3. – (i) Si $s \in \mathbb{P}(\mathcal{V}) \setminus I$, la quartique q_s associée à s appartient à S_4 .

(ii) L'image de $\gamma : \mathbb{P}(\mathcal{V}) \setminus I \rightarrow S_4$ rencontre l'ouvert S_4^* . Au-dessus de cet ouvert, le morphisme γ est un plongement qui a pour image le diviseur \mathcal{L}_2^* .

Il en résulte en particulier que le morphisme $\gamma : D_2 \rightarrow \mathcal{C}_4$ est génériquement injectif. En plus, cet énoncé permet de décider qu'une quartique singulière suffisamment générale est ou non dans l'image de γ .

Donnons d'abord les grandes lignes de la démonstration. Comme on l'a déjà vu, l'assertion (i) résulte du corollaire 5.6 : il permet de vérifier que si $s \in \mathbb{P}(\mathcal{V})$ est un point général définissant une extension (8.1) (avec ℓ' et ℓ'' distinctes), la droite ℓ' fournit un point singulier $\check{\ell}'$ de q_s . Si s est suffisamment général, le système linéaire (Γ, Θ) est sans point de base, de degré 3 sur ℓ' et de degré 2 sur ℓ'' . Le calcul montre que le cône tangent au point singulier $\check{\ell}'$ correspond aux deux autres zéros sur ℓ' de la section $s_O \in \Gamma$ qui s'annule au point d'intersection O de ℓ' et ℓ'' . La proposition 5.8 implique qu'il n'y a pas d'autre point singulier, sauf peut-être en $\check{\ell}''$: on vérifiera directement que c est en fait un point lisse. La conique p est alors la conique singulière définie par les deux points fixes de l'involution sur ℓ'' associée au système linéaire (Γ'', Θ'') . On vérifie ainsi que si s est suffisamment général, la quartique q_s n'a qu'un point double ordinaire, et qu'elle définit un point du diviseur \mathcal{L}_2^* .

Réciproquement, étant donnée une quartique singulière q correspondant à un point de ce diviseur, on reconstruit les droites ℓ' et ℓ'' à partir des points singuliers de la quartique q et

de la conique p respectivement, et les points fixes de l'involution sur ℓ'' à partir de la conique p elle-même : ces points fixes permettent d'après le lemme 8.1 de reconstruire le système cohérent (Γ'', Θ'') . Une fois ces éléments géométriques reconnus et fixés, le morphisme γ devient une homographie. Il est alors possible de reconstruire l'extension (8.1) elle-même à partir de la quartique q par un argument de dimension.

Voyons maintenant le détail de la construction.

Démonstration. – Considérons l'ouvert $\mathbb{P}(\mathcal{V})^*$ des points de $\mathbb{P}(\mathcal{V})$ représentant une extension (8.1) satisfaisant aux conditions suivantes :

(a) Les supports ℓ' de Θ' et ℓ'' de Θ'' sont deux droites distinctes, dont on désigne par O l'intersection.

(b) L'extension $0 \rightarrow \Theta' \rightarrow \Theta \rightarrow \Theta'' \rightarrow 0$ associée à (8.1) n'est pas scindée. En particulier, Θ est localement libre sur la conique c réunion de ℓ' et ℓ'' , et on a $\Theta|_{\ell'} = \mathcal{O}_{\ell'}(3)$ et $\Theta|_{\ell''} = \mathcal{O}_{\ell''}(2)$.

(c) Le système linéaire $\Lambda = (\Gamma, \Theta)$ est sans point de base. En particulier, le système linéaire Λ'' n'a pas de point de base et définit une involution \mathcal{I} sur la droite ℓ'' dont les points fixes a et b sont les points associés dans $\text{Hilb}^2(\mathbb{P}_2)$.

(d) Le point O n'est pas fixe sous l'involution \mathcal{I} .

(e) L'unique section s_O de Γ qui s'annule en O n'a pas de zéro double sur la droite ℓ' (sauf peut-être O qui alors n'est pas un zéro triple).

(f) Les sections s_a et s_b de Γ qui s'annulent aux deux points fixes a et b de l'involution \mathcal{I} sur ℓ'' n'ont pas de zéro double sur la droite ℓ' .

Les points de $\mathbb{P}(\mathcal{V})^*$ définissent des systèmes cohérents semi-stables d'après le lemme 8.2. On a alors un morphisme dominant $\mathbb{P}(\mathcal{V})^* \rightarrow D_2$. L'assertion (i) résulte du corollaire 5.6 et du fait que si s est un point de $\mathbb{P}(\mathcal{V})^*$ alors la quartique q_s associée est singulière en $\tilde{\ell}'$: il suffit de constater que $\Theta|_{\ell'} = \mathcal{O}_{\ell'}(3)$. Pour démontrer (ii), nous devons expliquer comment trouver l'équation de q_s . Considérons le morphisme de suites exactes associé à l'extension (8.1) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \Gamma \otimes \mathcal{O} & \longrightarrow & \Gamma'' \otimes \mathcal{O} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \Theta' & \longrightarrow & \Theta & \longrightarrow & \Theta'' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Si Λ'' est sans point de base, le noyau du morphisme de droite est un faisceau localement libre F'' stable de rang 2 de classes de Chern $(-1, 2)$ et on a une application linéaire

$$\text{Ext}^1(\Lambda'', \Lambda') \longrightarrow \text{Hom}(F'', \Theta')$$

induite par l'homomorphisme de liaison figurant dans le diagramme du serpent associé à ce diagramme⁵. Par application du foncteur $\text{pr}_{1*} \text{pr}_2^*(-)$ on voit d'après le lemme 5.2 que l'on obtient un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \Gamma \otimes \mathcal{O} & \longrightarrow & \Gamma'' \otimes \mathcal{O} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & m_{\ell'}^2(2) & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & m_{\ell''}^2(2) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

⁵ Il est facile de voir que cette application linéaire est inversible, mais nous n'en aurons pas besoin.

Le noyau de la dernière flèche verticale est le faisceau $\text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^*(F''))$ isomorphe à $\mathcal{O}(-2)$. Le morphisme de liaison associé fournit un morphisme $\mathcal{O}(-2) \rightarrow \mathfrak{m}_{\ell'}^2(2)$ par suite une section q_s de $\mathcal{O}(4)$ bien définie à homothétie près.

LEMME 8.4. – Si $\Lambda'' = (\Gamma'', \Theta'')$ est sans point de base, la section q_s est non nulle. La quartique q_s d'équation $q_s = 0$ est la quartique de Lüroth associée au point de D_2 défini par s .

Démonstration. – On déroule la suite exacte du serpent associée au diagramme ci-dessus : on obtient la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-2) \xrightarrow{q_s} \mathfrak{m}_{\ell'}^2(2) \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}'' \rightarrow 0$$

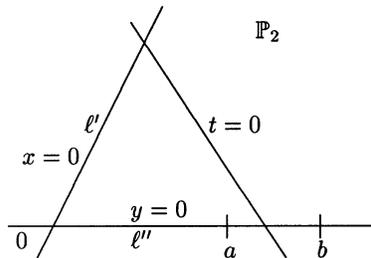
où $\mathcal{Q} = \text{coker}(\varphi)$ et $\mathcal{Q}'' = \text{coker}(\varphi'')$. Ce dernier faisceau est un faisceau de support le point ℓ'' . Ceci entraîne évidemment $q_s \neq 0$; le faisceau \mathcal{Q} , dont on sait qu'il est pur de dimension 1, a alors pour support schématique la quartique q_s d'équation $q_s = 0$. D'où le lemme. \square

On retrouve que la quartique q_s est singulière en ℓ' . De plus, le morphisme de Barth $\gamma : \mathbb{P}(\text{Ext}^1(\Lambda'', \Lambda')) \rightarrow \mathcal{C}_4$ est une homographie (donc injective) sous la seule hypothèse que le système linéaire Λ'' soit sans point de base. Vérifier que si $s \in \mathbb{P}(\mathcal{V})^*$ la quartique q_s appartient à \mathcal{S}_4^* demande une étude plus poussée de l'équation de q_s .

LEMME 8.5. – Soit $s \in \mathbb{P}(\mathcal{V})$ satisfaisant aux conditions (a)–(f). Alors la quartique de Lüroth q_s appartient à \mathcal{S}_4^* .

Démonstration. – Pour obtenir des renseignements sur la quartique q_s on utilise le fait que l'application ci-dessus en restriction à une fibre de $\mathbb{P}(\text{Ext}^1(\Lambda'', \Lambda'))$ est une homographie dès que Λ'' n'a pas de point de base. Considérons une extension non triviale (8.1) satisfaisant aux conditions (a)–(f). Elle définit un fibré inversible Θ sur la conique c . On désigne par $x = 0$ l'équation de ℓ' et $y = 0$ l'équation de ℓ'' . Le fibré Θ est de degré 3 sur ℓ' et de degré 2 sur ℓ'' .

On peut choisir d'après la condition (d) une forme linéaire t de sorte que (x, y, t) soit une base de V^* et s'annulant au point conjugué de O par rapport à a et b : alors le système linéaire (Γ'', Θ'') est défini par les quadriques xt et $x^2 + t^2$. Considérons une section τ de $\Theta(-2)$ non nulle sur ℓ'' ; on peut encore supposer que t est choisie de sorte que τ s'annule sur ℓ' au point $x = t = 0$. On désigne par $[u, v, w]$ les coordonnées homogènes dans le dual de \mathbb{P}_2 : un tel point représente la droite de \mathbb{P}_2 d'équation $ux + vy + wt = 0$.



Considérons le point $s_0 \in \mathbb{P}(\text{Ext}^1(\Lambda'', \Lambda'))$ défini par le système linéaire (Γ_0, Θ) engendré par les sections $\sigma_1 = xt\tau$ et $\sigma_2 = (x^2 + t^2)\tau$. Évidemment, ce système linéaire a pour point de base le point $x = t = 0$, et chacune de ces sections s'annule à l'ordre ≥ 3 en ce point. Alors la quartique associée q_0 contient la droite triple définie par le point $[0, 1, 0]$, d'équation $v^3 = 0$ et une autre droite. La section σ_1 s'annule identiquement sur ℓ' , et elle s'annule aussi au point $[1, 0, 0]$. Donc la quartique q_0 contient aussi la droite d'équation $u = 0$; elle a pour équation $v^3u = 0$.

Remarquons que cette quartique est lisse au point $\check{\ell}''$, et que la tangente en $\check{\ell}''$ correspond au second point de ℓ'' où s'annule la section $\sigma_1 \in \Gamma_0$.

Considérons maintenant une extension $s_\infty \in \mathbb{P}(\text{Ext}^1(\Lambda'', \Lambda'))$ quelconque définissant un système cohérent $(\Gamma_\infty, \Theta_\infty)$ tel que l'extension (8.3) soit scindée : autrement dit s_∞ appartient à l'hyperplan de l'infini défini par les zéros de la forme linéaire

$$\text{Ext}^1(\Lambda'', \Lambda') \longrightarrow \text{Ext}^1(\Theta'', \Theta') = k.$$

Comme $\text{Hom}(\Theta'', \Theta') = 0$ une telle extension est définie par une application linéaire non nulle $f_\infty \in \text{Hom}(\Gamma'', H^0(\Theta'))$, unique à homothétie près, qu'on peut voir aussi comme une application linéaire $f : \Gamma'' \longrightarrow H^0(\mathfrak{m}_{\check{\ell}''}^2(2))$. Le morphisme $F'' \longrightarrow \Theta'$ associé à s_∞ est alors le composé $F'' \longrightarrow \Gamma'' \otimes \mathcal{O} \longrightarrow \Theta'$, où la première flèche est l'inclusion canonique, et la seconde se construit en composant f_∞ avec le morphisme d'évaluation. L'équation q_∞ de la quartique q_∞ associée s'obtient en appliquant le foncteur $\text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^*(-))$: elle est donnée par le morphisme composé

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(-2) \longrightarrow \Gamma'' \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*} \longrightarrow \mathfrak{m}_{\check{\ell}''}^2(2).$$

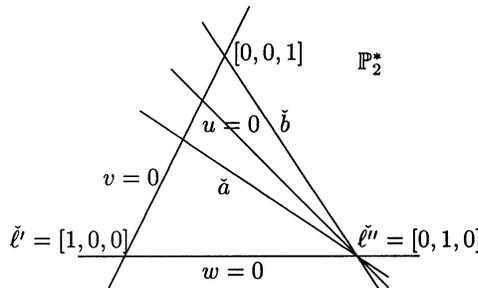
On prend pour base de Γ'' les formes quadratiques xt et $x^2 + t^2$ correspondant aux sections σ_1 et σ_2 de Θ'' définies par les formules ci-dessus, en restriction à ℓ'' ; à ces sections correspondent les formes quadratiques $(-uw, u^2 + w^2)$; la quartique q_∞ a donc une équation de la forme

$$(u^2 + w^2)A_1(v, w) + uwA_2(v, w) = 0$$

où $A_1(v, w)$ et $A_2(v, w)$ sont des formes binaires de degré 2. Cette quartique est singulière en $\check{\ell}'$ et $\check{\ell}''$. Par linéarité, on voit que l'équation de la quartique de Lüroth q_s associée à un point quelconque s de $\mathbb{P}(\text{Ext}^1(\Lambda'', \Lambda'))$ est de la forme

$$v^3u + (u^2 + w^2)A_1(v, w) + uwA_2(v, w) = 0$$

où A_1 et A_2 sont des formes binaires de degré 2, pourvu que la condition (b) soit satisfaite. On voit que le point $\check{\ell}' = [1, 0, 0]$ est un point de multiplicité 2 pourvu que la forme binaire $A_1(v, w)$ ne soit pas nulle, et que le point $\check{\ell}'' = [0, 1, 0]$ est un point lisse : la tangente correspond au deuxième zéro de la section σ_1 sur ℓ'' .



Le cône tangent de q_s en $\check{\ell}'$.

Supposons que les conditions (a)–(d) soient satisfaites au point s . Pour comprendre le cône tangent de q_s au point singulier $\check{\ell}'$ nous devons étudier la forme quadratique $A_1(v, w)$. Le fibré inversible Θ sous-jacent au système linéaire (Γ, Θ) est défini par la même extension (8.3)

que pour le point s_0 . Désignons par σ l'unique section de $\Theta(-2)$ qui s'annule au point d'intersection O , et est liée à τ par la relation $t\sigma + y\tau = 0$. Sur ℓ'' cette section s'annule, et σ peut donc être vue comme une section de $\Theta'(-2)$.

Puisque s n'a pas de point de base, $s \neq s_0$ et la droite s_0s rencontre l'hyperplan de l'infini en un point s_∞ , ce qui définit une application linéaire f_∞ qui est donnée dans la base de Γ'' ci-dessus par deux sections de Θ' qui s'écrivent sous la forme $f_1 = g_1(y, t)\sigma$ et $f_2 = g_2(y, t)\sigma$ où g_1 et g_2 sont des formes binaires, de sorte que l'espace vectoriel Γ est engendré par les sections $xt\tau + g_1(y, t)\sigma, (x^2 + t^2)\tau + g_2(y, t)\sigma$. Dans l'isomorphisme $H^0(\Theta'') \simeq H^0(m_{\ell''}^2(2))$, aux formes binaires xt et $x^2 + t^2$ correspondent les formes binaires $-uw$ et $u^2 + w^2$ respectivement dans le plan projectif dual. De même dans l'isomorphisme $H^0(\Theta') \simeq H^0(m_{\ell'}^2(2))$ aux formes binaires $g_i(y, t)$ correspondent les formes binaires $g_i(w, -v)$ dans le plan projectif dual, et l'équation de la quartique associée est donc de la forme

$$\lambda v^3 u + (u^2 + w^2)g_1(w, -v) + uwg_2(w, -v) = 0$$

où λ est un scalaire non nul que nous allons préciser. Pour ceci, on examine l'intersection de cette quartique avec la droite de \mathbb{P}_2^* d'équation $w + u = 0$: cette intersection est donnée par le schéma des zéros de la forme de degré 4

$$w[-\lambda v^3 + w(2g_1(w, -v) - g_2(w, -v))].$$

Il s'agit donc d'interpréter l'intersection du pinceau de droites de \mathbb{P}_2 passant par le point fixe $a = [1, 0, 1]$ avec la quartique q_s . La section de Γ qui s'annule en ce point est $(x - t)^2\tau + (g_2 - 2g_1)(y, t)\sigma$; elle ne s'annule pas en O . Par suite, l'intersection est donnée par le cône de sommet a et défini par le schéma des zéros de la forme de degré 3 sur ℓ' définie par $t^3 + y(2g_1 - g_2)(y, t)$ zéros auxquels on doit ajouter la droite ℓ'' . Dans le dual, on obtient ainsi la forme quartique

$$wv^3 - w^2(2g_1(w, -v) - g_2(w, -v))$$

ce qui prouve que $\lambda = 1$.

Remarquons que les zéros de la section qui s'annule en 0 sont donnés sur ℓ' par l'équation $g_1(y, t)\sigma = 0$ donc d'après la condition (c) la forme binaire g_1 n'est pas identiquement nulle : ceci implique que ℓ' est un point double sur q_s .

La polaire de q_s au point singulier ℓ' , et la conique p associée.

L'équation de la quartique q_s s'écrit en choisissant $u = 0$ comme droite de l'infini évitant le point singulier $\ell' = [1, 0, 0]$

$$u^2(g_1(w, -v)) + u(v^3 + wg_2(w, -v)) + w^2g_1(w, -v) = 0.$$

Considérons les 2 sections qui engendrent Γ . Sur ℓ' elles s'annulent aux points définis par les équations

$$\begin{aligned} yg_1(y, t) &= 0, \\ t^3 - yg_2(y, t) &= 0. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (c) le système linéaire est sans point de base. Par conséquent, ces deux équations n'ont pas de zéro commun sur ℓ' . Il est équivalent de dire que dans le dual les formes binaires $wg_1(w, -v)$ et $v^3 + wg_2(w, -v)$ n'ont pas de zéro en commun. Ainsi, la cubique polaire q' de ℓ' est intègre. La condition (e) signifie exactement que la forme quadratique g_1 est de

discriminant non nul, ce qui implique que $\tilde{\ell}'$ est un point double ordinaire sur la quartique. La condition (f) implique que d'après la proposition 5.8 la quartique ne contient pas d'autre point singulier que $\tilde{\ell}'$ ou $\tilde{\ell}''$. Mais ces points singuliers sont forcément à l'intersection de q_s et de la polaire q'_s et on a déjà vu que $\tilde{\ell}''$ n'est pas un point singulier. Donc il n'y a pas d'autre point singulier. Ainsi, la quartique q_s appartient à S_4^* .

Avec les notations de la section 7, on voit que $\phi = 0, \psi = w^2$ la conique associée p est alors définie par l'équation $u^2 - w^2 = 0$: c'est donc la conique singulière de point singulier le point $\tilde{\ell}''$. Cette conique est celle qui est associée à la forme binaire $x^2 - t^2$ sur ℓ'' : il s'agit bien sûr des points fixes de l'involution sur ℓ'' associée au système linéaire Λ'' . Ceci achève la démonstration du lemme 8.5. \square

Fin de la démonstration du théorème 8.3. – Considérons l'image réciproque $\mathbb{P}(\mathcal{V})^{**}$ de l'ouvert S_4^* par $\gamma : \mathbb{P}(\mathcal{V}) \setminus I \rightarrow S_4$. Puisque $\mathbb{P}(\mathcal{V})^*$ est dense dans $\mathbb{P}(\mathcal{V})^{**}$ cette image réciproque est aussi l'image réciproque de \mathcal{L}_2^* . Désignons par $\text{Hilb}_*^2(\mathbb{P}_2)$ le complémentaire de la diagonale dans $\text{Hilb}^2(\mathbb{P}_2)$. On a une application régulière $\mathcal{L}_2^* \rightarrow \mathbb{P}_2^* \times \text{Hilb}_*^2(\mathbb{P}_2)$ qui associe à q le couple formé du point singulier ω de q , et du point de $\text{Hilb}_*^2(\mathbb{P}_2)$ défini par la conique singulière p de rang 2 associée à q . Cette paire définit un couple de systèmes cohérents (Λ', Λ'') de support distincts et tels que Λ'' soit sans point de base. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(\mathcal{V})^{**} & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{L}_2^* \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathbb{P}_2^* \times \text{Hilb}_*^2(\mathbb{P}_2) & \end{array}$$

Au-dessus de l'ouvert $\text{Hilb}_*^2(\mathbb{P}_2)$ le morphisme γ est un plongement propre puisque cela signifie exactement que Λ'' n'a pas de point de base. Le diviseur \mathcal{L}_2^* est irréductible de dimension 12 et $\mathbb{P}(\mathcal{V})^{**}$ est aussi de dimension 12 : c'est donc un isomorphisme. \square

PROPOSITION 8.6. – *L'ouvert $\mathbb{P}(\mathcal{V})^{**}$ coïncide avec l'ouvert $\mathbb{P}(\mathcal{V})^*$.*

Démonstration. – En effet, soit $s \in \mathbb{P}(\text{Ext}^1(\Lambda'', \Lambda'))$ un point définissant un système cohérent semi-stable (Γ, Θ) tel que la quartique associée q_s appartienne à S_4^* . Cette quartique étant intègre, ce système cohérent est en fait stable, et n'a pas de point de base. Par continuité, le support c de Θ est une conique singulière. Supposons que cette conique soit une droite double ℓ^2 . Alors Θ est l'extension

$$(8.4) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_\ell(2) \rightarrow \Theta \rightarrow \mathcal{O}_\ell(2) \rightarrow 0.$$

Si cette extension n'est pas scindable Θ est singulier en un seul point O , et dans le pinceau de droites passant par O , seule la droite ℓ serait de saut d'après la proposition 5.8. Ceci signifie que la droite de \mathbb{P}_2^* définie par O rencontre q_s au seul point $\tilde{\ell}$. Ceci contredit le fait que q_s n'a qu'un point double ordinaire. Si l'extension Θ est scindée, Θ est un \mathcal{O}_ℓ -module localement libre de rang 2 et de degré 4 et le système cohérent (Γ, Θ) aurait des points de base. Donc la conique c est réduite et la condition (a) est satisfaite. La suite exacte (8.3) ne peut être scindable car alors chacune des deux droites contenues dans c définirait un point singulier de q_s . Donc la condition (b) est satisfaite. La condition (c) est vraie parce que q_s est intègre. Par continuité, la conique p associée à q_s est une conique singulière dont le point singulier est le point $\tilde{\ell}'$. Puisque cette conique ne rencontre pas le point $\tilde{\ell}'$, le point O n'est pas un des points fixes de l'involution \mathcal{I} sur ℓ'' , ce qui donne la condition (d). Comme nous l'avons vu dans la preuve du lemme 8.4

la condition (e) est vraie parce que cela traduit exactement que le point $\check{\ell}'$ est un point double ordinaire de q_s et la condition (f) résulte du fait que c'est le seul point singulier de q_s . \square

La variété des quartiques de Lüroth singulières de type II est, par définition, l'image $\mathcal{L}_2 = \gamma(D_2)$ du diviseur D_2 . Puisque D_2 est irréductible, il en est de même de \mathcal{L}_2 .

COROLLAIRE 8.7. – *La variété \mathcal{L}_2 des quartiques de Lüroth singulières de type II est l'adhérence dans \mathcal{C}_4 de l'hypersurface de S_4^* définie par l'équation*

$$\Delta(\phi^2 + \psi) = 0$$

où Δ est le discriminant. En particulier, le morphisme $\mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{C}_2$ défini par $q \mapsto p$ n'est pas dominant.

Démonstration du lemme 6.9. – Considérons un point de $\mathbb{P}(\mathcal{V})^*$ définissant une extension (8.1). Le système cohérent (Γ'', Θ'') définit d'après [16] un faisceau stable F'' de rang 2 et classes de Chern $(1, 2)$: c'est le dual du noyau du morphisme d'évaluation $\Gamma'' \otimes \mathcal{O} \rightarrow \Theta''$. Le faisceau semi-stable F de M_4 associé à (Γ, Θ) dans la correspondance de la section 4 s'insère dans une suite exacte

$$0 \rightarrow F'' \rightarrow F(1) \rightarrow \mathcal{O}_{\ell'}(-1) \rightarrow 0$$

ce qui implique que ℓ' est une droite de saut d'ordre 2 pour F , i.e. $\dim H^1(F(-1)|_{\ell'}) = 2$. Il en résulte que l'image par la contraction $\pi : S_4 \rightarrow M_4$ du diviseur D_2 est contenue dans le diviseur des classes de faisceaux semi-stables F qui ont au moins une droite de saut d'ordre ≥ 2 . Réciproquement, si F possède une droite de saut ℓ' d'ordre ≥ 2 et n'est pas spécial, le conoyau du morphisme d'évaluation $ev : H^0(F(1)) \otimes \mathcal{O} \rightarrow F(1)$ possède un quotient isomorphe à $\mathcal{O}_{\ell'}(-1)$ et par suite son support schématique est une conique dégénérée. Donc le système cohérent (Γ, Θ) associé à F appartient au diviseur D_2 . \square

9. Fin de la démonstration, dans le cas $n = 4$

Considérons le fermé $\gamma(\partial S_4 \cup \epsilon)$; ce fermé est constitué de quartiques réductibles ou de quartiques ayant un point triple, et est donc de dimension ≤ 11 ; soit \mathcal{C}_4^* le complémentaire de ce fermé dans \mathcal{C}_4 . On sait que γ est d'après [13] un morphisme fini au-dessus de l'ouvert \mathcal{C}_4^* . Les diviseurs D_1 et D_2 rencontrent l'image réciproque de cet ouvert \mathcal{C}_4^* . Donc les images \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 de D_1 et D_2 sont deux diviseurs de l'hypersurface $\mathcal{L} = \beta(M_4)$ des quartiques de Lüroth appelés respectivement diviseurs des quartiques de Lüroth singulières de type I et type II ; on va voir que ces deux diviseurs sont distincts ; ce sont les seules composantes irréductibles de $\mathcal{L} \cap S_4$.

On doit vérifier que le diviseur \mathcal{L}_1 n'est pas contenu dans \mathcal{L}_2 . Pour ceci on considère la quartique associée à un point de D_1 . En général, cette quartique appartient à S_4^* , ce qui définit d'après la section 8 une conique p . Il suffit d'après le corollaire 8.7 de prouver le résultat suivant :

PROPOSITION 9.1. – *L'application rationnelle $D_1 \rightsquigarrow \mathcal{C}_2$ qui associe à un système linéaire la conique p est dominante.*

On doit d'autre part vérifier l'énoncé suivant :

PROPOSITION 9.2. – *Le rang de $d\gamma$ en un point général de D_2 est 13.*

Dès lors, la fibre générale du morphisme $\gamma : S_4 \rightarrow \mathcal{C}_4$ est réduite à un point au-dessus d'un point général de \mathcal{L}_2 , et γ non ramifié en ce point. Il en résulte (cf. Hartshorne, Chapitre II, lemme 7.4) que le morphisme γ et le morphisme de Barth β sont génériquement injectifs. Ceci prouve le théorème 1.1 dans le cas $n = 4$.

9.1. Démonstration de la proposition 9.2

Il suffit de trouver un point $s \in D_2$ et un vecteur tangent $\tau \in T_s S_4$ tels que

- (1) le morphisme $\gamma : D_2 \rightarrow \mathcal{C}_4$ soit un plongement au voisinage de s ;
- (2) le vecteur $d_s \gamma(\tau)$ n'appartienne pas à l'espace tangent à $T_{\gamma(s)} \mathcal{L}_2$.

Considérons la famille paramétrée par \mathbb{P}_1 définie par le conoyau du morphisme de faisceaux localement libres sur $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$

$$\psi : \mathcal{O}(-1, 1) \oplus \mathcal{O}(0, 1) \rightarrow \mathcal{O}^2(0, 2)$$

dont la matrice est donnée par

$$\begin{pmatrix} \alpha x & t \\ \beta t & y \end{pmatrix}.$$

Le conoyau de ψ définit une famille de faisceaux semi-stables de classe de Grothendieck $c = 2h + 4h^2$, dont le support schématique est le sous-schéma C de $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$ défini par l'équation à valeurs dans $\mathcal{O}(1, 2)$

$$\alpha xy - \beta t^2 = 0.$$

Le morphisme $\mathbb{P}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ ainsi obtenu est transverse au point $\infty = [1, 0]$ au diviseur des coniques singulières. Désignons par σ et τ les deux sections canoniques de $\Theta(-2)$ obtenues ; au-dessus du point ∞ elles s'annulent respectivement sur la droite ℓ'' d'équation $y = 0$ pour σ , et au point $x = t = 0$ pour τ . On se place dans ce qui suit au voisinage de ∞ , et on pose $\varepsilon = \beta/\alpha$. La famille paramétrée de faisceaux \mathcal{G} obtenue sur \mathbb{P}_2^* est facile à calculer : en effet, le module gradué $\bigoplus_i H^0(\Theta(i))$ sur l'anneau des polynômes est engendré par $H^0(\Theta(-2))$, et les sections σ et τ satisfont aux relations $x\sigma + \varepsilon t\tau = 0$; $t\sigma + y\tau = 0$. Alors on peut prendre pour repère pour le fibré $\text{pr}_2^*(\Theta(-1))$ les sections $y\sigma, t\sigma, x\tau, t\tau$. De même, pour le fibré $\text{pr}_{2*}(\Theta)$ on peut prendre pour repère $(y^2\sigma, yt\sigma, t^2\sigma, x^2\tau, xt\tau, t^2\tau)$. Une droite de \mathbb{P}_2 a pour équation $ux + vy + wt = 0$; le point associé dans le plan projectif dual a pour coordonnées homogènes $[u, v, w]$. Le morphisme canonique

$$\text{pr}_{1*}(\Theta(-1)) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(-1) \rightarrow \text{pr}_{1*}(\Theta) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}$$

a pour matrice

$$\begin{pmatrix} v & 0 & 0 & 0 \\ w & v & 0 & 0 \\ \varepsilon u & w & 0 & -v \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & w & u \\ 0 & -\varepsilon u & \varepsilon v & w \end{pmatrix}.$$

La famille de faisceaux \mathcal{G}_ε associée est le conoyau de ce morphisme. Choisissons maintenant un sous-fibré de rang 2 $\Gamma \subset \text{pr}_{1*}(\Theta)$ tel que au-dessus de $\varepsilon = 0$, $(\Gamma, \Theta)_0$ n'appartienne pas à D_1 . Pour ceci, on considère le sous-espace vectoriel $\Gamma_\varepsilon \subset H^0(\Theta_\varepsilon)$ engendré par les sections $s_+ = (y^2 + t^2)\sigma + (x + t)^2\tau$ et $s_- = -(y^2 + t^2)\sigma + (x - t)^2\tau$. Le schéma des zéros de s_+ est obtenu en écrivant que la matrice

$$\begin{pmatrix} y^2 + t^2 & x & t \\ (x + t)^2 & 0 & y \end{pmatrix}$$

est de rang ≤ 1 , ce qui donne sur la droite ℓ'' , $(x + t)^2 = 0$; de même sur la droite ℓ' d'équation $x = 0$, $t^3 - t^2y - y^3 = 0$. De même, la section s_- s'annule sur la droite ℓ'' , au point double

défini par $(x - t)^2 = 0$ et sur ℓ' en la cubique $t^3 + t^2y + y^3 = 0$. Il en résulte que le système linéaire est sans point de base. On vérifie que le système linéaire obtenu pour $\varepsilon = 0$ satisfait en fait à toutes les conditions (a)-(f) de la section 9, et donc appartient à l'ouvert $\mathbb{P}(\mathcal{V})^*$; par suite, d'après le théorème 8.3, la condition (1) est satisfaite au point de D_2 ainsi défini. Calculons maintenant la famille de quartiques de Lüroth q_ε associées : on prend pour base dans Γ les sections $\frac{1}{2}(s_+ \pm s_-)$. La famille q_ε de quartiques de saut associées est obtenue en calculant le déterminant du morphisme canonique sur $k \times \mathbb{P}_2^*$

$$\Gamma \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*} \oplus \text{pr}_{1*}(\Theta(-1)) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(-1) \longrightarrow \text{pr}_{1*}(\Theta)$$

ce qui donne

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & v & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \varepsilon u & w & 0 & -v \\ 0 & 1 & 0 & 0 & u & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & w & u \\ 0 & 1 & 0 & -\varepsilon u & \varepsilon v & w \end{pmatrix} = 0.$$

On obtient

$$[(u^2 + w^2)(v^2 + w^2) + 2uv^3] - \varepsilon(vu^3 + 3uvw^2 + uv^3 + 2v^4) + \varepsilon^2u^2v^2 = 0.$$

La quartique de Lüroth q_0 d'équation $(u^2 + w^2)(v^2 + w^2) + 2uv^3 = 0$ est singulière au seul point $\ell' = [1, 0, 0]$ et appartient à \mathcal{L}_2^* . On prend comme droite de l'infini la droite Δ définie par l'équation $u = 0$. La question qui nous préoccupe est de montrer que le vecteur tangent défini par $g = vu^3 + 3uvw^2 + uv^3 + 2v^4$ n'appartient pas à $T_{q_0}\mathcal{L}_2^*$. Il suffit de se convaincre que la conique d'équation $2u\phi - \psi = 0$ ne passe pas par le point singulier de la conique p_0 associée à q_0 . L'équation de q_0 s'écrit

$$f = u^2f_2 + uf_3 + f_4 = 0$$

où les formes binaires f_i de degré i sont définies par

$$\begin{aligned} f_2 &= v^2 + w^2, \\ f_3 &= 2v^3, \\ f_4 &= w^2(v^2 + w^2), \end{aligned}$$

L'application linéaire

$$H^0(\mathcal{O}_\Delta(2)) \oplus H^0(\mathcal{O}_\Delta(1)) \xrightarrow{(f_2 \ f_3)} H^0(\mathcal{O}_\Delta(4))$$

est inversible, puisque f_2 et f_3 n'ont pas de zéro en commun. La conique p_0 associée s'obtient en résolvant l'équation

$$2v^3\phi + (v^2 + w^2)\psi = w^2(v^2 + w^2)$$

qui a pour seule solution $\phi = 0, \psi = w^2$. Donc la conique p_0 a pour équation $u^2 - w^2 = 0$: c'est bien comme nous l'avons vu dans la section 8 une conique singulière réunion de deux droites passant par $\ell'' = [0, 1, 0]$ correspondant aux deux points doubles du système linéaire sur la droite ℓ'' . On a ici $g = u^3v + u(3vw^2 + v^3) + 2v^4$. Écrivons $\xi = (\dot{v}, \dot{w})$; l'équation à résoudre est

$$\begin{aligned} 2v\dot{v} &= -v, \\ 2\dot{w} &= 0, \\ 2v^3\dot{\phi} + (v^2 + w^2)\dot{\psi} &= 2v^4 - 6w^2v^2\dot{v}, \end{aligned}$$

ce qui donne comme solution $\dot{v} = -1/2, \dot{w} = 0, \dot{\phi} = -v/2$ et $\dot{\psi} = 3v^2$. La forme quadratique obtenue est donc $-uv - 3v^2$ et ne passe pas par le point ℓ'' . Donc ceci définit un vecteur de $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^0}(2))$ qui n'est pas tangent à l'hypersurface des coniques singulières. \square

9.2. Démonstration de la proposition 9.1

Considérons la quartique de Lüroth q_0 singulière de type I associée au système linéaire sur la conique c d'équation $xy - t^2 = 0$ (correspondant à $\varepsilon = 1$ dans la famille ci-dessus) définie par les sections $t^2(\sigma + \tau)$ et $-y^2\sigma + x^2\tau$. Ce système linéaire appartient évidemment au diviseur D_1 et est sans point de base : la droite $t = 0$ correspond, dans le dual, au seul point singulier de la quartique de Lüroth. Cette quartique de Lüroth singulière de type I a pour équation

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & v & 0 & 0 \\ 1 & 0 & u & w & 0 & -v \\ 0 & 1 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w & u \\ 1 & 0 & 0 & -u & v & w \end{pmatrix} = 0$$

c'est-à-dire $w^2f_2 + wf_3 + f_4 = 0$ où f_2, f_3, f_4 sont des formes binaires de degré 2, 3, 4 définies par

$$\begin{aligned} f_2 &= u^2 + v^2, \\ f_3 &= u^3 + v^3, \\ f_4 &= -uv[u^2 + v^2]. \end{aligned}$$

Soit Δ la droite de l'infini, définie par l'équation $w = 0$. Les formes binaires f_2 et f_3 n'ont pas de racine commune. Ainsi, cette quartique appartient à \mathcal{S}_4^* . La conique p associée a pour équation $w^2 + uv = 0$. C'est donc une conique non singulière. On passe facilement de la conique duale \check{c} de la conique c à la conique p . En effet, la conique duale \check{c} a pour équation $w^2 - 4uv = 0$, et p est l'image de \check{c} par l'homographie $h : \mathbb{P}_2^* \rightarrow \mathbb{P}_2^*$ caractérisée par les propriétés suivantes : h laisse fixe le point $O = [0, 0, 1]$ et les points de la droite d'équation $w = 0$, et le birapport $[\infty, 0, m, h(m)]$ est $\frac{1}{2}$. Pour obtenir l'énoncé, il suffit donc de faire varier la conique c . \square

Même si la conique associée p est une conique lisse, il n'est pas toujours aussi simple de construire une homographie qui transforme la conique \check{c} en la conique p . Quand la conique c est fixée, la conique p dépend du choix du système linéaire sur c . Ceci rend difficile la reconstruction directe de la conique c à partir de la quartique q . Il peut aussi arriver que la conique p soit singulière : ceci fournit alors des exemples explicites (cf. § 9.3) de fibrés stables non isomorphes qui ont même quartique de Lüroth.

COROLLAIRE 9.3. – *L'hypersurface \mathcal{L} de \mathcal{C}_4 des quartiques de Lüroth est de degré 54.*

Démonstration. – Ce corollaire est un cas particulier du corollaire 1.2 qui se démontre exactement par la même méthode. Soit $\mathcal{D} = \beta^*(\mathcal{O}(1))$ le fibré déterminant de Donaldson ; le nombre de Donaldson $q_{13} = \int_{M_4} c_1(\mathcal{D})^{13}$ est 54. On a alors $\beta_*(1) = 54h$, et par suite, puisque β est génériquement injectif, la classe fondamentale de l'image \mathcal{L} est $54h$. \square

COROLLAIRE 9.4. – La sous-variété \mathcal{L}_2 des quartiques de Lüroth de type II est de degré $15.27 = 5.3^4$.

Démonstration. – Soit h la classe d’une section hyperplane dans \mathcal{C}_4 . On a $D_1 = 12\delta \pmod e$ d’après la formule 6.8. Il résulte de la formule de projection et du fait que $\beta_*(1) = 54h$ que $\beta_*([D_1]) = 12.54h^2$. D’autre part, $\mathcal{L} \cap \mathcal{S}$ est de degré 27.54. Par ailleurs, dans $A^2(\mathcal{C}_4)$ on a d’après la formule (6.2)

$$[\mathcal{L} \cap \mathcal{S}] = \beta_*([D_1]) + 2\beta_*([D_2]).$$

Il en résulte que la variété \mathcal{L}_2 est de degré $15.27 = 5.3^4$. \square

Le degré de \mathcal{L}_1 divise évidemment $12.54 = 2^3.3^4$. Faute de pouvoir préciser le degré de $\beta : D_1 \rightarrow \mathcal{L}_1$, nous ignorons quel est ce degré ; autrement dit nous ignorons quelle est la multiplicité de $\mathcal{L} \cap \mathcal{S}$ le long de \mathcal{L}_1 .

9.3. Deux fibrés stables de même quartique de Lüroth

De tels exemples sont déjà mentionnés par Barth [3] : les quartiques dites desmiques de Humbert sont les courbes de saut de 6 fibrés stables distincts. L’exemple présenté ici est explicite. Il s’agit de constater qu’il existe des points de $D_1 \setminus D_2$ dont l’image par γ appartient à $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$.

On considère comme au paragraphe §9.2 le système linéaire sur la conique d’équation $xy - t^2 = 0$ défini par les sections $t^2(\sigma + \tau)$ et $(-y^2 + ct^2)\sigma + (x^2 - ct^2)\tau$ où c est un paramètre. L’équation de la quartique q_c associée est donnée par

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & v & 0 & 0 \\ 1 & c & u & w & 0 & -v \\ 0 & 1 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w & u \\ 1 & -c & 0 & -u & v & w \end{pmatrix} = 0.$$

L’équation de la quartique de Lüroth q_c associée est $w^2f_2 + wf_3 + f_4 = 0$, où on a posé

$$\begin{aligned} f_2 &= u^2 + v^2, \\ f_3 &= u^3 + v^3, \\ f_4 &= -u^3v - 2cu^2v^2 - uv^3, \end{aligned}$$

ce qui donne pour l’équation $f_3\phi + f_2\psi = f_4$ la solution $\phi = c(u + v)$ et $\psi = -[cu^2 + (1 + c)uv + cv^2]$. Le discriminant de la forme quadratique $w^2 + 2t\phi - \psi$ est alors $\Delta = -\frac{1}{4}(4c + 1)(c - 1)^2$. Pour $c \neq 1$, le système linéaire est sans point de base, et pour $c = -\frac{1}{4}$ on obtient une quartique de Lüroth singulière évidemment de type I ; montrons qu’elle est de type II. On peut vérifier que pour $c = -\frac{1}{4}$ le système linéaire ne contient qu’une section ayant deux zéros doubles. La quartique $q_{-\frac{1}{4}}$ est donc lisse en dehors du point $O = [0, 0, 1]$ et ce point singulier est évidemment un point double ordinaire. La cubique polaire du point singulier O étant évidemment intègre, la quartique $q_{-\frac{1}{4}}$ appartient au diviseur \mathcal{L}_2^* : d’après la section §8, elle provient de D_2 . Plus précisément, la solution est alors dans ce cas $\phi = -\frac{1}{4}(u + v)$, $\psi = \frac{1}{4}(u^2 - 3uv + v^2)$, et $\phi^2 + \psi = -\frac{5}{16}(u - v)^2$. La conique p associée est alors la réunion de deux droites qui se coupent au point défini par les équations $4w = u + v$, $u = v$ c’est-à-dire au point $[2, 2, 1]$ du plan projectif dual. Ce point représente la droite de \mathbb{P}_2 d’équation $2x + 2y + t = 0$. On peut alors reconstruire d’après la section §8 un système linéaire sans point de base, appartenant à D_2 et dont le support

est la conique singulière définie par l'équation $t(t + 2x + 2y) = 0$ et qui a pour quartique de Lüroth $q_{-\frac{1}{4}}$.

Par suite, on obtient deux fibrés vectoriels stables et non isomorphes qui ont même image dans \mathcal{C}_4 .

La récurrence

Nous supposons désormais $n \geq 5$, et que le théorème 1.1 est démontré en degré $c_2 = n - 1$.

10. La restriction du morphisme de Barth au bord ∂M_n

Rappelons les notations : on désigne par U_n l'ouvert de l'espace de modules M_n des classes de fibrés vectoriels stables de rang 2, de classes de Chern $(0, n)$ sur le plan projectif, par \mathcal{C}_n le système linéaire complet des courbes de degré n dans le plan projectif dual, et par

$$\beta : M_n \longrightarrow \mathcal{C}_n$$

le morphisme de Barth. La frontière ∂M_n est un diviseur irréductible de M_n ; la restriction de β au bord ∂M_n a ses fibres de dimension ≥ 1 , et généralement de dimension 1 [23]. L'image $B := \beta(\partial M_n)$ est donc un fermé irréductible de dimension $4n - 5$ de \mathcal{C}_n . On se propose de démontrer que l'hypothèse de récurrence entraîne qu'au-dessus d'un ouvert non vide de B , les fibres de β sont réduites à \mathbb{P}_1 .

LEMME 10.1. – *Un faisceau F semi-stable de rang 2 et classes de Chern $(0, n)$ singulier en au plus un point est μ -stable.*

Démonstration. – Si $\text{lg}(\underline{\text{Ext}}^1(F, \mathcal{O})) \leq 1$, le faisceau F n'a pas de sous-faisceau F' de rang 1, de classe de Chern $c_1 = 0$, singulier en plus d'un point. Un tel faisceau est donc obligatoirement μ -stable.

Soit l'ensemble D des points de M_n représentant des faisceaux semi-stables F tels que $\text{lg}(\underline{\text{Ext}}^1(F, \mathcal{O})) = 1$, c'est-à-dire des faisceaux singuliers en exactement un point. Cet ensemble D est l'intersection du bord ∂M_n avec un ouvert contenu dans l'ouvert des classes de faisceaux μ -stables. Si le faisceau F est singulier en exactement un point le bidual $E = F^{**}$ est encore μ -stable et localement libre ; le support du faisceau $\underline{\text{Ext}}^1(F, \mathcal{O})$ définit un point x . On obtient un morphisme

$$\pi : D \longrightarrow U_{n-1} \times \mathbb{P}_2$$

défini par $F \mapsto (F^{**}, x)$. C'est un morphisme surjectif et lisse dont les fibres sont des droites projectives. La courbe β_F des droites de saut de F est alors la réunion (que nous écrirons somme, dans la terminologie usuelle des diviseurs) de la courbe des droites de saut de $E = F^{**}$ et de la droite \tilde{x} de \mathbb{P}_2^* définie par le point x . On a donc un diagramme commutatif

$$(10.1) \quad \begin{array}{ccc} D \subset & \longrightarrow & M_n \\ \pi \downarrow & & \downarrow \beta \\ U_{n-1} \times \mathbb{P}_2 & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{C}_n \end{array}$$

où le morphisme ψ associe au couple (E, x) la courbe $\beta_E + \tilde{x}$.

PROPOSITION 10.2. – *Il existe un ouvert non vide C_n^* de C_n satisfaisant aux conditions suivantes*

- (a) *l'ouvert $\beta^{-1}(C_n^*)$ rencontre D et ne contient pas de point singulier ;*
- (b) *tout point de M_n représentant un faisceau F dont la courbe des droites de saut β_F est une courbe réductible de C_n^* appartient à D .*

COROLLAIRE 10.3. – *Au-dessus d'un ouvert convenable de C_n rencontrant l'image de ψ , le diagramme (10.1) ci-dessus est cartésien (ensemblistement).*

Démonstration. – On peut trouver un ouvert $C_n^* \subset C_n$ satisfaisant aux conditions (a) et (b) ci-dessus et satisfaisant en outre aux conditions suivantes :

- (c) *les points de C_n^* représentent des courbes q qui n'ont pas de composante de degré i avec $1 < i < n - 1$;*
- (d) *le morphisme $\psi : U_{n-1} \times \mathbb{P}_2 \rightarrow C_n$ défini par $(E, x) \mapsto \beta_E + \tilde{x}$ est un plongement fermé au-dessus de l'ouvert C_n^* .*

Trouver un ouvert satisfaisant aux conditions (a)–(c) est facile parce que l'ouvert déjà construit dans la proposition 10.2 rencontre l'ouvert des courbes satisfaisant à la condition (c) : il suffit en effet de remarquer qu'il existe un point de U_{n-1} représentant un fibré E dont la courbe des droites de saut est irréductible. Ceci résulte déjà du résultat de Barth qui dit que l'image de β rencontre l'ouvert des courbes lisses, résultat qu'on retrouve facilement, comme on l'a déjà vu, à partir de la proposition 5.8. Pour réaliser la condition (c), il suffit alors d'enlever à cet ouvert le fermé des points représentant des courbes dont une des composantes est de degré i , où $1 < i < n - 1$. Pour réaliser la condition (d) il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence, compte tenu du fait que l'application $C_{n-1} \times \mathbb{P}_2 \rightarrow C_n$ est un plongement propre au-dessus de l'ouvert de C_n des courbes satisfaisant à la condition (c). Le corollaire résulte alors trivialement de la proposition 10.2. \square

On verra même qu'au-dessus d'un ouvert convenable de C_n^* ce diagramme est cartésien, au sens des schémas. Cet énoncé entraîne, compte tenu de l'hypothèse de récurrence, que les fibres au-dessus d'un ouvert convenable de B sont réduites à des droites projectives. La démonstration de la proposition 10.2 utilise le résultat suivant dû à Strømme [23].

LEMME 10.4. – *L'ensemble des points de U_n correspondant aux fibrés dont la courbe des droites de saut contient une droite est un fermé de U_n de codimension $\geq n - 1$.*

Démonstration de la proposition 10.2. – Soit R le fermé de C_n des points représentant des courbes dont une des composantes est une droite. Le lemme de Strømme montre que l'image réciproque $\beta^{-1}(R)$ rencontre U_n en codimension $\geq n - 1$. Par suite l'image par β de $A' = \beta^{-1}(R) \cap U_n$ est contenue dans un fermé de dimension $\leq 3n - 2$. De plus, l'image du fermé A'' de M_n correspondant aux faisceaux F tels que $\text{lg}(\text{Ext}^1(F, \mathcal{O})) \geq 2$ est contenue dans le fermé des courbes qui s'écrivent $\beta_G + C$ où G est un faisceau de rang 2, μ -semi-stable, de classe de Chern $(0, n - 2)$ et C une conique singulière. L'ensemble de ces courbes est contenu dans un fermé de dimension $\leq 4n - 7$. L'ouvert

$$C_n^* = C_n - \beta(\overline{A'} \cup A'')$$

satisfait aux conditions demandées. \square

LEMME 10.5. – *Le long des fibres de π le faisceau inversible $\mathcal{O}(\partial M_n)$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-2)$.*

Démonstration. – On sait que le groupe de Picard de M_n est \mathbb{Z}^2 ; on le décrit en considérant l'orthogonal c^\perp de $c = 2 - nh^2$ dans le groupe de Grothendieck $K(\mathbb{P}_2)$ pour la forme quadratique $u \mapsto \chi(u^2)$ et le morphisme naturel

$$\lambda_{M_n} : c^\perp \longrightarrow \text{Pic}(M_n)$$

défini par le déterminant de la cohomologie [16]. On sait que cet homomorphisme est un isomorphisme. Considérons le sous-groupe de base \mathcal{D} et \mathcal{B} où \mathcal{D} est le fibré déterminant de Donaldson, et \mathcal{B} le fibré déterminant, défini par $\mathcal{B} = -\lambda_{M_n}(u)$ où $u \in K(\mathbb{P}_2)$ est la classe de Grothendieck définie par $u = 2 + 2h + (n - 4)h^2$. Ce sous-groupe est d'indice 2 ou 1 suivant que n est pair ou impair. Dans $\text{Pic}(M_n)$, on a, en notations additives, $\partial M_n = 5\mathcal{D} - \mathcal{B}$ (cf. [17]). Fixons un point de U_{n-1} correspondant à un faisceau localement libre stable E et un point $x \in \mathbb{P}_2$. Pour calculer \mathcal{B} le long de la droite $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(E_x)$, on introduit la famille F paramétrée par $\mathbb{P}(E_x)$ définie par la suite exacte canonique sur $\mathbb{P}(E_x) \times \mathbb{P}_2$

$$(10.2) \quad 0 \longrightarrow F \longrightarrow \mathcal{O} \boxtimes E \longrightarrow \mathcal{O}(1) \boxtimes k(x) \longrightarrow 0$$

où $k(x)$ est le faisceau structural du point x . La famille F ainsi obtenue fournit par la propriété de module grossier un morphisme $f_F : \mathbb{P}(E_x) \longrightarrow M_n$ qui identifie la fibre à la droite projective $\mathbb{P}(E_x)$. De la suite exacte ci-dessus, et de la caractérisation de \mathcal{B} , il en découle, en introduisant les projections naturelles pr_1 et pr_2 sur $\mathbb{P}(E_x)$ et \mathbb{P}_2 respectivement

$$f_F^*(\mathcal{B}) = -\lambda_{M_n}(u) = \det \text{pr}_{1!}(\mathcal{O}(1) \boxtimes k(x) \cdot \text{pr}_2^*(u))$$

et par suite $\mathcal{B} = \mathcal{O}(2)$. Puisque \mathcal{D} est trivial sur les fibres de β , ceci conduit au résultat. \square

11. Construction d'une surface Σ rencontrant ∂M_n transversalement le long d'une fibre de π

11.1. Faisceaux de Hulsbergen

DÉFINITION 11.1. – Un faisceau semi-stable F de rang 2 et classes de Chern $(0, n)$ est appelé faisceau de Hulsbergen si $\dim H^0(F(1)) \geq 1$.

On considère le schéma universel $\Xi \subset \text{Hilb}^{n+1}(\mathbb{P}_2) \times \mathbb{P}_2$ et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Xi & \xrightarrow{\text{pr}_2} & \mathbb{P}_2 \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \\ \text{Hilb}^{n+1}(\mathbb{P}_2) & & \end{array}$$

L'image directe $\mathcal{R} = R^1 \text{pr}_{1*}(\mathcal{I}_\Xi(-1)) = \text{pr}_{1*}(\mathcal{O}_\Xi(-1))$ est un faisceau localement libre de rang $n + 1$ sur le schéma de Hilbert. L'espace total du fibré en espaces projectifs (au sens de Grothendieck) $S = \mathbb{P}(\mathcal{R})$ paramètre les systèmes cohérents semi-stables $(\Gamma, F(1))$, où F est un faisceau de rang 2, de classes de Chern $(0, n)$ et $\Gamma \subset H^0(F)$ un sous-espace vectoriel de dimension 1, pour une notion adéquate de semi-stabilité [17]. Considérons le fibré quotient canonique $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{R})}(1)$ sur $\mathbb{P}(\mathcal{R})$. Il existe sur $S \times \mathbb{P}_2$ une extension universelle

$$(11.1) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}(1, -1) \longrightarrow \mathbf{F} \longrightarrow \mathcal{I}_{\Xi, S}(0, 1) \longrightarrow 0$$

où Ξ_S est le sous-schéma de codimension 2 obtenu à partir de Ξ par changement de base. Cette famille \mathbf{F} définit une application rationnelle $S \rightsquigarrow M_n$. L'adhérence de l'image est constituée des points de M_n qui peuvent se représenter par un faisceau de Hulsbergen ; ce fermé est irréductible de dimension $3n + 2$ (cf. [17]).

11.2. Famille à un paramètre de faisceaux de Hulsbergen de D associée à un couple

$(E, x_0) \in P_{n-1} \times \mathbb{P}_2$ **général**

Considérons un fibré de Poncelet E fixé, de classes de Chern $(0, n - 1)$ associé à un système linéaire (Γ, Θ) sans point de base sur une conique lisse C de \mathbb{P}_2 . Le faisceau Θ est un faisceau inversible de degré n sur la conique C . On a donc une suite exacte

$$(11.2) \quad 0 \longrightarrow \Gamma^* \otimes \mathcal{O} \longrightarrow E(1) \longrightarrow \check{\Theta} \longrightarrow 0$$

de sorte que si x_0 est un point choisi en dehors de C la fibre E_{x_0} de E s'identifie à Γ^* . Considérons la droite projective $\mathbb{P} = \mathbb{P}(\Gamma^*) = \mathbb{P}(E_{x_0})$. Sur $\mathbb{P} \times \mathbb{P}_2$, la suite exacte (10.2) définit une famille plate de faisceaux paramétrant la fibre de $\pi : D \longrightarrow U_{n-1} \times \mathbb{P}_2$ au-dessus du point (E, x_0) . Ces faisceaux sont évidemment des faisceaux de Hulsbergen.

LEMME 11.2. – *Le faisceau F définit une famille de faisceaux de Hulsbergen de M_n qui provient d'un morphisme $\varphi : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{R})$.*

Démonstration. – Considérons le sous-schéma Δ de $\mathbb{P}_1 \times C$, plat et fini au-dessus de \mathbb{P}_1 , défini par le schéma des zéros de la section canonique de $\mathcal{O}(1) \boxtimes \Theta$ associée au système linéaire. Le choix d'un générateur de $\wedge^2 \Gamma^*$ fournit un isomorphisme $\Gamma \simeq \Gamma^*$; on dispose alors de la suite exacte d'Euler sur \mathbb{P}

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \otimes \Gamma^* \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \longrightarrow 0$$

et par suite d'un morphisme injectif $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1) \boxtimes \mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{O} \boxtimes E(1)$ dont le conoyau est isomorphe à $\mathcal{I}_{\Delta}(1, 2)$. Considérons l'idéal \mathcal{I}_Z du sous-schéma de $Z = \Delta \cup (\mathbb{P} \times \{x_0\})$; ce sous-schéma de dimension relative 0 et de degré $n + 1$ au-dessus de la droite projective \mathbb{P} . On en déduit le diagramme commutatif de suites exactes au-dessus de $\mathbb{P} \times \mathbb{P}_2$:

$$(11.3) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & 0 & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}(-1, -1) & \longrightarrow & F & \longrightarrow & \mathcal{I}_Z(1, 1) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}(-1, -1) & \longrightarrow & \mathcal{O} \boxtimes E & \longrightarrow & \mathcal{I}_{\Delta}(1, 1) \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \boxtimes k(x_0) & \simeq & \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \boxtimes k(x_0) \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

La propriété universelle du schéma de Hilbert fournit un plongement $\psi: \mathbb{P} \longrightarrow \text{Hilb}^{n+1}(\mathbb{P}_2)$ tel que $(\psi \times \text{id})^{-1}(\Xi) = Z$. Considérons la suite exacte

$$(11.4) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1, -1) \longrightarrow F \longrightarrow \mathcal{I}_Z(1, 1) \longrightarrow 0$$

figurant dans le diagramme ci-dessus. Si on restreint cette suite exacte à la fibre $\{\eta\} \times \mathbb{P}_2$ au-dessus du point $\eta \in \mathbb{P}$ on obtient encore par platitude une suite exacte, et cette suite exacte n'est pas scindable puisque le faisceau associé F_η n'a qu'un point singulier. Ainsi, l'extension (11.4) définit un morphisme $\varphi: \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{R})$ au-dessus de ψ caractérisé par le fait que l'extension obtenue à partir de (11.1) par le changement de base φ est l'extension (11.4). \square

On se propose d'étendre le morphisme φ en un plongement $\phi: \Sigma \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{R})$ d'une surface d'Hirzebruch au-dessus de \mathbb{P} . Commençons par l'étude de $\psi^*(\mathcal{R})$:

LEMME 11.3. – Soit Δ le schéma des zéros de la section canonique de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \boxtimes \Theta$, et $t \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1))$ une forme linéaire ne s'annulant pas en x_0 .

(i) Le choix de t induit un isomorphisme

$$\psi^*(\mathcal{R}) = \text{pr}_{1*}(\mathcal{O}_\Delta(-1)) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}.$$

(ii) Soit $\Gamma^\perp \subset H^0(\Theta)^*$ l'orthogonal de Γ . Le faisceau $\text{pr}_{1*}(\mathcal{O}_\Delta(-1))$ possède un faisceau inversible quotient L isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-2)$ et un seul ; le noyau de la surjection

$$\text{pr}_{1*}(\mathcal{O}_\Delta(-1)) \xrightarrow{j} L$$

est canoniquement isomorphe à $\Gamma^\perp \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)^{n-1}$.

(iii) Dans l'isomorphisme

$$\text{Ext}^1(\mathcal{I}_Z(0, 2), L) \simeq \text{Hom}(\psi^*(\mathcal{R}), L)$$

l'élément de $\text{Ext}^1(\mathcal{I}_Z(0, 2), L)$ sur $\mathbb{P} \times \mathbb{P}_2$ correspondant à la projection $\psi^*(\mathcal{R}) \longrightarrow L$ est à homothétie près l'extension associée à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1, -1) \longrightarrow F \longrightarrow \mathcal{I}_Z(1, 1) \longrightarrow 0$$

figurant dans le diagramme (11.3). En particulier, $\varphi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{R})}(1)) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-2)$.

Démonstration. – On a évidemment $\mathcal{R} \simeq \text{pr}_{1*}(\mathcal{O}_\Xi(-1))$ et par changement de base $f^*(\mathcal{R}) \simeq \text{pr}_{1*}(\mathcal{O}_Z(-1))$. Il en découle (i). De la résolution

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \boxtimes \Theta^* \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P} \times C} \longrightarrow \mathcal{O}_\Delta \longrightarrow 0$$

on tire la suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{pr}_{1*}(\mathcal{O}_\Delta(-1)) \longrightarrow R^1 \text{pr}_{1*}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1) \boxtimes \Theta^*(-1)) \longrightarrow R^1 \text{pr}_{1*}(\mathcal{O}_{\mathbb{P} \times C}(0, -1)) \longrightarrow 0$$

ce qui montre après dualité de Serre que $\mathcal{N} = \text{pr}_{1*}(\mathcal{O}_\Delta(-1))$ est le noyau du morphisme naturel $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1) \otimes H^0(\Theta)^* \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ induit par la projection canonique $H^0(\Theta)^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$. La filtration de Harder–Narasimhan de \mathcal{N} fournit la suite exacte attendue : le quotient est le noyau du morphisme $\Gamma^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}$, lequel s'identifie, après avoir choisi un générateur de

$\wedge^2 \Gamma^*$, à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-2)$ ce qui démontre (ii). L'isomorphisme $\text{Ext}^1(\mathcal{I}_Z(0, 2), L) \simeq \text{Hom}(f^*(\mathcal{R}), L)$ résulte du théorème de dualité de Serre relatif pour la projection $\text{pr}_1: \mathbb{P} \times \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}$. Cet isomorphisme prouve qu'il n'y a qu'une extension non scindée à isomorphisme près. Il en découle l'assertion (iii). \square

11.3. La surface de Hirzebruch Σ

Considérons le fibré vectoriel de rang 2 sur \mathbb{P} défini par $W = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}$. C'est un fibré vectoriel quotient de rang 2 de $\psi^*(\mathcal{R})$ et par conséquent la surface de Hirzebruch $\Sigma = \mathbb{P}(W)$ se plonge dans $\mathbb{P}(\mathcal{R})$, de sorte que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \Sigma & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{P}(\mathcal{R}) \\
 \pi \downarrow & \nearrow \varphi & \downarrow \pi \\
 \mathbb{P} & \xrightarrow{\psi} & \text{Hilb}^{n+1}(\mathbb{P}_2)
 \end{array}$$

où ϕ est le plongement ci-dessus. La surface Σ paramètre une extension obtenue à partir de l'extension (11.1) par changement de base, et donc une famille \mathcal{F} de faisceaux μ -semi-stables de rang 2 et classe de Chern $(0, n)$. Plus précisément :

PROPOSITION 11.4. – *Le faisceau \mathcal{F} définit une famille plate de faisceaux stables paramétrée par la surface de Hirzebruch Σ .*

Démonstration. – La surface Σ a deux sections canoniques Σ_0 et Σ_∞ correspondant aux quotients $\mathcal{O}(-2)$ et \mathcal{O} . Le long de la section Σ_0 , le morphisme composé $\mathbb{P} \simeq \Sigma_0 \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{R})$ coïncide avec le morphisme φ considéré ci-dessus. Désignons par Σ^* l'ouvert complémentaire de ces deux sections, et par Z_Σ le sous-schéma de $\Sigma \times \mathbb{P}_2$ obtenu à partir de $Z \subset \mathbb{P} \times \mathbb{P}_2$ par le changement de base $\Sigma \rightarrow \mathbb{P}$. La projection $\phi^* \pi^*(\mathcal{R}) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$ induit une section σ du faisceau inversible le long de Z_Σ défini par $\underline{\text{Ext}}^1(\mathcal{I}_{Z_\Sigma}(0, 2), \text{pr}_1^*(\mathcal{O}_\Sigma(1)))$. Ce faisceau inversible est isomorphe à $\underline{\text{Ext}}^2(\mathcal{O}_{Z_\Sigma}(2), \text{pr}_1^*(\mathcal{O}_\Sigma(1)))$ et s'obtient donc, après tensorisation par $\mathcal{O}_\Sigma(1)$, par le changement de base $\Sigma \rightarrow \mathbb{P}$ à partir du faisceau inversible sur Z

$$\underline{\text{Ext}}^2(\mathcal{O}_\Delta, \mathcal{O}(0, -2)) \oplus \underline{\text{Ext}}^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P} \times \{x_0\}}, \mathcal{O}(0, -2)) = (\mathcal{O}(1) \boxtimes \Theta)|_\Delta \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P} \times \{x_0\}}.$$

Compte tenu du fait que le faisceau $\mathcal{O}(-1) \boxtimes \Theta$ est trivial sur Δ , ce faisceau s'identifie aussi à $\mathcal{O}(2, 0)|_\Delta \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P} \times \{x_0\}}$. Il en résulte que cette section ne s'annule pas sur l'ouvert $\Sigma^* \times \mathbb{P}_2$, et donc le faisceau $\mathcal{F}|_{\Sigma^* \times \mathbb{P}_2}$ est localement libre. Pour $\eta \in \Sigma^*$, le faisceau \mathcal{F}_η est donc un faisceau localement libre de rang 2, de classes de Chern $(0, n)$ qui n'a pas de sections ; il en résulte que c'est un fibré stable. Reste l'étude de \mathcal{F} le long de la section Σ_∞ .

LEMME 11.5. – *Pour $\eta \in \Sigma_\infty$, le faisceau \mathcal{F}_η est un faisceau stable singulier aux points du diviseur Δ_η de C .*

Démonstration. – De la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{I}_{Z_\eta} \rightarrow \mathcal{I}_{\Delta_\eta} \oplus \mathcal{I}_{\{x_0\}} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow 0$ sur \mathbb{P}_2 découle l'isomorphisme

$$\text{Ext}^1(\mathcal{I}_{Z_\eta}(1), \mathcal{O}(-1)) \simeq \text{Ext}^1(\mathcal{I}_{\Delta_\eta}(1), \mathcal{O}(-1)) \oplus \text{Ext}^1(\mathcal{I}_{\{x_0\}}(1), \mathcal{O}(-1)).$$

Dire que η appartient à la section Σ_∞ signifie que l'extension provient de $\text{Ext}^1(\mathcal{I}_{\{x_0\}}(1), \mathcal{O}(-1))$ dans cet isomorphisme. Le faisceau G associé à une telle extension est alors le faisceau trivial de rang 2. Une section t de $\mathcal{O}(1)$ ne s'annulant pas sur Δ_η fournit un morphisme surjectif $G \rightarrow \mathcal{O}_{\Delta_\eta}$ dont \mathcal{F}_η est le noyau, et on obtient le diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}(-1) & \longrightarrow & \mathcal{F}_\eta & \longrightarrow & \mathcal{I}_{Z_\eta}(1) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \wr & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}(-1) & \longrightarrow & G & \longrightarrow & \mathcal{I}_{\{x_0\}}(1) \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & \mathcal{O}_{\Delta_\eta} & \xrightarrow[\sim]{t} & \mathcal{O}_{\Delta_\eta}(1) \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Le choix d'un isomorphisme $G \simeq \mathcal{O}^2$ détermine des formes linéaires (x, y) indépendantes s'annulant au point x_0 .

Considérons un sous-faisceau F' de \mathcal{F}_η tel que le quotient $F'' = \mathcal{F}_\eta/F'$ soit sans torsion. Alors $c_1(F') \leq 1$ et en cas d'égalité, la relation $c_2(F') + c_2(F'') = n + 1$ montre que $c_2(F') \leq n + 1$. Si $c_1(F') = 1$, le morphisme induit $F' \rightarrow \mathcal{I}_{Z_\eta}(1)$ serait non nul, et donc $c_2 \geq n + 1$. Alors ce morphisme serait un isomorphisme, et la première ligne serait scindée, ce qui est absurde parce que \mathcal{F}_η est évidemment localement libre au voisinage de $\{x_0\}$. Donc $c_1(F') \leq 0$.

Supposons que $c_1(F') = 0$. Le faisceau F' est l'intersection de \mathcal{F}_η avec un sous-faisceau $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{O}^2$, donné par un vecteur non nul $(\lambda, \mu) \in k^2$. Ainsi, le faisceau F' est le noyau du morphisme $\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda x + \mu y} \mathcal{O}_{\Delta_\eta}(1)$. Par suite,

$$c_2(F') = \text{lg}(\ker \mathcal{O}_{\Delta_\eta} \xrightarrow{\lambda x + \mu y} \mathcal{O}_{\Delta_\eta}(1)) \geq n - 2$$

Ainsi, l'hypothèse $n \geq 5$ entraîne $c_2(F') > n/2$. Donc le faisceau \mathcal{F}_η est stable. \square

La propriété de module grossier de M_n permet d'associer à la famille \mathcal{F} un morphisme $f : \Sigma \rightarrow M_n$ qui ne rencontre la frontière ∂M_n que le long des sections Σ_0 et Σ_∞ . Plus précisément, l'image réciproque de D est, au moins ensemblistement, la section Σ_0 . L'énoncé suivant montre que c'est l'image réciproque au sens des schémas :

PROPOSITION 11.6. – *Le morphisme $f : \Sigma \rightarrow M_n$ est transverse à D le long de Σ_0 .*

Démonstration. – Pour toute famille plate $(\mathcal{E}_s)_{s \in S}$ de faisceaux stables de M_n , paramétrée par une variété algébrique lisse S , l'image réciproque du diviseur ∂M_n est le sous-schéma défini par l'idéal de Fitting du faisceau $\text{pr}_{1*}(\text{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{O}(0, -1)))$ (Strømme [23], § 4). Si on applique ceci à notre faisceau \mathcal{F} on obtient sur $\Sigma \times \mathbb{P}_2$ la présentation

$$\mathcal{O}(-1, 0) \xrightarrow{\omega} \text{Ext}^2(\mathcal{O}_{Z_\Sigma}, \mathcal{O}(0, -2)) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{O}(0, -1)) \rightarrow 0.$$

Le faisceau $\underline{\text{Ext}}^2(\mathcal{O}_{Z_\Sigma}, \mathcal{O}(0, -2))$ est localement libre de rang 1 sur Z , et le morphisme ω s'identifie à la section canonique de $\underline{\text{Ext}}^2(\mathcal{O}_{Z_\Sigma}, \mathcal{O}(0, -2)) \otimes \mathcal{O}_\Sigma(1, 0)$ sur Σ déjà utilisée ; si Δ_Σ désigne l'image réciproque de Δ dans $\Sigma \times \mathbb{P}_2$, on sait que

$$\underline{\text{Ext}}^2(\mathcal{O}_{Z_\Sigma}, \mathcal{O}(0, -2)) = \mathcal{O}_{\Delta_\Sigma}(2, 0) \oplus \mathcal{O}_{\Sigma \times \{x_0\}}$$

et sur le complémentaire de Σ_∞ la première composante ω_1 de ω ne s'annule pas. La deuxième composante ω_2 de ω est obtenue en restreignant l'image réciproque du morphisme composé $\mathcal{O}_\Sigma \hookrightarrow \pi^*(W) \rightarrow \mathcal{O}_\Sigma(1)$ à $\Sigma_0 \times \{x_0\}$. Le complémentaire de Σ_∞ est isomorphe à l'espace total du fibré $\mathcal{O}_\mathbb{P}(-2)$, la section Σ_0 s'identifiant à la section nulle, et le fibré $\mathcal{O}_\Sigma(1)$ est isomorphe à l'image réciproque de $\mathcal{O}_\mathbb{P}(-2)$ sur cet ouvert ; le morphisme ω_2 ci-dessus est donné par l'identification $\mathcal{O}_\mathbb{P}(-2) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P} \times \{x_0\}}(-2, 0)$ des espaces totaux de ces fibrés inversibles. En dehors de Σ_∞ , la section ω_2 ne s'annule que sur Σ_0 et ceci transversalement à la section nulle. Par suite, le faisceau $\text{pr}_{1*}(\underline{\text{Ext}}^1(\mathcal{F}, \mathcal{O}_{\Sigma \times \mathbb{P}_2}(0, -1)))$ est de longueur relative 1 le long de la section Σ_0 . Il en découle qu'au sens des schémas, on a $f^{-1}(\partial M_n) = \Sigma_0$. On retrouve le fait que ∂M_n est lisse en tout point de l'image de f ; de plus, puisque Σ_0 est lisse, le morphisme f est transverse à ∂M_n . \square

12. Image de Σ par le morphisme de Barth

La famille de faisceaux \mathcal{F} paramétrée par la surface Σ est une famille de faisceaux stables de classes de Chern $(0, n)$. On peut pour cette famille considérer la courbe des droites de saut. On note $\gamma : \Sigma \rightarrow \mathcal{C}_n$ le morphisme composé $\beta \circ f$ ainsi obtenu.

LEMME 12.1. – *Le long des fibres de $\Sigma \rightarrow \mathbb{P}$ le morphisme γ est une homographie et donc est injectif.*

Démonstration. – Soient $\eta \in \mathbb{P}$, et Z_η la fibre de Z au-dessus de η . Considérons, pour $t \in \Sigma_\eta$, la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathcal{F}_t \rightarrow \mathcal{I}_{Z_\eta}(1) \rightarrow 0.$$

Considérons le diagramme standard

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\text{pr}_2} & \mathbb{P}_2 \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \\ \mathbb{P}_2^* & & \end{array}$$

La courbe des droites de saut $\gamma(t) = \beta_F$ du faisceau $F = \mathcal{F}_t$ est définie par l'idéal de Fitting du faisceau $R^1 \text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^*(F(-1)))$. On a la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^*(\mathcal{I}_{Z_\eta})) \rightarrow \mathcal{O}(-1) \rightarrow R^1 \text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^*(F(-1))) \rightarrow R^1 \text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^*(\mathcal{I}_{Z_\eta})) \rightarrow 0.$$

Le support de $R^1 \text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^*(\mathcal{I}_Z))$ est formé des points correspondant aux droites de \mathbb{P}_2 qui rencontrent Z suivant un sous-schéma de longueur ≥ 2 ; ce sous-schéma est fini. Il en découle que $\text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^*(\mathcal{I}_Z))$ est un faisceau sans torsion de rang 1 et de classe de Chern $c_1 = -n - 1$. L'idéal de Fitting de $R^1 \text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^*(F(-1)))$ coïncide avec $\text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^*(\mathcal{I}_{Z_\eta}))(1)$ en dehors d'un fermé de codimension 2. Par suite, l'équation de β_F dépend linéairement de la classe

$\omega \in W_\eta^* \subset \text{Ext}^1(\mathcal{I}_{Z_\eta}, \mathcal{O}(-2))$ qui définit l'extension. Cette équation est non nulle si ω est non nulle. Par suite, l'application obtenue

$$\Sigma_\eta \longrightarrow \mathcal{C}_n$$

est une homographie. \square

Pour décrire l'image de Σ par γ il suffit de décrire les images des sections Σ_0 et Σ_∞ . Le long de Σ_0 , le morphisme γ est constant et a pour image le point s défini par la courbe $\beta_E + \tilde{x}_0$. Le long de la section $s_\infty : \mathbb{P} \longrightarrow \Sigma_\infty$ de Σ , la famille \mathcal{F} est isomorphe au noyau d'un morphisme surjectif sur $\mathbb{P} \times \mathbb{P}_2$

$$\mathcal{O}^2 \longrightarrow \mathcal{O}_\Delta$$

associé au diviseur Δ . La restriction de γ à $\mathbb{P} \simeq \Sigma_\infty$ associe à un point de $\mathbb{P}(\Gamma)$, correspondant à un diviseur $\eta = \sum_{a \in C} n_a a \in \mathbb{P}$, la courbe du plan projectif dual décomposée en n droites définie par $\gamma(s_\infty(\eta)) = \sum_{a \in C} n_a \tilde{a}$.

LEMME 12.2. – *Dans l'espace projectif \mathcal{C}_n , l'image de la section $\Sigma_\infty \subset \Sigma$ par le morphisme γ est une conique lisse Q qui ne rencontre chacune des droites $\gamma(\Sigma_\eta)$, où $\eta \in \mathbb{P}$, qu'en un seul point.*

Démonstration. – Considérons sur la conique C un fibré inversible A de degré 1, de sorte que $\Theta \simeq A^{\otimes n}$. Sur $\mathbb{P}(H^0(\Theta)^*) \times C$ on dispose d'une section canonique de $\mathcal{O}(1) \boxtimes L$ dont le schéma des zéros est une hypersurface plate et finie de degré n au-dessus de l'espace projectif $\mathbb{P}(H^0(\Theta)^*)$. On en déduit un morphisme $\mathbb{P}(H^0(\Theta)^*) \longrightarrow \text{Div}^n(C)$ qui est évidemment un isomorphisme. On a d'autre part un isomorphisme $S^n C \simeq \text{Div}^n(C)$ qui identifie le fibré $\mathcal{O}(1)$ avec le fibré déterminant $\mathcal{D}_A = A \boxtimes \cdots \boxtimes A / \mathfrak{S}_n$. Dans le plongement $S^n C = \text{Div}^n(C) \hookrightarrow \mathcal{C}_n$ l'image réciproque du fibré $\mathcal{O}(1)$ est isomorphe à $\mathcal{O}(2)$. L'image de \mathbb{P} dans $\text{Div}^n(C)$ est une droite projective. Considérons le plongement $j = \gamma \circ s_\infty : \mathbb{P} \hookrightarrow \mathcal{C}_n$. L'application linéaire associée $H^0(\mathcal{C}_n, \mathcal{O}(1)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}(2))$ est obligatoirement surjective, sinon le morphisme $j : \mathbb{P} \longrightarrow \mathcal{C}_n$ se factoriserait à travers un morphisme de degré 2, et ne serait pas injectif. Le morphisme j se factorise suivant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P} & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}(2))^*) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathcal{C}_n \end{array}$$

où i est le plongement de Veronese de la droite \mathbb{P} dans le plan projectif. Donc l'image de la droite projective \mathbb{P} est une conique lisse Q . \square

Montrons que, pour $\eta \in \mathbb{P}$, la conique Q ne rencontre la droite $\gamma(\Sigma_\eta)$ qu'en un seul point : sinon, le point défini par la courbe $\beta_E + \tilde{x}_0$ appartiendrait au plan $\text{Span}(Q)$ de la conique Q et il existerait des droites $\gamma(\Sigma_\eta)$ tangentes à Q . Or le morphisme induit par la différentielle $d\gamma$ sur les fibrés normaux

$$N_{\Sigma_\infty/\Sigma} = \mathcal{O}(2) \longrightarrow N_{Q/\mathcal{C}_n} = \mathcal{O}(2) \oplus \mathcal{O}(1)^{N-2}$$

où $N = \dim \mathcal{C}_n$ est non nul est donc injectif. Ceci contredit le fait qu'il existe parmi les droites $\gamma(\Sigma_\eta)$ des droites tangentes à Q .

COROLLAIRE 12.3. – (i) *Le point s n'appartient pas au plan projectif $\text{Span}(Q)$ engendré par la conique Q .*

(ii) L'image de Σ par le morphisme γ dans l'espace projectif des courbes \mathcal{C}_n est le cône quadratique R de sommet le point $s = \beta_E + \check{x}_0$ et de base la conique $Q = \gamma(\Sigma_\infty)$.

Considérons l'espace projectif $\text{Span}(R)$ de dimension 3 engendré par le cône R . L'énoncé suivant est la clé de la démonstration :

LEMME 12.4. – Il existe un ouvert de Zariski non vide \mathcal{U} de $\text{Grass}(2, H^0(\Theta)) \times (\mathbb{P}_2 \setminus C)$ tel que pour $(\Gamma, x_0) \in \mathcal{U}$ les propriétés suivantes soient satisfaites :

- (i) La courbe de saut β_E du fibré de Poncelet est lisse.
- (ii) Le sous-espace projectif \overline{T}_s tangent en s à l'image du morphisme

$$\mathcal{C}_{n-1} \times \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_n$$

défini par l'addition des diviseurs de \mathbb{P}_2^* rencontre l'espace projectif $\text{Span}(R)$ au seul point s défini par le sommet du cône R .

Démonstration. – D'après la proposition 5.8, si $\Gamma \subset H^0(\Theta)$ est sans point de base et tel que $z^2 H^0(\Theta(-2)) \cap \Gamma = \{0\}$ pour toute droite d'équation $z = 0$ la courbe de Poncelet associée à (Γ, Θ) est lisse. Donc la condition (i) est satisfaite. Elle implique que le morphisme $\mathcal{C}_{n-1} \times \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_n$ est non ramifié en (β_E, \check{x}_0) : l'espace tangent projectif \overline{T}_s en s à l'image est alors l'espace projectif des courbes de \mathcal{C}_n qui contiennent l'intersection $\beta_E \cap \check{x}_0$. Vérifier la condition (ii) revient à vérifier que le plan projectif $\text{Span}(Q)$ engendré par la conique Q ne rencontre pas \overline{T}_s .

On désigne pour $z \in \mathbb{P}_2^*$ par $H_z \subset \mathcal{C}_n$ l'hyperplan projectif des courbes de degré n de \mathbb{P}_2^* qui passent par z . Tout point $z \in \beta_E$ définit une droite de \mathbb{P}_2 , dont on désigne aussi par z l'équation, telle que $\Gamma \cap z H^0(\Theta(-1)) \neq \{0\}$. L'intersection $H_z \cap Q$ est réduite au seul point défini par la courbe associée au diviseur (s) d'une section non nulle $s \in \Gamma \cap z H^0(\Theta(-1))$. En effet, un point de $H_z \cap Q$ définit un diviseur de C associé à une section $t \in \Gamma$ s'écrivant $(t) = \sum_i a_i$, tel que $a_1 \in z$. Les sections s et t s'annulent alors en a_1 , et puisque le système linéaire Γ est sans point de base, les sections s et t sont proportionnelles. Il en résulte que l'hyperplan H_z rencontre le plan $\text{Span} Q$ suivant la droite tangente à la conique Q déterminée par le diviseur (s) .

Soit \check{Q} la conique duale de Q . Considérons le morphisme

$$\tau : \beta_E \longrightarrow \check{Q}$$

qui associe au point z la tangente $H_z \cap \text{Span}(Q)$. Dans l'identification $\check{Q} \simeq \mathbb{P}(\Gamma)$, ce morphisme associe à z l'unique section $s \in \mathbb{P}(\Gamma)$ qui s'annule sur $z \cap C$. C'est un morphisme fini de degré $\frac{1}{2}n(n-1)$.

LEMME 12.5. – Si x_0 est générique, la restriction de τ à $\beta_E \cap \check{x}_0$ est injective.

Ce lemme sera démontré ci-dessous. Supposons x_0 suffisamment général pour que la propriété du lemme 12.5 ci-dessus soit vraie et que la droite \check{x}_0 ne soit pas tangente à β_E . Si \overline{T}_s rencontre $\text{Span}(Q)$ en un point w , le point w définit une courbe de degré n qui contient $\beta_E \cap \check{x}_0$. Alors w appartient aux tangentes $H_z \cap \text{Span}(Q)$, pour tout $z \in \beta_E \cap \check{x}_0$. D'après le choix de x_0 ces tangentes sont distinctes : le point w appartient donc à $n-1$ tangentes à la conique Q , ce qui est absurde puisque $n \geq 5$. \square

Démonstration du lemme 12.5. – Considérons l'ensemble K des couples $(s, \ell) \in \mathbb{P}(\Gamma) \times \mathbb{P}_2^*$ tels que $\text{lg}(\ell \cap \tau^{-1}(s)) \geq 2$. Par projection sur $\mathbb{P}(\Gamma)$ on voit que c'est un fermé de dimension 1 et par conséquent l'image de K dans \mathbb{P}_2^* est de dimension 1. Si on prend \check{x}_0 en dehors de ce fermé, la restriction de τ à $\beta_E \cap \check{x}_0$ est injective. \square

13. Contractions

On se propose dans cette section de donner un énoncé permettant de vérifier que sous certaines conditions, un morphisme est une contraction sur son image, et donc génériquement injectif. Un morphisme projectif et plat de fibre \mathbb{P}_1 est appelé \mathbb{P}_1 -fibration.

PROPOSITION 13.1. – Soient $\beta: M \rightarrow C$ un morphisme propre de variétés algébriques irréductibles et lisses, et $Y \subset C$ une sous-variété fermée intègre de C . On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :

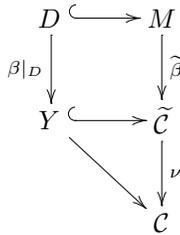
- (i) Au-dessus de l'ouvert $C \setminus Y$, le morphisme β est fini.
- (ii) Le sous-schéma $D = \beta^{-1}(Y)$ est un diviseur de M .
- (iii) Le morphisme induit $\beta|_D: D \rightarrow Y$ est une \mathbb{P}_1 -fibration, et la restriction de $\mathcal{O}(D)$ à la fibre est de degré $-k < 0$.
- (iv) Le morphisme induit par la différentielle sur les faisceaux conormaux

$$\mathcal{N}_{Y/C} \rightarrow \beta_*(\mathcal{N}_{D/M})$$

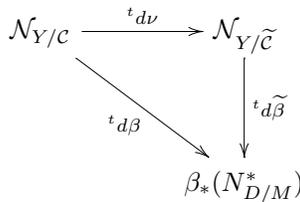
est surjectif.

Alors le morphisme β est génériquement injectif.

Pour démontrer ce résultat, on considère la factorisation de Stein de β et le diagramme commutatif suivant qui en découle :



Par construction, ν est un morphisme fini, et on a $\tilde{\beta}_*(\mathcal{O}_M) = \mathcal{O}_{\tilde{C}}$. On obtient en considérant le faisceau conormal $\mathcal{N}_{Y/C}$ de Y dans \tilde{C} la factorisation de ${}^t d\beta$:



L'assertion (ii) du lemme 13.2 ci-dessous montre que, sur un ouvert non vide de Y , le morphisme ${}^t d\tilde{\beta}$ est génériquement un isomorphisme. D'après la condition (iv), la flèche horizontale est donc génériquement surjective. Il en résulte que la différentielle $d\nu$ est génériquement injective le long de Y et par suite le morphisme ν est génériquement injectif : il suffit en effet d'appliquer le lemme 7.4 du chapitre II de Hartshorne [8] au morphisme d'anneaux locaux de $\mathcal{O}_{C,\xi} \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{C},\xi}$ induit par ν , où ξ désigne le point générique de Y . Le morphisme $\tilde{\beta}$ étant birationnel, on obtient que le morphisme β est aussi génériquement injectif, ce qui achève la démonstration de la proposition 13.1.

Il reste à étudier le faisceau conormal $\mathcal{N}_{Y/\tilde{C}}$.

LEMME 13.2. – *On suppose satisfaites les conditions (i),(ii), et (iii) de la proposition 13.1. Soit $Y^{[\ell]}$ le voisinage infinitésimal d'ordre ℓ de Y dans \tilde{C} et $D^{[\ell]}$ le voisinage infinitésimal d'ordre ℓ de D dans M .*

(i) *Le morphisme*

$$\mathcal{O}_{Y^{[\ell]}} \longrightarrow \tilde{\beta}_*(\mathcal{O}_{D^{[\ell]}})$$

est génériquement un isomorphisme.

(ii) *Le morphisme*

$${}^t d\tilde{\beta} : \mathcal{N}_{Y/\tilde{C}} \longrightarrow \tilde{\beta}_*(N_{D/M}^*)$$

est génériquement un isomorphisme.

Démonstration. – Ce lemme est une conséquence du théorème des fonctions formelles (cf. Hartshorne [8]). Désignons par I_Y l'idéal de Y dans \tilde{C} , et par I_D l'idéal de D dans M . L'image réciproque du sous-schéma Y de \tilde{C} par le morphisme $\tilde{\beta}$ est contenue dans l'image réciproque de Y par le morphisme β . Elle coïncide donc avec le sous-schéma D . Soit η le point générique de Y , et $\hat{\mathcal{O}}_{\tilde{C},\eta}$ le complété de l'anneau local $\mathcal{O}_{\tilde{C},\eta}$ pour la topologie I_η -adique. Le théorème des fonctions formelles montre que le morphisme canonique

$$\hat{\mathcal{O}}_{\tilde{C},\eta} \longrightarrow \lim_{\longleftarrow \ell} \tilde{\beta}_*(\mathcal{O}/I_D^\ell)_\eta$$

est un isomorphisme. On sait que le fibré conormal $N_{D/M}^*$ est, le long des fibres de la projection $D \rightarrow Y$, isomorphe à $\mathcal{O}(k)$. D'après le théorème de changement de base, on a $R^1\tilde{\beta}_*(S^\ell N_{D/M}^*) = 0$. Il en résulte que, pour tout $\ell \geq 0$, le morphisme canonique

$$\lim_{\longleftarrow \ell} \tilde{\beta}_*(\mathcal{O}/I_D^\ell)_\eta \longrightarrow \tilde{\beta}_*(\mathcal{O}/I_D^\ell)_\eta$$

est lui aussi surjectif, et le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{O}}_{\tilde{C},\eta} & \longrightarrow & \lim_{\longleftarrow \ell} \tilde{\beta}_*(\mathcal{O}/I_D^\ell)_\eta \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathcal{O}/I_Y^\ell)_\eta & \longrightarrow & \tilde{\beta}_*(\mathcal{O}/I_D^\ell)_\eta \end{array}$$

montre que pour tout entier $\ell > 0$ le morphisme canonique $\mathcal{O}/I_Y^\ell \rightarrow \tilde{\beta}_*(\mathcal{O}/I_D^\ell)$ est surjectif au point générique de Y . Pour $\ell = 1$, ce morphisme est induit par la projection $D \rightarrow Y$ et par suite, c'est un isomorphisme. Le diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I_Y/I_Y^2 & \longrightarrow & \mathcal{O}/I_Y^2 & \longrightarrow & \mathcal{O}/I_Y & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \wr & & \\ 0 & \longrightarrow & \tilde{\beta}_*(I_D/I_D^2) & \longrightarrow & \tilde{\beta}_*(\mathcal{O}/I_D^2) & \longrightarrow & \tilde{\beta}_*(\mathcal{O}/I_D) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

montre que la première flèche verticale est surjective au point générique de Y .

Montrons que le morphisme $\mathcal{O}/I_Y^\ell \rightarrow \tilde{\beta}_*(\mathcal{O}/I_D^\ell)$ est injectif au point générique η de Y . Considérons une section locale $u \in \mathcal{O}_{\tilde{C},\eta}$. On suppose que $\tilde{\beta}^*(u) \in \tilde{\beta}_*(I_D^\ell)_\eta$. Ainsi, $\tilde{\beta}^*(u)$ s'annule à l'ordre ℓ le long de D . Considérons la classe de $\tilde{\beta}^*(u)$ dans $\tilde{\beta}_*(I_D^\ell/I_D^{\ell+1})$. Le morphisme $S^\ell \tilde{\beta}_*(I_D/I_D^2) \rightarrow \tilde{\beta}_*(I_D^\ell/I_D^{\ell+1})$ est, d'après le théorème de changement de base, surjectif. Il en résulte qu'il existe $u_\ell \in I_{Y,\eta}^\ell$ tel que $\tilde{\beta}^*(u - u_\ell)$ appartienne à $\tilde{\beta}_*(I_D^{\ell+1})_\eta$. Par récurrence, on obtient en recommençant la construction précédente pour $i \geq \ell$ des éléments $u_i \in I_{Y,\eta}^{\ell+i}$ tels que

$$\tilde{\beta}^*\left(u - \sum_{\ell \leq i \leq \ell+k} u_i\right) \in \tilde{\beta}_*(I_D^{\ell+k+1})_\eta.$$

Autrement dit, dans $\varprojlim_{\ell} \tilde{\beta}_*(\mathcal{O}/I_D^\ell)_\eta$ on a

$$\tilde{\beta}^*\left(u - \sum_{i \geq \ell} u_i\right) = 0.$$

Compte tenu du théorème des fonctions formelles, cette égalité implique $u = \sum_{i \geq \ell} u_i$ dans le complété $\widehat{\mathcal{O}}_{\tilde{C},\eta}$. Mais alors u appartient au complété $\widehat{I_{Y,\eta}^\ell}$. Mais d'après Atiyah–Macdonald ([1], proposition 10.15), on a

$$\widehat{I_{Y,\eta}^\ell} \cap \mathcal{O}_{\tilde{C},\eta} = I_{Y,\eta}^\ell.$$

Ceci prouve que le morphisme $\mathcal{O}/I_Y^\ell \rightarrow \tilde{\beta}_*(\mathcal{O}/I_D^\ell)$ est injectif au point η . Ceci démontre l'assertion (i). L'assertion (ii) découle du diagramme commutatif de suite exactes déjà écrit, dans lequel les flèches verticales sont maintenant des isomorphismes. \square

14. Fin de la démonstration

On suppose que le théorème 1.1 est vrai à l'ordre $n - 1$. Pour appliquer le résultat de la section ci-dessus, on considère un ouvert \mathcal{C}_n^* de \mathcal{C}_n satisfaisant aux conditions (a)–(d) décrites dans la démonstration du corollaire 10.3.

Considérons la variété $Y = \psi^{-1}(\mathcal{C}_n^*)$ de plongée comme une sous-variété fermée de \mathcal{C}_n^* . Nous allons montrer que les conditions de la proposition 13.1 sont satisfaites avec $k = 2$, et quitte à diminuer au besoin l'ouvert \mathcal{C}_n^* , pour le morphisme $\beta^{-1}(\mathcal{C}_n^*) \rightarrow \mathcal{C}_n^*$ induit par β . En effet, les points du complémentaire Ω de Y dans \mathcal{C}_n^* , s'ils proviennent de M_n , représentent des courbes irréductibles, et le morphisme β est alors quasi-fini d'après [13] et propre au-dessus de cet ouvert Ω , donc fini, ce qui démontre (i). Le sous-schéma image réciproque de Y par β est ensemblistement la trace de D ; nous allons montrer qu'il l'est au sens des schémas. La difficulté est que l'ouvert \mathcal{C}_n^* ne contient pas le point correspondant à la courbe correspondant au sommet s du cône $\gamma(\Sigma)$ construit dans la section § 12. Nous allons donc dans un premier temps travailler au-dessus d'un ouvert \mathcal{C}'_n plus grand que l'ouvert \mathcal{C}_n^* ci-dessus.

Considérons l'ouvert \mathcal{C}'_n de \mathcal{C}_n des courbes qui satisfont à la condition (c), de sorte qu'au-dessus de cet ouvert, le morphisme $j : W = \mathcal{C}_{n-1} \times \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathcal{C}_n$ défini par l'addition des diviseurs de \mathbb{P}_2^* est un plongement sur une sous-variété fermée de \mathcal{C}'_n . Désignons par $Y' \subset U_{n-1} \times \mathbb{P}_2$, $M'_n \subset M_n$ et $D' \subset D$ les images réciproques de l'ouvert \mathcal{C}'_n de sorte qu'on déduit du

diagramme (10.1) le diagramme commutatif

$$(14.1) \quad \begin{array}{ccc} D' & \hookrightarrow & M'_n \\ \pi \downarrow & & \downarrow \beta \\ Y' & \xrightarrow{\psi} & W' \subset C'_n \end{array}$$

La différentielle $d\beta$ induit pour les faisceaux conormaux un morphisme de faisceaux algébriques cohérents au-dessus de Y'

$$(14.2) \quad \psi^*(N_{W'/C'_n}^*) \longrightarrow \pi_*(N_{D'/M'_n}^*).$$

LEMME 14.1. –

- (i) On a $R^1\pi_*(N_{D'/M'_n}^*) = 0$;
- (ii) le faisceau $\pi_*(N_{D'/M'_n}^*)$ est localement libre de rang 3, et sa fibre au-dessus d'un point $z \in Y'$ s'identifie à l'espace vectoriel $H^0(N_{D'/M'_n}^*(z))$ des sections de la restriction $N_{D'/M'_n}^*(z)$ du fibré conormal N_{D'/M'_n}^* à la fibre $\pi^{-1}(z)$.
- (iii) le morphisme de faisceaux localement libres

$$\psi^*(N_{W'/C'_n}^*) \longrightarrow \pi_*(N_{D'/M'_n}^*)$$

induit par l'application cotangente à β est génériquement surjectif.

Démonstration. – Les assertions (i) et (ii) résultent du fait que le morphisme

$$\pi : D \longrightarrow U_{n-1} \times \mathbb{P}_2$$

est un morphisme projectif lisse dont la fibre s'identifie à la droite \mathbb{P}_1 ; en particulier, il est plat, et de plus, la restriction du fibré conormal N_{D/M_n}^* à une fibre est isomorphe à $\mathcal{O}(2)$. Le même résultat est évidemment vrai pour la fibration $D' \rightarrow Y'$ induite par π . Pour (iii) on considère la fibre de π au-dessus du point $z = (E, x_0)$, où E est un fibré de Poncelet de U_{n-1} , associé à un système linéaire (Γ, Θ) sur la conique lisse C , et x_0 un point de \mathbb{P}_2 suffisamment généraux pour que les conclusions du lemme 12.4 soient vraies. Puisque la courbe de Poncelet β_E est lisse, ce point appartient à l'ouvert Y' . Considérons la surface de Hirzebruch Σ associée et son image $f(\Sigma)$, qui rencontre D transversalement suivant la fibre de π au-dessus de z ; considérons la restriction du morphisme à la fibre $\pi^{-1}(z)$

$$\begin{array}{ccc} N_{W'/C'_n}^*(z) & \longrightarrow & \pi_*(N_{D'/M'_n}^*)(z) \\ & & \downarrow \\ & & H^0(N_{D'/M'_n}^*(z)) \end{array}$$

L'application linéaire composée est surjective : en effet, si 3 points a_i sont choisis sur la droite projective $\mathbb{P}_1 = \pi^{-1}(z)$ formant un repère, du fait que $N_{D'/M'_n}^*(z) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(2)$, le morphisme de restriction $H^0(N_{D'/M'_n}^*(z)) \simeq \prod_i N_{D'/M'_n}^*(a_i)$ est un isomorphisme. L'application linéaire composée

$$N_{W'/C'_n}^*(z) \longrightarrow \prod_i N_{D'/M'_n}^*(a_i)$$

est la transposée de l'application linéaire

$$\bigoplus_{i=1,2,3} N_{D'/M'_n}(a_i) \longrightarrow N_{W'/C_n}(z)$$

induite par l'application linéaire tangente $d_{a_i}\beta$ aux points a_i . Cette application linéaire se factorise suivant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1,2,3} N_{D'/M'_n}(a_i) & \longrightarrow & T_s R \\ & \searrow & \downarrow \\ & & N_{W'/C_n}(z) \end{array}$$

où R est le cône quadratique de sommet s construit dans le corollaire 12.3. Compte tenu de la proposition 11.6, la flèche horizontale s'identifie à l'application linéaire

$$\bigoplus_i N_{\Sigma_0/\Sigma}(a_i) \longrightarrow T_s R$$

induite par la différentielle de γ : c'est un isomorphisme. D'après le lemme 12.4, la flèche composée est injective. Donc la flèche verticale est injective. Le lemme en découle, compte tenu du fait que Y' est irréductible, et du fait que les points au-dessus desquels un morphisme de fibrés vectoriels est surjectif forment un ouvert. \square

Fin de la vérification.

Considérons le diagramme induit au-dessus de l'ouvert C_n^*

$$(14.3) \quad \begin{array}{ccc} D^* & \hookrightarrow & M_n^* \\ \pi \downarrow & & \downarrow \beta \\ Y & \xrightarrow{\psi} & C_n^* \end{array}$$

dont on sait déjà qu'il est cartésien au sens ensembliste. La condition (iv) de la proposition 13.1 est satisfaite sur un ouvert non vide de Y ; quitte à diminuer au besoin l'ouvert C_n^* , on peut supposer que cette condition (iv) est vraie sur Y tout entier. Il en résulte que pour $a \in D^*$ la différentielle $d_a\beta$ induit sur les espaces normaux une application linéaire

$$N_{D/M_n}(a) \longrightarrow N_{Y/C_n}(\pi(a))$$

injective. Par suite, l'espace tangent de Zariski en a au sous-schéma $\beta^{-1}(Y)$ est réduit à l'espace tangent $T_a D$. Ainsi, le sous-schéma $\beta^{-1}(Y)$ est réduit à D^* et la condition (ii) de la proposition 13.1 est satisfaite. La condition (iii) étant vraie d'après le lemme 10.5, nous sommes exactement dans les conditions d'application de la proposition 13.1. Donc le morphisme β est génériquement injectif.

Remerciements

Le premier auteur remercie l'ICTP (Trieste) qui l'a invité à présenter ce travail à l'École d'été de géométrie algébrique en 1999. Il remercie aussi le CEFIPRA qui a subventionné son voyage

en Inde et permis d'exposer les résultats de cet article à Bombay et Madras en janvier 2000 dans le cadre du Contrat de coopération 1601-2 (Geometry). Une partie de cet article a été écrite lors du séjour du second auteur à Bonn (octobre 1998-mars 1999) ; il remercie le Max Planck Institute of Mathematics de son accueil.

RÉFÉRENCES

- [1] ATIYAH M.F., MACDONALD I.G., *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1969.
- [2] BARTH W., Some properties of rank-2 vector bundles on \mathbb{P}_n , *Inventiones Math.* **226** (1977) 125–150.
- [3] BARTH W., Moduli of vector bundles on projective plane, *Inventiones Math.* **42** (1977) 63–91.
- [4] BATEMAN H., The quartic curve and its inscribed configurations, *American J. Math.* **36** (1914) 357–386.
- [5] DRÉZET J.M., Groupe de Picard des variétés de modules de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, *Ann. de l'Institut Fourier* **38** (1988) 105–168.
- [6] ELLINGSRUD G., GÖTTSCHE L., Variations of moduli spaces and Donaldson invariants under change of polarization, *J. Reine Angew. Math.* **467** (1995) 1–49.
- [7] ELLINGSRUD G., LE POTIER J., STRØMME S.A., Some Donaldson invariants of $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, in: Maruyama M. (Ed.), *Proceedings du Symposium Taniguchi (décembre 1994, Kyoto)*, Lecture Notes Pure Appl. Math., Vol. **179**, 1996, pp. 33–38.
- [8] HARTSHORNE R., *Algebraic Geometry*, Springer, 1977.
- [9] HE M., Espace de modules de systèmes cohérents, *Int. J. Math.* **9** (5) (1998) 545–598.
- [10] HULEK K., LE POTIER J., Sur l'espace de modules des faisceaux stables de rang 2, de classes de Chern $(0, 3)$ sur \mathbb{P}_2 , *Annales de l'Institut Fourier* **39** (1989) 251–292.
- [11] LANG S., *Algebra*, Addison-Wesley, 1984.
- [12] LE POTIER J., *Fibrés stables sur le plan projectif et quartiques de Lüroth*, Exposé donné à Jussieu (1989).
- [13] LE POTIER J., Fibré déterminant et courbes de saut sur les surfaces algébriques, in: *Proceedings de la Conférence de Géométrie Algébrique de Bergen (juillet 1989)*, Complex Projective Geometry, Lecture Notes Series, Vol. 179, London Mathematical Society, pp. 213–240.
- [14] LE POTIER J., Faisceaux semi-stables de dimension 1 sur le plan projectif, *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées, dédié à la mémoire de Constantin Bănică* **38** (1993) 635–678.
- [15] LE POTIER J., *Systèmes cohérents et structures de niveau*, Astérisque No. 214, 1993.
- [16] LE POTIER J., Faisceaux semi-stables et systèmes cohérents, in: *Proceedings de la Conférence de Durham*, Cambridge University Press, 1995, pp. 179–239.
- [17] LE POTIER J., Systèmes cohérents et polynômes de Donaldson, in: Maruyama M. (Ed.), *Proceedings du Symposium Taniguchi (décembre 1994, Kyoto)*, Lecture Notes Pure Appl. Math., Vol. **179**, 1996, pp. 103–128.
- [18] LI W.-P., QIN Z., Lower-degree Donaldson polynomial invariants of rational surfaces, *J. Algebraic Geometry* **2** (1993) 413–442.
- [19] MARUYAMA M., Moduli of stable sheaves, II, *J. Math. Kyoto University* **18** (1978) 557–614.
- [20] MARUYAMA M., Singularities of the curve of jumping lines of a vector bundle of rank 2 on \mathbb{P}_2 , in: *Algebraic Geometry, Proc. of Japan–France Conf. (1982)*, Lectures Notes in Math., Vol. **1016**, Springer, 1983, pp. 370–411.
- [21] MORLEY F., On the Lüroth quartic curve, *Amer. J. Math.* **36** (1918) 357–386.
- [22] SIMPSON C.T., Moduli of representations of the fundamental group of a smooth variety, I, *Publications mathématiques de l'IHES* **79** (1994) 47–129.
- [23] STRØMME S.A., Ample divisors on fine moduli spaces on the projective plane, *Math. Z.* **187** (1984) 405–423.
- [24] TOMA M., Birational models for varieties of Poncelet curves, *Manuscripta Math.* **90** (1) (1996) 105–119.
- [25] TRAUTMANN G., Poncelet curves and associated theta characteristics, *Expositiones Mathematicae* **6** (1988) 29–64.

- [26] TYURIN A.N., *The moduli spaces of vector bundles on threefolds, surfaces and curves*, Forschungsschwerpunkt "Komplexe Mannigfaltigkeiten", Schriftenreihe, Heft 67, Preprint, Erlangen, 1990.
- [27] VALLÈS J., *Diviseurs inattendus de droites sauteuses. Fibrés de Schwarzenberger*, Thèse, Université Paris 6, 1996.

(Manuscrit reçu le 2 mars 2000 ;
accepté, après révision, le 16 juin 2000.)

Joseph LE POTIER
Institut de mathématiques de Jussieu,
Université Paris-7,
Case postale 7012, 2, place Jussieu,
75251 Paris cedex 05, France
E-mail : jlp@math.jussieu.fr

Alexander TIKHOMIROV
Department of Mathematics,
State Pedagogical University of Yaroslavl,
Republikanskaya str. 108,
Yaroslavl, Russia
E-mail : alexandr@tikho.yaroslavl.su