ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

LAURENT GUILLOPÉ

Théorie spectrale de quelques variétés à bouts

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 22, nº 1 (1989), p. 137-160
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1989_4_22_1_137_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 22, 1989, p. 137 à 160.

THÉORIE SPECTRALE DE QUELQUES VARIÉTÉS À BOUTS

PAR LAURENT GUILLOPÉ

RÉSUMÉ. — On étudie la théorie spectrale d'opérateurs type laplacien et opérateur de Dirac sur une variété riemannienne complète à bouts (cylindriques ou isométriques à des pointes localement symétriques). La résolvante de tels opérateurs admet un prolongement méromorphe à un revêtement du plan spectral **C**, avec des ramifications d'ordre 2 au-dessus d'un ensemble discret. L'étude de la partie absolument continue est précisée grâce à des fonctions, dites ondes planes, qui satisfont un ensemble d'équations fonctionnelles.

ABSTRACT. — We study the spectral theory of operators such as laplacians or Dirac operators on a complete Riemannian manifold with ends (either cylindrical or locally symmetric cusps). The resolvant of such an operator admits a meromorphic continuation to a cover of the spectral plane, with ramifications of order two over a discrete subset. We precise the nature of the absolutely continuous part with functions, called plane waves, which satisfy a family of functional equations.

Soit X une variété riemannienne complète non compacte. On dit que X est à bouts si $X = X_{\text{int}} \cup X_\infty$ où la partie X_{int} est compacte et X_∞ est l'union d'un nombre fini de bouts de deux types, cylindrique ou pointu. Un bout est dit cylindrique si B est isométrique au produit riemannien d'une demi-droite et d'une variété compacte Z. L'exemple standard d'un bout pointu est une pointe d'un espace localement symmétrique de volume fini; de manière générale, on dira que B est pointu si B est difféomorphe au produit d'une demi-droite par une variété W, variété fibrée en fibres F sur une base Z et si B porte une métrique riemannienne avec les propriétés suivantes : soit r, z, f des coordonnées locales sur $\mathbf{R}^+$, Z, F resp., où (z, f) est un système de coordonnées sur W trivialisant la fibration, il existe alors deux métriques g_z et $g_{0\,\mathrm{F}}$ sur Z et F resp., une métrique $g_{\mathrm{F}}(r, z)$ sur F dépendant de (r, z) et deux constantes m_1, m_2 strictement positives telles que la métrique g sur B soit quasi produit, de la forme $dg^2 = dr^2 + dg_{\mathrm{Z}}^2 + dg_{\mathrm{F}}^2(r, z)$, en vérifiant la majoration $g_{\mathrm{F}}(r, z) \leqq \mathrm{K}\, e^{-m_1 r} g_{0\,\mathrm{F}}$ et avec forme volume $dv_g = e^{-m_2 r}\, dr\, dv_{g\,\mathrm{Z}}\, dv_{g_0\,\mathrm{F}}$.

L'objet de cet article est la théorie spectrale d'opérateurs de type laplacien définis sur l'espace de sections de certains fibrés géométriques sur X : fibrés trivial, de formes, de spineurs... L'étude est essentiellement qualitative et repose sur quelques hypothèses de géométrie spectrale à la base du modèle que nous allons maintenant introduire.

Soit $\mathscr{S}$ le système constitué par la donnée d'une partie discrète $\mathscr{M}$ de $\mathbf{R}^+$, d'une application multiplicité m sur $\mathscr{M}$ à valeurs entières, d'un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ et de deux hamiltoniens H_0 et H opérant dans $\mathscr{H}$. L'espace $\mathscr{H}$ est de la forme $\mathscr{H} = \mathscr{H}_{\text{int}} \oplus \mathscr{H}_\infty$

avec $\mathcal{H}_\infty = \prod_{\mu \in \mathcal{M}} \mathcal{H}(\mu)$, $\mathcal{H}(\mu) = L^2(\mathbf{R}^+, \mathbf{C}, dx_\mu) \otimes \mathbf{C}^{m(\mu)}$. L'hamiltonien H_0, dit libre, est décomposé suivant $H_0 = H_{\text{int}} \oplus \prod_{\mu \in \mathcal{M}} H(\mu)$ où $H(\mu)$ est l'oscillateur $-(d^2/dx_\mu^2) + \mu$ avec condition de Neumann à l'origine; on suppose que la forme quadratique Q_0 associée à H_0 vérifie la propriété d'injection compacte de $\mathcal{D}(Q_0) \cap \mathcal{H}_{\text{int}}$ dans $\mathcal{H}$. L'hamiltonien H, dit perturbé, est tel que le domaine de sa forme quadratique associée Q est inclus dans celui de Q_0 et que H opère sur $\mathcal{H}(\mu) \cap C_0^\infty(\mathbf{R}^+)$ comme $H(\mu)$. On suppose que, si $\mathcal{M}$ est infini, sa fonction de comptage (avec multiplicité) est à croissance polynomiale.

Précisons comment le système $\mathcal{S}$ est construit dans le cas du laplacien opérant dans l'espace des fonctions de carré intégrable sur une variété à bouts. En séparant les variables sur chaque bout cylindrique, on obtient la décomposition $L^2(B) = \prod_{j \in N} \mathcal{H}(\mu_j)$ où $(\mu_j)_{j \in N}$ est la suite des valeurs propres du laplacien de la variété compacte Z. Pour un bout pointu, on a la décomposition $L^2(B) = L_b^2(\mathbf{R}^+ \times Z) \oplus L_0^2(B)$ où le premier espace est l'espace des fonctions basiques sur la fibration $\mathbf{R}^+ \times W$ (*i. e.* qui proviennent des fonctions sur la base $\mathbf{R}^+ \times Z$) et le second l'espace des fonctions paraboliques *i. e.* d'intégrale nulle sur toute fibre. Le premier espace est du type $\prod_{j \in N} \mathcal{H}(\mu_j)$ où $(\mu_j)_{j \in N}$ est la suite des valeurs propres de Z (à un décalage près, dû au changement de jauge exponentiel pour obtenir la mesure de Lebesgue dr au lieu de la mesure à densité exponentielle $e^{-m_1 r}\, dr$ le long de $\mathbf{R}^+$). On prendra pour $\mathcal{H}_{\text{int}}$ la somme de l'espace des fonctions sur la partie compacte X_{int} et des divers espaces de fonctions paraboliques, s'il existe des bouts pointus. Grosso modo, l'hamiltonien H_{int} est le laplacien Neumann sur X_{int} et on a $\mathcal{D}(Q_0) \supset \mathcal{D}(Q) = H^1(X)$. L'hypothèse de compacité concernant $\mathcal{D}(Q_{\text{int}})$ est assurée par le théorème de Rellich et le résultat classique d'injection compacte des fonctions paraboliques H^1, dont la démonstration vaut avec les hypothèses géométriques énoncées plus haut.

La famille $\mathcal{M}$ est finie, quand on étudie des variétés à pointes construites à partir d'espaces hyperboliques réels, ainsi que pour le cas de l'équation de Schrödinger sur $\mathbf{R}$ avec potentiel constant en dehors d'un compact (avec des valeurs égales ou non aux infinis), situation archétype du cas général. Au contraire, un espace avec des bouts cylindriques ou avec des pointes construites à partir d'un groupe de Lie algébrique semi-simple de rang 1 sur $\mathbf{Q}$ donne une famille $\mathcal{M}$ infinie.

L'analyse spectrale hilbertienne de l'hamiltonien H est résumée dans le théorème suivant :

THÉORÈME 0.1. — (*a*) H *a un spectre ponctuel à multiplicité finie et avec comme seul point d'accumulation éventuel* $+\infty$.

(*b*) H *et* H_0 *opèrent sur leurs sous-espaces d'absolue continuité de manière unitairement équivalente. Le spectre absolument continu de* H *est* $[\mu_1, \infty[$ *avec* $\mu_1 = \inf_{\mu \in \mathcal{M}} (\mu)$.

(*c*) *Le spectre singulier continu de* H *est vide.*

L'énoncé (*a*) s'obtient aisément en adaptant les arguments de Donnelly [5] à notre cadre, le reste du théorème découle de la théorie de la diffusion à la Enss, la présentation de Perry [9] étant particulièrement agréable à manier pour notre propos. Ces résultats sont détaillés dans les deuxième (spectre ponctuel) et troisième parties (spectre continu).

L'étape suivante est de préciser les résultats de théorie spectrale L^2 en étudiant la résolvante. Introduisons à cet effet quelques notations: Notons $\mathscr{H}_{\text{comp}}$ l'espace des éléments à support compact de $\mathscr{H}$, $\mathscr{H}_{\text{loc}}$ l'espace des éléments localement dans $\mathscr{H}$ (espaces se réduisant aux espaces de fonctions correspondants si X n'a que des bouts cylindriques, *cf.* 1.2) et $\mathscr{L}_s(\mathscr{H}_{\text{comp}}, \mathscr{H}_{\text{loc}})$ l'espace des opérateurs de $\mathscr{H}_{\text{comp}}$ dans $\mathscr{H}_{\text{loc}}$ muni de la topologie de la convergence simple.

De la présence du spectre essentiel, la résolvante $(H-\lambda)^{-1}$, en tant que fonction à valeurs opérateurs bornés dans $\mathscr{H}$, n'est méromorphe que sur $\mathbf{C}\diagdown[\mu_1, +\infty[$. Néanmoins, considérée comme fonction à valeurs dans $\mathscr{L}_s(\mathscr{H}_{\text{comp}}, \mathscr{H}_{\text{loc}})$, la résolvante se prolonge méromorphiquement en traversant l'axe $[\mu_1, \infty[$ du demi-plan supérieur vers le demi-plan inférieur, et vice versa. Ce prolongement n'est pas uniforme sur $\mathbf{C}$, mais sur une surface de Riemann convenable. Soit Σ la surface associée aux fonctions racine carrée $(\sqrt{\lambda-\mu}, \mu\in\mathscr{M})$, revêtement $(\Sigma, \mathbf{C}, \pi)$ dans lequel on a plongé $FP=\mathbf{C}\diagdown[\mu_1, +\infty[$ (partie dite feuillet physique). On a le résultat central de cet article, objet de la quatrième partie :

THÉORÈME 0.2. — *La résolvante* $(H-\lambda)^{-1}$ $(\lambda\in FP)$, *considérée comme fonction à valeurs dans* $\mathscr{L}_s(\mathscr{H}_{\text{comp}}, \mathscr{H}_{\text{loc}})$, *se prolonge méromorphiquement à* Σ.

Les pôles de la résolvante sont habituellement appelées résonances : ce sont des valeurs propres généralisées, les états propres (ou résonants) ne sont pas (en général) dans $\mathscr{H}$. Dans le cas où $\mathscr{M}$ est fini, on peut exhiber un déterminant annulé par ces résonances : analysant le type de croissance de cette fonction entière, on établit une estimation sur la fonction de comptage associée à l'ensemble discret des résonances.

Cette étude de la résolvante permet alors de définir simplement les fonctions propres généralisées liées au spectre continu.

A partir du plongement de $\mathbf{C}$ dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^+, \mathbf{C})$ par fonctions constantes, on injecte $\mathbf{C}^{m(\mu)}=\mathbf{C}\otimes\mathbf{C}^{m(\mu)}$ dans $\mathscr{H}_{\text{loc}}(\mu)$ et ainsi naturellement dans $\mathscr{H}$: soit $I(\mu)$ ce plongement de $\mathbf{C}^{m(\mu)}$ dans $\mathscr{H}$. A chaque μ (un point à l'infini de $\mathscr{H}$ en quelque sorte) est associée l'onde plane exponentielle $EXP_\mu(\Lambda)$ $(\Lambda\in\Sigma)$, homomorphisme de $\mathbf{C}^{m(\mu)}$ dans $\mathscr{H}_{\text{loc}}(\mu)$ définie par $EXP_\mu(\Lambda)(x_\mu)=e^{i\sqrt{\Lambda-\mu}\,x_\mu}I(\mu)$. Si χ est un opérateur d'identification des parties à l'infini des systèmes libres et perturbés (*i. e.* χ nul au voisinage de $\mathscr{H}_{\text{int}}$, de telle manière que $\chi\, EXP_\mu$ soit localement dans le domaine de H, et opérant par l'identité au voisinage de l'infini), on définit les ondes planes E_μ de l'hamiltonien H suivant :

$$E_\mu(\Lambda)=\chi\, EXP_\mu(\Lambda)-(H-\Lambda)^{-1}(H_{\text{loc}}-\pi(\Lambda))(\chi\, EXP_\mu(\Lambda))).$$

Le second terme est bien défini car $EXP_\mu(\Lambda)$ est annulé par $H_{0,\text{loc}}-\pi(\Lambda)$ et $(H-\Lambda)^{-1}$ opère, d'après le théorème 0.2, sur l'espace $\mathscr{H}_{\text{comp}}$. Cette définition des ondes planes, introduite par Colin de Verdière dans sa démonstration originale du prolongement des séries d'Eisenstein sur une surface de Riemann non compacte d'aire finie [4], apparaît naturellement quand on étudie les opérateurs d'onde $W_\pm=s-\lim_{t\to\pm\infty} e^{itH}e^{-itH_0}P^{H_0}_{ac}$, qui sont égaux aussi à $W_\pm=s-\lim_{t\to\pm\infty} e^{itH}\chi e^{-itH_0}P^{H_0}_{ac}$ (*cf.* partie 6).

Le comportement à l'infini des ondes planes E_μ est décrit par un ensemble de coefficients, dits de transfert, $T_{\mu'\mu}(\Lambda)$ (μ, $\mu' \in \mathscr{M}$, $\Lambda \in \Sigma$), à valeurs dans $\mathrm{Hom}(\mathbf{C}^{m(\mu)}, \mathbf{C}^{m(\mu')})$ et méromorphes sur Σ. Le faisceau localement constant, de base $\mathbf{C} \setminus \mathscr{M}$ et engendré par les sections $E_\mu(\Lambda)$, donne lieu à une monodromie : expliciter l'action du groupe G du revêtement ramifié (Σ, $\mathbf{C}$) sur ce faisceau donne un ensemble d'équations fonctionnelles sur les E_μ (et donc aussi sur les coefficients de transfert); équations paramétrées par G et qu'on écrit pour une famille de générateurs de G (partie 5).

On peut maintenant exprimer simplement les opérateurs d'ondes en terme des fonctions d'ondes et on détermine la matrice de diffusion à partir des équations fonctionnelles associées à une famille de générateurs (reliée simplement à la précédente) du groupe G. Le caractère unitaire de ces matrices de diffusion donne une première famille d'identités entre ces coefficients évalués aux énergies du spectre absolument continu. On en obtient d'autres à partir de relations à la Maaβ-Selberg *i. e.* de calcul des normes de fonctions d'ondes tronquées : ces relations, qu'on ne démontre pas ici, sont à la base des démonstrations classiques [6] du prolongement des séries d'Eisenstein et sont utilisées dans le calcul des formules de trace *à la Selberg* [8].

Les coefficients de transfert sont des invariants spectraux des systèmes considérés; pour mieux les comprendre, il est intéressant d'examiner les réductions induites éventuellement par les symétries du système.

Une première situation de symétrie est donnée par certains espaces localement symétriques : nous nous restreignons aux exemples des espaces à courbure négative (auquel cas $\mathscr{M}$ est réduit à un élément) et des variétés modulaires de Hilbert. Les ondes planes ne sont rien d'autres que les séries d'Eisenstein et tous les coefficients de transfert non diagonaux $T_{\mu'\mu}$ ($\mu' \neq \mu$) sont identiquement nuls. Cette propriété est en fait équivalente au fait que les fonctions d'ondes E_μ sont définies sur le revêtement Σ_μ de degré 2 de $\mathbf{C}$ associé à la fonction $\sqrt{\lambda-\mu}$ (et alors $\Sigma_\mu = \mathbf{C}$!). La nullité des coefficients de transfert non diagonaux n'est pas générique : on le vérifie grâce à la dérivée fonctionnelle de $T_{\mu'\mu}$ par rapport à une variation conforme à support compact de la métrique; la partie 7.B contient une formule en termes des fonctions d'onde $E_{\mu'}$ et E_μ pour cette dérivée fonctionnelle dans le cas où H est le laplacien sur les fonctions.

L'autre situation symétrique étudiée est celle des hamiltoniens supersymétriques : il existe un opérateur de charge D, de carré H et anticommutant avec une involution τ de $\mathscr{H}$. C'est le cas par exemple du laplacien sur les formes différentielles d'une variété à bout (ou d'un opérateur de Dirac). Précisément, on suppose qu'il existe une décomposition de $\mathscr{H}_\infty$ du type $\mathscr{H}_\infty = \prod_{\rho \in \mathscr{R}} \mathscr{H}(\rho)$ où $\mathscr{R}$ est une partie discrète de $\mathbf{R}$, $\mathscr{H}(\rho) = L^2(\mathbf{R}^+, \mathbf{C}^2, dx_\rho) \otimes \mathbf{C}^{m(\rho)}$ et D opère sur $\mathscr{H}(\rho)$ suivant $D_\rho \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v' + \rho u \\ -u' - \rho v \end{pmatrix}$, anticommutant avec l'involution d'échange des coordonnées standard sur $\mathbf{C}^2$. On a une théorie analogue pour D à celle de H : il existe une surface de Riemann Σ^s sur laquelle est définie méromorphiquement la résolvante $(D-\lambda)^{-1}$. Cette surface Σ^s est un revêtement d'une part de $\mathbf{C}$, d'autre part de $\Sigma(\mathscr{M})$ (avec $\mathscr{M} = \{\rho^2, \rho \in \mathscr{R}\}$). Les automorphismes de (Σ^s, Σ, p) revêtent l'identité ou l'antipodie ($\lambda \to -\lambda$) vis-à-vis du revêtement (Σ^s, $\mathbf{C}$, π^s);

leur action sur les fonctions d'ondes de D est triviale ou celle de l'involution τ respectivement. Cette remarque permet de réduire effectivement les coefficients de transfert de H en termes des coefficients de transfert supersymétriques (*i. e.* relativement à D).

Cet article a été écrit en partie au cours d'un séjour à l'Institut de Mathématiques de l'Université de Bâle, que l'auteur remercie de cette invitation et pour son accueil chaleureux.

Merci aussi au rapporteur dont les remarques et suggestions ont été mises à profit pour la rédaction du texte publié.

1. Notations

1.1. — On notera par χ une fonction régulière sur $\mathbf{R}$, à support dans $\mathbf{R}_*^+$ et constante, valant 1, au voisinage de l'infini, ainsi que l'opérateur de multiplication induit sur $\mathscr{H}$: $\chi(h_{\text{int}}, (h_\mu)) = (0, (\chi h_\mu))$.

Soit $\overline{\mathbf{R}_*^+} = \mathbf{R}_*^+ \cup \{+\infty\}$, $\mathscr{A} = \overline{\mathbf{R}_*^+}^{\mathscr{M}}$. On identifiera $x \in \mathbf{R}$ à la suite constante $a = (x)$ de $\mathscr{A}$. Pour a dans $\mathscr{A}$, $\mathscr{H}^a$ note l'espace de Hilbert $\mathscr{H}_{\text{int}} \oplus \prod_{\mu \in \mathscr{M}} L^2([0, a_\mu], dx_\mu) \otimes \mathbf{C}^{m(\mu)}$.

1.2. — Étant donné un système $\mathscr{S}$, on introduit

$$\mathscr{H}_{\text{loc}} = \mathscr{H} + \bigoplus_{\mu \in \mathscr{M}} \mathscr{H}_{\text{loc}}(\mu), \quad \mathscr{H}_{\text{comp}} = \bigcup_{a \in \mathbf{R}} \mathscr{H}^a,$$

où $\mathscr{H}_{\text{loc}}(\mu)$ est l'espace des fonctions localement de carré intégrable sur $\mathbf{R}^+$ à valeurs dans $\mathbf{C}^{m(\mu)}$.

On notera H_{loc} le prolongement de H à $\mathscr{D}(H) + \bigoplus_{\mu \in \mathscr{M}} \mathscr{H}_{\text{loc}}(\mu)$ coïncidant sur $\mathscr{H}_{\text{loc}}(\mu)$ avec $H(\mu) = -(d^2/dx_\mu^2) + \mu$ au sens distribution.

1.3. — Pour a dans $\mathscr{A}$, on introduit le système $\mathscr{S}^a$ d'espace d'états $\mathscr{H}^a$ et d'énergie donnée par la forme quadratique Q^a de domaine

$$\mathscr{D}(Q^a) = \mathscr{D}(Q) \cap (\mathscr{H}_{\text{int}} \oplus \prod_{\mu \in \mathscr{M}} H^1([0, a_\mu], dx_\mu) \otimes \mathbf{C}^{m(\mu)}),$$

égale à Q sur $\mathscr{D}(Q^a) \cap \mathscr{D}(Q)$ et vérifiant

$$Q^a(h_\mu) = \int (|h'_\mu|^2 + \mu |h_\mu|^2)\, dx_\mu \quad \text{sur } H^1((0, a_\mu)) \otimes \mathbf{C}^{m(\mu)}.$$

Au système $\mathscr{S}^a$ est associé $\mathscr{M}^a = \{\mu \in \mathscr{M} \mid a_\mu = +\infty\}$. L'hamiltonien H^a est obtenu à partir de l'hamiltonien H en mettant des barrières Neumann sur $\mathscr{H}(\mu)$ en $x_\mu = a_\mu$ si a_μ n'est pas infini, et en oubliant $m(\mu)$ systèmes $\mathscr{S}_\mu(a_\mu)$, d'espaces d'états $L^2([a_\mu, +\infty], dx_\mu)$ et d'hamiltonien $H(\mu)$ avec conditions de Neumann, sans interaction avec $\mathscr{S}^a$. On a $\mathscr{H}_{\text{int}}(\mathscr{S}^a) = \mathscr{H}_{\text{int}}(\mathscr{S}) \oplus \prod_{\mu \in \mathscr{M} \setminus \mathscr{M}^a} L^2([0, a_\mu], dx_\mu) \otimes \mathbf{C}^{m(\mu)}$.

1.4. — La surface spectrale de $\mathscr{S}$ est la surface de Riemann $\Sigma=\Sigma(\mathscr{M})$ associée aux fonctions $(\sqrt{\lambda-\mu})_{\mu\in\mathscr{M}}$ telle que, pour Λ dans Σ, $\sqrt{\Lambda-\mu}$ soit de partie imaginaire positive pour μ assez grand. C'est un revêtement ramifié de $\mathbf{C}$, avec application de revêtement $\pi=\pi(\mathscr{M})$ et des ramifications d'ordre 2 au-dessus de $\mathscr{M}$. On identifiera $\mathrm{FP}=\mathbf{C}\diagdown[\mu_1, +\infty[$ (dit feuillet physique) et son image dans Σ par la section s telle que $\sqrt{s(\lambda)-\mu}$ ($\lambda\in\mathrm{FP}$) soit de partie imaginaire positive pour tout μ dans $\mathscr{M}$. Le groupe G d'automorphismes du revêtement (Σ, $\mathbf{C}$, π) est commutatif et engendré par la famille $(\gamma_\mu)_{\mu\in\mathscr{M}}$, l'élément γ_μ d'ordre deux correspondant à un lacet de degré $\delta_{\mu\mu'}$ relativement à μ' (δ indice de Kronecker). On note $\gamma(\mu)=\prod_{\mu'\leqq\mu}\gamma_{\mu'}$, ce qui fournit un autre système de générateurs.

1.5. — Si $\mathscr{E}$ est un espace vectoriel, $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ note l'espace des endomorphismes de $\mathscr{E}$. Si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont des espaces vectoriels topologiques, $\mathscr{L}_s(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ note l'espace des opérateurs linéaires de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$, continus pour le topologie de la convergence simple. Si $\mathscr{E}$ est un espace de Banach, $\mathscr{B}(\mathscr{E})$ ($\mathscr{K}(\mathscr{E})$ resp.) note l'espace des endomorphismes linéaires continus (compacts resp.) du Banach $\mathscr{E}$.

Si A est un opérateur auto-adjoint de l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$, on notera par P_*^A le projecteur spectral sur le sous-espace caractérisé par la propriété spectrale (par exemple absolue continuité de la mesure spectrale) indiquée par l'indice $*$. On notera la différence de résolvante $(A-z)^{-1}-(B-z)^{-1}$ par $R_{A,B}(z)$ et, sauf ambiguïté, $(H-z)^{-1}$, $(H_0-z)^{-1}$ par $R(z)$, $R_0(z)$ respectivement.

2. Spectre essentiel et spectre ponctuel

PROPOSITION 2.1. — *Le spectre essentiel de l'hamiltonien* $H(\mathscr{S})$ *est* $[\mu_1, +\infty[$.

Preuve. — Les hamiltoniens $H(\mathscr{S})$ et $H_0(\mathscr{S})$ ont même spectre essentiel, comme il résulte du lemme suivant.

LEMME 2.2. — *La résolvante* $R(-1)$ *est une perturbation compacte de* $R_0(-1)$.

Preuve. — Avec l'opérateur de troncature χ, on peut écrire

$$R_{H,H_0}(-1)=(\chi-1)R_0(-1)-R(-1)((H+1)\chi R_0(-1)-1). \tag{2.1}$$

Soit P_μ la projection de $\mathscr{H}$ sur $\mathscr{H}_{\text{int}}\oplus\bigoplus_{\nu\leqq\mu}\mathscr{H}(\nu)$. On a $R_0(-1)(1-P_\mu)\to 0$ en norme lorsque $\mu\to+\infty$. L'opérateur $(1-\chi)R_0(-1)P_\mu$ est compact, et donc aussi $(1-\chi)R_0(-1)$, par fermeture normique de l'espace des opérateurs compacts. Avec des arguments analogues, on obtient la compacité des opérateurs $R(-1)(1-\chi)$, $\nabla\chi.\nabla R_0(-1)$ et $\Delta\chi R_0(-1)$ et, par suite, du second terme du membre de droite de (2.1), en écrivant

$$(H+1)\chi R_0(-1)-1=(\chi-1)-2\nabla_\chi.\nabla R_0(-1)+\Delta\chi R_0(-1). \qquad \square$$

LEMME 2.3. — *Le spectre de l'hamiltonien* $H(\mathscr{S})$ *contient un nombre fini de valeurs propres (de multiplicité finie) dans* $]-\infty, \mu_1[$.

Preuve. — Le spectre essentiel de H étant $[\mu_1, +\infty[$, l'intersection du spectre de H avec $]-\infty, \mu_1[$ est un ensemble discret de valeurs propres de multiplicité finie, avec au plus un point d'accumulation en μ_1.

Introduisons le système $\mathscr{S}_N^1$ (d'espace d'états $\mathscr{H}$ et d'hamiltonien H_N^1), dont l'énergie est donnée par la forme quadratique Q_N^1 de domaine

$$\mathscr{D}(Q_N^1)=\mathscr{D}(Q)+H^1([0, +\infty[\diagdown\{1\}, dx_{\mu_1})\otimes \mathbf{C}^{m(\mu_1)}$$

et prolongeant naturellement Q:

$$Q_N^1(\Phi_\mu)=Q(\mu)(\Phi_\mu) \qquad \text{si} \quad \Phi_\mu \in H^1([0, +\infty[\diagdown\{1\}, dx_{\mu_1})\otimes \mathbf{C}^{m(\mu_1)}.$$

Le système $\mathscr{S}_N^1$ est l'union (sans interaction) du système $\mathscr{S}^{a_1}$ [avec $(a_1)_\mu=1$ si $\mu=\mu_1$, $+\infty$ sinon] et de $m(\mu_1)$ systèmes libres $\mathscr{S}_{\mu_1}(1)$.

Notons, pour μ dans $\mathscr{M}$, par μ^+ son successeur dans $\mathscr{M}$ pour l'ordre naturel induit par celui de $\mathbf{R}$. Le spectre du système $\mathscr{S}_{\mu_1}(1)$ est égal à $[\mu_1, +\infty[$, absolument continu simple, tandis que le spectre essentiel de $\mathscr{S}^{a_1}$ est $[\mu_1^+, +\infty[$, d'après la proposition précédente et l'égalité $\mu_1(\mathscr{S}^{a_1})=\mu_1^+(\mathscr{S})$ résultant la définition de a_1 : les valeurs propres de H_N^1 dans $[-\infty, \mu_1^+[$ constituent un ensemble discret, avec point d'accumulation éventuel μ_1^+ et sont donc en nombre fini dans $]-\infty, \mu_1[$. Pour conclure, il suffit d'appliquer le principe du min-max aux deux formes quadratiques Q et Q_N^1 et remarquer que la suite croissante des valeurs propres de Q dans $]-\infty, \mu_1(\mathscr{S})[$ majore celle de Q_N^1. □

PROPOSITION 2.4. — Le spectre discret de $H(\mathscr{S})$ (compté avec multiplicité) est localement fini.

Preuve. — D'après le lemme précédent, H a un nombre fini de valeurs propres dans $]-\infty, \mu_1[$. Il s'agit de montrer qu'il en est de même dans tout intervalle $[\mu, \mu^+[$ pour μ dans $\mathscr{M}$. Remarquons que tout état propre Φ de H, avec valeur propre ω dans $[\mu, \mu^+[$, a ses composantes Φ_ν nulles pour tout ν avec $\nu \leqq \mu$. Ainsi l'intersection du spectre discret de H avec $[\mu, \mu^+[$ est incluse dans le spectre discret de l'hamiltonien $H(\mathscr{S}^{a_\mu})$ avec $(a_\mu)_\nu=1$ si $\nu \leqq \mu$, $+\infty$ sinon. D'après le lemme précédent, l'intersection de ce spectre avec $]-\infty, \mu^+[$ est finie. La proposition en résulte. □

3. Spectres continus

A. MÉTHODE DE ENSS. — Soit H (resp. H_0) un opérateur auto-adjoint opérant sur $\mathscr{H}$ (resp. $\mathscr{H}_0$). En introduisant des hypothèses exprimant essentiellement la décomposition d'une onde en une onde sortante et une onde entrante, Enss donne des résultats précis sur les opérateurs d'onde $W_\pm(H, H_0)=s-\lim\limits_{t \to \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0} P_{ac}^{H_0}$.

DÉFINITION 3.1. — *On dira qu'une famille de fonctions $\mathscr{F}$ d'applications de* **R** *dans* **R**, *continues et bornées, est* P_c-*génératrice si pour tout opérateur auto-adjoint* A, *il existe un sous-espace dense* $\mathscr{D}$ *de* $\mathscr{H}$ *tel que* $\bigcup_{\alpha \in \mathscr{F}} \alpha(A)\mathscr{D}$ *soit dense dans* $P_c^A \mathscr{H}$.

THÉORÈME 3.2 [3]. — *Soient* H, H_0 *des opérateurs auto-adjoints sur* $\mathscr{H}$. *On suppose qu'il existe une décomposition, dite partition de l'unité, du projecteur* $P_{ac}^{H_0}$ *donnée par* $P_{ac}^{H_0} = P_+ + P_-$ (*avec* P_+ *et* P_- *autoadjoints*) *et une famille* $\mathscr{F}$ P_c-*génératrice telle que :*

(i) $\operatorname{s-lim}_{t \to \pm\infty} P_\mp e^{-itH_0} P_{ac}^{H_0} = 0$,

(ii) pour α dans $\mathscr{F}$, $\int_0^{\pm\infty} \| R_{H, H_0}(i)\, \alpha(H_0)\, e^{-itH_0} P_\pm \| \, dt$ est fini,

(iii) l'opérateur $R_{H, H_0}(i)$ est compact,

(iv) pour α dans $\mathscr{F}$, l'opérateur $(1 - P_{ac}^{H_0})\,\alpha(H_0)$ est compact.

Alors les opérateurs d'onde $W_\pm(H, H_0)$ existent, sont complets (*i. e.* $W_\pm \mathscr{H} = P_{ac}^H \mathscr{H}$) et l'opérateur H n'a pas de spectre singulier continu.

Remarque 3.3. — On a pris le point i comme point de référence z_0 dans **C** privé des spectres de H et H_0 pour exprimer les hypothèses (ii) et (iii); on peut évidemment prendre un autre point de référence, par exemple $z_0 = -1$ si H et H_0 sont positifs.

B. PARTITION DE L'UNITÉ POUR H_0. — Perry [9] a introduit une partition de l'unité dans $L^2(\mathbf{R}^n)$ à partir du générateur du groupe des dilatations, diagonalisé par la transformation de Mellin. Le groupe unitaire des dilatations D_t est défini sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ (nous supposerons dans la suite $n=1$) par $D_t f = t^{1/2} f(tx)$, avec pour générateur infinitésimal $D = 1/2(x\nabla + \nabla x)$. La transformée de Mellin M, définie sur les fonctions régulières sur **R** par

$$M\Phi(s, \omega) = (2\pi)^{-1/2} \int_0^{+\infty} r^{(1/2) - is}\, \Phi(r\omega) \frac{dr}{r}, \qquad \omega \in S^0, \quad s \in \mathbf{R}^+,$$

se prolonge en un opérateur de $L^2(\mathbf{R}, dx)$ sur $L^2(\mathbf{R}^+ \times S^0, ds, d\omega)$ et fournit une représentation spectrale du groupe D_t.

On définit alors la partition de l'unité $1 = P_+ + P_-$ dans $L^2(\mathbf{R})$, avec les projecteurs spectraux $P_\pm = P^D_{\{\pm\lambda \geqq 0\}}$, qu'on peut exprimer, via la transformée de Mellin inverse, suivant

$$P_\pm \Phi(r\omega) = \pm (2\pi)^{-1/2} \int_0^{\pm\infty} r^{is - 1/2}\, M\Phi(s, \omega)\, ds.$$

La transformée de Fourier entrelace D_t et $D_{t^{-1}}$, $P_\pm$ et $P_\mp$. La propriété (i) du théorème 3.2 sera assurée par la proposition suivante :

PROPOSITION 3.4. — *Soit* g *dans* $C_0^\infty(\mathbf{R}_*^+)$ *et* Δ *le laplacien* $-d^2/dx^2$ *sur* **R**. *On a*

$$\operatorname{s-lim}_{t \to \pm\infty} P_\pm e^{-it\Delta} g(\Delta) = 0.$$

Preuve. — Soit v dans $L^2(\mathbf{R})$ à spectre compact dans $\mathbf{R}^*$. On a, d'une part,

$$\begin{aligned}\| P_+ e^{-it\Delta} g(\Delta) v \|_{L^2(\mathbf{R},\, x)} &= \| P_- (e^{-itk^2} g(k^2) \hat{v}(k)) \|_{L^2(\mathbf{R},\, dx)} \\ &= \| M(e^{-itk^2} g(k^2) \hat{v}(k)) \|_{L^2(\mathbf{R}^- \times S^0,\, ds\, d\omega)},\end{aligned}$$

et d'autre part,

$$M(e^{-itk^2} g(k^2) \hat{v}(k))(s, \omega) = (2\pi)^{-1/2} \int_0^{+\infty} k^{1/2-is} e^{-itk^2} g(k^2) \hat{v}(k\omega) \frac{dk}{k}.$$

La phase $-tk^2 - s \log k$ n'a pas de point stationnaire pour $s < 0$, $t < 0$. Ainsi pour tout entier N il existe une constante C_N telle que

$$| M(e^{-itk^2} g(k^2) \hat{v}(k))(s, \omega) | \leqq C_N (1 + |s| + |t|)^{-N}, \qquad s < 0, \quad \omega \in S^0.$$

On en déduit $\| P_+ e^{-it\Delta} g(\Delta) v \|_{L^2(\mathbf{R},\, dx)} = O(t^{-\infty})$ lorsque $t \to -\infty$. La proposition en résulte. □

En ce qui concerne un oscillateur libre Δ_N sur une demi-droite, avec conditions de Neumann au bord, on se ramène à la situation de l'oscillateur libre sur la droite en considérant le prolongement pair $\tilde{u}$ d'une fonction u de $L^2(\mathbf{R}^+, dx)$: on définit $P_\pm^N u$ comme étant la restriction de $P_\pm \tilde{u}$ à $\mathbf{R}^+$. Vu que $e^{-it\Delta} \tilde{u} = \widetilde{e^{-it\Delta_N} u}$, la proposition précédente donne aussi les évanescences asymptotiques

$$\operatorname*{s-lim}_{t \to \mp\infty} P_\pm^N e^{-it\Delta_N} g(\Delta_N) = 0.$$

C. Spectres continus. — A l'aide de la partition $1 = P_+^N + P_-^N$, appliquée à chaque composante de $\prod_{\mu \in \mathscr{M}} \mathscr{H}(\mu)$, on obtient une partition de l'unité pour $P_{ac}^{H_0} \mathscr{H}$ qui vérifie, d'après ce qui précède, la condition (i) du théorème 3.2. La condition (iii) est assurée par le lemme 2.2 et la condition (iv) est vérifiée clairement, si on prend comme famille $\mathscr{F}$ l'algèbre $C_0^\infty(\mathbf{R} \setminus \mathscr{M})$.

La propriété (ii) découle du lemme suivant et de l'inégalité

$$\begin{aligned}\| R_{H, H_0}(-1) \alpha(H_0) e^{-itH_0} P_+ \| \leqq{}& \| R_{H, H_0}(-1) \| \; \| (1 - \theta_{\delta t}) \alpha(H_0) e^{-itH_0} P_+ \| \\ &+ \| R_{H, H_0}(-1) \theta_{\delta t} \| \; \| \alpha(H_0) \|\end{aligned}$$

où on a noté par θ_t la fonction caractéristique de l'intervalle $[t, +\infty[$ de $\mathbf{R}^+$ et aussi l'opérateur de multiplication induit sur $\mathscr{H}$.

LEMME 3.5. — (*a*) *La fonction* $\| R_{H, H_0}(-1) \theta_t \|$ *est intégrable sur* $\mathbf{R}^+$.

(*b*) *Soit* α *dans* $C_0^\infty(\mathbf{R} \setminus \mathscr{M})$. *Il existe* $\delta > 0$ *tel que, pour tout entier* N,

$$\sup_{\pm t > 0} |t|^N \| (1 - \theta_{\delta |t|}) e^{-itH_0} \alpha(H_0) P_\pm \| < \infty.$$

Preuve. — Reprenons l'écriture (2.1)

$$\text{(3.1)}\quad R_{H, H_0}(-1)\,\theta_t=(\chi-1)\,R_0(-1)\,\theta_t-R(-1)(\Delta\chi\,R_0(-1)\,\theta_t+2\nabla\chi.\nabla R_0(-1)\,\theta_t).$$

Si K est un compact, le noyau $\mathscr{R}_\omega$ de $(\Delta_N+\omega)^{-1}$ admet les majorations du type

$$|\nabla_x\mathscr{R}_\omega(x, y)|/\sqrt{\omega}+|\mathscr{R}_\omega(x, y)|\leqq C e^{-\sqrt{\omega}\,y},\qquad x\in K,\quad y\in\mathbf{R}^+,$$

où C ne dépend que de K. Notant par $\|\ \|_{HS}$ la norme Hilbert-Schmidt dans $\mathscr{K}(\mathscr{H})$, on en déduit, par exemple que

$$\|(\chi-1)\,R_0(-1)\,\theta_t\|\leqq\|(\chi-1)\,R_0(-1)\,\theta_t\|_{HS}\leqq C'\sum_{\mu\in\mathscr{M}} e^{-\sqrt{\mu+1}\,t},$$

soit, avec l'hypothèse de croissance polynomiale sur $\mathscr{M}$,

$$\|(\chi-1)\,R_0(-1)\,\theta_t\|\leqq C'' e^{-t/2}.$$

Les autres termes de (3.1) ont, en norme, des majorations analogues. On en déduit la partie (*a*) du lemme.

Quant à la partie (*b*), il suffit de montrer, pour g dans $C_0^\infty(\mathbf{R}^+)$, l'existence d'un γ tel que

$$\sup|t|^N\|(1-\theta_{\gamma|t|})\,e^{-it\Delta_N}g(\Delta_N)\,P_\pm^N\|<+\infty,$$

estimations qu'on établit par des arugments à base de phase stationnaire de manière analogue à la preuve de la proposition 3.4. □

On a ainsi démontré les résultats suivants :

THÉORÈME 3.6. — (*a*) *L'opérateur* $H(\mathscr{S})$ *a un spectre singulier vide.*

(*b*) *Les opérateurs d'onde* $W_\pm(\mathscr{S})=s-\lim\limits_{t\to\pm\infty} e^{itH}e^{-itH_0}P_{ac}^{H_0}$ *existent et réalisent un entrelacement isométrique entre* H_0 *et* H, *opérant sur leurs sous-espaces d'absolue continuité respectifs.*

(*c*) *Le spectre absolument continu de* $H(\mathscr{S})$ *est* $[\mu_1, +\infty[$, *de multiplicité* $\Sigma_{\nu\leqq\mu}m(\nu)$ *sur* $]\mu, \mu^+[$.

4. Résolvante

THÉORÈME 4.1. — *La résolvante* $(H-\lambda)^{-1}$, *définie pour* λ *dans* FP *et considérée comme fonction à valeurs dans* $\mathscr{L}_s(\mathscr{H}_{comp}, \mathscr{H}_{loc})$, *admet un prolongement méromorphe à* Σ.

Il s'agit de montrer, si $\theta_R(x)=1-\chi(x-R)$, le prolongement de $\theta_R(H-\lambda)^{-1}h$ pour tout R et tout h dans $\mathscr{H}_{comp}$. Si $P(\mathscr{H}, \mathscr{H}^a)$ note la projection de $\mathscr{H}$ sur $\mathscr{H}^a$ et θ_R est à support inclus dans $[-\infty, a]$, on a $\theta_R(H-\lambda)^{-1}=\theta_R P(\mathscr{H}, \mathscr{H}^a)(H-\lambda)^{-1}$.

Soit Σ_n la composante connexe de FP dans $\Sigma \setminus \pi^{-1}([\mu_n, \infty[)$. Soit a_n la suite définie par $a_n(\nu)=n$ si $\nu \leqq \mu_n$, $a_n(\nu)=+\infty$ sinon. Vu que $\mathscr{H}_{\text{comp}} \subset \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mathscr{H}^{a_n}$, le théorème 4.1 résulte du lemme suivant :

LEMME 4.2. — *La fonction* $\mathrm{P}(\mathscr{H}, \mathscr{H}^{a_n})(\mathrm{H}-\lambda)^{-1}|_{\mathscr{H}^{a_n}}$, *à valeurs opérateur dans* $\mathscr{B}(\mathscr{H}^{a_n})$ *et définie pour* λ *dans* FP, *admet un prolongement méromorphe à* Σ_n.

Preuve. — L'entier n étant fixé, on omet dans la suite l'indice de a_n. Soit h dans $\mathscr{H}^a$. L'élément $k=(\mathrm{H}-\lambda)^{-1} h$ $(\lambda \in \mathrm{FP})$ est caractérisé par sa projection k^a sur $\mathscr{H}^a$ vérifiant l'équation $(\mathrm{H}_{\text{loc}}-\lambda) k^a=h$ et les conditions au bord

$$k'_\nu(n)=i\sqrt{\lambda-\nu}\, k_\nu(n), \qquad \nu \leqq \mu_n. \tag{4.1}$$

Soit φ une fonction régulière sur $\mathbf{R}_*^+$, à support compact et de dérivée 1 en n. On introduit la transformation de jauge (non unitaire, dépendant holomorphiquement de Λ) $\mathrm{U}^a(\Lambda)$ dans $\mathscr{H}^a$ définie par $(\mathrm{U}^a(\Lambda)\, k)_\nu=e^{-i\sqrt{\Lambda-\nu}\,\varphi} k_\nu$ pour $\nu \leqq \mu_n$, sans modification des autres composantes k_{int}, $(k_\nu)_{\nu > \mu_n}$. Elle transforme tout élément de $\mathscr{D}^a=\mathscr{H}^a \cap (\mathscr{D}(\mathrm{H})+\bigoplus_{\nu \leqq \mu_n} \mathrm{H}^2(0, n) \otimes \mathbf{C}^{m(\nu)})$ vérifiant les conditions au bord (4.1) en un élément de $\mathscr{D}(\mathrm{H}(\mathscr{S}^a))$ et l'élément k^a en la solution $\tilde{k}^a$ dans $\mathscr{D}(\mathrm{H}(\mathscr{S}^a))$ de l'équation $\tilde{\mathrm{H}}^a_{\text{loc}}(\lambda)\, \tilde{k}^a=\mathrm{U}^a(\lambda)\, h^a$ où $\tilde{\mathrm{H}}^a_{\text{loc}}(\Lambda)=\mathrm{U}^a(\Lambda)(\mathrm{H}_{\text{loc}}-\pi(\Lambda))\, \mathrm{U}^a(\Lambda)^{-1}$ vérifie

$$(\tilde{\mathrm{H}}^a_{\text{loc}}(\Lambda)-(\mathrm{H}_{\text{loc}}-\pi(\Lambda)))_\nu=-i\sqrt{\Lambda-\nu}\left(2\,\varphi'\frac{d}{dx_\nu}+\varphi''\right)+(\pi(\Lambda)-\nu)\,\varphi'^2 \qquad \text{si} \quad \nu \leqq \mu_n,$$

avec action triviale sur les autres composantes.

$\tilde{\mathrm{H}}^a(\Lambda)$ est une perturbation compacte de $\mathrm{H}^a-\pi(\Lambda)$, ces deux opérateurs étant considérés comme opérateurs de $\mathscr{D}(\mathrm{H}(\mathscr{S}^a))$ dans $\mathscr{H}^a$. L'opérateur H^a, de domaine $\mathscr{D}(\mathrm{H}(\mathscr{S}^a))$, a $[\mu_n, \infty[$ comme spectre essentiel. Ainsi les fonctions $(\mathrm{H}^a-\pi(\Lambda))^{-1}$ et $\tilde{\mathrm{H}}^a(\Lambda)^{-1}$, à valeurs opérateurs dans $\mathscr{B}(\mathscr{H}^a)$ sont méromorphes en Λ dans Σ_n et le lemme résulte de l'égalité $\mathrm{P}(\mathscr{H}, \mathscr{H}^a)(\mathrm{H}-\lambda)^{-1}|_{\mathscr{H}^a}=\mathrm{U}^a(\lambda)^{-1}\, \tilde{\mathrm{H}}^a(\lambda)^{-1}\, \mathrm{U}^a(\lambda)$. □

Remarque 4.3. — Soit w_s le poids $w_s(x)=\chi(x)\, e^{sx}$, $\mathscr{H}_s$ l'espace à poids $\mathscr{H}_s=\{h \in \mathscr{H} \mid w_s h \in \mathscr{H}\}$ et $\Sigma(s)$ une partie connexe de Σ sur laquelle $|\sqrt{\Lambda-\mu_n}|<s$ ou $\mathscr{I}m(\sqrt{\Lambda-\mu_n})<0$ (on suppose $\bigcup_{s \in \mathbf{R}} \Sigma(s)=\Sigma$). D'après la forme explicite du noyau de la résolvante du laplacien Neuman Δ_{N} sur $\mathbf{R}^+$, $\mathrm{R}_0(\lambda)$, en tant que fonction à valeur opérateur dans $\mathscr{L}_s(\mathscr{H}_s, \mathscr{H}_{\text{loc}})$, se prolonge méromorphiquement à Σ_s; il en est de même de la résolvante $\mathrm{R}(\lambda)$ [et de $\mathrm{P}(\mathscr{H}, \mathscr{H}^s)\, \mathrm{R}(\lambda)|_{\mathscr{H}_s}$ dans $\mathscr{B}(\mathscr{H}_s, \mathscr{H}^s)$], comme il résulte du lemme 4.2 et de l'écriture

$$\mathrm{R}(\lambda)=\mathrm{R}(\lambda)(1-\chi^2)+\chi\, \mathrm{R}_0(\lambda)\, \chi+\mathrm{R}(\lambda)\, [\chi, \mathrm{H}_{\text{loc}}]\, \mathrm{R}_0(\lambda)\, \chi.$$

Introduisons une notion de résonance, qui généralise celle de valeur propre pour un endomorphisme en dimension finie :

DÉFINITION 4.4. — *Soient* $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ *deux espaces vectoriels topologiques et* R *une fonction méromorphe définie sur une surface de Riemann, à valeurs opérateurs dans* $\mathscr{L}_{\text{top}}(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2)$.

Une résonance (d'ordre k) de R *est un pôle (d'ordre k) de* R. *A une résonance* Λ_0 *d'ordre k sont associés des états résonants (généralisés* resp.), *les vecteurs non nuls de l'espace résiduel*

$$\operatorname{Res}(0, \zeta^{k-1} R(\zeta) \mathscr{E}_1) \, (\sum_{1 \leqq j \leqq k} \operatorname{Res}(0, \zeta^{j-1} R(\zeta) \mathscr{E}_1) \text{ resp.})$$

où ζ *désigne une coordonnée locale holomorphe au voisinage de* Λ_0, *centrée en* Λ_0 $(\zeta(\Lambda_0)=0)$.

Pour les hamiltoniens introduits dans cet article, une résonance de H est par définition une résonance de $(H-\Lambda)^{-1}$ comme fonction à valeurs opérateur dans $\mathscr{L}_s(\mathscr{E}_1, \mathscr{H}_{\text{loc}})$ avec $\mathscr{E}_1=\mathscr{H}_{\text{comp}}$. Vu que $\mathscr{H}_{\text{comp}}$ est dense dans $\mathscr{H}_s$, on peut prendre $\mathscr{E}_1=\mathscr{H}_s$ si on restreint Λ à $\Sigma(s)$. On en déduit que l'ensemble résonant Réso(H) de H est une partie discrète de Σ. Abusivement, on dira aussi que le complexe λ est une résonance si la fibre $\pi^{-1}(\lambda)$ contient une résonance.

A tout résonance Λ sont associés des états résonants dans $\mathscr{H}_{\text{loc}}$: soit n tel que $\Lambda \in \Sigma_n$ et $a=a_n$ (notations de la preuve du théorème du théorème 4.1), les états résonants correspondent à des états de $\mathscr{D}(H(\mathscr{S}^a))$ annulant $\tilde{H}^a(\Lambda)$ et sont solution de $(H_{\text{loc}}-\pi(\Lambda))\,u=0$, solution qui est une exponentielle pure au voisinage de l'infini : $u(x_\mu) \sim U_\mu e^{i\sqrt{\Lambda-\mu}\,x_\mu}$, $U_\mu \in \mathbf{C}^{m(\mu)}$ (et on retrouve la définition de [1] dans le cas d'un opérateur de Schrödinger avec potentiel à support compact). Les valeurs propres apparaissent ainsi comme projections (via π) réelles de résonances ayant des états résonants L^2.

Supposons, pour $a=a_n$, H^a+1 inversible et posons $K^a(\Lambda)=\tilde{H}^a(\Lambda)-(H^a-\pi(\Lambda))$, $T^a(\Lambda)=(\pi(\Lambda)+1-K^a(\Lambda))(H^a+1)^{-1}$ pour $\Lambda \in \Sigma_n$. Alors Λ est une résonance de H si et seulement si l'opérateur $\tilde{H}^a(\Lambda)(H^a+1)^{-1}=1-T^a(\Lambda)$ est non inversible.

PROPOSITION 4.5. — *Supposons* $\mathscr{M}$ *fini et* $(H^a+1)^{-1}$ *dans l'idéal de Schatten* $\mathscr{I}_p$ *(avec a dans* $\mathbf{R}_+^{*\mathscr{M}}$). *Soit* $N_H(l)$ *la fonction de comptage associée à la suite des résonances (dans* $\mathbf{C}$) *de* H *répétées suivant leur multiplicité (i. e. la dimension de leur espace résonant généralisé). On a*

$$N_H(l)=O(l^{2p}), \qquad l \to +\infty.$$

Preuve. — On introduit la fonction entière

$$D^a(\lambda)=\prod_{\Lambda \in \pi^{-1}(\lambda)} \det(1-T^a(\Lambda)^{2p}).$$

pour laquelle on a les estimations

$$|D^a(\lambda)| \leqq \prod_{\Lambda \in \pi^{-1}(\lambda)} \exp |||T^a(\Lambda)^{2p}|||_1 \leqq \prod_{\Lambda \in \pi^{-1}(\lambda)} \exp |||T^a(\Lambda)|||_{2p}^{2p}.$$

On a

$$|||T^a(\Lambda)|||_{2p} \leqq \|(H^a+1-\tilde{H}^a(\Lambda))(H^a+1)^{-1/2}\|_{\mathscr{B}(\mathscr{H}^a)} \, |||(H^a+1)^{1/2}|||_{2p},$$
$$(H^a+1-\tilde{H}^a(\Lambda))(H^a+1)^{-1/2}=O(\pi(\Lambda))$$

et donc

$$|||\mathrm{T}^a(\Lambda)|||_{2p}=O(\pi(\Lambda)),$$

ainsi $\mathrm{D}_{\mathrm{H}}^a$ est une fonction entière d'ordre $2p$. Les résonances avec multiplicité de H étant dans l'ensemble des zéros (avec multiplicité) de la fonction D_{H}, on obtient la proposition en appliquant les résultats de Hadamard. □

Exemple 4.6. — Dans le cas de surfaces à pointes à courbure constante, l'opérateur $(\mathrm{H}^a+1)^{-1}$ est Hilbert-Schmidt [4]. Pour la surface modulaire $\mathrm{X}=\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})\backslash\mathrm{H}$, l'ensemble des résonances (mises à part les valeurs propres) coïncide avec l'ensemble des pôles de

$$\varphi(s)=\pi^{1/2}\frac{\Gamma(2s-1)}{\Gamma(s)}\frac{\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)}\quad\text{dans}\ \left\{\operatorname{Re} s<\frac{1}{2}\right\}.$$

Leur fonction de comptage est déterminée par celle des zéros de la fonction ζ: $\mathrm{N}_\zeta(\mathrm{T})\sim\mathrm{T}\log\mathrm{T}/2\pi$, alors que N_{vp}, celle des valeurs propres de la surface modulaire, est donnée par la formule de trace de Selberg : $\mathrm{N}_{vp}(\lambda)\sim\mathrm{vol}(\mathrm{X})\,\lambda/4\pi$.

Exemple 4.7. — Soit Ω une variété compacte. L'ensemble des résonances dans $\mathbf{C}$ du laplacien sur le produit riemannien $\Omega\times\mathbf{R}$ coïncide avec le spectre de Ω, avec multiplicité infinie.

Exemple 4.8. — Soit q un potentiel à support compact sur $\mathbf{R}$ avec une unique valeur propre λ_0. Le système $\mathscr{H}=\prod_{n\in\mathbf{N}}\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^+)$ d'hamiltonien $\mathrm{H}=\prod_{n\in\mathbf{N}}-\Delta+q-2n\lambda_0$ a pour la famille $\mathscr{M}=\{\mu_n=-2n\lambda_0\mid n\in\mathbf{N}\}$. L'ensemble des résonances dans $\mathbf{C}$ contient les valeurs propres $\{\lambda_n=-(2n-1)\lambda_0\mid n\in\mathbf{N}\}$. Au-dessus de λ_n dans Σ, on a une infinité de résonances paramétrées par le sous-groupe G_n de G d'indice 2 ne contenant pas γ_{μ_n} : l'espace des états résonants associés à ces résonances coïncide avec le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_n.

5. Fonctions d'onde et équations fonctionnelles

Soit $\mathrm{EXP}_\mu(\Lambda)$ l'opérateur de $\mathbf{C}^{m(\mu)}$ dans $\mathscr{H}_{\mathrm{loc}}$, à image dans $\mathscr{H}(\mu)$ tel que $\mathrm{EXP}_\mu(\Lambda)\,\Phi(x_\mu)=e^{-i\sqrt{\Lambda-\mu}\,x_\mu}\Phi$, $\Phi\in\mathbf{C}^{m(\mu)}$, $x_\mu\geqq 0$.

Pour h_1 et h_2 dans $\mathscr{H}_{\mathrm{loc}}$, on écrira $h_1\sim h_2$ si h_1 et h_2 ont des composantes dans $\mathscr{H}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ égales au voisinage de l'infini, et ce pour tout μ. On utilisera la même notation pour la relation d'équivalence analogue concernant les applications à valeur dans $\mathscr{H}_{\mathrm{loc}}$; de même on dira pour une telle application qu'elle est à valeur dans $\mathscr{H}$ si son image est dans $\mathscr{H}$.

DÉFINITION 5.1. — *L'onde plane* $\mathrm{E}_\mu(\Lambda)$ $(\Lambda\in\Sigma,\ \mu\in\mathscr{M})$ *est l'homomorphisme de* $\mathbf{C}^{m(\mu)}$ *dans* $\mathscr{H}_{\mathrm{loc}}$ *défini par*

$$\mathrm{E}_\mu(\Lambda)=\chi\,\mathrm{EXP}_\mu(\Lambda)-(\mathrm{H}-\Lambda)^{-1}(\mathrm{H}_{\mathrm{loc}}-\pi(\Lambda))(\chi\,\mathrm{EXP}_\mu(\Lambda)).$$

PROPOSITION 5.2. — (*a*) $\mathrm{E}_\mu(\Lambda)$ *est méromorphe par rapport à* Λ *dans* Σ.

(*b*) *L'onde plane* $E_\mu(\Lambda)$ *est caractérisée par les propriétés suivantes :*

(i) $E_\mu(\Lambda)$ *est méromorphe sur* Σ,

(ii) $E_\mu(\Lambda) - \mathrm{EXP}_\mu(\Lambda)$ *est à valeurs dans* $\mathscr{H}$ *pour* Λ *dans* FP,

(iii) $(H_{\mathrm{loc}} - \pi(\Lambda))\, E_\mu(\Lambda) = 0,\ \Lambda \in \Sigma$.

(*c*) *Il existe des fonctions méromorphes* $T_{\mu'\mu}(\Lambda)$ *définies pour* Λ *dans* Σ *et à valeurs dans* $\mathrm{Hom}(\mathbf{C}^{m(\mu)}, \mathbf{C}^{m(\mu')})$ *telles que*

$$E_\mu \sim \mathrm{EXP}_\mu + \sum_{\mu' \in \mathscr{M}} \gamma_{\mu'}^* \mathrm{EXP}_{\mu'} T_{\mu'\mu}.$$

Preuve. — Le (*a*) est un corollaire du théorème (4.1). Le (*b*) se déduit de la définition des ondes planes $E_\mu(\Lambda)$ et du fait que, H étant auto-adjoint, $\mathrm{FP}\diagdown\mathbf{R}$ ne contient pas de valeurs propres de H. Le (*c*) résulte de l'observation suivante : la composante de $(H-\Lambda)^{-1}(H_{\mathrm{loc}} - \pi(\Lambda))(\chi\, \mathrm{EXP}_\mu(\Lambda))$ dans $\mathscr{H}(\mu')$ est une combinaison linéaire des exponentielles $\mathrm{EXP}_{\mu'}(\Lambda)$, $\gamma_{\mu'}^* \mathrm{EXP}_{\mu'}(\Lambda) = \mathrm{EXP}_{\mu'}(\gamma_{\mu'}\Lambda)$, dont seule la seconde est de carré intégrable pour Λ dans FP. □

DÉFINITION 5.3. — *On appelle coefficients de transfert les homomorphismes* $T_{\mu'\mu}$.

Sur $\mathbf{C}\diagdown\mathscr{M}$, considérons le faisceau $\mathscr{E}_{\mathrm{loc}}^{H}$ défini de la manière suivante : si U est un ouvert simplement connexe, $\mathscr{E}_{\mathrm{loc}}^{H}(U)$ est l'espace des solutions $E(\zeta)\,(\zeta \in U)$ dans $\mathscr{H}_{\mathrm{loc}}$, avec dépendance méromorphe en ζ, de $(H_{\mathrm{loc}} - \zeta)\, E(\zeta) = 0$, $E(\zeta)$ ayant au plus un nombre fini de composantes dans $\prod_{\mu \in \mathscr{M}} \mathscr{H}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ non de carré intégrable. Son image réciproque $\pi^* \mathscr{E}_{\mathrm{loc}}^{H}$ sur $\Sigma \diagdown \pi^{-1}(\mathscr{M})$, est isomorphe au faisceau constant de fibre $\prod_{\mu \in \mathscr{M}} \mathbf{C}^{m(\mu)}$, l'isomorphisme étant donné par les fonctions d'ondes $E_\mu(\Lambda)$. Le prolongement analytique définit un transport parallèle le long de tout arc de $\mathbf{C}\diagdown\mathscr{M}$ et la monodromie en chaque point ζ se réduit à une représentation de G dans la fibre $(\mathscr{E}_{\mathrm{loc}}^{H})_\zeta$. Les équations fonctionnelles données par le théorème suivant explicitent l'action de la famille $\{\gamma_\mu\}$ engendrant G.

THÉORÈME 5.4. — (*a*) *Pour tout* μ *dans* $\mathscr{M}$, $T_{\mu\mu}(\Lambda)$ *est inversible sur* Σ.

(*b*) *On a les équations fonctionnelles sur* Σ

$$\gamma_\mu^* E_\mu = E_\mu T_{\mu\mu}^{-1} \tag{5.1.i}$$

$$\gamma_\mu^* E_{\mu'} = E_{\mu'} - E_\mu T_{\mu\mu}^{-1} T_{\mu\mu'},\ \mu \neq \mu'. \tag{5.1.ii}$$

Preuve. — Par prolongement analytique, il suffit d'établir ces relations sur FP. Les fonctions d'ondes $E_\mu(\Lambda)\,(\Lambda \in \mathrm{FP})$ sont caractérisées par une équation différentielle et l'intégrabilité ou non de leurs composantes dans $\prod_{\mu \in \mathscr{M}} \mathscr{H}(\mu)$, combinaisons linéaires d'exponentielles sur lesquelles les automorphismes γ_μ opèrent simplement :

$$\gamma_\mu^* E_\mu \sim \gamma_\mu^* \mathrm{EXP}_\mu + \mathrm{EXP}_\mu \gamma_\mu^* T_{\mu\mu} + \sum_{\mu' \neq \mu} \gamma_\mu^* \mathrm{EXP}_{\mu'} \gamma_\mu^* T_{\mu'\mu}.$$

Si $T_{\mu\mu}(\gamma_\mu \Lambda)$ était non inversible pour un Λ dans $\mathrm{FP}\diagdown\mathbf{R}$, alors pour un Φ non trivial de son noyau, $(\gamma_\mu^* E_\mu(\Lambda)\Phi, \Lambda)$ serait un élément propre de l'opérateur auto-adjoint H, ce qui n'est pas possible. Le (*a*) en résulte. On en déduit aussi $\gamma_\mu^* E_\mu = E_\mu \gamma_\mu^* T_{\mu\mu}$ d'après la caractérisation de la proposition 5.2 et l'équation (5.1.i), vu que γ_μ est d'ordre 2.

On vérifie facilement que $E_{\mu'}(\gamma_\mu \Lambda) - E_\mu(\Lambda) T_{\mu\mu'}(\gamma_\mu \Lambda) - E_{\mu'}(\Lambda)$ est dans $\mathscr{H}$ si Λ est dans FP et donc nul. L'équation (5.1.ii) en résulte. □

Les équations fonctionnelles donnent des relations entre les coefficients de transfert :

COROLLAIRE 5.5. — *On a les relations fonctionnelles sur* Σ

(i)

$$\gamma_\mu^* T_{\mu\mu} = T_{\mu\mu}^{-1}$$
$$\gamma_\mu^* T_{\mu'\mu} = T_{\mu'\mu} T_{\mu\mu}^{-1}, \qquad \mu' \neq \mu.$$

(ii) *pour* $\mu' \neq \mu$

$$\gamma_\mu^* T_{\mu\mu'} = -T_{\mu\mu}^{-1} T_{\mu\mu'}$$
$$\gamma_\mu^* T_{\nu\mu'} = T_{\nu\mu'} - T_{\nu\mu} T_{\mu\mu}^{-1} T_{\mu\mu'}, \ \nu \neq \mu.$$

Remarque 5.6. — Supposons tous les coefficients de transfert non diagonaux nuls. Alors les équations fonctionnelles pour les fonctions d'ondes et les coefficients de transfert diagonaux $C_\mu = T_{\mu\mu}$ (nécessairement non nuls puisque inversibles) s'écrivent

$$\gamma_\mu^* E_\mu = E_\mu C_\mu^{-1}, \qquad \gamma_\mu^* C_\mu = C_\mu^{-1}$$
$$\gamma_{\mu'}^* E_\mu = E_\mu, \qquad \gamma_{\mu'}^* C_\mu = C_\mu, \quad \mu' \neq \mu.$$

On en déduit que E_μ et C_μ sont définis sur la surface de Riemann Σ_μ (revêtement ramifié d'ordre 2 de **C**) de la fonction $\sqrt{\lambda - \mu}$. Si on identifie $(\Sigma_\mu, \mathbf{C})$ avec le revêtement $(\mathbf{C}_{\sigma_\mu}, \mathbf{C}, \pi_\mu)$ où $\pi_\mu(\sigma_\mu) = (a\sigma_\mu + b)^2 + \mu$, les équations fonctionnelles prennent la forme (habituelle dans la théorie des séries d'Eisenstein)

$$E_\mu(-\sigma_\mu - 2b/a) = E_\mu(\sigma_\mu) C_\mu^{-1}(\sigma_\mu)$$
$$C_\mu(-\sigma_\mu - 2b/a) = C_\mu^{-1}(\sigma_\mu).$$

6. Opérateurs d'onde et matrice de diffusion

Une représentation spectrale de $P_{ac}^{H_0} H_0$ opérant sur $\prod_{\mu \in \mathscr{M}} \mathscr{H}(\mu)$ est donnée par l'isométrie $\mathscr{T}$ de $\prod_{\mu \in \mathscr{M}} \mathscr{H}(\mu)$ sur $\prod_{\mu \in \mathscr{M}} L^2([\mu, +\infty[, d\sigma_\mu(\tau_\mu)) \otimes \mathbf{C}^{m(\mu)}$ avec $d\sigma_\mu = d\tau_\mu / \pi \sqrt{\tau_\mu - \mu}$ telle que, si $\Phi = (\Phi_\mu)$, on ait $\mathscr{T}(\Phi) = (\hat{\Phi}_\mu)$ où

$$\hat{\Phi}_\mu(\tau_\mu) = \int_0^\infty \cos \sqrt{\tau_\mu - \mu}\, x_\mu \Phi_\mu(x_\mu)\, dx_\mu, \qquad \tau_\mu \geqq \mu.$$

On a la formule d'inversion

$$\Phi_\mu(x_\mu)=\int_\mu^\infty \cos\sqrt{\tau_\mu-\mu}\,x_\mu\,\hat{\Phi}_\mu(\tau_\mu)\,d\sigma_\mu(\tau_\mu),\qquad x_\mu\geqq 0 \tag{6.1}$$

et l'action du groupe unitaire $e^{-it\mathrm{H}_0}$ est donnée par

$$(e^{-it\mathrm{H}_0}\Phi)_\mu(x_\mu)=\int_\mu^\infty e^{-it\tau_\mu}\cos\sqrt{\tau_\mu-\mu}\,x_\mu\,\hat{\Phi}_\mu(\tau_\mu)\,d\sigma_\mu(\tau_\mu).$$

LEMME 6.1. — $\mathrm{W}_\pm\Phi=\mathrm{s}-\lim_{t\to+\infty} e^{it\mathrm{H}}\chi\, e^{it\mathrm{H}_0}\mathrm{P}_{ac}^{\mathrm{H}_0}\Phi.$

Preuve. — Il suffit de prouver $\mathrm{s}-\lim_{t\to\infty}(1-\chi)\,e^{it\Delta_\nu}\mathrm{P}_{ac}^{\Delta_\nu}=0$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^+, dx)$ et même $\mathrm{s}-\lim_{t\to\infty}(1-\tilde{\chi})\,e^{-it\Delta}=0$ sur $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}, dx)$. Pour cette dernière affirmation, on approche tout élément de $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}, dx)$ par une fonction à transformée de Fourier régulière et à support compact, ce qui permet de conclure par un argument de phase stationnaire. □

A l'ordinaire on considère $\mathrm{W}_\pm\Phi$ comme intégrale d'une fonction, convergente au sens d'Abel :

$$\mathrm{W}_\pm\Phi=\chi^\Phi+i\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathrm{I}_\pm(\varepsilon,\Phi)$$

avec $\mathrm{I}_\pm(\varepsilon,\Phi)=\int_0^{\pm\infty} e^{\mp\varepsilon t+it\mathrm{H}}(\mathrm{H}\chi-\chi\mathrm{H}_0)\,e^{-it\mathrm{H}_0}\Phi\,dt.$

On a les transformations successives

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_\pm(\varepsilon,\Phi)&=\int_0^{\pm\infty} e^{\mp\varepsilon t+it\mathrm{H}}(\mathrm{H}\chi-\chi\mathrm{H}_0)\\&\qquad\Big(\bigoplus_{\mu\in\mathscr{M}}\int_\mu^{+\infty} e^{-it\tau_\mu}\cos\sqrt{\tau_\mu-\mu}\,x_\mu\,\hat{\Phi}_\mu(\tau_\mu)\,d\sigma_\mu(\tau_\mu)\Big)\,dt\\&=\sum_{\mu\in\mathscr{M}}\int_\mu^{+\infty}\Big\{\int_0^{\pm\infty} e^{\mp\varepsilon t+it\mathrm{H}-it\tau_\mu}(\mathrm{H}_{\mathrm{loc}}-\tau_\mu)\,\chi\,\mathrm{COS}_\mu(\tau_\mu)\,dt\Big\}\hat{\Phi}_\mu(\tau_\mu)\,d\sigma(\tau_\mu)\\&=i\sum_{\mu\in\mathscr{M}}\int_\mu^{+\infty}(\mathrm{H}-\tau_\mu\pm i\varepsilon)^{-1}(\mathrm{H}_{\mathrm{loc}}-\tau_\mu)\,\chi\,\mathrm{COS}_\mu(\tau_\mu)\,\hat{\Phi}_\mu(\tau_\mu)\,d\sigma(\tau_\mu)\end{aligned}$$

où on a noté $\mathrm{COS}_\mu(\Lambda)$ l'opérateur de $\mathbf{C}^{m(\mu)}$ dans $\mathscr{H}_{\mathrm{loc}}$ dont la seule composante non nulle est dans $\mathscr{H}_{\mathrm{loc}}(\mu)$, définie par $\mathrm{COS}_\mu(\Lambda)(x_\mu)=\cos\sqrt{\Lambda-\mu}\,x_\mu$.

Introduisons l'onde plane $\mathrm{EC}_\mu(\xi,\zeta)$ ($\xi\in\Sigma$, $\zeta\in\Sigma$). définie par

$$\mathrm{EC}_\mu(\xi,\zeta)=\chi\,\mathrm{COS}_\mu(\zeta)-(\mathrm{H}-\xi)^{-1}(\mathrm{H}_{\mathrm{loc}}-\zeta)(\chi\,\mathrm{COS}_\mu(\zeta)).$$

Ceci nous permet alors, grâce à la formule d'inversion (6.1) de réécrire les intégrales $I_\pm(\varepsilon, \Phi)$ sous la forme

$$I_\pm(\varepsilon, \Phi) = i\chi\Phi - i\sum_{\mu\in\mathcal{M}}\int_\mu^{+\infty} EC_\mu(\tau_\mu \mp i\varepsilon, \tau_\mu)\,\hat{\Phi}_\mu(\tau_\mu)\,d\sigma_\mu(\tau_\mu).$$

D'après la caractérisation des ondes places E_μ, on a $E_\mu(\Lambda) = 2\,EC_\mu(\Lambda, \Lambda)$. Le bord de FP dans Σ est l'union de C_+ et de C_-, avec $C_\pm$ adhérent à $\{\lambda\in FP,\ \pm\mathcal{I}m\,\lambda > 0\}$. Dans Σ, on a $C_+ = \gamma(\mu)\,C_-$, pour la portion de C_+ se projetant sur $]\mu, \mu^+[$; on identifiera dans la suite $]\mu, \mu^+[\,(\subset \mathbf{R})$ et $C_+\,(\subset\Sigma)$, ce qui permettra de parler aussi bien de la mesure $d\sigma_\mu$ sur C_+ que de l'action de $\gamma(\mu)$ sur $]\mu, \mu^+[$.

On a donc $\lim_{\varepsilon\to 0^+} EC_\mu(\tau\mp i\varepsilon, \tau) = 2\,E_\mu(\tau_\pm)$ avec $\tau_\pm\in C_\pm$, $\tau_- = \gamma(\mu)\,\tau_+$ si $\pi(\tau_+)\in\,]\mu, \mu^+[$ et $\gamma(\mu) = \prod_{\mu'\leqq\mu}\gamma_{\mu'}$. Ainsi est démontré le théorème suivant :

THÉORÈME 6.2. — *Notons, pour* τ *dans* $\mathbf{R}\cap(\nu, \nu^+)$, *par* $\gamma(\tau)$ *l'automorphisme* $\gamma(\nu)$. *Alors, si* Φ *est un élément de* $\bigoplus_{\mu\in\mathcal{M}}\mathcal{H}(\mu)$, *on a :*

$$W_+\Phi = \sum_{\mu\in\mathcal{M}}\int_\mu^{+\infty}\gamma(\tau_\mu)^*\,E_\mu(\tau_\mu)\,\hat{\Phi}_\mu(\tau_\mu)\,d\sigma_\mu(\tau_\mu),$$

$$W_-\Phi = \sum_{\mu\in\mathcal{M}}\int_\mu^{+\infty} E_\mu(\tau_\mu)\,\hat{\Phi}_\mu(\tau_\mu)\,d\sigma_\mu(\tau_\mu).$$

Par opérateur de diffusion, on entend la classe d'équivalence unitaire de $W_-^*\,W_+$. Lu dans l'espace $\bigoplus_\mu\mathcal{H}^\mu$, où $\mathcal{H}^\mu = \bigoplus_{\nu\leqq\mu} L^2((\mu, \mu^+), d\sigma_\nu)\otimes\mathbf{C}^{m(\nu)}$, l'opérateur S se diagonalise : sa restriction à $\mathcal{H}^\mu$ est de la forme $\int_\mu^{\mu^+} S^\mu(\tau)\,d\tau$ où $S^\mu(\tau)$ est un opérateur unitaire de $\mathbf{C}^{M(\mu)}(M(\mu) = \sum_{\nu\leqq\mu} m(\nu))$, avec la métrique hermitienne $\oplus^\perp_{\nu\leqq\mu}\langle\ ,\ \rangle\,d\sigma_\nu/d\tau$.

D'après les équations fonctionnelles de la partie 5, il existe des opérateurs $S^\mu_{\nu,\pi}$ dans $\mathrm{Hom}(\mathbf{C}^{m(\pi)}, \mathbf{C}^{m(\nu)})$ tels que

$$\gamma(\mu)^*\,E_\pi = \sum_{\nu\leqq\mu} E_\nu\,S^\mu_{\nu\pi}.$$

On a donc, pour $\hat{\Phi} = (\hat{\Phi}_\pi)$ avec $\hat{\Phi}_\pi$ à support dans (μ, μ^+),

$$\begin{aligned} W_+\mathcal{T}^*\hat{\Phi} &= \sum_{\pi\leqq\mu}\int_\mu^{\mu^+}\gamma(\pi)^*\,E_\pi(\tau)\,\hat{\Phi}_\pi(\tau)\,d\sigma_\pi(\tau)\\ &= \sum_{\pi\leqq\mu}\sum_{\nu\leqq\mu}\int_\mu^{\mu^+} E_\nu(\tau)\,S^\mu_{\nu\pi}(\tau)\,\hat{\Phi}_\pi(\tau)\,d\sigma_\pi(\pi)\\ &= \sum_{\nu\leqq\mu}\int_\mu^{\mu^+} E_\nu(\tau)\left(\sum_{\pi\leqq\mu} S^\mu_{\nu\pi}(\tau)\,\hat{\Phi}_\pi(\tau)\frac{d\sigma_\pi}{d\sigma_\nu}(\tau)\right)d\sigma_\nu(\tau). \end{aligned}$$

On obtient ainsi la proposition suivante

PROPOSITION 6.3. — *La matrice de diffusion* $S^{\mu}(\tau)$ $(\tau \in (\mu, \mu^{+}))$ *est un endomorphisme de* $\bigoplus_{\pi \leqq \mu} \mathbf{C}^{m(\mu)}$, *décomposé par blocs suivant* $S^{\mu} = (S^{\mu}_{\nu\pi}(d\sigma_{\pi}/d\sigma_{\nu}))$ *où les homomorphismes* $S^{\mu}_{\nu\pi}$ *de* $\operatorname{Hom}(\mathbf{C}^{m(\pi)}, \mathbf{C}^{m(\nu)})$ *sont déterminés par les équations fonctionnelles*

$$\gamma(\mu)^{*} E_{\pi} = \sum_{\nu \leqq \mu} E_{\nu} S^{\mu}_{\nu\pi}.$$

7. Symétries

A. ESPACES LOCALEMENT SYMÉTRIQUES. — Soit $X = \Gamma \backslash G/K$ un espace localement symétrique non compact de volume fini et de rang rationnel 1 (on utilise les notations et hypothèses standard de [5], [6] et [8]). A titre d'exemple, on se limite au cas où X est hyperbolique [2] ou une variété modulaire de Hilbert [7] et on considère le laplacien Δ_{X} sur les fonctions. Les résultats sont valables pour d'autres opérateurs homogènes (sur les formes, spineurs...), notamment l'annulation des coefficients de transfert diagonaux de la proposition 7.1. Supposons pour simplifier que X n'a qu'une seule pointe B. Elle provient d'un parabolique P avec décomposition de Langlands $P = UAM$ et est le produit d'une demi-droite par une fibration en nilvariétés sur un tore :

$$\Gamma \cap U \backslash U \to B = A_{t} \times \Gamma \cap P \backslash UM \to A_{t} \times \Gamma \cap M \backslash M$$

où $A_{t} = \{e^{rH} \mid r \geqq t\}$, avec H dans l'algèbre de Lie de A.

Soit $(\varphi_{\varkappa})_{\varkappa \in \Gamma^{*}_{M}}$ (Γ^{*}_{M} réseau dual de $\Gamma_{M} = \Gamma \cap M$) une base de $L^{2}(\Gamma_{M} \backslash M)$ constituée de caractères (qui diagonalisent Δ_{M}). Tout élément de $\mathscr{M} = \{\|\kappa\|^{2}\}$ a une multiplicité au moins 2 (Γ^{*}_{M} est stable par antipodie), sauf $\|\kappa\| = 0$, qui correspond au caractère trivial.

Au caractère $\varphi_{\varkappa}$ sont associées la fonction $\Phi_{\varkappa}$ $(\sigma, uamk) = \varphi_{\varkappa}(m) e^{(\sigma + (1/2)) r}$ $(\sigma \in \mathbf{C}, u \in U, a = e^{rH}, m \in M, k \in K)$ et la série d'Eisenstein

$$\mathscr{E}_{\varkappa}(\sigma, x) = \sum_{\gamma \in \Gamma \cap P \backslash \Gamma} \Phi_{\varkappa}(\sigma, \gamma x), \qquad x \in G.$$

La série $\mathscr{E}_{\varkappa}(\sigma, x)$, absolument convergente sur $\{\mathscr{Re}\, \sigma > 1\}$, est Γ-invariante à gauche et K-invariante à droite, elle définit donc une fonction sur X, qui vérifie l'équation

$$\left[\Delta_{X} - \left(-\sigma^{2} + \frac{1}{4} + \|\kappa\|^{2}\right)\right] \mathscr{E}_{\varkappa}(\sigma, x) = 0.$$

Le terme constant (*i. e.* la partie basique) de $\mathscr{E}_{\varkappa}$ est donnée [6] par

$$\mathscr{E}^{0}_{\varkappa}(\sigma, x) = \varphi_{\varkappa}(m) e^{(\sigma + (1/2)) r} + C_{\varkappa}(\sigma) \varphi_{w.\varkappa}(m) e^{(-\sigma + (1/2)) r}$$

où w est l'élément non trivial du groupe de Weyl du tore $A_{\mathbf{Q}}$.

Ainsi $e^{-r/2} \mathscr{E}^{0}_{\varkappa}(\sigma, x)$ est la composante dans la partie à l'infini de $\mathscr{E}_{\varkappa}(\sigma, x)$ (la multiplication par l'exponentielle $e^{-r/2}$ permet de retrouver la mesure de Lebesgue sur $A_{t} \simeq \mathbf{R}^{+}$) et on a donc la proposition suivante

PROPOSITION 7.1. — *Les coefficients de transfert non diagonaux sont nuls.*

D'après la remarque 5.6, chaque fonction d'onde $E_{\|\kappa\|^2}$ est méromorphe sur un revêtement de degré 2 de **C**, qu'on identifie à **C**. La méthode générale de prolongement méromorphe des fonctions d'onde que nous avons développée donne l'holomorphie de $\mathscr{E}_\kappa$ seulement sur $\{\sigma \mid \mathscr{R}e\,\sigma > 0,\ \sigma \notin [0, \|\kappa\|^2]\}$. Remarquons que les coefficients de transfert diagonaux sont des matrices diagonales ou diagonales par blocs 2×2 anti-diagonaux, suivant que le groupe de Weyl opère trivialement ou non sur les caractères de $\Gamma_M \diagdown M$. Un exemple du premier cas est celui des espaces localement symétriques de rang réel 1 [2], le second survenant pour les variétés modulaires [7].

La nullité des coefficients non diagonaux est hautement non générique, comme le montre le calcul (dans le paragraphe suivant) de leur dérivée par rapport à une variation conforme de la métrique.

B. VARIATION CONFORME DES COEFFICIENTS DE TRANSFERT. — Dans ce paragraphe, (X, g) note une variété riemannienne complète de dimension n à bouts cylindriques et/ou pointus et on étudie le laplacien $\Delta = \Delta_{(X,\,g)}$ opérant sur les fonctions. A α dans $C_0^\infty(M)$ est associée la perturbation conforme $g_\alpha = e^{2\alpha} g$ de g. Pour une fonctionnelle F, définie sur $C_0^\infty(X)$ et à valeurs dans E, on notera δF sa dérivée fonctionnelle en $\alpha = 0$ [*i. e.* $\delta F(\alpha) = dF^t/dt\,|_{t=0}$ avec $F^t = F(t\alpha)$] : c'est une distribution à valeurs dans E.

LEMME 7.2. — $\delta\Delta(\alpha) = -2\alpha\Delta - (n-2)\,d\alpha\,.\,d.$

Preuve. — L'intégrale de Dirichlet pour la métrique $g_{t\alpha}$ est

$$\int_M \|\operatorname{grad} f\|^2 e^{t(n-2)\alpha}\, dv_g = \int_M f \operatorname{div}(e^{t(n-2)\alpha} \operatorname{grad} f)\, dv_g$$

d'où $\Delta(t\alpha)(f) = e^{tn\alpha} \operatorname{div}(e^{t(n-2)\alpha} \operatorname{grad} f)$ et le lemme. □

La conjugaison complexe induit sur $L^2(X, \mathbf{C})$ une involution antilinéaire I commutant avec le laplacien Δ_X. On prendra comme fonctions engendrant les fonctions basiques des fonctions propres (des divers laplaciens Δ_Z) à valeurs réelles de telle sorte que l'involution I induise l'involution standard sur les espaces $\mathbf{C}^{m(\mu)}$. Étant donnés deux espaces $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ munis d'involutions antilinéaires I_1 et I_2, l'espace $\mathscr{L}(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2)$ est muni d'une involution antilinéaire $I_{2,1}$ définie par $I_{2,1}(A) = I_2 A I_1$, $A \in \mathscr{L}(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2)$. Dans la suite, on notera l'action de toute involution antilinéaire des types précédents par le surlignement et tout élément invariant sera dit réel. Si $e(\lambda)$ est holomorphe, $\overline{e(\lambda)}$ est antiholomorphe.

LEMME 7.3 :

$$[\overline{(\Delta_{\text{loc}} - \pi(\Lambda))\,\chi\,\text{EXP}_{\mu'}}]^*\, E_\mu = 2i\sqrt{\Lambda - \mu'}\; T_{\mu'\mu} \tag{7.1}$$

$$\sqrt{\Lambda - \mu}\; T_{\mu\mu'} = \sqrt{\Lambda - \mu'}\; \overline{T_{\mu'\mu}}^*. \tag{7.2}$$

Preuve. — Par prolongement analytique, il suffit de prouver ces identités pour Λ réel dans FP. Pour un tel Λ, l'opérateur $(\Delta_{\text{loc}} - \pi(\Lambda))\,\chi\,\text{EXP}_\mu$ est réel. Soit

$\Phi \in \mathbf{C}^{m(\mu)}$, $\Phi' \in \mathbf{C}^{m(\mu')}$. On a alors :

$$\langle E_\mu(\Lambda)\Phi, (\Delta_{\mathrm{loc}} - \pi(\Lambda))(\chi\,\mathrm{EXP}_{\mu'}(\Lambda)\Phi')\rangle_{\mathscr{H}}$$
$$= \langle [\delta_{\mu\mu'}\,\mathrm{EXP}_\mu(\Lambda) + \mathrm{EXP}_{\mu'}(\gamma_\mu \Lambda)\,\mathrm{T}_{\mu'\mu}(\Lambda)]\Phi, (\Delta_{\mathrm{loc}} - \Lambda)(\chi\,\mathrm{EXP}_{\mu'}(\Lambda)\Phi')\rangle_{\mathscr{H}}$$
$$= 2i\sqrt{\Lambda - \mu'}\,\langle \mathrm{T}_{\mu'\mu}\Phi, \Phi'\rangle_{\mathbf{C}^{m(\mu')}}.$$

La relation (7.2) s'obtient en utilisant la définition de E_μ dans le membre de gauche de (7.1), ce qui donne une expression quasi symétrique en μ et μ'. □

D'après la partie 4, si H_t est une perturbation régulière de H_{t_0} (comme dans notre cas de variation conforme de métrique), une résonance de H_t varie continûment en fonction de t (avec éclatement si il y a multiplicité en $t=t_0$). Si la résonance $\Lambda_0(t_0)$ de H_{t_0} correspond à une valeur propre immergée dans le spectre continu, $\Lambda_0(t)$, pour $t \neq t_0$, n'est plus valeur propre de $H(t)$ et est un pôle d'un coefficient de transfert bien que celui-ci soit éventuellement régulier en $t=t_0$; aussi nous ne considérons les coefficients de transfert qu'en dehors de l'ensemble résonant Réso(H) de H dans le théorème suivant.

THÉORÈME 7.4. — *Les coefficients de transfert* $\mathrm{T}_{\mu'\mu}(\Lambda)$, $(\Lambda \in \Sigma - \text{Réso}(H))$ *sont différentiables par rapport aux variations conformes à support compact de la métrique, avec dérivée*

$$\delta \mathrm{T}_{\mu'\mu}(\Lambda) = -(2i\sqrt{\Lambda - \mu'})^{-1}\left[\left(\frac{n}{2} - 1\right)\Delta + 2\pi(\Lambda)\right]\overline{E_{\mu'}}^*(\Lambda)\cdot E_\mu(\Lambda). \tag{7.3}$$

Le produit pointé du membre de droite de (7.3) est défini de la manière syivante : soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces vectoriels, A et B des opérateurs dans $\mathscr{L}(\mathscr{E}, C^\infty(X))$, $\mathscr{L}(\mathscr{F}, C^\infty(X))$ resp., on note par B^*. A la distribution sur X à valeur dans $\mathrm{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ définie par

$$\langle\langle B^*\cdot A, \alpha\rangle u, v\rangle = \langle \alpha A u, B v\rangle_{L^2(X)},\quad u \in \mathscr{E},\ v \in \mathscr{F},\ \alpha \in C_0^\infty(X).$$

On retrouve le produit standard sur les fonctions lorsque $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont égaux à $\mathbf{C}$.

Preuve. — La démonstration du prolongement méromorphe de la résolvante donne la dérivabilité de $(\Delta - \Lambda)^{-1}$ par rapport aux variations conformes considérées, avec dépendance holomorphe en Λ dans Réso(Δ); il en résulte la même propriété pour les coefficients de transfert. Par prolongement analytique, il suffit de montrer (7.3) pour Λ réel dans FP; ce qui est supposé dans la suite. D'autre part, χ est supposé avoir un support disjoint de celui de α.

Dérivons la relation (7.1)

$$2i\sqrt{\Lambda - \mu'}\,\delta\mathrm{T}_{\mu'\mu}(\Lambda)(\alpha) = (\Delta_{\mathrm{loc}} - \Lambda)(\chi\,\mathrm{EXP}_{\mu'}(\Lambda))^*\,\delta E_\mu(\Lambda)(\alpha),$$

soit d'après la définition des fonctions d'ondes E_μ, en posant $R(\Lambda) = (\Delta - \Lambda)^{-1}$,

$$2i\sqrt{\Lambda - \mu'}\,\delta\mathrm{T}_{\mu'\mu}(\Lambda)(\alpha)$$
$$= [(\Delta_{\mathrm{loc}} - \Lambda)(\chi\,\mathrm{EXP}_{\mu'}(\Lambda))^*]\,R(\Lambda)\,\delta\Delta(\alpha)\,R(\Lambda)\,(\Delta_{\mathrm{loc}} - \Lambda)(\chi\,\mathrm{EXP}_\mu(\Lambda)).$$

L'opérateur $(\Delta-\Lambda)^{-1}$ étant auto-adjoint, on en déduit :

$$\begin{aligned} 2i\sqrt{\Lambda-\mu'}\,\delta T_{\mu',\mu}(\Lambda)(\alpha) &= [R(\Lambda)(\Delta_{\text{loc}}-\Lambda)(\chi\,\mathrm{EXP}_{\mu'}(\Lambda))]^*\,\delta\Delta(\alpha)\,R(\Lambda)(\Delta_{\text{loc}}-\Lambda)(\chi\,\mathrm{EXP}_{\mu}(\Lambda)) \\ &= (\chi\,\mathrm{EXP}_{\mu'}(\Lambda)-E_{\mu'}(\Lambda))^*\,\delta\Delta(\alpha)(\chi\,\mathrm{EXP}_{\mu}(\Lambda)-E_{\mu}(\Lambda)) \\ &= E_{\mu'}(\Lambda)^*\,\delta\Delta(\alpha)\,E_{\mu}(\Lambda). \end{aligned}$$

On a d'autre part :

$$2\,d\alpha\,.\,dE_\mu=\Delta\alpha\,.\,E_\mu+\alpha\,\Delta E_\mu-\Delta(\alpha\,E_\mu)=((\Delta+\Lambda)\,\alpha)\,E_\mu-\Delta(\alpha\,E_\mu),$$
$$E_{\mu'}^*\,\Delta(\alpha\,E_\mu)=(\Delta E_{\mu'})^*\,\alpha\,E_\mu=\Lambda\,E_{\mu'}^*\,\alpha\,E_\mu,$$

ce qui donne la dérivée (7.3).

C. SUPERSYMÉTRIE. — L'hamiltonien H sur $\mathscr{H}$ est dit supersymétrique s'il existe un opérateur auto-adjoint D (dit de charge) de carré H et une involution τ anticommutant avec D.

On suppose de plus que l'espace $\mathscr{H}$ a une décomposition de la forme $\mathscr{H}_{\text{int}}\oplus\mathscr{H}_\infty$ avec $\mathscr{H}_\infty=\prod_{\rho\in\mathscr{R}}\mathscr{H}_\rho$ où $\mathscr{R}$ est une partie discrète de $\mathbf{R}^+$, $\mathscr{H}_\rho=L^2(\mathbf{R}^+,\mathbf{C}^2,dx)\otimes\mathbf{C}^{m(\rho)}$ et D(resp. τ) opère sur $\mathscr{H}_\rho$ suivant $D_\rho\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v'+\rho u\\-u'-\rho v\end{pmatrix}\left[\text{resp. }\tau\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v\\u\end{pmatrix}\right]$.

Comme exemples de tels hamiltoniens, on peut citer le laplacien sur les formes différentielles sur une variété X (avec l'involution induite par le degré ou bien, si la dimension de X est multiple de 4, l'involution utilisée pour calculer la signature en théorie de Hodge) et, plus généralement, les laplaciens de Dirac sur les fibrés spinoriels.

Soit Σ^s la surface de Riemann associée aux fonctions $(\sqrt{\lambda-\rho},\sqrt{\lambda+\rho})$ telle que pour Λ dans Σ^s, $\sqrt{\Lambda\pm\rho}$ soit de partie imaginaire positive pour ρ assez grand et soit π^s la projection de revêtement $(\Sigma^s,\mathbf{C})$. On identifiera $\mathrm{FP}^s=\{\mathscr{I}m\,\lambda>0\}$ à l'ouvert de Σ^s au-dessus de FP^s où $\sqrt{\Lambda\pm\rho}$ est à partie imaginaire positive pour tout ρ.

THÉORÈME 7.5. — *$(D-\Lambda)^{-1}$ se prolonge méromorphiquement de FP^s à Σ^s en tant que fonction à valeurs opérateurs dans $\mathscr{L}_s(\mathscr{H}_{\text{comp}},\mathscr{H}_{\text{loc}})$.*

Preuve. — Soit (ρ_n) la suite des valeurs croissante de $\mathscr{R}$ et Σ_n^s la composante connexe de FP^s dans $(\pi^s)^{-1}(\mathbf{C}\setminus\{\lambda\in\mathbf{R},\,|\lambda|\geqq\rho_n\}$. Comme pour le théorème 4.1, il suffit de prolonger $(D-\Lambda)^{-1}$ à Σ_n^s en tant qu'opérateur de

$$\mathscr{H}^n_{\text{comp}}=\{(h_{\text{int}},(h_\rho))\mid \operatorname{Supp}h_\rho\subset[0,n],\ \rho\leqq\rho_n\}$$

dans $\mathscr{H}_{\text{loc}}$, et ce pour tout n. On fixe *n dans la suite.*

Soit h dans $\mathscr{H}^n_{\text{comp}}$ et $k=(D-\Lambda)^{-1}h(\Lambda\in\mathrm{FP}^s)$. Les composantes $k_\rho(\rho\leqq\rho_n)$ vérifient $\sqrt{\Lambda-\rho}\,u_\rho(n)=i\sqrt{\Lambda+\rho}\,v_\rho(n)$. Soit $T_+(\alpha)=\begin{pmatrix}1&\alpha\\0&1\end{pmatrix}$, $\varphi_{\rho\rho_n}$ une fonction à support compact valant 1 en n si $\rho\leqq\rho_n$, identiquement nulle sinon et $\alpha_\rho(\Lambda)$ définie sur Σ^s par

$\alpha_\rho(\Lambda)=1-i\sqrt{\Lambda+\rho}/\sqrt{\Lambda-\rho}$. Pour $\alpha=(\alpha_\rho)_{\rho\in\mathscr{R}}$, on définit la transformation de jauge

$$\mathrm{U}^n(\alpha)=(1_{\mathscr{H}_{\text{int}}}, (\mathrm{T}_+(\varphi_{\rho\rho_n}\alpha_\rho)\otimes 1_{\mathbf{C}^{m(\rho)}})),$$

qui transforme h tel que $u_\rho(n)=(1-\alpha_\rho)v_\rho(n)$ ($\rho\leqq\rho_n$) en $\tilde{h}=\mathrm{U}^n(\alpha)h$ tel que $\tau\tilde{h}_\rho(n)=\tilde{h}_\rho(n)$. Le changement de jauge $\mathrm{U}^n(\alpha(\Lambda))$ dépend holomorphiquement de Λ dans $\Sigma^s\setminus\mathrm{P}^+$ où P^+ désigne l'image inverse de $\mathscr{R}^*=\mathscr{R}\setminus\{0\}$ dans Σ^s.

Si $\tilde{\mathrm{D}}^n(\Lambda)=\mathrm{U}^n(\alpha(\Lambda))(\mathrm{D}-\pi^s(\Lambda))\,\mathrm{U}^n(\alpha(\Lambda))^{-1}$, résoudre $(\mathrm{D}-\Lambda)k=h$ dans $\mathscr{H}$ avec Λ dans FP^s est équivalent à résoudre $\tilde{\mathrm{D}}^n(\Lambda)\tilde{k}=\mathrm{U}^n(\alpha(\Lambda))h$ dans

$$\tilde{\mathscr{D}}^n=\{\tilde{k}\in\mathscr{H}^n_{\text{comp}}\mid \tilde{k}\in\mathscr{D}(\mathrm{D})+\bigoplus_{\rho\leqq\rho_n}\mathrm{H}^1([0,n],\mathbf{C}^2)\otimes\mathbf{C}^{m(\rho)},\ (\tau-1)\tilde{k}_\rho(n)=0\}.$$

Les opérateurs $\tilde{\mathscr{D}}^n(\Lambda)$, de domaine $\mathscr{D}^n$, forment une famille (holomorphe en Λ dans $\Sigma^s\setminus\mathrm{P}^+$) d'opérateurs fermés, perturbations compactes comme opérateurs de $\tilde{\mathscr{D}}^n$ dans $\mathscr{H}^n_{\text{comp}}$) de $\mathrm{D}^n-\pi^s(\Lambda)$; l'opérateur auto-adjoint D^n, défini sur $\mathscr{H}^n_{\text{comp}}$ et de domaine $\tilde{\mathrm{D}}^n$, a $\{|\lambda|\geqq\rho_n\}$ comme spectre essentiel. On en déduit, comme dans la preuve du théorème 4.1, le prolongement méromorphe de $(\mathrm{D}-\Lambda)^{-1}$ à $\Sigma^s_n\setminus\mathrm{P}^+$.

En construisant une transformation de jauge à partir de la matrice $\mathrm{T}_-(\alpha)=\begin{pmatrix}1&0\\ \alpha&1\end{pmatrix}$, on obtient le prolongement méromorphe sur $\Sigma^s_n\setminus\mathrm{P}^-$, où P^- est l'image inverse de $-\mathscr{R}^*$ dans Σ^s. L'existence du prolongement méromorphe sur Σ^s_n tout entier en résulte. □

L'opérateur de charge de référence est l'opérateur auto-adjoint D_ρ défini sur $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^+,\mathbf{C}^2,dx)$, de domaine $\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^+,\mathbf{C}^2)\cap\{\tau h(0)=h(0)\}$. Il a comme fonction propre généralisée

$$\mathrm{F}^0_\rho(\lambda)=\begin{pmatrix}\cos\sqrt{\lambda^2-\rho^2}\,x-(\lambda+\rho)\dfrac{\sin\sqrt{\lambda^2-\rho^2}\,x}{\sqrt{\lambda^2-\rho^2}}\\[2ex] (\lambda-\rho)\dfrac{\sin\sqrt{\lambda^2-\rho^2}\,x}{\sqrt{\lambda^2-\rho^2}}+\cos\sqrt{\lambda^2-\rho^2}\,x\end{pmatrix},\qquad \lambda\in\mathbf{C}.$$

On définit les fonctions d'ondes

$$\mathrm{F}_\rho(\Lambda)=\chi\,\mathrm{F}^0_\rho(\Lambda)-(\mathrm{D}-\Lambda)^{-1}(\mathrm{D}_{\text{loc}}-\Lambda)(\chi\,\mathrm{F}^0_\rho(\Lambda)),\qquad \Lambda\in\mathrm{FP}^s.$$

Le théorème précédent a comme corollaire immédiat :

PROPOSITION 7.6. — *Les fonctions d'ondes* $\mathrm{F}_\rho(\Lambda)$, $\Lambda\in\mathrm{FP}^s$, *se prolongent méromorphiquement à* Σ^s.

Introduisons

$$\mathrm{FXP}_\rho(\Lambda)(x_\rho)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+\dfrac{\rho+\pi^s(\Lambda)}{i\sqrt{\Lambda-\rho}\sqrt{\Lambda+\rho}}\\[2ex] 1+\dfrac{\rho-\pi^s(\Lambda)}{i\sqrt{\Lambda-\rho}\sqrt{\Lambda+\rho}}\end{bmatrix} e^{-i\sqrt{\Lambda-\rho}\,\sqrt{\Lambda+\rho}\,x_\rho},\qquad \Lambda\in\Sigma^s.$$

Si $(\gamma_\rho, \gamma_{-\rho})$ notent les générateurs du groupe du revêtement $(\Sigma^s, \mathbf{C}, \pi^s)$ tels que γ_ρ correspond à un lacet d'indice $\delta_{\rho\rho'}$ autour de ρ', on a

$$\pi^{s*}\,F^0_\rho = \mathrm{FXP}_\rho + \gamma^*_\rho\,\mathrm{FXP}_\rho.$$

On introduit alors les coefficients de transfert (supersymétriques) $T^s_{\rho',\rho}(\Lambda)$ par les relations

$$F_\rho \sim \mathrm{FXP}_\rho + \sum_{\rho'} \gamma^*_{\rho'}\,\mathrm{FXP}_{\rho'}\,T^s_{\rho',\rho},$$

ce qui donne une caractérisation, analogue à celle de la proposition 5.2, pour les fonctions d'ondes F_ρ.

Soit $(\Sigma(\mathscr{M}), \pi)$ le revêtement de $\mathbf{C}$ associé à la famille $\mathscr{M} = \{\rho^2 \mid \rho \in \mathscr{R}\}$, *i. e.* la surface spectrale de l'hamiltonien $H = D^2$. Il existe une projection p de Σ^s sur Σ telle que $\sqrt{\Lambda - \rho}\,\sqrt{\Lambda + \rho} = \sqrt{p\,\Lambda - \rho^2}$, $\pi p(\Lambda) = (\pi^s(\Lambda))^2\ (\Lambda \in \Sigma^s)$ et $p(\mathrm{FP}^s) \subset \mathrm{FP}$. Le groupe des automorphismes de (Σ^s, Σ) est isomorphe à $\{\pm 1\}^{\mathscr{R}} \times \{\pm 1\}$: l'automorphisme $\tilde{\iota} = \{\varepsilon_\rho\} \times 1$ est un automorphisme de $(\Sigma^s, \mathbf{C}, \pi^s)$ et satisfait $\sqrt{\tilde{\iota}\,\Lambda \pm \rho} = \varepsilon_\rho \sqrt{\Lambda \pm \rho}$ alors que $\tilde{\sigma} = \{\varepsilon_\rho\} \times -1$ revêt l'application antipodale σ $(\sigma\lambda = -\lambda)$ de $\mathbf{C}$ relativement à $(\Sigma^s, \mathbf{C}, \pi^s)$, avec $\sqrt{\tilde{\sigma}\,\Lambda \pm \rho} = \mp \varepsilon_\rho\, i \sqrt{\Lambda \mp \rho}$.

PROPOSITION 7.7. — (i) $\tilde{\sigma}^* F_\rho = \tau F_\rho$, $\tilde{\iota}^* F_\rho = F_\rho$, *où* $\tilde{\sigma}$ *et* $\tilde{\iota}$ *désignent des automorphismes de* (Σ^s, Σ, p) *définis ci-dessus.*

(ii) $g^* T^s_{\rho',\rho} = T^s_{\rho',\rho}$ *pour tout automorphisme* g *de* (Σ^s, Σ, p) i. e. $T^s_{\rho',\rho}$ *est défini sur* Σ.

Preuve. — On vérifie $\tilde{\sigma}^* \mathrm{FXP}_\rho = (\gamma_{\rho'}\,\tilde{\sigma}\gamma_{\rho'})^* \mathrm{FXP}_\rho = \tau\,\mathrm{FXP}_\rho$, $\tilde{\iota}^* \mathrm{FXP}_\rho = \mathrm{FXP}_\rho$ et par suite

$$\tau\tilde{\sigma}^* F_\rho \sim \mathrm{FXP}_\rho + \sum_{\rho'} \gamma^*_{\rho'}\,\mathrm{FXP}_{\rho'}\,\tilde{\sigma}^* T^s_{\rho',\rho}$$

$$\tilde{\iota}^* F_\rho \sim \mathrm{FXP}_\rho + \sum_{\rho'} \gamma^*_{\rho'}\,\mathrm{FXP}_{\rho'}\,\tilde{\iota}^* T^s_{\rho',\rho}.$$

La caractérisation de $F_\rho(\Lambda^s)\,(\Lambda^s \in \mathrm{FP}^s)$ implique alors

$$\tau F_\rho(\tilde{\sigma}\,\Lambda^s) = F_\rho(\Lambda^s), \qquad F_\rho(\tilde{\iota}\,\Lambda^s) = F_\rho(\Lambda^s).$$

La proposition en résulte. $\square$

On a des équations fonctionnelles analogues à celles du théorème 5.4. Reste à introduire les fonctions d'ondes bosonique/fermiomique pour $H = D^2$, *i. e.* les fonctions d'ondes invariante/auto-invariante par l'involution τ.

La fonction d'onde $F_\rho(\Lambda^s) + \tau F_\rho(\Lambda^s)$ [resp. $F_\rho(\Lambda^s) - \tau F_\rho(\Lambda^s)$] a, pour Λ^s dans FP^s, comme terme exponentiel dominant $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (1 - i\rho/\sqrt{p(\Lambda^s) - \rho^2})\, e^{-i\sqrt{p(\Lambda^s) - \rho^2}\,x_\rho}$ $\left(\text{resp. } \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (-i\pi^s(\Lambda^s)/\sqrt{p(\Lambda^s) - \rho^2})\, e^{-i\sqrt{p(\Lambda^s) - \rho^2}\,x_\rho}\right)$ le long de $\mathscr{H}_\rho$.

On introduit alors les fonctions d'onde de l'opérateur H (bien définies sur Σ d'après la proposition 7.7) :

$$E_\rho^+(\Lambda)=\frac{F_\rho(\Lambda^s)+\tau F_\rho(\Lambda^s)}{1-i\rho/\sqrt{\Lambda-\rho^2}}$$

$$E_\rho^-(\Lambda)=\frac{F_\rho(\Lambda^s)-\tau F_\rho(\Lambda^s)}{\pi^s(\Lambda^s)/i\sqrt{\Lambda-\rho^2}}$$

où $\Lambda^s \in \Sigma^s$ se projette sur $\Lambda \in \Sigma$ via p.

PROPOSITION 7.8. — *Les coefficients de transfert* $T_{\rho^2\rho'^2}(\Lambda)$ *de* H *s'obtiennent à partir des coefficients supersymétriques* $T^s_{\rho\rho'}(\Lambda^s)$ *suivant :*

$$T_{\rho^2\rho'^2}(\Lambda)=\begin{bmatrix}\dfrac{1-i\rho/\sqrt{\Lambda-\rho^2}}{1-i\rho'/\sqrt{\Lambda-\rho'^2}}T^s_{\rho\rho'}(\Lambda^s) & 0\\ 0 & \dfrac{\sqrt{\Lambda-\rho^2}}{\sqrt{\Lambda-\rho'^2}}T^s_{\rho\rho'}(\Lambda^s)\end{bmatrix},\qquad p(\Lambda^s)=\Lambda.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ASBAUGH et E. M. HARELL, *Perturbation Theory for Shape Resonances and Large Barrier Potentials* (*Comment. Phys. Math.*, vol. 83, 1982, p. 151-170).

[2] D. BARBASCH et H. MOSCOVICI, L^2-*Index and the Selberg Trace Formula* (*J. Funct. Anal.*, vol. 53, 1983, p. 151-201).

[3] H. BAUMGÄRTEL et M. WOLLENBERG, *Mathematical Scattering Theory*, Akademie-Verlag, Berlin, 1983.

[4] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Pseudo-Laplaciens II* (*Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, vol. 32, 1983, p. 87-113).

[5] H. DONNELLY, *Eigenvalues Estimates for Certain Non-Compact Manifolds* (*Michigan Math. J.*, vol. 31, 1984, p. 349-357).

[6] HARISH-CHANDRA, *Automorphic Forms on Semi-Simple Lie Groups* (*Lecture Notes in Math.*, n° 62, Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1968).

[7] W. MÜLLER, *Signature Defects of Cusps of Hilbert Modular Varieties and Values of* L-*Series at* $s=1$ (*J. Differential Geom.*, vol. 20, 1984, p. 55-119).

[8] W. MÜLLER, *Manifolds with Cusps of Rank One* (*Lecture Notes in Math.*, n° 1244, Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1987).

[9] P. A. PERRY, *Mellin Transformations and Scattering Theory I. Short Range Potentials* (*Duke Math. J.*, vol. 47, 1980, p. 187-193).

(Manuscrit reçu le 20 novembre 1987,
révisé le 6 septembre 1988).

Laurent GUILLOPÉ,
Institut Fourier,
B.P. n° 74,
38402 Saint-Martin-d'Hères.