ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

COLIN J. BUSHNELL
GUY HENNIART
PHILIP C. KUTZKO

Correspondance de Langlands locale pour GL_n et conducteurs de paires

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 31, nº 4 (1998), p. 537-560
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1998_4_31_4_537_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4[e] série, t. 31, 1998, p. 537 à 560.

CORRESPONDANCE DE LANGLANDS LOCALE POUR GL_n ET CONDUCTEURS DE PAIRES

PAR COLIN J. BUSHNELL, GUY HENNIART ET PHILIP C. KUTZKO

RÉSUMÉ. – Soient p un nombre premier et F une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Soit n un entier strictement positif. A toute représentation admissible irréductible supercuspidale π de $\mathrm{GL}_n(F)$, M. Harris a attaché une classe $\boldsymbol{\sigma}(\pi)$ de représentations continues semisimples de dimension n du groupe de Weil de F. Nous montrons que l'application $\pi \mapsto \boldsymbol{\sigma}(\pi)$ induit une bijection entre classes d'équivalence de représentations admissibles irréductibles supercuspidales de $\mathrm{GL}_n(F)$ et classes d'équivalence de représentations continues *irréductibles* de dimension n du groupe de Weil de F. En outre, nous prouvons que les correspondances $\boldsymbol{\sigma}$ préservent les *conducteurs de paires*. © Elsevier, Paris

Classification AMS: 22E40
Mots-Clés: corps local, correspondance de Langlands, conducteur de paires.

ABSTRACT. – Let p be a prime number and F a finite extension of $\mathbb{Q}_p$. Let n be a positive integer. To each admissible irreducible supercuspidal representation π of $\mathrm{GL}_n(F)$, M. Harris has attached a class $\boldsymbol{\sigma}(\pi)$ of semisimple continuous n-dimensional representations of the Weil group of F. We show that the map $\pi \mapsto \boldsymbol{\sigma}(\pi)$ induces a bijection between equivalence classes of admissible irreducible supercuspidal representations of $\mathrm{GL}_n(F)$ and equivalence classes of continuous *irreducible* n-dimensional representations of the Weil group of F. In addition, we show that the correspondences $\boldsymbol{\sigma}$ preserve *conductors for pairs*. © Elsevier, Paris

AMS Classification: 22E40
Key Words: local field, Langlands correspondence, conductor of pairs.

1. Introduction

1.1 Soient p un nombre premier, et F un corps local commutatif non archimédien, à corps résiduel fini de cardinal q_F et de caractéristique p. A partir de 1.5, et sauf pour la remarque 6.4, nous supposerons que la caractéristique de F est nulle, c'est-à-dire que F est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$.

Nous fixons une clôture algébrique séparable $\overline{F}$ de F et notons $\mathcal{W}_F$ le groupe de Weil de $\overline{F}/F$. Nous fixons également un caractère additif non trivial ψ_F de F.

Pour tout entier $n \geq 1$, nous notons $\boldsymbol{\mathcal{G}}_F^{\mathrm{ss}}(n)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations de $\mathcal{W}_F$ dans des espaces vectoriels complexes de dimension n, continues et *semisimples;* nous désignons par $\boldsymbol{\mathcal{G}}_F^0(n)$ le sous-ensemble formé des classes de représentations irréductibles. D'autre part, nous notons $\boldsymbol{\mathcal{A}}_F(n)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations (complexes) admissibles irréductibles de

Une partie de ce travail a été effectuée dans le cadre d'un accord CNRS-NSF, et avec le soutien des réseaux européens HCM "Arithmetic, Geometry and Automorphic Forms" et TMR "Arithmetical Algebraic Geometry".

$\mathrm{GL}_n(F)$ et désignons par $\boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n)$ le sous-ensemble formé des classes de représentations *supercuspidales.*

Pour $n = 1$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}_F^{\mathrm{ss}}(1) = \boldsymbol{\mathcal{G}}_F^0(1)$ s'identifie à l'ensemble des quasicaractères de $F^\times$. L'application de réciprocité $a_F : \mathcal{W}_F \to F^\times$, normalisée de sorte que les automorphismes de Frobenius *géométriques* correspondent aux uniformisantes, induit une bijection $\chi \mapsto \chi \circ a_F$ de $\boldsymbol{\mathcal{A}}_F(1)$ sur $\boldsymbol{\mathcal{G}}_F^{\mathrm{ss}}(1)$.

Les conjectures de Langlands locales pour GL_n [27], *cf.* aussi [11], généralisent la théorie du corps de classes en prédisant l'existence, pour chaque entier $n \geq 2$, de bijections entre $\boldsymbol{\mathcal{G}}_F^0(n)$ et $\boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n)$ possédant un grand nombre de propriétés. Pour exprimer celles qui nous servirons, introduisons quelques notations.

1.2 Soit $\chi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F(1)$; si $\pi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F(n)$, on note $\chi\pi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F(n)$ la classe de la représentation $g \mapsto \chi(\det g)\,\pi(g)$; si $\sigma \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_F^{\mathrm{ss}}(n)$, on note $\chi\sigma \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_F^{\mathrm{ss}}(n)$ la classe de la représentation $g \mapsto \chi(a_F(g))\,\sigma(g)$. On obtient ainsi une action du groupe $\boldsymbol{\mathcal{A}}_F(1)$ sur $\boldsymbol{\mathcal{A}}_F(n)$ et $\boldsymbol{\mathcal{G}}_F^{\mathrm{ss}}(n)$, appelée *torsion par les quasicaractères;* elle respecte $\boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n)$ et $\boldsymbol{\mathcal{G}}_F^0(n)$.

Pour $\tau \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F(n)$ ou $\tau \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_F^{\mathrm{ss}}(n)$, on note $\check{\tau}$ la classe de la représentation contragrédiente de τ.

1.3 Tout élément σ de $\boldsymbol{\mathcal{G}}_F^{\mathrm{ss}}(n)$ possède une fonction L notée $L(\sigma, s)$ (ou $L(\sigma)$) et un facteur ε noté $\varepsilon(\sigma, \psi_F, s) = \varepsilon(\sigma, \psi_F)$ *cf.* [35] §3. Ce sont des fonctions d'un paramètre complexe s; en fait $L(\sigma, s)$ est de la forme $P(q_F^{-s})^{-1}$, où $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ vérifie $P(0) = 1$, tandis que $\varepsilon(\sigma, \psi_F, s)$ est un monôme en q_F^{-s} :

$$\varepsilon(\sigma, \psi_F, s) = \varepsilon(\sigma, \psi_F, 0)\, q_F^{-s(f(\sigma)+nc(\psi_F))}.$$

Dans cette formule, $f(\sigma)$ est l'exposant du conducteur d'Artin de σ et $c(\psi_F)$ est le plus grand entier r tel que ψ_F soit trivial sur $\mathfrak{p}_F^{-r}$, $\mathfrak{p}_F$ désignant l'idéal maximal de l'anneau des entiers de F.

De manière parallèle, tout élément π de $\boldsymbol{\mathcal{A}}_F(n)$ possède une fonction $L(\pi, s)$ et un facteur $\varepsilon(\pi, \psi_F, s)$ [7]. On a de même

$$\varepsilon(\pi, \psi_F, s) = \varepsilon(\pi, \psi_F, 0)\, q_F^{-s(f(\pi)+nc(\psi_F))},$$

où $f(\pi)$ est un entier (positif d'après [19]) appelé *l'exposant de* π.

Plus généralement, soient $\pi_1 \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F(n_1)$ et $\pi_2 \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F(n_2)$. Jacquet, Piatetskii-Shapiro et Shalika [20] (voir aussi Shahidi [34]) ont défini des facteurs $L(\pi_1 \times \pi_2, s)$ et $\varepsilon(\pi_1 \times \pi_2, \psi_F, s)$ de la même forme que précédemment (et symétriques en π_1 et π_2). En particulier on a

$$\varepsilon(\pi_1 \times \pi_2, \psi_F, s) = \varepsilon(\pi_1 \times \pi_2, \psi_F, 0)\, q_F^{-s(f(\pi_1\times\pi_2)+n_1n_2c(\psi_F))}$$

où $f(\pi_1 \times \pi_2)$ est un entier, appelé (abusivement) *exposant de la paire* (π_1, π_2). Cet exposant est étudié dans [5] où l'on prouve, entre autres choses, qu'il est positif.

Si π_1 est un quasicaractère $\chi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F(1)$, on a

$$\begin{aligned} L(\chi \times \pi_2) &= L(\chi\pi_2), \\ \text{et} \qquad \varepsilon(\chi \times \pi_2, \psi_F) &= \varepsilon(\chi\pi_2, \psi_F), \\ \text{d'où} \qquad f(\chi \times \pi_2) &= f(\chi\pi_2). \end{aligned}$$

1.4 Partant de la bijection $\mathcal{G}_F(1) \simeq \mathcal{A}_F^0(1)$ donnée par la théorie du corps de classes, les conjectures de Langlands prédisent l'existence de bijections (souvent appelées *correspondances de Langlands*), pour tout entier $n \geq 2$, entre $\mathcal{G}_F^0(n)$ et $\mathcal{A}_F^0(n)$, qui

(1) *soient compatibles à la torsion par les quasicaractères et le passage aux contragrédientes, et*

(2) *préservent les facteurs L et ε de paires, au sens où l'on aurait, pour $\pi_1 \in \mathcal{A}_F^0(n_1)$ et $\pi_2 \in \mathcal{A}_F^0(n_2)$ correspondant à $\sigma_1 \in \mathcal{G}_F^0(n_1)$ et $\sigma_2 \in \mathcal{G}_F^0(n_2)$,*

$$L(\pi_1 \times \pi_2) = L(\sigma_1 \otimes \sigma_2),$$
$$\varepsilon(\pi_1 \times \pi_2, \psi_F) = \varepsilon(\sigma_1 \otimes \sigma_2, \psi_F),$$

d'où en particulier $f(\pi_1 \times \pi_2) = f(\sigma_1 \otimes \sigma_2)$.

En fait ces conditions caractérisent les correspondances de Langlands. C'est en effet une conséquence de [16] qu'il y a au plus une famille de bijections $\mathcal{G}_F^0(n) \simeq \mathcal{A}_F^0(n)$ pour $n \geq 1$, redonnant la théorie du corps de classes pour $n = 1$ et vérifiant (1) et (2).

Si F est de caractéristique p, un des résultats majeurs de [29] établit l'existence de telles bijections.

1.5 *Désormais nous supposerons que la caractéristique de F est nulle :* ainsi F est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Dans [8] Michael Harris a construit, pour chaque entier $n \geq 1$, une application

$$\boldsymbol{\sigma}_n^F : \mathcal{A}_F^0(n) \longrightarrow \mathcal{G}_F^{\mathrm{ss}}(n).$$

(En fait, nous n'utiliserons jamais la semisimplicité des éléments de l'image de $\boldsymbol{\sigma}_n^F$.) La construction est globale et utilise la cohomologie de variétés de Shimura attachés à certains groupes unitaires; les applications elles-mêmes ne dépendent pas des choix globaux effectués. De l'origine globale de la construction, on tire facilement que $\boldsymbol{\sigma}_n^F$ est compatible à la torsion par les quasicaractères et le passage aux contragrédientes. De plus les applications $\boldsymbol{\sigma}_n^F$ sont naturelles par rapport à F, i.e., compatibles aux isomorphismes d'extensions finies de $\mathbb{Q}_p$ (voir 3.1 pour les énoncés précis). Bien sûr, pour $n = 1$, on retrouve la théorie du corps de classes.

Nous voulons d'abord prouver le résultat suivant, qui est annoncé dans l'introduction de [8], et utilisé dans [9]. La référence utilisée dans [8] est une lettre [17] de G. Henniart à M. Harris, datée de Janvier 1994, qui énonce le résultat et décrit une preuve. Nous donnons ici une démonstration complète.

THÉORÈME 1. – *Soit F une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout élément $\pi \in \mathcal{A}_F^0(n)$, on a $\boldsymbol{\sigma}_n^F(\pi) \in \mathcal{G}_F^0(n)$. L'application*

$$\boldsymbol{\sigma}_n^F : \mathcal{A}_F^0(n) \longrightarrow \mathcal{G}_F^0(n)$$

est une bijection.

1.6 On voit facilement que les applications $\boldsymbol{\sigma}_n^F$ de [8] préservent les facteurs L de paires. On a (3.7)

$$L(\boldsymbol{\sigma}_{n_1}(\pi_1) \otimes \boldsymbol{\sigma}_{n_2}(\pi_2)) = L(\pi_1 \times \pi_2), \qquad \pi_i \in \mathcal{A}_F^0(n_i).$$

L'égalité $\varepsilon(\boldsymbol{\sigma}_{n_1}(\pi_1) \otimes \boldsymbol{\sigma}_{n_2}(\pi_2), \psi_F) = \varepsilon(\pi_1 \times \pi_2, \psi_F)$ est plus difficile à prouver. Elle est établie dans [9] si n_1 et n_2 sont premiers à p; elle était connue auparavant dans quelques autres cas où n_1 et n_2 valent au plus 3 (*cf.* [12] Appendice 4).

L'autre résultat principal du présent article est le suivant, obtenu en 1996, et utilisant de façon cruciale le calcul des exposants de paires dans [5].

THÉORÈME 2. – *Les applications* $\boldsymbol{\sigma}_n^F : \boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n) \to \boldsymbol{\mathcal{G}}_F^0(n)$, $n \geq 1$, *préservent les exposants de paires : pour* $\pi_1 \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n_1)$, $\pi_2 \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n_2)$, *on a*

$$f(\boldsymbol{\sigma}_{n_1}^F(\pi_1) \otimes \boldsymbol{\sigma}_{n_2}^F(\pi_2)) = f(\pi_1 \times \pi_2).$$

Remarque. – On peut étendre (voir 3.9) les théorèmes 1 et 2 aux ensembles $\boldsymbol{\mathcal{A}}_F(n)$ des classes de représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_n(F)$, à condition de remplacer $\boldsymbol{\mathcal{G}}_F^0(n)$ par l'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{G}}_F(n)$ des classes de représentations Φ-semisimples de degré n du groupe de Weil-Deligne $\mathcal{WD}_F$ [36] §4.

1.7 Pour prouver les théorèmes ci-dessus, nous utilisons les méthodes de [14], en nous appuyant sur certaines propriétés des applications $\boldsymbol{\sigma}_n^F$. Le point essentiel, outre les propriétés de 1.5, est que cette construction est compatible, en un certain sens, avec la théorie du changement de base pour GL_n ([28] pour $n = 2$, [1] en général, voir aussi [26]), et la théorie de l'induction automorphe pour GL_n ([22] pour $n = 1$, *cf.* aussi [13], et [18] en général). Via la correspondance de Langlands, le changement de base de F à une extension cyclique K doit correspondre à la restriction à $\mathcal{W}_K$ des représentations de $\mathcal{W}_F$, tandis que l'induction automorphe de K à F correspond à l'induction à $\mathcal{W}_F$ des représentations de $\mathcal{W}_K$. Les applications $\boldsymbol{\sigma}_n^K$ (pour les extensions finies K de F) transforment effectivement *dans certains cas* changement de base en restriction et induction automorphe en induction (voir 3.1 pour un énoncé précis). Cela suffit pour utiliser la technique de [14] basée sur le fait que par restrictions successives selon des extensions cycliques, une représentation semisimple quelconque de $\mathcal{W}_F$ devient somme de quasicaractères. On démontre ainsi (§3) le Théorème 1. Il découle alors facilement que les applications $\boldsymbol{\sigma}_n^K$ transforment bien *dans tous les cas* changement de base en restriction et induction automorphe en induction (voir 3.9).

1.8 La preuve du Théorème 2 utilise également la compatibilité des applications $\boldsymbol{\sigma}_n^K$ au changement de base et à l'induction automorphe, mais cette fois il y a deux données, $\pi_1 \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n_1)$ et $\pi_2 \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n_2)$. S'il existe une extension cyclique non triviale K de F de degré d, telle que π_1 ou π_2 soit induite automorphe à partir de K, disons que π_1 est l'induite automorphe $\rho_1^{K/F}$ de $\rho_1 \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_K^0(n_1/d)$, alors les exposants $f(\pi_1 \times \pi_2)$ et $f(\rho_1 \times (\pi_2)_{K/F})$ (où $(\pi_2)_{K/F}$ est le changement de base à K de π_2) vérifient une formule d'induction-restriction reflétant la réciprocité de Frobenius pour les représentations de groupes de Weil; cette formule, basée sur l'origine globale du changement de base et de l'induction automorphe, est démontrée dans l'appendice. Procédant par récurrence sur n_1+n_2, on peut admettre que l'exposant $f(\rho_1 \times (\pi_2)_{K/F})$ est préservé par les correspondances $\boldsymbol{\sigma}_m^K$ et il s'ensuit l'égalité $f(\pi_1 \times \pi_2) = f(\boldsymbol{\sigma}_{n_1}^F(\pi_1) \otimes \boldsymbol{\sigma}_{n_2}^F(\pi_2))$. Il se peut bien sûr que ni π_1 ni π_2 ne soient induites automorphes à partir d'une extension cyclique non triviale de F. L'analyse de l'image des représentations de groupes de Weil [14] §7 montre néanmoins que grâce aux considérations précédentes il suffit de démontrer la préservation des exposants de paires dans un cas très particulier (4.7).

1.9 Ce cas est celui où n_1 et n_2 sont des puissances de la caractéristique résiduelle p de F, et où aucun quasicaractère non ramifié de $F^\times$ ne stabilise $\sigma_1 = \boldsymbol{\sigma}_{n_1}^F(\pi_1)$ ou $\sigma_2 = \boldsymbol{\sigma}_{n_2}^F(\pi_2)$. Il existe alors une extension finie galoisienne modérément ramifiée K de F telle que $(\sigma_1)_{K/F}$ et $(\sigma_2)_{K/F}$ soient irréductibles, mais induites à partir d'extensions cycliques non triviales de K. Supposons que K/F soit cyclique. Le comportement des facteurs epsilon lors d'un changement de base donne les deux formules

$$f(K|F)\, f((\sigma_1)_{K/F} \otimes (\sigma_2)_{K/F}) = \sum_{\chi} f(\chi\sigma_1 \otimes \sigma_2) + \alpha,$$
$$f(K|F)\, f((\pi_1)_{K/F} \times (\pi_2)_{K/F}) = \sum_{\chi} f(\chi\pi_1 \times \pi_2) + \alpha,$$

où $f(K|F)$ est le degré d'inertie de K/F, où χ parcourt les quasicaractères de $F^\times$ triviaux sur $\mathrm{N}_{K/F}(K^\times)$, et où α est une quantité ne dépendant que de n_1, n_2 et l'extension K de F.

1.10 C'est ici que les calculs [5] de conducteurs de paires interviennent de façon cruciale. Ils impliquent en effet que si $\check{\pi}_2$ n'est pas de la forme $\eta\pi_1$ où η est un quasicaractère modérément ramifié de $F^\times$, alors $f(\chi\pi_1 \times \pi_2) = f(\pi_1 \times \pi_2)$ pour tout quasicaractère χ comme plus haut, tandis que $f(\chi\pi_1 \times \check{\pi}_1) = f(\pi_1 \times \check{\pi}_1) + f(\chi)$. Bien sûr les énoncés correspondants pour σ_1 et σ_2 sont également vrais. De l'égalité $f((\sigma_1)_{K/F} \otimes (\sigma_2)_{K/F}) = f((\pi_1)_{K/F} \times (\pi_2)_{K/F})$ on tire alors (4.5) $f(\sigma_1 \otimes \sigma_2) = f(\pi_1 \times \pi_2)$.

Si K/F n'est pas cyclique, il suffit de procéder en deux temps : on introduit l'extension non ramifiée maximale E de F dans K, et les extensions E/F et K/E sont cycliques. On prouve ainsi le Théorème 2.

1.11 Dans les chapitres suivants nous suivons le plan décrit précédemment. Pour que l'argument soit clair, nous procédons de manière axiomatique : nous supposons données, pour chaque entier $n \geq 1$ et chaque extension finie K de F, des applications $\boldsymbol{\sigma}_n^K : \boldsymbol{\mathcal{A}}_K^0(n) \to \boldsymbol{\mathcal{G}}_K^{\mathrm{ss}}(n)$ vérifiant un certain nombre de propriétés, explicitées au 3.1. Nous prouvons alors, pour ces applications, les théorèmes 1 et 2 (chap. 3 et 4). L'on voit aussi que les applications $\boldsymbol{\sigma}_n^K$ sont déterminées par les propriétés requises, à torsion près par des quasicaractères non ramifiés (5.1). Au chapitre 6, nous vérifions que les applications construites dans [8] satisfont bien à ces propriétés. Le Chapitre 2 est consacré à des rappels; nous y donnons des références précises pour les propriétés à utiliser du changement de base et de l'induction automorphe. La formule "d'induction-restriction" pour les exposants de paires est prouvée dans l'appendice.

2. Changement de base et induction automorphe

2.1 Dans ce paragraphe, nous rappelons les propriétés du changement de base et de l'induction automorphe qui nous serviront. Nous tâchons de donner des références précises à [1] et [18]. Les résultats énoncés dont la démonstration ne se trouve pas dans ces références sont prouvés dans l'appendice.

Nous gardons les notations et conventions établies au chapitre 1. Dans toute la suite de l'article (sauf en 6.4), *le corps F est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$*, et le corps K est en général une extension finie de F.

2.2 Soit donc K une extension finie de F; notons d son degré. Soit $\overline{K}$ une clôture séparable algébrique de K et notons $\mathcal{W}_K$ le groupe de Weil de $\overline{K}$ sur K. Tout choix de F-isomorphisme de $\overline{K}$ sur $\overline{F}$ permet d'identifier $\mathcal{W}_K$ à un sous-groupe ouvert d'indice fini de $\mathcal{W}_F$, et on dispose, pour chaque entier $n \geq 1$, d'applications

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{\mathcal{G}}_F^{\mathrm{ss}}(n) \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{G}}_K^{\mathrm{ss}}(n), & \text{et} & \boldsymbol{\mathcal{G}}_K^{\mathrm{ss}}(n) \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{G}}_F^{\mathrm{ss}}(nd), \\ \sigma \longmapsto \sigma_{K/F} & & \sigma \longmapsto \sigma^{K/F} \end{array}$$

données respectivement par la restriction à $\mathcal{W}_K$ de représentations de $\mathcal{W}_F$ et par l'induction à $\mathcal{W}_F$ de représentations de $\mathcal{W}_K$. Ces applications ne dépendent pas du choix de l'isomorphisme de $\overline{K}$ sur $\overline{F}$. On dispose d'analogues des constructions précédentes pour les représentations lisses irréductibles de GL_n, *quand K est une extension cyclique de F.* On suppose donc *jusqu'à la fin du chapitre 2* que K est cyclique sur F; on note G le groupe de Galois de K sur F dont on fixe un générateur γ, et Ξ le groupe des caractères de $F^\times$ triviaux sur $\mathrm{N}_{K/F}(K^\times)$, dont on fixe un générateur κ. On pose $\psi_K = \psi_F \circ \mathrm{Tr}_{K/F}$. Les propriétés énoncées ci-dessous sont analogues de propriétés élémentaires de la restriction et l'induction des représentations de groupes de Weil.

2.3 Parlons d'abord du changement de base. Soit π une représentation admissible irréductible de $\mathrm{GL}_n(F)$, et Π une représentation admissible irréductible de $\mathrm{GL}_n(K)$ stable par G. On dit que Π est un *relèvement de* π (par changement de base de F à K) si π et Π vérifient les identités de caractères de Shintani, [1] I Definition 6.1, relativement au choix de générateur γ. Par [1] I Theorem 6.2, toute représentation irréductible tempérée de $\mathrm{GL}_n(F)$ a un relèvement, qui est une représentation tempérée. La classe de ce relèvement est uniquement déterminée, et indépendante du choix du générateur γ de G; on note $\pi_{K/F}$ la classe du relèvement de π. Dans [1] pp. 59–60 la définition de $\pi_{K/F}$ est étendue à tout $\pi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F(n)$. On obtient ainsi une application $\pi \mapsto \pi_{K/F}$ de $\boldsymbol{\mathcal{A}}_F(n)$ dans $\boldsymbol{\mathcal{A}}_K(n)$, dont l'image est formée d'éléments G-invariants. En particulier, un élément π de $\boldsymbol{\mathcal{A}}_K^0(n)$ qui est G-invariant est image d'un élément de $\boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n)$ [1] I Prop. 6.6 et Lemma 6.10.

On a une propriété de transitivité : si F' est une extension de F incluse dans K, on a $\pi_{K/F} = (\pi_{F'/F})_{K/F'}$ pour $\pi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F(n)$ [14] Prop. 6.6.

2.4 Soit $\pi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n)$. Alors $\pi_{K/F}$ est supercuspidale si et seulement si $\chi\pi \neq \pi$ pour $\chi \in \Xi$, $\chi \neq 1$. Cela découle de [1] I Prop. 6.6 et Lemma 6.10. De plus, par [1] I Prop. 6.7, il y a alors d éléments $\pi' \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n)$ tels que $\pi_{K/F} = \pi'_{K/F}$: ce sont les éléments $\chi\pi$ pour χ parcourant Ξ. Par ailleurs, on a, pour $\pi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n)$ et $\pi' \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n')$,

$$\frac{\varepsilon(\pi_{K/F} \times \pi'_{K/F}, \psi_K)}{\varepsilon(1_K, \psi_K)^{nn'}} = \prod_{\chi \in \Xi} \frac{\varepsilon(\chi\pi \times \pi', \psi_F)}{\varepsilon(\chi, \psi_F)^{nn'}}$$

où 1_K désigne le caractère trivial de $K^\times$ [1] I Prop. 6.9.

Si $\delta_{K/F}$ désigne l'exposant de la différente de K/F, et $f(K|F)$ le degré d'inertie, on en déduit

$$f(K|F)\, f(\pi_{K/F} \times \pi'_{K/F}) = \sum_{\chi \in \Xi} f(\chi\pi \times \pi') - nn' f(K|F)\delta_{K/F}.$$

En particulier, si l'extension K/F est *non ramifiée,* on a $\delta_{K/F} = 0$, $f(K|F) = d$ et $f(\chi\pi \times \pi') = f(\pi \times \pi')$ pour tout $\chi \in \Xi$, d'où

$$f(\pi_{K/F} \times \pi'_{K/F}) = f(\pi \times \pi').$$

2.5 Parlons ensuite de l'induction automorphe [18]. Pour un élément π de $\boldsymbol{A}_K(n)$, on dispose de la notion de κ-relèvement [18] Defn. 3.7, où κ est choisi comme en 2.2. En fait tout élément *générique* π de $\boldsymbol{A}_K(n)$ a un unique κ-relèvement $\pi^{K/F} \in \boldsymbol{A}_F(nd)$ qui est générique, κ-stable, i.e. $\kappa\pi^{K/F} = \pi^{K/F}$, et ne dépend pas de κ *loc. cit.* Th. 2.4. En particulier, on dispose d'une application $\pi \mapsto \pi^{K/F}$ de $\boldsymbol{A}^0_K(n)$ dans $\boldsymbol{A}_F(nd)$.

Si F' est une extension de F incluse dans K, on a $\pi^{K/F} = (\pi^{F'/F})^{K/F'}$ (voir l'appendice A.11).

Soit $\pi \in \boldsymbol{A}^0_K(n)$. Alors $\pi^{K/F}$ est supercuspidale si et seulement si on a $g\pi \neq \pi$ pour $g \in G$, $g \neq 1$ *loc. cit.* 5.3 Cor. 2, 5.5 Prop. et Cor.; il y a alors d éléments $\pi' \in \boldsymbol{A}^0_K(n)$ tels que $\pi^{K/F} = \pi'^{K/F}$; ce sont les éléments $g\pi$ pour g parcourant G.

Remarque. – Dans [18] Theorem 8.1B, le lecteur trouvera une formule donnant le comportement des facteurs ε par induction automorphe. Une légère correction s'impose : dans l'énoncé et la preuve, il faut remplacer m^2 par mm' si $\pi \in \boldsymbol{A}^0_K(m)$ et $\pi' \in \boldsymbol{A}^0_K(m')$. Nous n'utiliserons pas ce résultat, mais plutôt la variante ci-après, qui est plus générale (*cf.* appendice A9).

2.6 Nous avons besoin de comparer (composer, en fait) changement de base et induction automorphe. Une espèce de réciprocité de Frobenius se traduit par l'identité de facteurs ε ci-après. On suppose K/F cyclique, de degré d. Les assertions suivantes sont prouvées dans l'appendice.

(a) Soit $\pi \in \boldsymbol{A}^0_F(n)$; avec la notation $\boxplus$ de [20] 9.5, on a

$$(\pi_{K/F})^{K/F} = \boxplus_{\chi \in \Xi} \chi\pi.$$

(b) soit $\rho \in \boldsymbol{A}^0_K(m)$; on a

$$(\rho^{K/F})_{K/F} = \boxplus_{g \in G} g\rho.$$

(c) Soient $\pi \in \boldsymbol{A}^0_F(n)$ et $\rho \in \boldsymbol{A}^0_K(m)$; on a

$$\frac{\varepsilon(\rho \times \pi_{K/F}, \psi_K)}{\varepsilon(1_K, \psi_K)^{nm}} = \frac{\varepsilon(\rho^{K/F} \times \pi, \psi_F)}{\prod_{\chi \in \Xi} \varepsilon(\chi, \psi_F)^{nm}}.$$

Prenant les exposants, on en tire

$$f(K|F)\, f(\rho \times \pi_{K/F}) = f(\rho^{K/F} \times \pi) - nmf(K|F)\delta_{K/F}.$$

(d) Supposons d premier. Soit $\rho \in \boldsymbol{A}^0_K(n)$; alors ρ est de la forme $\pi_{K/F}$ pour un élément $\pi \in \boldsymbol{A}^0_F(n)$ si et seulement si $\rho^{K/F}$ n'est pas supercuspidale.

(e) Supposons d premier. Soit $\pi \in \boldsymbol{A}^0_F(nd)$. Alors π est de la forme $\rho^{K/F}$ pour un élément $\rho \in \boldsymbol{A}^0_K(n)$ si et seulement si $\pi_{K/F}$ n'est pas supercuspidale.

De *(e)* et *(b)*, on déduit :

(f) Supposons d premier; soit $\pi \in \boldsymbol{A}^0_F(n)$ tel que $\pi_{K/F}$ ne soit pas supercuspidale. Alors

$$\pi_{K/F} = \tau_1 \boxplus \tau_2 \boxplus \ldots \boxplus \tau_d,$$

pour des éléments $\tau_j \in \boldsymbol{A}^0_K(n/d)$. On a $\pi = \rho^{K/F}$, pour ρ supercuspidale, si et seulement si ρ est l'un des τ_j.

3. Une correspondance de Langlands

3.1 Ce chapitre est consacré à la preuve du Théorème 1. Comme annoncé dans l'introduction, nous procédons de manière axiomatique. Nous supposons que pour toute extension finie K de $\mathbb{Q}_p$ et chaque entier $n \geq 1$, on dispose d'une application

$$\boldsymbol{\sigma}_n^K : \boldsymbol{\mathcal{A}}_K^0(n) \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{G}}_K^{\text{ss}}(n).$$

On suppose que les applications $\boldsymbol{\sigma}_n^K$ possèdent les propriétés suivantes.

(1) *Pour $n = 1$, $\boldsymbol{\sigma}_n^K$ est donnée par la théorie du corps de classes.*

(2) *$\boldsymbol{\sigma}_n^K$ est compatible à la torsion par les quasicaractères.*

(3) *$\boldsymbol{\sigma}_n^K$ est compatible au passage aux contragrédientes.*

(4) *Le quasicaractère central de $\pi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_K^0(n)$ correspond, par la théorie du corps de classes, au quasicaractère $\det \boldsymbol{\sigma}_n^K(\pi)$ de $\mathcal{W}_K$.*

(Pour $n = 1$ la condition (4) redonne la condition (1).)

(5) *Si $\iota : K \to \iota K$ est un isomorphisme d'extensions de $\mathbb{Q}_p$, le diagramme suivant, où les flèches verticales sont induites par ι, est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{\mathcal{A}}_K^0(n) & \xrightarrow{\boldsymbol{\sigma}_n^K} & \boldsymbol{\mathcal{G}}_K^{\text{ss}}(n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\iota K}^0(n) & \xrightarrow{\boldsymbol{\sigma}_n^{\iota K}} & \boldsymbol{\mathcal{G}}_{\iota K}^{\text{ss}}(n). \end{array}$$

(6) *Soit K'/K une extension cyclique et soit $\pi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_K^0(n)$* telle que $\pi_{K'/K}$ soit supercuspidale. *Alors on a*

$$\boldsymbol{\sigma}_n^{K'}(\pi_{K'/K}) = \boldsymbol{\sigma}_n^K(\pi)_{K'/K}.$$

(7) *Soit K'/K une extension cyclique et soit $\pi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_{K'}^0(n)$* telle que $\pi^{K'/K}$ soit supercuspidale. *Alors on a*

$$\boldsymbol{\sigma}_{nd}^K(\pi^{K'/K}) = (\boldsymbol{\sigma}_n^{K'}(\pi))^{K'/K}, \quad \text{où } d = [K'{:}K].$$

Nous prouverons au §6 que les applications $\boldsymbol{\sigma}_n^K$ construites par M. Harris vérifient bien ces hypothèses. Remarquons que la condition (4) n'est utilisée que pour établir le théorème 5.1.

3.2 Introduisons la notion de *profondeur* d'un élément de $\boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n)$ ou $\boldsymbol{\mathcal{G}}_F^0(n)$. Par définition, un élément τ de $\boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n)$ (resp. $\boldsymbol{\mathcal{G}}_F^0(n)$) est *de profondeur finie* s'il existe un entier $r \geq 0$, une suite de corps $F = F_0, F_1, \ldots, F_r$ où, pour chaque entier $i = 0, 1, \ldots, r-1$, F_{i+1} est une extension cyclique de F_i de degré premier, une suite d'entiers $n = n_0, n_1, \ldots, n_r = 1$, et enfin une suite de représentations $\sigma = \sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_r$ avec $\sigma_i \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_{F_i}^0(n_i)$ (resp. $\boldsymbol{\mathcal{G}}_{F_i}^0(n_i)$) telles que pour $i = 0, 1, \ldots, r-1$, l'une des deux conditions suivantes soit réalisée :

(i) $\sigma_i = \sigma_{i+1}^{F_{i+1}/F_i}$ (auquel cas, bien sûr, $n_i = n_{i+1}[F_{i+1}{:}F_i]$).

(ii) $\sigma_{i+1} = (\sigma_i)_{F_{i+1}/F_i}$ (auquel cas $n_i = n_{i+1}$).

Le plus petit entier r possible s'appelle la *profondeur* de σ et se note $r(\sigma)$. Si r est ainsi choisi, on a alors évidemment, pour $i = 0, 1, \ldots, r = r(\sigma)$, l'égalité $r(\sigma_i) = r(\sigma) - i$.

Remarquons que si $\iota : F \to \iota F$ est un isomorphisme d'extensions de $\mathbb{Q}_p$ et si $\sigma \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_F^0(n)$ (resp. $\boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n)$) et $\iota\sigma \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_{\iota F}^0(n)$ (resp. $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\iota F}^0(n)$) se correspondent par ι, alors on a $r(\sigma) = r(\iota\sigma)$.

LEMME. – *Les éléments de $\boldsymbol{\mathcal{G}}_F^0(n)$ et ceux de $\boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n)$ sont de profondeur finie.*

Pour $\boldsymbol{\mathcal{G}}_F^0(n)$, l'assertion est une conséquence immédiate de [14] 7.8, 7.15. Soit $\pi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n)$; d'après [15], il existe une suite finie de corps $K_0 = F \subset K_1 \subset \ldots \subset K_r$ où K_{i+1} est une extension finie cyclique de K_i pour $i = 0, 1, \ldots, r-1$, telle que la représentation de $\mathrm{GL}_n(K_r)$ qu'on obtient à partir de π par changements de base successifs de K_i à K_{i+1} ne soit plus supercuspidale. Bien sûr, nous pouvons supposer les extensions K_{i+1}/K_i, $0 \leq i \leq r-1$, de degré premier, ce que nous faisons. Prenons alors l'entier r minimum et posons $\pi_0 = \pi$, $\pi_{i+1} = (\pi_i)_{K_{i+1}/K_i}$ pour $0 \leq i \leq r-1$. Alors les représentations $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{r-1}$ sont supercuspidales tandis que π_r ne l'est plus; mais cela signifie (2.6*(e)*) que π_{r-1} est de la forme $\tau^{K_r/K_{r-1}}$ pour un élément $\tau \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n/[K_r:K_{r-1}])$. Le lemme s'ensuit par récurrence sur n.

3.3 Nous voulons prouver ici le résultat suivant.

THÉORÈME. – *On se place sous les hypothèses de* 3.1. *Pour tout entier $n \geq 1$ et toute extension finie F de $\mathbb{Q}_p$, on a :*

(i) *$\boldsymbol{\sigma}_n^F(\pi)$ est irréductible, pour tout $\pi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n)$;*

(ii) *$\boldsymbol{\sigma}_n^F$ induit une bijection $\boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n) \simeq \boldsymbol{\mathcal{G}}_F^0(n)$.*

3.4 LEMME. – *Soit $\pi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n)$ de profondeur r. Soit K/F une extension cyclique de degré premier ℓ. Si $\pi_{K/F}$ est une représentation supercuspidale, sa profondeur est r ou $r-1$. Sinon, il existe $\pi_1 \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_K^0(n/\ell)$, de profondeur r ou $r-1$, tel que $\pi = \pi_1^{K/F}$.*

Nous prouvons le lemme par récurrence sur r. Dans le cas $r = 0$, on a $n = 1$ et le résultat est clair. Supposons donc $r \geq 1$. Par définition, il existe une extension F_1/F, de degré premier ℓ_1, telle que $\pi_{F_1/F}$ est de la forme $\tau_1 \boxplus \tau_2 \boxplus \ldots \boxplus \tau_a$, où les τ_j sont supercuspidales de profondeur $r-1$ et $a = 1$ ou ℓ_1 (2.6*(f)*, 3.2). Si $K = F_1$, la preuve est finie. Sinon, posons $K_1 = KF_1$ et considérons la représentation $\xi = (\pi_{K/F})_{K_1/K} = (\pi_{F_1/F})_{K_1/F_1}$ (*cf.* [3] 16.4); elle est de la forme

$$\xi = \boxplus_{1 \leq j \leq b} \xi_j,$$

où les ξ_j sont supercuspidales de profondeur $\leq r-1$ (par récurrence) et $b = 1$, ℓ, ℓ_1 ou $\ell\ell_1$. Les "composantes" (au sens de la $\boxplus$-décomposition) de $\pi_{K/F}$ sont donc de profondeur $\leq r$; par ailleurs la profondeur d'une telle composante est $\geq r-1$ par définition. Si $\pi_{K/F}$ est supercuspidale, le résultat est clair; sinon, il découle de 2.6, *(f)*.

3.5 Nous prouvons à la fois 3.3(i) et l'injectivité de $\boldsymbol{\sigma}_n^F$. Plus précisément, nous prouvons l'assertion suivante.

Soit $r \geq 0$ un entier et soit F une extension finie de $\mathbb{Q}$. Soit $\pi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n)$ de profondeur r. Alors :

(i) *$\sigma = \boldsymbol{\sigma}_n^F(\pi)$ est irréductible, et*

(ii) *si $\pi' \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n)$ est de profondeur $\leq r$ et vérifie $\boldsymbol{\sigma}_n^F(\pi') = \sigma$, alors $\pi' = \pi$.*

Dans le cas $r = 0$, on a $n = 1$ et l'assertion est claire par 3.1(1). Supposons donc $r \geq 1$ et, par récurrence, que notre assertion soit valide pour tout entier plus petit que r

et toute extension finie F de $\mathbb{Q}_p$. Nous démontrons d'abord que notre assertion est vraie si, dans (ii) ci-dessus, on fait l'hypothèse que π' *soit de profondeur* $\leq r-1$. Comme π est de profondeur $r \geq 1$, il existe une extension K/F, cyclique de degré premier ℓ, telle que soit *(a)* $\pi_{K/F}$ est supercuspidale de profondeur $r-1$, soit *(b)* il existe une représentation $\pi_1 \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_K^0(n/\ell)$, de profondeur $r-1$, telle que $\pi = \pi_1^{K/F}$. Dans les deux cas, notons G le groupe de Galois de K/F et Ξ le groupe des caractères de $F^\times$ triviaux sur $\mathrm{N}_{K/F}(K^\times)$.

Plaçons-nous d'abord dans le cas *(a)*. Soit $\pi' \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n)$, de profondeur $\leq r-1$ et vérifiant $\boldsymbol{\sigma}_n^F(\pi') = \sigma$. Si $\pi'_{K/F}$ n'est pas supercuspidale, π' est de la forme $\pi_1^{K/F}$ avec $\pi' \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_K^0(n/\ell)$; posant $\sigma_1 = \boldsymbol{\sigma}_{n/\ell}^K(\pi_1)$ on a $\sigma = \sigma_1^{K/F}$ par 3.1(7). C'est impossible, parce que $\sigma_{K/F}$ est irréductible.

Par suite, $\pi'_{K/F}$ est supercuspidale. On a $\sigma_{K/F} = \boldsymbol{\sigma}_n^K(\pi'_{K/F})$ par 3.1(6). Comme π' est de profondeur $\leq r-1$, il en est de même de $\pi'_{K/F}$ (lemme 3.4). L'hypothèse de récurrence implique donc $\pi'_{K/F} = \pi_{K/F}$. Par 2.4, on a alors $\pi' = \chi\pi$ pour un $\chi \in \Xi$; par suite $\chi\sigma = \boldsymbol{\sigma}_n^F(\pi')$ d'après 3.1(2), d'où $\chi\sigma = \sigma$, et l'irréductibilité de $\sigma_{K/F}$ entraîne $\chi = 1$. Alors on a $\pi' = \pi$, comme voulu.

Plaçons-nous dans le cas *(b)*, où $\pi = \pi_1^{K/F}$, pour $\pi_1 \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_K^0(n/\ell)$ de profondeur $r-1$. Par récurrence, $\sigma_1 = \boldsymbol{\sigma}_{n/\ell}^K(\pi_1)$ est irréductible. Les représentations $g\pi_1$, $g \in G$, sont distinctes (2.5) et, par récurrence et 3.1(5), les $g\sigma_1$ le sont aussi. Donc $\sigma_1^{K/F}$ est irréductible, égale à σ par 3.1(7). En particulier, $\sigma_{K/F}$ n'est pas irréductible.

Soit $\pi' \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_n^0(F)$ vérifiant $\boldsymbol{\sigma}_n^F(\pi') = \sigma$, et de profondeur $\leq r-1$. La représentation $\pi'_{K/F}$ n'est pas supercuspidale : par la première partie, $\pi'_{K/F}$ supercuspidale entraînerait $\sigma_{K/F}$ irréductible. Il existe donc $\pi_2 \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_K^0(n/\ell)$ vérifiant $\pi' = \pi_2^{K/F}$ (2.6(e)). Posons $\sigma_2 = \boldsymbol{\sigma}_{n/\ell}^K(\pi_2)$; on a $\sigma = \sigma_2^{K/F}$, d'où $\sigma_2 = g\sigma_1$ pour un $g \in G$. Remplaçant π_2 par $g^{-1}\pi_2$, on peut supposer $g = 1$ (3.1(5)). Puisque π_2 est de profondeur $< r$ (car π' est de profondeur $< r$), l'hypothèse de récurrence donne $\pi_2 = \pi_1$ et donc $\pi' = \pi$.

Il reste à prouver l'assertion (ii) quand π' est de profondeur r. Plaçons-nous d'abord dans le cas *(a)*, comme plus haut. Si $\pi'_{K/F}$ est de profondeur $\leq r-1$, le même raisonnement donne le résultat. On peut donc supposer que $\pi'_{K/F}$ est de profondeur r. Mais alors on peut utiliser le raisonnement ci-dessus en partant des données $(\pi'_{K/F}, \pi_{K/F}, K)$ à la place de (π, π', F). La représentation $\pi_{K/F}$ est de profondeur $\leq r-1$, donc cela donne $\pi'_{K/F} = \pi_{K/F}$ d'où $\pi' = \pi$ comme précédemment. Supposons finalement que nous sommes dans le cas *(b)* et comme plus haut introduisons la représentation π_2. Si π_2 est de profondeur $< r$, on raisonne comme plus haut. Si π_2 est de profondeur r, on utilise le raisonnement ci-dessus en partant des données (π_2, π_1, K) à la place de (π, π', F). La représentation π_1 est de profondeur $r-1$, donc cela nous donne $\pi_2 = \pi_1$, d'où $\pi' = \pi$.

3.6 Soit $\sigma \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_F^0(n)$ de profondeur r. Nous démontrons, par récurrence sur r, que σ est dans l'image de $\boldsymbol{\sigma}_n^F$. Dans le cas $r = 0$, on a $n = 1$ et c'est clair par 3.1(1). Supposons donc $r > 1$; il existe une extension K/F, cyclique de degré premier ℓ, telle que soit $\sigma_{K/F}$ est irréductible de profondeur $r-1$, soit $\sigma = \sigma_1^{K/F}$, pour $\sigma_1 \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_K^0(n/\ell)$ de profondeur $r-1$. Dans le premier cas, il existe $\pi_1 \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_K^0(n)$ tel que $\sigma_{K/F} = \boldsymbol{\sigma}_n^K(\pi_1)$. Posons $G = \mathrm{Gal}(K/F)$; on a $g\sigma_{K/F} = \sigma_{K/F}$, $g \in G$. Par 3.1(5) et l'injectivité de $\boldsymbol{\sigma}_n^K$, la représentation π_1 est stable par tous les g, donc de la forme $\pi_{K/F}$ avec $\pi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_n^0(F)$ (2.3). Par suite (3.1(6)), $\sigma_{K/F} = \sigma'_{K/F}$, où $\sigma' = \boldsymbol{\sigma}_n^F(\pi)$. Ceci implique $\sigma = \chi\sigma'$, pour un caractère χ de $F^\times$ trivial sur $\mathrm{N}_{K/F}(K^\times)$. On a donc $\sigma = \boldsymbol{\sigma}_n^F(\chi\pi)$, par 3.1(2).

Dans l'autre cas, il existe $\pi_1 \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_K^0(n/\ell)$ tel que $\boldsymbol{\sigma}_{n/\ell}^K(\pi_1) = \sigma_1$. Les représentations $g\sigma_1$, $g \in G$, sont distinctes, donc aussi les $g\pi_1$ 3.1(5). La représentation $\pi = \pi_1^{K/F}$ est donc supercuspidale, et par suite $\boldsymbol{\sigma}_n^F(\pi) = \sigma$, par 3.1(7).

La preuve du Théorème 3.3 est terminée.

Remarque. – Il est facile de démontrer que les applications $\boldsymbol{\sigma}_n^F$ préservent la profondeur.

3.7 THÉORÈME. – *Soient F une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et n, n' deux entiers* ≥ 1. *Sous les hypothèses de* 3.1 *on a pour $\pi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n)$ et $\pi' \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n')$,*

$$L(\pi \times \pi') = L(\boldsymbol{\sigma}_n^F(\pi) \otimes \boldsymbol{\sigma}_{n'}^F(\pi')).$$

On sait ([20] Prop. 8.1) qu'on a

$$L(\pi \times \pi') = \prod_{\chi} L(\chi),$$

où χ parcourt les quasicaractères non ramifiés de $F^\times$ tels que $\chi \check{\pi} = \pi'$. De même on a, pour $\sigma \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_F^0(n)$ et $\sigma' \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_F^0(n')$,

$$L(\sigma \otimes \sigma') = \prod_{\chi} L(\chi),$$

où χ parcourt les quasicaractères non ramifiés de $F^\times$ tels que $\chi \check{\sigma} = \sigma'$.

Par les hypothèses (2) et (3) de 3.1 les applications $\boldsymbol{\sigma}_n^F$ et $\boldsymbol{\sigma}_{n'}^F$ sont compatibles à la torsion par les quasicaractères et au passage aux contragrédientes. Grâce au théorème 3.3(ii), elles sont bijectives. On en déduit que pour tout quasicaractère χ de $F^\times$ les relations $\chi \check{\pi} = \pi'$ et $\chi \boldsymbol{\sigma}_n^F(\check{\pi}) = \boldsymbol{\sigma}_{n'}^F(\pi')$ sont équivalentes. Le résultat en découle.

3.8 Les hypothèses de 3.1 n'impliquent certainement pas que les correspondances $\boldsymbol{\sigma}_n^F$ préservent les facteurs ε de paires. Il n'est pas non plus établi que les correspondances construites dans [8] les préservent; ce n'est connu que pour les degrés premiers à la caractéristique résiduelle p de F [9]. Il est néanmoins facile de voir que les facteurs ε de paires sont préservés pour des représentations particulières, les "successions d'induites cycliques" de [14]. On dit qu'un élément σ de $\boldsymbol{\mathcal{G}}_F^0(n)$ (resp. $\boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n)$) est une *succession d'induites cycliques* s'il existe un entier $r \geq 0$, une suite finie de corps $F = F_0, F_1, \ldots, F_r$ telle que F_{i+1} soit une extension cyclique de F_i pour $i = 0, 1, \ldots, r-1$, une suite d'entiers $n = n_0, n_1, \ldots, n_r = 1$ et une suite d'éléments $\sigma_i \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_{F_i}^0(n_i)$ (resp. $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{F_i}^0(n_i)$) telles qu'on ait

$$\sigma_i = \sigma_{i+1}^{F_{i+1}/F_i} \quad \text{pour } i = 0, 1, \ldots, r-1.$$

On note $\boldsymbol{\mathcal{G}c}_F^0(n)$ (resp. $\boldsymbol{\mathcal{A}c}_F^0(n)$) l'ensemble des éléments de $\boldsymbol{\mathcal{G}}_F^0(n)$ (resp. $\boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n)$) qui sont successions d'induites cycliques. Il découle des propriétés de 3.1 et principalement de la propriété (7) que $\boldsymbol{\sigma}_n^F$ induit une bijection de $\boldsymbol{\mathcal{A}c}_F^0(n)$ sur $\boldsymbol{\mathcal{G}c}_F^0(n)$. La préservation des facteurs ε de paires est alors donnée par le théorème B*(v)* de [14] §7.8. On peut énoncer :

THÉORÈME. – *Sous les hypothèses de* 3.1, *$\boldsymbol{\sigma}_n^F$ induit une bijection de $\boldsymbol{\mathcal{A}c}_F^0(n)$ sur $\boldsymbol{\mathcal{G}c}_F^0(n)$. Pour $\pi \in \boldsymbol{\mathcal{A}c}_F^0(n)$ et $\pi' \in \boldsymbol{\mathcal{A}c}_F^0(n')$ on a*

$$\varepsilon(\pi \times \pi', \psi_F) = \varepsilon(\boldsymbol{\sigma}_n^F(\pi) \otimes \boldsymbol{\sigma}_{n'}^F(\pi'), \psi_F).$$

3.9 Introduisons le groupe de Weil-Deligne $\mathcal{WD}_F$ de $\overline{F}$ sur F. Notons $\boldsymbol{\mathcal{G}}_F(n)$ l'ensemble des classes de représentations Φ-semisimples du groupe $\mathcal{WD}_F$ dans des espaces vectoriels complexes de dimension finie [35] §4. On identifie $\boldsymbol{\mathcal{G}}_F^{\mathrm{ss}}(n)$ à un sous-ensemble de $\boldsymbol{\mathcal{G}}_F(n)$, formé des classes de représentations triviales sur la composante connexe de $\mathcal{WD}_F$.

Comme expliqué dans [14] §5.2, la classification de Langlands et Zelevinski [36] (voir aussi [33]) permet d'étendre les bijections $\boldsymbol{\sigma}_n^F$, $n \geq 1$, en des bijections de $\boldsymbol{\mathcal{A}}_F(n)$ sur $\boldsymbol{\mathcal{G}}_F(n)$, que nous noterons encore $\boldsymbol{\sigma}_n^F$. Ces correspondances étendues sont en fait compatibles au changement de base et à l'induction automorphe, au sens suivant.

THÉORÈME. – *On se place sous les hypothèses de* 3.1. *Soit K/F une extension cyclique, de degré d. Soit $\pi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F(n)$; on a alors*

$$(\boldsymbol{\sigma}_n^F(\pi))_{K/F} = \boldsymbol{\sigma}_n^K(\pi_{K/F}).$$

Soit $\rho \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_K(n)$ et supposons ρ générique; on a alors

$$(\boldsymbol{\sigma}_n^K(\rho))^{K/F} = \boldsymbol{\sigma}_{nd}^F(\rho^{K/F}).$$

Démonstration. – Comme les correspondances étendues sont obtenues via la classification de Zelevinski [14] §5.2, on voit aussitôt qu'il suffit de prouver le théorème pour $\pi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n)$ et $\rho \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_K^0(n)$. Le cas où $\pi_{K/F} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_K^0(n)$ est donné par l'hypothèse (6) de 3.1 tandis que celui où $\rho^{K/F} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(nd)$ vient de l'hypothèse (7). Traitons les autres cas en supposant, comme nous le pouvons par transitivité du changement de base et de l'induction automorphe (2.3, 2.5), que d est premier. Soit $\pi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n)$ telle que $\pi_{K/F}$ ne soit pas supercuspidale. Alors (2.6(*e*)) π est de la forme $\tau^{K/F}$ pour un $\tau \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_{n/d}^0(K)$ et $\boldsymbol{\sigma}_n^F(\pi) = (\boldsymbol{\sigma}_{n/d}^K(\tau))^{K/F}$ par l'hypothèse (7) de 3.1. On a (2.6(*b*))

$$\pi_{K/F} = \boxplus_{g \in \mathrm{Gal}(K/F)} g\tau$$

et

$$(\boldsymbol{\sigma}_n^F(\pi))_{K/F} = \bigoplus_{g \in \mathrm{Gal}(K/F)} g\boldsymbol{\sigma}_{n/d}^K(\tau).$$

Le résultat voulu découle alors de l'hypothèse (5) de 3.1.

Soit $\rho \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_K^0(n)$ telle que $\rho^{K/F}$ ne soit pas supercuspidale. Alors (2.6(*d*)) ρ est de la forme $\pi_{K/F}$ pour un $\pi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n)$ et $\boldsymbol{\sigma}_n^K(\rho) = (\boldsymbol{\sigma}_n^F(\pi))_{K/F}$ par l'hypothèse (6) de 3.1. On a (2.6(*a*))

$$\rho^{K/F} = \boxplus_{\chi} \chi\pi$$

où χ parcourt le groupe Ξ des caractères de $F^\times$ triviaux sur $\mathrm{N}_{K/F}(K^\times)$, tandis que

$$(\boldsymbol{\sigma}_n^K(\rho))^{K/F} = \bigoplus_{\chi} \chi\boldsymbol{\sigma}_n^F(\pi).$$

L'assertion demandée découle alors de l'hypothèse (2) de 3.1.

4. Préservation des conducteurs de paires

4.1 Dans ce chapitre nous prouvons le théorème 2 du Chapitre 1, c'est-à-dire :

THÉORÈME. – *On suppose que les correspondances $\boldsymbol{\sigma}_n^F$ vérifient* 3.1. *Soient $\pi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n)$ et $\pi' \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n')$ correspondant (par $\boldsymbol{\sigma}^F$) à $\sigma \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_F^0(n)$ et $\sigma' \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_F^0(n')$ respectivement. On a $f(\pi \times \pi') = f(\sigma \otimes \sigma')$.*

Avant de prouver le théorème, tirons-en une conséquence.

COROLLAIRE. – *On a $f(\pi) = f(\boldsymbol{\sigma}_n^F(\pi))$.*

C'est immédiat puisque $f(\pi) = f(\pi \times 1_F)$, $f(\boldsymbol{\sigma}_n^F(\pi)) = f(\boldsymbol{\sigma}_n^F(\pi) \times 1_{\mathcal{W}_F})$ où 1_F est le quasicaractère trivial de $F^\times$ et $1_{\mathcal{W}_F}$ le quasicaractère trivial de $\mathcal{W}_F$, qui se correspondent par la théorie du corps de classes.

Remarques. – 1) On peut établir directement l'égalité $f(\boldsymbol{\sigma}_n^F(\pi)) = f(\pi)$, sans considérer les paires. La méthode est tout à fait analogue.

2) On connaît le comportement des facteurs $\boldsymbol{\varepsilon}$, donc des exposants, dans la classification de Langlands-Zelevinski [20] §§8, 9. Il vient alors que l'on a encore $f(\pi \times \pi') = f(\sigma \otimes \sigma')$ si $\pi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F(n)$ et $\pi' \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F(n')$ correspondent à $\sigma \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_F(n)$ et $\sigma' \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_F(n')$ par les correspondances étendues de 3.9.

4.2 Commençons la preuve du Théorème 4.1, en suivant la ligne esquissée au Chapitre 1. Soit K une extension cyclique de F, de degré premier ℓ. Supposons d'abord que $\pi = \tau^{K/F}$ pour un élément τ de $\boldsymbol{\mathcal{A}}_K^0(n/\ell)$. Posons $\rho = \boldsymbol{\sigma}_{n/\ell}^K(\tau)$; on a $\sigma = \rho^{K/F}$ par l'hypothèse (7) de 3.1. On en tire $\sigma \otimes \sigma' = (\rho \otimes \sigma'_{K/F})^{K/F}$ d'où

$$f(\sigma \otimes \sigma') = f(K|F)\Big(f(\rho \otimes \sigma'_{K/F}) + nn'\ell^{-1}\delta_{K/F}\Big),$$

$\delta_{K/F}$ désignant l'exposant de la différente de K/F. De plus, on a la relation (2.6*(c)*)

$$f(\pi \times \pi') = f(K|F)\Big(f(\tau \times \pi'_{K/F}) + nn'\ell^{-1}\delta_{K/F}\Big).$$

Par suite, les égalités $f(\sigma \otimes \sigma') = f(\pi \times \pi')$ et $f(\rho \otimes \sigma'_{K/F}) = f(\tau \times \pi'_{K/F})$ sont équivalentes.

Remarques. – 1) Comme les exposants sont symétriques en π et π', on obtient un résultat parallèle si π' est induite automorphe à partir de K.

2) On peut utiliser l'équivalence précédente pour prouver l'égalité $f(\pi \times \pi') = f(\sigma \otimes \sigma')$ quand $\sigma \in \boldsymbol{\mathcal{G}c}_F^0(n)$ et $\sigma' \in \boldsymbol{\mathcal{G}c}_F^0(n')$. Mais en ce cas on sait déjà (Théorème 3.8) qu'on a préservation des facteurs $\boldsymbol{\varepsilon}$ de paires, donc des exposants de paires.

4.3 On dit que $\sigma \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_F^0(n)$ (resp. $\boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n)$) est *sauvagement ramifié* si

(a) n est une puissance de p et

(b) aucun quasicaractère non ramifié ne fixe σ.

LEMME. – *Soit $\sigma \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_F^0(n)$ sauvagement ramifié. Pour toute extension finie galoisienne modérément ramifiée K de F on a $\sigma_{K/F} \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_{K/F}^0(n)$; on peut choisir K de sorte que $\sigma_{K/F} \in \boldsymbol{\mathcal{G}c}_K^0(n)$.*

Démonstration. – Par la proposition 2.2 de [4], $\sigma \in \mathcal{G}_F^0(n)$ est sauvagement ramifié si et seulement si sa restriction au groupe d'inertie sauvage de $\overline{F}$ sur F est irréductible. Pour toute extension galoisienne modérément ramifiée K de F, $\sigma_{K/F}$ reste donc irréductible. Notons E le sous-corps de $\overline{F}$ fixé par le noyau de la représentation projective associée à σ; c'est une extension finie de F (*cf.* par exemple [10]). Prenons pour K la plus grande extension modérément ramifiée de F dans E. L'image, dans le groupe projectif, du groupe de Weil de $\overline{F}$ sur K est un p-groupe fini; il s'ensuit que $\sigma_{K/F}$ est succession d'induites cycliques : on a bien $\sigma_{K/F} \in \mathcal{G}c_K^0(n)$.

4.4 Prouvons d'abord le théorème 4.1 dans le cas où σ et σ' sont sauvagement ramifiés. Il existe une extension galoisienne modérément ramifiée K de F telle que $\sigma_{K/F}$ et $\sigma'_{K/F}$ soient successions d'induites cycliques (lemme 4.3). Supposons dans un premier temps que K/F est cyclique, et notons Ξ le groupe des caractères de $F^\times$ triviaux sur $\mathrm{N}_{K/F}(K^\times)$.

Il nous faut appliquer à π et π', qui, par 3.1(2) et 3.3 sont sauvagement ramifiés, et à $\chi \in \Xi$, un résultat crucial, conséquence du calcul des exposants de paires [5]. Ce résultat est l'analogue d'un résultat qui est très facile à établir pour σ, σ' et χ.

PROPOSITION ([5] 6.14). – *Soient $\pi \in \mathcal{A}_F^0(n)$ et $\pi' \in \mathcal{A}_F^0(n')$ sauvagement ramifiées. Soit χ un quasicaractère modérément ramifié de $F^\times$.*

(a) *Si $\check{\pi}'$ n'est pas de la forme $\eta\pi$, où η est un quasicaractère modérément ramifié de $F^\times$, on a $f(\chi\pi \times \pi') = f(\pi \times \pi')$.*

(b) *On a $f(\chi\pi \times \check{\pi}) = f(\pi \times \check{\pi}) + f(\chi)$.*

Le comportement des facteurs ε lors d'un changement de base cyclique donne les formules (2.3)

$$f(K|F)\, f(\sigma_{K/F} \otimes \sigma'_{K/F}) = \sum_{\chi \in \Xi} f(\chi\sigma \otimes \sigma') + \alpha,$$
$$f(K|F)\, f(\pi_{K/F} \times \pi'_{K/F}) = \sum_{\chi \in \Xi} f(\chi\pi \times \pi') + \alpha,$$

où le même entier α intervient dans les deux formules. Les termes de gauche sont égaux puisque $\sigma_{K/F}$ et $\sigma'_{K/F}$ sont successions d'induites cycliques (4.2). Si $\check{\pi}' \neq \eta\pi$ pour tout quasicaractère modérément ramifié η de $F^\times$ alors on a $\check{\sigma}' \neq \eta\sigma$ pour tout tel η, par 3.1 (1 et 2) et 3.3; par la partie *(a)* de la Proposition et son analogue pour σ et σ', on obtient l'égalité voulue $f(\sigma \otimes \sigma') = f(\pi \times \pi')$. Si $\check{\pi}'$ est de la forme $\eta\pi$, ce qui implique $\check{\sigma}' = \eta\sigma$ par 3.1(2 et 3), on utilise la partie *(b)* de la Proposition et son analogue pour σ et σ'.

4.5 Si l'extension K de F n'est pas cyclique il suffit de procéder en deux temps. On introduit l'extension non ramifiée maximale F' de F dans K, de sorte que les extensions K/F', F'/F sont cycliques. Par le raisonnement précédent, on obtient $f(\sigma_{F'/F} \otimes \sigma'_{F'/F}) = f(\pi_{F'/F} \times \pi'_{F'/F})$ et, en l'appliquant à nouveau (à l'extension F'/F au lieu de K/F'), on obtient $f(\sigma \otimes \sigma') = f(\pi \times \pi')$.

Le théorème 4.1 est donc vrai si σ et σ' sont sauvagement ramifiées.

4.6 Nous allons ramener le cas général du théorème 4.1 au cas particulier déjà traité, grâce aux considérations de 4.2.

LEMME. – *Soit $\sigma \in \mathcal{G}_F^0(n)$. Supposons que σ n'est pas sauvagement ramifiée. Il existe alors une extension finie non ramifiée F' de F, et une extension cyclique modérément ramifiée* non triviale *K de F' telles que $\sigma_{F'/F}$ soit irréductible et induite à partir de K.*

Preuve. – S'il existe un quasicaractère non ramifié non trivial χ (forcément d'ordre fini) χ de $F^\times$ tel que $\chi\sigma = \sigma$, alors σ est induite à partir de l'extension (non ramifiée) fixée par le noyau de χ. Supposons donc $\chi\sigma \neq \sigma$ pour tout quasicaractère non ramifié χ de $F^\times$. Comme σ n'est pas sauvagement ramifiée, il existe un nombre premier ℓ distinct de p divisant n et une extension E de F de degré ℓ telle que σ soit induite à partir de E. Si E est cyclique sur F on prend $F' = F$, $K = E$. Sinon, on prend pour F' une extension finie non ramifiée telle que $K = EF'$ soit galoisienne. Dans les deux cas $\sigma_{F'/F}$ est irréductible et induite à partir de K, extension cyclique de F'.

4.7 Terminons la preuve du théorème 4.1 par récurrence sur $n+n'$. Par symétrie, on peut supposer que σ n'est pas sauvagement ramifiée, et lui appliquer le lemme. Posant $m = n/[K{:}F']$, on peut trouver $\tau \in \mathcal{G}_K^0(m)$ et $\rho \in \mathcal{A}_K^0(m)$ telles que $\sigma_{F'/F} = \tau^{K/F'}$ et $\tau = \boldsymbol{\sigma}_m^K(\rho)$.

Supposons d'abord que $\sigma'_{F'/F}$ ne soit pas irréductible. La représentation σ' et donc de la forme $\eta^{F''/F}$, pour $F \subsetneq F'' \subset F'$ et $\eta \in \mathcal{G}_{F''}^0(n'')$, $n'' = n/[F''{:}F]$. De plus, on peut supposer $[F''{:}F]$ premier. Soit $\xi \in \mathcal{A}_{F''}^0(n'')$ vérifiant $\boldsymbol{\sigma}_{n''}^{F''}(\xi) = \eta$. Par récurrence on a $f(\sigma_{F''/F} \otimes \eta) = f(\pi_{F''/F} \times \xi)$ et le résultat découle de 4.2.

Supposons donc que $\sigma'_{F'/F}$ soit irréductible. L'extension F'/F est non ramifiée, et il découle immédiatement de 2.4 qu'on a

$$f(\sigma_{F'/F} \otimes \sigma'_{F'/F}) = f(\sigma \otimes \sigma'),$$
$$f(\pi_{F'/F} \times \pi'_{F'/F}) = f(\pi \times \pi').$$

Il suffit donc de traiter le cas où $F' = F$. L'extension K/F est alors cyclique, et on peut supposer $[K{:}F]$ premier.

Par l'hypothèse de récurrence (appliquée à τ et aux composantes irréductibles de $\sigma'_{K/F}$) on a, grâce au théorème 3.9,

$$f(\tau \otimes \sigma'_{K/F}) = f(\rho \times \pi'_{K/F}),$$

qui entraîne, par 4.2, l'égalité $f(\sigma \otimes \sigma') = f(\pi \times \pi')$.

Nous avons terminé les démonstrations des théorèmes 1 et 2 de l'introduction.

5. Une propriété d'unicité

5.1 La propriété (4) de 3.1 n'a pas été utilisée jusqu'à maintenant, mais elle est tout à fait cruciale pour le résultat suivant, qui s'établit suivant une démarche analogue à ce qui précède.

THÉORÈME. – *On suppose qu'on a, pour toute extension finie F de $\mathbb{Q}_p$ et tout entier $n \geq 1$, une autre application $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n^F : \mathcal{A}_F^0(n) \to \mathcal{G}_F^0(n)$ vérifiant les propriétés* (1)–(7) *de* 3.1. *Si $\pi \in \mathcal{A}_F^0(n)$ est succession d'induites cycliques, on a $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n^F(\pi) = \boldsymbol{\sigma}_n^F(\pi)$. En général pour $\pi \in \mathcal{A}_F^0(n)$ il existe un quasicaractère non ramifié χ_π de $F^\times$ tel que $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n^F(\pi) = \chi_\pi \boldsymbol{\sigma}_n^F(\pi)$.*

Remarque. – On voit en particulier que pour les éléments sauvagement ramifiés la correspondance $\boldsymbol{\sigma}_n^F$ coïncide, à torsion par les quasicaractères non ramifiés près, avec celle construite dans [4]. En fait il sera clair au lecteur que les arguments ci-après ont une portée plus générale que l'énoncé du théorème. En particulier dans les cas $n = p$ ou $(n, p) = 1$, on peut comparer les correspondances $\boldsymbol{\sigma}_n^F$ de [8] et celles construites auparavant [24], [11], [25], [13], [2], [31], [32], [30]. Nous y reviendrons à une autre occasion.

Preuve du théorème. – Le résultat est immédiat si π est succession d'induites cycliques.

Supposons d'abord π sauvagement ramifié. Appliquons le lemme 4.3 à $\sigma = \boldsymbol{\sigma}_n^F(\pi)$. Il existe une extension K de F, finie, galoisienne et modérément ramifiée, ayant la propriété suivante : $(\pi_{F'/F})_{K/F'} \in \mathcal{A}c_n^0(K)$, où F'/F est la sous-extension maximale non ramifiée de K/F. Notons $(\pi_{F'/F})_{K/F'} = \pi_{K/F}$; la représentation $\pi_{K/F}$ est succession d'induites cycliques, d'où $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n^K(\pi_{K/F}) = \boldsymbol{\sigma}_n^K(\pi_{K/F})$. Par 3.1(6) (appliqué à F'/F et à K/F'), on a

$$(\boldsymbol{\sigma}_n^F(\pi))_{K/F} = (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n^F(\pi))_{K/F}.$$

Cela implique $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n^F(\pi) = \chi\,\boldsymbol{\sigma}_n^F(\pi)$, où χ est un caractère de $F^\times$ trivial sur $\mathrm{N}_{K/F}(K^\times)$. On a alors

$$\det \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n^F(\pi) = \chi^n \, \det \boldsymbol{\sigma}_n^F(\pi)$$

d'où, par 3.1(4), $\chi^n = 1$. Mais χ est modérément ramifié et n est une puissance de p, donc χ est non ramifié.

Prouvons le cas général par récurrence sur n. Si π n'est pas sauvagement ramifiée, on peut appliquer le lemme 4.6 à $\sigma = \boldsymbol{\sigma}_n^F(\pi)$. Posant $m = n/[K{:}F']$ on voit qu'il existe $\rho \in \mathcal{A}_K^0(m)$ tel que $\pi_{F'/F} = \rho^{K/F'} \in \mathcal{A}_{F'}^0(n)$. Par récurrence $\boldsymbol{\sigma}_m^K(\rho)$ et $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_m^K(\rho)$ diffèrent par torsion par un quasicaractère non ramifié. Il en est donc de même de $\boldsymbol{\sigma}_n^{F'}(\pi_{F'/F}) = \boldsymbol{\sigma}_m^K(\rho)^{K/F'}$ et $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n^{F'}(\pi_{F'/F}) = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_m^K(\rho)^{K/F'}$. Mais alors σ et $\sigma' = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n^F(\pi)$, dont les restrictions à $\mathcal{W}_{F'}$ diffèrent par quasicaractère non ramifié, diffèrent elles-mêmes par un quasicaractère non ramifié, puisque F'/F est non ramifiée.

6. Une correspondance venant de la géométrie

6.1 Dans ce chapitre, nous montrons que les applications $\boldsymbol{\sigma}_n^F : \mathcal{A}_F^0(n) \to \mathcal{G}_F^{\mathrm{ss}}(n)$ construites par M. Harris [8] vérifient les propriétés de 3.1 utilisées pour établir les résultats des Chapitres 3 et 4. Il s'agit en fait d'indiquer les références à [8] où sont établies ces propriétés.

6.2 Dans [8] §3, p. 101, juste avant le corollaire du Théorème 2, M. Harris attache à chaque élément $\pi \in \mathcal{A}_F^0(n)$, dont le quasicaractère central est d'ordre fini, un élément $\boldsymbol{\sigma}(\pi)$ de $\mathcal{G}_F^{\mathrm{ss}}(n)$. En fait la construction fait apparaître $\boldsymbol{\sigma}(\pi)$ comme une représentation ℓ-adique semisimple du groupe de Galois de $\overline{F}$ sur F. Mais si l'on remarque que dans [8] p. 95, entre les formules (8) et (9), un isomorphisme entre $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et $\mathbb{C}$ a été choisi (un isomorphisme entre les clôtures algébriques de $\mathbb{Q}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et $\mathbb{C}$ suffirait), on voit que $\boldsymbol{\sigma}(\pi)$ peut être considérée également comme une représentation continue semisimple de $\mathcal{W}_F$ (*cf.* [35] §4.2) dans un espace vectoriel complexe.

Remarque. – A priori, l'application $\pi \mapsto \boldsymbol{\sigma}(\pi)$ dépend de l'isomorphisme entre $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et $\mathbb{C}$ choisi plus haut; en fait il n'est pas difficile de voir qu'elle ne dépend que du choix d'une racine carrée, dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, du cardinal du corps résiduel de F.

6.3 Par le corollaire du Théorème 2 de [8] p. 101, l'application $\pi \mapsto \boldsymbol{\sigma}(\pi)$ de 1.2 est compatible à la torsion par les quasicaractères unitaires; par suite elle s'étend en une application de $\boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n)$ dans $\boldsymbol{\mathcal{G}}_F^{\mathrm{ss}}(n)$, compatible à la torsion par les quasicaractères. Nous notons $\boldsymbol{\sigma}_n^F : \boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n) \to \boldsymbol{\mathcal{G}}_F^{\mathrm{ss}}(n)$ cette application.

Par la Proposition 3 du §3 de [8] on retrouve pour $n = 1$ la correspondance donnée par la théorie du corps de classes. Par la remarque qui suit dans [8], et la Proposition 6 du §3 de [8] les applications $\boldsymbol{\sigma}_n^F$ sont compatibles avec les isomorphismes d'extensions finies de $\mathbb{Q}_p$ (propriété (5) de 3.1). La compatibilité au changement de base (propriété (6) de 3.1) est donnée par [8] §3 Proposition 4, tandis que la compatibilité à l'induction automorphe (propriété (7) de 3.1) provient de [8] §3 Proposition 5. Finalement il reste à vérifier les propriétés (3) et (4) de 3.1; elles ne sont pas établies dans [8], mais il est facile de le faire compte-tenu de l'origine globale [8] Theorem 2 de la construction. Le lecteur peut prendre pour guide la preuve de [8] §3 Proposition 3. D'ailleurs ces propriétés sont explicitement mentionnées dans l'introduction de [9].

Nous avons donc justifié tous les énoncés de l'introduction de [8] dont la référence était une lettre de Henniart [17]. De plus, nous avons montré que les correspondances de [8] préservent les exposants de paires.

6.4 Bien entendu, toutes les considérations des Chapitres 3 et 4 s'appliquent sans changement dans le cas où F est un corps local de caractéristique p, pourvu que les théories de changement de base et d'induction automorphe soient établies dans ce cadre, avec les propriétés signalées au Chapitre 2. Mais les constructions de [29] donnent des correspondances bijectives préservant les facteurs ε de paires, donc *a fortiori* les exposants de paires. Développer les Chapitres 3 et 4 en caractéristique p est donc inutile.

Appendice:
Comparaison entre changement de base et induction automorphe

A.1 Dans cet appendice nous comparons, pour une extension cyclique donnée K de F, l'induction automorphe de K à F et le changement de base de F à K. Nous ne traiterons que le cas des représentations supercuspidales, mais on pourrait obtenir aisément, par les méthodes analogues, des résultats valables pour des représentations lisses irréductibles quelconques. Il s'agit donc de prouver les énoncés a) à e) de 2.6. En A.11 nous prouverons également la propriété de transitivité de l'induction automorphe énoncée en 2.5.

On fixe l'extension cyclique K de F et on note d son degré, G son groupe de Galois, Ξ le groupe des caractères de $F^\times$ triviaux sur $\mathrm{N}_{K/F}(K^\times)$.

A.2 On suppose d'abord que d est premier et on prouve 2.6 *(d)* et *(e)*. Ici encore, en compliquant les énoncés on pourrait traiter le cas où d n'est pas premier.

Soit $\rho \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_K^0(n)$. On sait (2.5) que $\rho^{K/F}$ est supercuspidale si et seulement si on a $g\rho \neq \rho$ pour $g \in G$, $g \neq 1$. Comme d est premier on voit que $\rho^{K/F}$ n'est pas supercuspidale exactement quand $g\rho = \rho$ pour tout $g \in G$. Mais cette condition caractérise les éléments de $\boldsymbol{\mathcal{A}}_K^0(n)$ dans l'image du changement de base [1] I Prop. 6.6 et lemma 6.10, d'où l'assertion 2.6*(d)*.

Soit $\pi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n)$. On sait (2.4) que $\pi_{K/F}$ est supercuspidale si et seulement si on a $\chi\pi \neq \pi$ pour $\chi \in \Xi$, $\chi \neq 1$. Comme d est premier, on voit que $\pi_{K/F}$ n'est pas supercuspidale si et seulement si on a $\chi\pi = \pi$ pour tout $\chi \in \Xi$. Mais cette condition caractérise les éléments de $\boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n)$ dans l'image de l'induction automorphe [18] §5, en particulier Prop. 5.5: on a prouvé 2.6*(e)*.

A.3 Les autres assertions *(a)–(c)* de 2.6 se démontrent par voie globale. Les arguments sont essentiellement ceux déjà utilisés dans [13] et [18] §8 et nous nous permettons de les traiter ici rapidement.

Fixons une extension cyclique $\boldsymbol{k}/\boldsymbol{f}$ de corps de nombres, de degré d (on ne suppose plus que d est premier), totalement décomposée à l'infini. On suppose qu'on a une place w_0 de $\boldsymbol{k}$ et un isomorphisme topologique de $\boldsymbol{k}_{w_0}$ sur K qui induit un isomorphisme de $\boldsymbol{f}_{v_0}$ sur F, où v_0 désigne la place de $\boldsymbol{f}$ induite par w_0. On identifie $\boldsymbol{k}_{w_0}$ à K et $\boldsymbol{f}_{v_0}$ à F par ces isomorphismes, de sorte que G peut se voir aussi comme le groupe de Galois de $\boldsymbol{k}$ sur $\boldsymbol{f}$ et Ξ comme le groupe des quasicaractères de $\mathbb{A}_{\boldsymbol{f}}^\times$ triviaux sur $\boldsymbol{f}^\times \mathrm{N}_{\boldsymbol{k}/\boldsymbol{f}}(\mathbb{A}_{\boldsymbol{k}}^\times)$.

A.4 Prouvons d'abord 2.6*(b)* en supposant dans un premier temps que $\rho \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_K^0(m)$ est *unitaire*. Choisissons un quasicaractère de Hecke unitaire ω de $\mathbb{A}_{\boldsymbol{k}}^\times$ dont la restriction à $K^\times$ soit le caractère central de ρ. Choisissons une représentation irréductible automorphe cuspidale R de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_{\boldsymbol{k}})$, de caractère central ω, dont la composante R_{w_0} soit équivalente à ρ. Nous pouvons choisir la situation de façon à satisfaire aux conditions supplémentaires de la construction de [18] §8; cette construction donne alors une représentation irréductible automorphe cuspidale S de $\mathrm{GL}_{md}(\mathbb{A}_{\boldsymbol{f}})$, dont la composante en v_0 est isomorphe à $\rho^{K/F}$, et qui est caractérisée par la condition suivante :

(1) *pour presque toute place finie v de $\boldsymbol{f}$ on a*

$$\prod_w L(R_w) = L(S_v),$$

où w parcourt les places de $\boldsymbol{k}$ au-dessus de v.
De plus on a $\eta \otimes S \cong S$ pour tout caractère $\eta \in \Xi$.

Considérons maintenant le changement de base T de S dans l'extension $\boldsymbol{k}/\boldsymbol{f}$. C'est une représentation de $\mathrm{GL}_{md}(\mathbb{A}_{\boldsymbol{f}})$ induite de cuspidales au sens de [1] III Def. 5.1, et caractérisée par la condition suivante :

(2) *pour presque toute place finie w de $\boldsymbol{k}$, on a*

$$L(T_w) = \prod_\chi L(\chi S_v),$$

où v désigne la place de $\boldsymbol{f}$ induite par w et où χ parcourt les caractères de $\boldsymbol{f}_v^\times$ triviaux sur $N_{\boldsymbol{k}_w/\boldsymbol{f}_v}(\boldsymbol{k}_w^\times)$.

Comme on a $\eta \otimes S \cong S$ pour tout $\eta \in \Xi$, on obtient $L(\chi S_v) = L(S_v)$ dans la formule précédente, d'où

$$(2') \qquad L(T_w) = L(S_v)^{f(w|v)},$$

pour presque toute place finie w de $\boldsymbol{k}$, où $f(w|v)$ est le degré d'inertie de $\boldsymbol{k}_w$ sur $\boldsymbol{f}_v$.

De (1) et (2') on tire donc

$$(3) \qquad L(T_w) = \prod_{g \in G} L(gR_w)$$

pour presque toute place w de $\boldsymbol{k}$; en effet le groupe $G = \mathrm{Gal}(\boldsymbol{k}/\boldsymbol{f})$ agit transitivement sur les places w' de $\boldsymbol{k}$ au-dessus de v et, si $\boldsymbol{k}_w/\boldsymbol{f}_v$ est non ramifiée, le cardinal des stabilisateurs est le degré $f(w|v)$. Considérons la représentation T' de $\mathrm{GL}_{md}(\mathbb{A}_{\boldsymbol{k}})$ induite parabolique à partir du produit tensoriel des d représentations cuspidales gS, $g \in G$. L'identité précédente nous dit que pour presque toute place w de $\boldsymbol{k}$, T_w et T'_w ont les mêmes fonctions L. Donc T et T' sont presque partout équivalentes. Mais les représentations de $\mathrm{GL}_{md}(\mathbb{A}_{\boldsymbol{k}})$ induites de cuspidales vérifient le théorème de rigidité [21] Theorem 4.4. On a donc $T = T'$. En la place w_0 de $\boldsymbol{k}$, on obtient

$$(\rho^{K/F})_{K/F} = \boxplus_{g \in G} g\rho.$$

On a donc prouvé 2.6*(b)* quand $\rho \in \mathcal{A}_K^0(m)$ est unitaire. Le cas général en découle par torsion par un quasicaractère non ramifié, puisque changement de base et induction automorphe sont compatibles à la torsion par les quasicaractères χ de $F^\times$.

A.5 Prouvons maintenant la relation 2.6*(c)*. En fait cette relation a un pendant pour les fonctions L, que nous établissons de la même façon, et qui s'énonce ainsi

(4) *Soient $\pi \in \mathcal{A}_F^0(n)$ et $\rho \in \mathcal{A}_K^0(m)$; on a*

$$L(\rho \times \pi_{K/F}) = L(\rho^{K/F} \times \pi).$$

Pour démontrer (4) et 2.6*(c)*, il suffit de traiter le cas où ρ et π sont unitaires: en effet la torsion par un quasicaractère non ramifié de $F^\times$ se traduit par une même translation de la variable complexe s dans les deux membres des égalités à établir.

Nous supposons donc que $\pi \in \mathcal{A}_F^0(n)$ et $\rho \in \mathcal{A}_K^0(m)$ sont unitaires. Comme en A.4 nous choisissons une situation globale adaptée à ρ. Nous conservons les notations R et S de A.4.

Choisissons d'autre part une représentation irréductible automorphe cuspidale P de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\boldsymbol{f}})$ dont le composant à la place v_0 est isomorphe à π. Notons Q la représentation admissible de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\boldsymbol{k}})$ obtenue par changement de base. Elle est induite de cuspidales et caractérisée par la condition suivante :

(5) *pour presque toute place finie w de $\boldsymbol{k}$, on a*

$$L(Q_w) = \prod_{\chi} L(\chi P_v)$$

où v désigne la place de $\boldsymbol{f}$ induite par w, et où χ parcourt les caractères de $\boldsymbol{f}_v^\times$ triviaux sur $N_{\boldsymbol{k}_w/\boldsymbol{f}_v}(\boldsymbol{k}_w^\times)$.

A.6 Nous procédons dès lors de manière tout à fait analogue à [18] 8.15 à 8.17. Pour traiter 2.6*(c)* il faut choisir un caractère additif non trivial Ψ de $\mathbb{A}_{\boldsymbol{f}}$ dont la composante en v_0 redonne ψ_F; on pose $\Psi_{\boldsymbol{k}} = \Psi \circ \mathrm{Tr}_{\boldsymbol{k}/\boldsymbol{f}}$. Si v est une place de $\boldsymbol{f}$, on note Ψ_v la composante de Ψ en v. Si w est une place de $\boldsymbol{k}$, on note $\Psi_w = \Psi_v \circ \mathrm{Tr}_{\boldsymbol{k}_w/\boldsymbol{f}_v}$ la composante de $\Psi_{\boldsymbol{k}}$ en w.

On remarque tout d'abord que pour presque toute place v de $\boldsymbol{f}$, l'extension $\boldsymbol{k}/\boldsymbol{f}$ est non ramifiée en v, la relation (1) est vérifiée, la relation (5) l'est pour toute place w de $\boldsymbol{k}$ au-dessus de v, et les représentations R_w, S_v, Q_w, R_v sont non ramifiées. Notons Σ l'ensemble des places finies de $\boldsymbol{f}$ vérifiant ces conditions et $\Sigma_{\boldsymbol{k}}$ l'ensemble des places de $\boldsymbol{k}$ au-dessus de celles de Σ. Pour $v \in \Sigma$ on a aussitôt par un calcul direct

$$L(P_v \times S_v) = \prod_{w|v} L(Q_w \times R_w) \tag{5}$$

et de même pour les contragrédientes

$$L(P_v^\vee \times S_v^\vee) = \prod_{w|v} L(Q_w^\vee \times R_w^\vee) \tag{5'}$$

et on a aussi la relation triviale

$$\prod_{\chi \in \Xi} L(\chi_v) = \prod_{w|v} L(1_w), \tag{6}$$

où 1_w est le caractère trivial de $\boldsymbol{k}_w^\times$. Une relation analogue vaut trivialement pour les facteurs ε:

$$\frac{\varepsilon(P_v \times S_v, \Psi_v)}{\prod_{\chi \in \Xi} \varepsilon(\chi_v, \Psi_v)^{mn}} = \prod_{w|v} \frac{\varepsilon(Q_w \times R_w, \Psi_w)}{\varepsilon(1_w, \Psi_w)^{mn}}. \tag{7}$$

A vrai dire tous les termes valent 1 si, comme on peut le supposer, Ψ_v est d'exposant 0 pour $v \in \Sigma$.

A.7 On considère alors les équations fonctionnelles suivantes :

$$L(1_{\boldsymbol{k}}, s) = \varepsilon(1_{\boldsymbol{k}}, s)\, L(1_{\boldsymbol{k}}, 1-s),$$

où $1_{\boldsymbol{k}}$ est le caractère trivial de $\mathbb{A}_{\boldsymbol{k}}^\times$,

$$\begin{aligned} L(\chi, s) &= \varepsilon(\chi, s)\, L(\chi^{-1}, 1-s) \quad (\text{pour } \chi \in \Xi), \\ L(P \times S, s) &= \varepsilon(P \times S, s)\, L(P^\vee \times S^\vee, 1-s), \\ L(Q \times R, s) &= \varepsilon(Q \times R, s)\, L(Q^\vee \times R^\vee, 1-s), \end{aligned}$$

(voir les commentaires de [18] 8.16 pour ces deux dernières équations fonctionnelles).

Introduisons les facteurs γ reliés aux facteurs L et ε, par exemple

$$\gamma(P \times S) = \frac{\varepsilon(P \times S, s)\, L(P^\vee \times S^\vee, 1-s)}{L(P \times S, s)},$$

et de même pour les autres cas; on définit de même des facteurs γ locaux. On a l'égalité

$$\frac{\gamma(P \times S)}{\prod_{\chi \in \Xi} \gamma(\chi)^{mn}} = \frac{\gamma(Q \times R)}{\gamma(1_{\boldsymbol{k}})^{mn}}.$$

Mais par A.6 les facteurs locaux de cette égalité en $v \in \Sigma$ sont égaux. On en déduit donc l'égalité

$$\prod_{v \notin \Sigma} \frac{\gamma(P_v \times S_v, \Psi_v)}{\prod_{\chi \in \Xi} \gamma(\chi_v, \Psi_v)^{mn}} = \prod_{w \notin \Sigma_{\boldsymbol{k}}} \frac{\gamma(Q_w \times R_w, \Psi_w)}{\gamma(1_w, \Psi_w)^{mn}}, \tag{8}$$

le produit portant cette fois sur des ensembles finis.

A.8 On continue alors le raisonnement précédent comme dans [18] 8.16. On applique la relation (8) en remplaçant P par ηP où η est un quasicaractère unitaire de $\mathbb{A}_{\boldsymbol{f}}^\times / \boldsymbol{f}^\times$ trivial aux places à l'infini et très ramifié aux places finies $v \notin \Sigma$ (très ramifié par rapport à P_v, S_v, Q_w, R_w, $\boldsymbol{k}_w/\boldsymbol{f}_v$). Cela revient aussi à tordre Q par le caractère $\eta \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{k}/\boldsymbol{f}}$. Remarquons que l'égalité (7) vaut aussi en ce cas aux places $v \in \Sigma$ où η est ramifié. Aux places finies $v \notin \Sigma$ on a, parce que η est très ramifié [13] Lemma 4.2,

$$\frac{\gamma(\eta_v P_v \times S_v, \Psi_v)}{\prod_{\chi \in \Xi} \gamma(\chi_v, \Psi_v)^{mn}} = \prod_{w | v} \frac{\gamma((\eta \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{k}/\boldsymbol{f}})_w \, Q_w \times R_w, \Psi_w)}{\gamma(1_w, \Psi_w)^{mn}}.$$

On en déduit que l'égalité (8) vaut si on remplace le produit sur $v \notin \Sigma$ par le produit sur les places infinies ou par le produit sur les places finies $v \notin \Sigma$.

Si l'on tord par un autre quasicaractère unitaire de $\mathbb{A}_{\boldsymbol{f}}^\times / \boldsymbol{f}^\times$ qui est cette fois trivial à l'infini et en v_0, mais très ramifié en les places finies $v \notin \Sigma$ distinctes de v_0, on obtient alors

$$\frac{\gamma(P_{v_0} \times S_{v_0}, \Psi_{v_0})}{\prod_{\chi \in \Xi} \gamma(\chi_{v_0}, \Psi_{v_0})^{mn}} = \frac{\gamma(Q_{w_0} \times R_{w_0}, \Psi_{w_0})}{\gamma(1_{\boldsymbol{k}_{w_0}}, \Psi_{w_0})^{mn}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\gamma(\pi \times \rho^{K/F}, \psi)}{\prod_{\chi \in \Xi} \gamma(\chi, \psi_F)^{mn}} = \frac{\gamma(\pi_{K/F} \times \rho, \psi_K)}{\gamma(1_K, \psi_K)^{mn}},$$

où cette fois Ξ est vu comme le groupe des caractères de $F^\times$ triviaux sur $\mathrm{N}_{K/F}(K^\times)$. Par [12] Prop. 4.5 on tire de cette égalité une égalité des facteurs L et ε, i.e. à la fois la relation (4) de A.5 et la relation 2.6*(c)*.

A.9 Supposons $\pi = \rho_1^{K/F}$ pour un $\rho_1 \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(r)$, où $n = dr$. On a alors, par 2.6*(b)*, $\pi_{K/F} = \boxplus_{g \in G} \, g\rho_1$ et, par 2.6*(c)*,

$$\frac{\prod_{g \in G} \varepsilon(\rho \times g\rho_1, \psi_K)}{\varepsilon(1_K, \psi_K)^{dmr}} = \frac{\varepsilon(\rho^{K/F} \times \rho_1^{K/F}, \psi)}{\prod_{\chi \in \Xi} \varepsilon(\chi, \psi)^{dmr}}.$$

C'est la formule (b) du théorème 5.1 de [18] modulo la correction signalée à la remarque 2.4.

A.10 Prouvons enfin 2.6*(a)* en utilisant la relation A.5 (4) (la méthode globale serait plus délicate à utiliser à cause des conditions imposées par [18] §8); on pourrait d'ailleurs aussi tirer 2.6*(b)* de la relation A.5 (4)).

Soit $\pi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n)$. Soit h l'ordre du stabilisateur de π dans Ξ. On sait que $\pi_{K/F} = \boxplus \, g\sigma$ où σ est un élément de $\boldsymbol{\mathcal{A}}_K^0(n/h)$ dont le stabilisateur G_h dans G est le sous-groupe d'indice h, et où g parcourt G/G_h [1] I Prop. 6.6. D'autre part $\sigma^{K/F}$ est de la forme

$\boxplus_\chi \chi\pi'$, où $\pi' \in \mathcal{A}_K^0(n)$ a pour stabilisateur le sous-groupe Ξ_h d'ordre h dans Ξ et où χ parcourt Ξ/Ξ_h [18] Prop. 5.5. On a donc

$$\begin{aligned}(\pi_{K/F})^{K/F} &= \boxplus_{g\in G/G_h} (g\sigma)^{K/F} = \boxplus_g \sigma^{K/F} \\ &= \boxplus_g \boxplus_{\chi\in\Xi/\Xi_h} \chi\pi' = \boxplus_{\chi\in\Xi} \chi\pi'.\end{aligned}$$

Calculons $L(\overset{\vee}{\pi} \times (\pi_{K/F})^{K/F}, s)$: c'est le produit $\prod_{\chi\in\Xi} L(\overset{\vee}{\pi} \times \chi\pi', s)$ et pour chaque $\chi \in \Xi$ on a $L(\overset{\vee}{\pi} \times \chi\pi', s) = \prod_\eta L(\eta, s)$ où η parcourt les quasicaractères non ramifiés de $F^\times$ tels que $\eta\pi = \chi\pi'$. Mais d'autre part on a

$$\begin{aligned}L(\overset{\vee}{\pi} \times (\pi_{K/F})^{K/F}, s) &= \prod_{g\in G/G_h} L(\overset{\vee}{\pi} \times (g\sigma)^{K/F}, s) \\ &= \prod_{g\in G/G_h} L((\overset{\vee}{\pi})_{K/F} \times g\sigma, s) \quad \text{par A.5(4)} \\ &= \prod_{g,g'\in G/G_h} L(g'\overset{\vee}{\sigma} \times g\sigma, s),\end{aligned}$$

qui a un pôle en $s = 0$. L'un des facteurs $L(\eta)$ a donc aussi un pôle en $s = 0$. Par suite il existe $\chi \in \Xi$ tel que $\pi = \chi\pi'$. Mais alors

$$(\pi_{K/F})^{K/F} = \boxplus_{\chi\in\Xi} \chi\pi,$$

et la preuve est terminée.

A.11 Pour terminer, prouvons une propriété, plus générale que 2.6*(f)*, qui implique la transitivité de l'induction automorphe énoncée en 2.5. Comme ci-dessus, $d = [K{:}F]$, $G = \mathrm{Gal}(K/F)$ etc.

LEMME. – *Soit $\rho \in \mathcal{A}_K^0(n)$. Alors $\rho^{K/F}$ est l'unique élément τ de $\mathcal{A}_F(nd)$ qui soit stable par l'action de Ξ et dont le changement de base à K soit $\tau_{K/F} = \boxplus_{g\in G} g\rho$.*

On sait déjà que $\rho^{K/F}$ vérifie les propriétés annoncées, par 2.6*(b)*. Inversement, soit $\tau \in \mathcal{A}_F(n)$ vérifiant $\tau_{K/F} = \boxplus_{g\in G} g\rho$. Si le stabilisateur de ρ dans G est le sous-groupe G_h de G d'indice h alors $\rho^{K/F} = \boxplus_\chi \chi\pi'$, où $\pi' \in \mathcal{A}_F^0(n)$ a pour stabilisateur le sous-groupe Ξ_h d'ordre h dans Ξ et où χ parcourt Ξ/Ξ_h [18] Prop. 5.5. Par la détermination des fibres du changement de base [1] Prop. 6.7, on voit que τ est de la forme $\tau = \boxplus_\chi \eta_\chi\pi'$, où χ parcourt Ξ/Ξ_h et où $\eta_\chi \in \Xi$. Si κ est un générateur de Ξ la relation $\kappa\tau = \tau$ implique alors $\tau = \rho^{K/F}$, ce qui prouve le lemme.

COROLLAIRE. – *Soit F une extension de F incluse dans K. Pour $\rho \in \mathcal{A}_K(n)$ générique, on a $\rho^{K/F} = (\rho^{K/F'})^{F'/F}$.*

Par les résultats de [18] §5, il suffit de traiter le cas où ρ est supercuspidale, $\rho \in \mathcal{A}_K^0(n)$. Par ce qui précède $\rho^{K/F}$ est l'unique élément Ξ-stable de $\mathcal{A}_F^0(nd)$ dont le changement de base à K est $\boxplus_{g\in G} g\rho$. Il s'agit de montrer que l'élément Ξ-stable $\pi = (\rho^{K/F'})^{F'/F}$ a le même changement de base à K. Par transitivité du changement de base (2.4) on a $\pi_{K/F} = (\pi_{F'/F})_{K/F'}$. Ecrivons $\rho^{K/F'} = \boxplus_{i\in I}\tau_i$ où les τ_i sont supercuspidales; on a alors $\pi = \boxplus_{i\in I}\tau_i^{F'/F}$, d'où

$$\begin{aligned}\pi_{F'/F} &= \boxplus_{i\in I}(\tau_i^{F'/F})_{F'/F}\\ &= \boxplus_{i\in I}\ \boxplus_{g\in\mathrm{Gal}(F'/F)} g\tau_i\\ &= \boxplus\, g\rho^{K/F'}\end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}(\pi_{F'/F})_{K/F'} &= \boxplus\, g(\rho^{K/F'})_{K/F'}\\ &= \boxplus_{g'\in G} g'\rho.\end{aligned}$$

On a donc bien $\pi = \rho^{K/F}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. ARTHUR et L. CLOZEL, *Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula* (*Annals of Math. Studies*, vol. 120, Princeton University Press, 1989).

[2] C. J. BUSHNELL et A. FRÖHLICH, *Gauss sums and p-adic division algebras* (*Lecture Notes in Math.*, vol. 987, Springer, Berlin, 1983).

[3] C. J. BUSHNELL et G. HENNIART, *Local tame lifting for* GL_n *I: simple characters* (*Publ. Math. IHES*, vol. 83, 1996, p. 105-233).

[4] C. J. BUSHNELL et G. HENNIART, *Local tame lifting for* GL_n *II: wildly ramified supercuspidals* (*Manuscrit*, Mai 1997).

[5] C. J. BUSHNELL, G. HENNIART et P. C. KUTZKO, *Local Rankin-Selberg convolutions for* GL_n*: Explicit conductor formula* (*J. Amer. Math. Soc.*, à paraître).

[6] C. J. BUSHNELL et P. C. KUTZKO, *Simple types in* $GL(N)$*: computing conjugacy classes. Representation theory and analysis on homogeneous spaces* (S. Gindikin et al, eds.) (*Contemp. Math*, vol. 177, Amer. Math. Soc., Providence, 1995, p. 107-135).

[7] R. GODEMENT et H. JACQUET, *Zeta functions of simple algebras* (*Lecture Notes in Math.*, vol. 260, Springer, Berlin 1972).

[8] M. HARRIS, *Supercuspidal representations in the cohomology of Drinfel'd upper half-spaces; elaboration of Carayol's program* (*Invent. Math.*, vol. 129, 1997, p. 75-120).

[9] M. HARRIS, *p-adic uniformization and Galois properties of automorphic forms* (*Manuscrit*, 1997).

[10] G. HENNIART, *Représentations du groupe de Weil d'un corps local* (*L'Ens. Math.*, vol. 26, 1980, p. 155-172).

[11] G. HENNIART, *La conjecture de Langlands locale pour* $\mathrm{GL}(n)$. *Journées Arithmétiques de Metz* (*Astérisque*, vol. 94, 1982, p. 67-85).

[12] G. HENNIART, *La conjecture de Langlands locale pour* $\mathrm{GL}(3)$ (*Mém. Soc. Math. France*, nouvelle série, vol. 11/12, 1984).

[13] G. HENNIART, *On the local Langlands conjecture for* $\mathrm{GL}(n)$*: the cyclic case* (*Ann. Math.*, vol. 123, 1986, p. 145-203).

[14] G. HENNIART, *La conjecture de Langlands locale numérique pour* $\mathrm{GL}(n)$ (*Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, (4), vol. 21, 1988, p. 497-544).

[15] G. HENNIART, *Une conséquence de la théorie du changement de base pour* $\mathrm{GL}(n)$ (*Analytic Number Theory*, Tokyo, Lecture Notes in Math.1988, vol. 1434, Springer, Berlin, 1990, p. 138-142).

[16] G. HENNIART, *Caractérisation de la correspondance de Langlands locale par les facteurs* ε *de paires* (*Invent. Math.*, vol. 113, 1993, p. 339-350.).

[17] G. HENNIART, lettre à Michael Harris, janvier 1994.

[18] G. HENNIART et R. HERB, *Automorphic induction for* $\mathrm{GL}(n)$ *(over local non-archimedean fields)* (*Duke Math. J.*, vol. 78, 1995, p. 131-192).

[19] H. JACQUET, I. I. PIATETSKII-SHAPIRO et J. SHALIKA, *Conducteur des représentations du groupe linéaire* (*Math. Ann.*, vol. 236, 1981, p. 199-214).
[20] H. JACQUET, I. I. PIATETSKII-SHAPIRO et J. A. SHALIKA, *Rankin-Selberg convolutions* (*Amer. J. Math.*, vol. 105, 1983, p. 367-483).
[21] H. JACQUET et J. A. SHALIKA, *On Euler products and the classification of automorphic representations II* (*Amer. J. Math.*, vol. 103, 1981, p. 777-815).
[22] D. A. KAZHDAN, *On lifting. Lie Group Representations II* (*Lecture Notes in Math.*, vol. 1041, Springer, Berlin, 1984, p. 209-249).
[23] H. KOCH, *Bemerkungen zur numerischen lokalen Langlands Vermutung* (*Proc. Steklov Inst.*, vol. 183, 1984, p. 129-136).
[24] P. C. KUTZKO, *The Langlands conjecture for* GL_2 *of a local field* (*Ann. Math.*, vol. 112, 1980, p. 381-412).
[25] P. C. KUTZKO et A. MOY, *On the local Langlands conjecture in prime dimension* (*Ann. Math.*, vol. 121, 1985, p. 495-517).
[26] J.-P. LABESSE, *Non-invariant base change identities* (*Bull. Soc. Math. France*, vol. 61, 1995).
[27] R. P. LANGLANDS, *Problems in the theory of automorphic forms. Lectures in modern analysis and applications III* (*Lecture Notes in Math*, vol. 170, Springer, Berlin, 1970, p. 18-86).
[28] R. P. LANGLANDS, *Base change for* $\mathrm{GL}(2)$ (*Ann. Math. Studies*, vol. 96, Princeton University Press, 1980).
[29] G. LAUMON, M. RAPOPORT et U. STUHLER, *$\mathcal{D}$-elliptic sheaves and the Langlands correspondence* (*Invent. Math.*, vol. 113, 1993, p. 217-338).
[30] C. MŒGLIN, *Sur la correspondance de Langlands-Kazhdan* (*J. Math. pures et appl.*, vol. 69, 1990, p. 175-226).
[31] A. MOY, *Local constants and the tame Langlands correspondence* (*Amer. J. Math.*, vol. 108, 1986, p. 863-930).
[32] H. REIMANN, *Representations of tamely ramified p-adic division and matrix rings* (*J. Number Theory*, vol. 38, 1991, p. 58-105).
[33] F. RODIER, *Représentations de* $\mathrm{GL}(n, k)$ *où* k *est un corps p-adique* (*Séminaire Bourbaki*, vol. 587, 1981/82, *Astérisque*, vol. 92-93, 1982, p. 201-218).
[34] F. SHAHIDI, Fourier transforms of intertwining operators and Plancherel measures for $\mathrm{GL}(n)$ (*Amer. J. Math.*, vol 106, 1984, p. 67-111).
[35] J. TATE, *Number theoretic background. Automorphic forms, representations and L-functions* (A. Borel and W. Casselman, eds.) (*Proc. Symposia Pure Math*, vol. 33, part 2 (Amer. Math. Soc., Providence, 1979), p. 3-22).
[36] A. V. ZELEVINSKY, *Induced representations of reductive p-adic groups II: On irreducible representations of* $\mathrm{GL}(n)$ (*Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, (4), vol. 13, 1980, p. 165-210).

(Manuscrit reçu le 4 septembre 1997.)

C. J. BUSHNELL
Department of Mathematics,
Strand, London WC2R 2LS, UK.
bushnell@mth.kcl.ac.uk

G. HENNIART
Département de Mathématiques,
& URA 752 du CNRS,
Bâtiment 425,
Université de Paris-Sud
91405 ORSAY cedex, France.
henniart@dmi.ens.fr
Guy.Henniart@math.u-psud.fr

P. C. KUTZKO
Department of Mathematics,
University of Iowa,
Iowa City, IA52242, USA.
pkutzko@blue.weeg.uiowa.edu