

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

G. GONZALEZ-SPRINBERG

J.-L VERDIER

Construction géométrique de la correspondance de McKay

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 16, n° 3 (1983), p. 409-449

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1983_4_16_3_409_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DE LA CORRESPONDANCE DE MCKAY

PAR G. GONZALEZ-SPRINBERG ET J. L. VERDIER

SOMMAIRE

0. Introduction et notations	409
1. Résultats préliminaires : $K(\mathcal{P})$ et $R(G)$	412
2. Construction géométrique de la correspondance	415
3. Rappel sur les groupes engendrés par des réflexions; les modules M_p	419
4. Résolution G -équivariante de A_V ; l'opérateur Θ	425
5. La série de Poincaré; graduations et matrices	426
6. Désingularisations minimales; démonstration du théorème 2.2	440
7. Corollaire : Caractérisation de la désingularisation minimale	448
Références	449

0. Introduction et notations

Les objets concernés par cet article sont essentiellement les solides platoniciens, i. e. les polyèdres réguliers de \mathbb{R}^3 . La première démonstration du fait qu'ils sont au nombre de cinq (tétraèdre, octaèdre, cube, dodecaèdre et icosaèdre) est attribuée à Théétète ([P], [E]), qui a aussi prouvé qu'on peut les inscrire dans une sphère. Un groupe de rotations R qui laisse fixe un tel polyèdre est appelé groupe polyédral pur, et peut être considéré comme sous-groupe

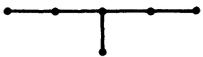
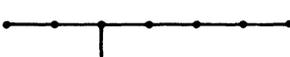
de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$, moyennant l'identification de la sphère S^2 avec la droite projective complexe \mathbb{P}^1 . Le groupe G , image inverse de R par l'homomorphisme canonique de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ sur $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$, est appelé groupe binaire polyédral. On trouve ainsi (à isomorphisme près) trois sous-groupes finis de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, car le cube et le dodécaèdre sont respectivement duaux de l'octaèdre et de l'icosaèdre par la dualité qui associe à un polyèdre celui dont les sommets sont les centres de ses faces (le tétraèdre est auto-dual), et deux polyèdres duaux ont le même groupe polyédral pur associé. Pour obtenir tous les sous-groupes finis de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ (à conjugaison près) il faut ajouter deux familles dénombrables : les groupes cycliques et les groupes diédraux binaires (*voir* par exemple [K] ou [D]); pour les groupes diédraux on peut aussi considérer les « groupes diédraux purs » comme étant les groupes de rotations de certains polyèdres appelés dièdres.

Soit G , donc, un sous-groupe fini de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, $G \neq \{1\}$; il agit naturellement sur $V = \mathbb{C}^2$; il a comme seul point fixe l'origine 0 et il agit librement sur $V - \{0\}$.

Posons $S = V/G$; notons $p : V \rightarrow S$ le morphisme de passage au quotient. La surface S a un point singulier isolé qui est un point double rationnel ([A], [Br], [D], [K]) et cette construction permet d'obtenir ainsi tous les points doubles rationnels [Br].

Soit $q : \tilde{S} \rightarrow S$ une désingularisation minimale de S , $D \subset \tilde{S}$ le diviseur exceptionnel; notons $\mathrm{Irr}(D) = \{d_1, \dots, d_r\}$ l'ensemble des composantes irréductibles de D .

On peut associer à G un diagramme de Dynkin $\Gamma(G)$ en prenant le graphe dual de la résolution \tilde{S} , graphe dont les sommets sont en bijection avec $\mathrm{Irr}(D)$, et dont les arêtes joignant deux sommets représentent les points d'intersection des composantes de D correspondantes. Suivant le cas, le diagramme est donné par le tableau suivant :

G	$ G $		$\Gamma(G)$
cyclique	$n+1$	$A_n :$	 (n sommets, $n \geq 1$)
diédral binaire	$4(n-2)$	$D_n :$	 (n sommets, $n \geq 4$)
tétraédral binaire	24	$E_6 :$	 (n sommets, $n \geq 4$)
octaédral binaire	48	$E_7 :$	
icosaédral binaire	120	$E_8 :$	

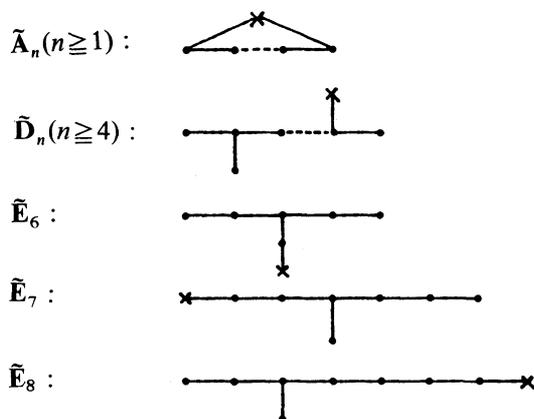
Pour tout sous-groupe fini G de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ on appelle $\Gamma(G)$ le type de G .

Considérons, par ailleurs, l'ensemble des classes d'équivalence de représentations non triviales de G : $\text{Irr}(G) = \{\rho_1, \dots, \rho_n\}$. Notons c la représentation canonique de G dans \mathbb{C}^2 donnée par l'inclusion $G \hookrightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$, et ρ_0 la représentation triviale de degré 1. On définit la $(r+1) \times (r+1)$ matrice $C = ((a_{ij}))$ par la formule de décomposition :

$$c \otimes \rho_i = \sum a_{ij} \rho_j,$$

où a_{ij} dénote la multiplicité de ρ_j dans $c \otimes \rho_i$.

J. McKay a remarqué que la matrice $2\text{Id} - C$ (où Id est la matrice d'identité) est la matrice de Cartan du diagramme de Dynkin complété $\tilde{\Gamma}(G)$ de $\Gamma(G)$ ([M], Appendix III de [S1]). Du point de vue des représentations de groupes cette propriété a été analysée par J. Steinberg [St]. Ces diagrammes de Dynkin complétés sont donc les suivants :



où on a indiqué par une croix le sommet ajouté.

La remarque de McKay permet de définir de façon purement combinatoire une bijection entre l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de G et l'ensemble de sommets de $\tilde{\Gamma}(G)$, qui induit une bijection entre le graphe de $\text{Irr}(G)$ et celui de $\text{Irr}(D)$ (en faisant correspondre à ρ_0 le sommet ajouté), bijection définie à automorphisme de diagramme près.

Cette bijection possède la propriété suivante : les degrés des représentations appartenant à $\text{Irr}(G)$ coïncident avec les coefficients de la plus grande racine dans le système de racines de $\Gamma(G)$. Cette propriété peut être énoncée d'une autre façon, en considérant le cycle fondamental $\mathcal{L} = \sum n_i d_i$ de \tilde{S} (voir la définition dans [A]). Le cycle fondamental est (pour les singularités rationnelles) le cycle divisoriel défini par l'idéal (localement principal) $q^*(\mathcal{M}_s)$, avec \mathcal{M}_s l'idéal maximal du point singulier. Soit \mathcal{H} une section hyperplane générale de S contenant le point singulier. Alors l'image inverse $q^*(\mathcal{H})$ s'écrit $q^*(\mathcal{H}) = \mathcal{L} + \mathcal{T}$, où \mathcal{T} est la transformée stricte et \mathcal{L} la partie de $q^*(\mathcal{H})$ à support dans D . On peut faire correspondre à \mathcal{T} le sommet ajouté dans $\tilde{\Gamma}(G)$; on vérifie que les arêtes ajoutées correspondent aussi aux points d'intersection de \mathcal{T} avec D . En ces termes, la bijection mentionnée associe à ρ_0 la transformée stricte \mathcal{T} et à chaque $\rho \in \text{Irr}(G)$ une composante $d \in \text{Irr}(D)$ de telle sorte que le degré de ρ coïncide avec la multiplicité de d dans le cycle fondamental \mathcal{L} .

Nous présentons ici une description géométrique de la correspondance de McKay. Plus précisément, à toute représentation irréductible non triviale ρ de G , on associe un fibré vectoriel \mathcal{F}_ρ sur $\tilde{\mathcal{S}}$ (où $\tilde{\mathcal{S}}$ est la désingularisation minimale du germe \mathcal{S} de la surface S au point singulier), fibré vectoriel dont la classe de Chern $c_1(\mathcal{F}_\rho)$ est un élément de la base canonique de $\text{Pic}(\tilde{\mathcal{S}})$ en bijection avec les sommets de $\text{Irr}(D)$ ⁽¹⁾.

1. Résultats préliminaires : $K(\tilde{\mathcal{S}})$ et $R(G)$

1.1. Soient \mathcal{S} le germe de S au point singulier, $q : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ une résolution minimale, $\text{Pic}(\tilde{\mathcal{S}})$ le groupe de Picard de $\tilde{\mathcal{S}}$ des classes d'isomorphisme de fibrés de rang 1 ou de $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}$ -modules inversibles, et $\text{Irr}(D) = \{d_1, \dots, d_r\}$ l'ensemble des composantes irréductibles du diviseur exceptionnel $D \subset \tilde{\mathcal{S}}$. Pour chaque $d \in \text{Irr}(D)$, notons e_d la classe de $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}(d)$ dans $\text{Pic}(\tilde{\mathcal{S}})$, et $\text{Pic}_D(\tilde{\mathcal{S}})$ le sous-groupe de $\text{Pic}(\tilde{\mathcal{S}})$ engendré par les e_d . Soit $\text{Pic}_D(\tilde{\mathcal{S}})^*$ le dual de $\text{Pic}_D(\tilde{\mathcal{S}})$, et notons $\delta : \text{Pic}(\tilde{\mathcal{S}}) \rightarrow \text{Pic}_D(\tilde{\mathcal{S}})^*$ l'homomorphisme défini par la forme d'intersection de $\text{Pic}(\tilde{\mathcal{S}})$. On sait que δ est un isomorphisme, car \mathcal{S} est une singularité rationnelle [A]. Notons $\{b_d | d \in \text{Irr}(D)\}$ la base de $\text{Pic}(\tilde{\mathcal{S}})$ transportée par δ^{-1} de la base duale de $\{e_d | d \in \text{Irr}(D)\}$. La matrice de l'injection canonique $\text{Pic}_D(\tilde{\mathcal{S}}) \hookrightarrow \text{Pic}(\tilde{\mathcal{S}})$ dans les bases $\{e_d\}$ et $\{b_d\}$ respectivement, est appelée la matrice d'intersection.

On considère d'autre part l'anneau de Grothendieck $K(\tilde{\mathcal{S}})$ des classes de $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}$ -modules cohérents, et on note $K_D(\tilde{\mathcal{S}})$ le sous-groupe engendré par les classes de $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}$ -modules à support dans D ; $K_D(\tilde{\mathcal{S}})$ est un idéal de $K(\tilde{\mathcal{S}})$. Pour tout $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}$ -module cohérent M notons $[M]$ sa classe dans $K(\tilde{\mathcal{S}})$, et pour tout $d \in \text{Irr}(D)$ posons $[d] = [\mathcal{O}_d]$. Finalement notons $rg : K(\tilde{\mathcal{S}}) \rightarrow \mathbb{Z}$ [resp. $c_1 : K(\tilde{\mathcal{S}}) \rightarrow \text{Pic}(\tilde{\mathcal{S}})$] l'application induite par celle qui associe à un $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}$ -module cohérent son rang (resp. sa première classe de Chern).

Avec les notations précédentes on a :

1.2. PROPOSITION. — (i) L'application $\varphi : K(\tilde{\mathcal{S}}) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \text{Pic}(\tilde{\mathcal{S}})$ définie par $x \mapsto (rg(x), c_1(x))$ est un isomorphisme de groupes commutatifs. Pour tout $L \in \text{Pic}(\tilde{\mathcal{S}})$ on a $\varphi([L]) = (1, L)$.

(ii) Le noyau de $rg : K(\tilde{\mathcal{S}}) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un idéal de carré nul.

(iii) L'image par φ de $K_D(\tilde{\mathcal{S}})$ est $\text{Pic}_D(\tilde{\mathcal{S}})$. Pour tout $d \in \text{Irr}(D)$ on a $\varphi([d]) = (0, e_d)$.

Démonstration. — Si $L \in \text{Pic}(\tilde{\mathcal{S}})$, l'égalité $\varphi([L]) = (1, L)$ résulte de la définition de φ ; par suite, si $n \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\varphi((n-1)\mathbf{1} + [L]) = (n, L),$$

d'où la surjectivité de φ .

L'injectivité résulte du fait que le noyau est le sous-groupe $K_2(\tilde{\mathcal{S}}) \subset K(\tilde{\mathcal{S}})$ des classes de modules à support de codimension ≥ 2 dont on vérifie immédiatement qu'il est nul; ceci

⁽¹⁾ Ces résultats ont été annoncés en [G-V]. H. Knörrer nous a fait parvenir une lettre en décembre 1981, où il propose une démonstration différente, trouvée indépendamment.

montre aussi (ii). Finalement, soit $d \in \text{Irr}(d)$. On a la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{V}}(-d) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{O}_d \rightarrow 0,$$

d'où (iii).

1.3. Soit $R(G)$ l'anneau des représentations de G . Si ρ est une représentation de G , on note $\tilde{\rho}$ la représentation duale ou contragrédiente de ρ .

Notons \mathcal{V} le germe de V à l'origine 0 .

On considère l'anneau de Grothendieck $K^G(\mathcal{V})$ des classes de $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}$ -modules cohérents G -équivalents, et le sous-groupe $K^G(0)$ de $K^G(\mathcal{V})$ de classes de $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}$ -modules à support dans 0 .

1.4. PROPOSITION. — (i) L'application qui à une représentation ρ de G dans un \mathbb{C} -espace vectoriel E_{ρ} associe le $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}$ -module G -équivalent $\mathcal{O}_{\mathcal{V}} \otimes_{\mathbb{C}} E_{\rho}$ induit un isomorphisme d'anneaux $R(G) \simeq K^G(\mathcal{V})$ qui permet d'identifier ces anneaux.

(ii) Soit $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$ l'idéal maximal en l'origine 0 de \mathcal{V} . La classe $[\mathcal{O}_{\mathcal{V}}/\mathcal{M}_{\mathcal{V}}]$ dans $K^G(\mathcal{V}) = R(G)$ est $2-c$. L'image de $K^G(0)$ dans $K^G(\mathcal{V}) = R(G)$ est l'idéal engendré par $2-c$.

(iii) L'idéal $(2-c)R(G)$ est un \mathbb{Z} -module libre engendré par $(2-c)\rho$, $\rho \in \text{Irr}(G)$. On a la relation :

$$2-c = \sum_{\rho \in \text{Irr}(G)} (\deg \rho) \cdot (c-2)\rho.$$

Démonstration. — L'affirmation de (i) résulte du fait que l'homomorphisme inverse est celui induit par l'application qui à un $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}$ -module G -équivalent M associe l'élément de $R(G)$ défini par $\sum_i (-1)^i [\text{Tor}_i^{\mathcal{O}_{\mathcal{V}}}(M, \mathcal{O}_{\mathcal{V}}/\mathcal{M}_{\mathcal{V}})]$.

Pour démontrer l'égalité $[\mathcal{O}_{\mathcal{V}}/\mathcal{M}_{\mathcal{V}}] = 2-c$, on considère la suite exacte de Koszul de $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}$ -modules G -équivalents :

$$0 \rightarrow \Lambda^2 T_{\mathcal{V}} \rightarrow T_{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{V}}/\mathcal{M}_{\mathcal{V}} \rightarrow 0,$$

où $T_{\mathcal{V}}$ est le faisceau tangent de \mathcal{V} .

Or $T_{\mathcal{V}} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{V}} \otimes_{\mathbb{C}} E_c$ car c est par définition la représentation canonique de G , représentation qui est auto-duale (i.e. $c = \tilde{c}$); et d'autre part $\Lambda^2 T_{\mathcal{V}} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{V}}$ car on a $G \subset \text{SL}(2, \mathbb{C})$. Par conséquent la suite exacte précédente fournit une résolution G -équivalente de $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}$ -modules qu'on peut écrire :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{V}} \otimes_{\mathbb{C}} E_{\tilde{c}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{V}}/\mathcal{M}_{\mathcal{V}} \rightarrow 0,$$

d'où l'égalité qu'on voulait démontrer.

En considérant l'isomorphisme de $R(G)$ sur $K^G(0)$ [analogue à celui de $R(G)$ sur $K^G(\mathcal{V})$] induit par l'application qui à ρ associe $(\mathcal{O}_{\mathcal{V}}/\mathcal{M}_{\mathcal{V}}) \otimes_{\mathbb{C}} E_{\tilde{\rho}}$, on a le diagramme suivant dont la

commutativité résulte de la résolution précédente de $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}/\mathcal{M}_{\mathcal{Y}}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}(G) & \xrightarrow{2-c} & \mathbf{R}(G) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \mathbf{K}^G(0) & \longrightarrow & \mathbf{K}^G(\mathcal{Y}) \end{array}$$

Par suite l'image de $\mathbf{K}^G(0)$ dans $\mathbf{K}^G(\mathcal{Y}) = \mathbf{R}(G)$ est l'idéal engendré par $(2-c)$.

Pour démontrer (iii), on utilise le fait que la matrice $C - 2 \text{Id}$ [où $C = ((a_{ij}))$] est définie par $c \otimes \rho_i = \sum a_{ij} \rho_j$ restreinte au sous-groupe de $\mathbf{R}(G)$ engendré par les éléments de $\text{Irr}(G)$ est définie négative, donc en particulier est non singulière. Par conséquent $(2-c)\mathbf{R}(G)$ est un \mathbb{Z} -module libre de rang au moins égal à $r = \text{card}(\text{Irr}(G))$ et au plus égal à $r+1$, rang de $\mathbf{R}(G)$.

D'autre part, ainsi qu'on le voit en considérant les caractères correspondants, on a la relation $c \text{reg}(G) = 2 \text{reg}(G)$, où $\text{reg}(G) = \sum_{i=0}^r (\deg \rho_i) \rho_i$ est la représentation régulière de G , car c est de degré 2. Comme $\text{reg}(G)$ est un élément primitif de $\mathbf{R}(G)$, on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \cdot \text{reg}(G) \rightarrow \mathbf{R}(G) \xrightarrow{(2-c)} \mathbf{R}(G),$$

et par suite $(2-c)\mathbf{R}(G)$ est de rang égal à r , et coïncide avec le \mathbb{Z} -module engendré par $(2-c)\rho$, $\rho \in \text{Irr}(G)$. De la relation précédente on obtient :

$$2-c = \sum_{\rho \in \text{Irr}(G)} (\deg \rho)(c-2)\rho,$$

car ρ_0 est la représentation triviale de degré 1; ce qui achève la démonstration de la proposition 1.4.

1.5. REMARQUE. — Le diagramme commutatif considéré dans la démonstration précédente se prolonge en le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{R}(G) & \longrightarrow & \mathbf{R}(G) & \longrightarrow & \mathbf{R}(G)/(2-c)\mathbf{R}(G) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\ \mathbf{K}^G(0) & \longrightarrow & \mathbf{K}^G(\mathcal{Y}) & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{K}}^G(\mathcal{Y} - \{0\}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les lignes sont exactes et où $\tilde{\mathbf{K}}^G(\mathcal{Y} - \{0\})$ est le sous-groupe de Grothendieck construit à l'aide des faisceaux cohérents qui se prolongent à \mathcal{Y} .

Ce diagramme permet de calculer $\tilde{\mathbf{K}}^G(\mathcal{Y} - \{0\})$: il est somme directe de son sous-groupe de torsion et de son sous-groupe cyclique infini engendré par son élément unité.

On obtient les résultats suivants :

Type de G :	$\tilde{K}^G(\mathcal{V} - \{0\}) \cong :$	
$A_n (n \geq 1)$		$\mathbb{Z} \cdot 1 \oplus \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$
$D_n (n \geq 4)$	{	si n pair $\mathbb{Z} \cdot 1 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
		si n impair $\mathbb{Z} \cdot 1 \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
E_6		$\mathbb{Z} \cdot 1 \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
E_7		$\mathbb{Z} \cdot 1 \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
E_8		$\mathbb{Z} \cdot 1$

2. Construction géométrique de la correspondance

2.1. On utilise les notations des paragraphes précédents.

Soit $\tilde{\mathcal{V}} = (\mathcal{V} \times_{\mathcal{S}} \tilde{\mathcal{F}})_{\text{réduit}}$ le produit fibré réduit de \mathcal{V} et $\tilde{\mathcal{F}}$ au-dessus de \mathcal{S} . On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{\mathcal{V}} & \xrightarrow{\text{pr}_2} & \tilde{\mathcal{F}} \\
 \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow q \\
 \mathcal{V} & \xrightarrow{p} & \mathcal{S}
 \end{array}$$

où pr_1 et pr_2 dénotent les projections canoniques.

2.2. THÉORÈME. — Soit $\pi : R(G) = K^G(\mathcal{V}) \rightarrow K(\tilde{\mathcal{F}})$ l'application induite par la composition $\text{Inv} \circ \text{pr}_{2*} \circ \text{pr}_1^*$, où pr_1^* et pr_{2*} sont les morphismes canoniques et où Inv est l'application qui associe à un $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{F}}}$ -module G -équivariant M le sous-module M^G des invariants pour l'action de G . Alors on a :

(i) Pour tout $\rho \in \text{Irr}(G)$ il existe un unique $d_\rho \in \text{Irr}(D)$ tel que $\pi(\rho) = (\deg \rho, b_\rho)$. L'application $\rho \rightarrow d_\rho$ de $\text{Irr}(G)$ dans $\text{Irr}(D)$ est bijective. Pour $\rho_i \neq \rho_j$ on a $(d_{\rho_i}, d_{\rho_j}) = a_{ij}$ (où a_{ij} est la multiplicité de ρ_j dans $c \otimes \rho_i$).

(ii) $\pi(2-c)$ est la classe $[\mathcal{L}]$ du cycle fondamental, et pour tout $\rho \in \text{Irr}(G)$ on a $\pi((c-2)\rho) = [d_\rho]$.

(iii) L'application π est un isomorphisme de \mathbb{Z} -modules.

(iv) $\pi((2-c)R(G)) = \text{Pic}_D(\tilde{\mathcal{F}})$.

(v) Par passage au quotient π induit un isomorphisme d'anneaux :

$$R(G)/(2-c)R(G) \simeq K(\tilde{\mathcal{F}})/K_D(\tilde{\mathcal{F}}).$$

2.3. COROLLAIRE. — On a :

$$[\mathcal{L}] = \sum_{\rho \in \text{Irr}(G)} (\deg \rho) [d_\rho].$$

Démonstration du corollaire 2.3. — En appliquant π aux deux membres de l'égalité :

$$2 - c = \sum_{\rho \in \text{Irr}(G)} (\deg \rho)(c - 2) \rho$$

[prop. 1.2 (iii)], on obtient l'égalité cherchée comme conséquence du théorème 2.2 (ii).

La proposition suivante est un résultat préliminaire pour la démonstration du théorème 2.2; ses hypothèses sont un peu moins restrictives que celles satisfaites par la surface \mathcal{S} de ce théorème.

2.4. PROPOSITION. — Soit $p : (\mathcal{V}, 0) \rightarrow (\mathcal{S}, \bar{0})$ un morphisme fini dominant où $(\mathcal{V}, 0)$ est un germe de surface normale, et où $(\mathcal{S}, \bar{0})$ est un germe de singularité rationnelle de surface.

Soit $q : \tilde{\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{S}$ une désingularisation de \mathcal{S} ; notons $\mathcal{V}' = \mathcal{V} \times_{\mathcal{S}} \tilde{\mathcal{P}}$ le produit fibré de \mathcal{V} et $\tilde{\mathcal{P}}$ au-dessus de \mathcal{S} et $\tilde{\mathcal{V}} = \mathcal{V}'_{\text{red}}$ le réduit de \mathcal{V}' . Alors on a :

(i) L'homomorphisme canonique (de $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ -complexes) $\mathcal{O}_{\mathcal{V}} \rightarrow q_* \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{P}}}$ est un isomorphisme et on a de plus $R^1 q_* \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{P}}} = 0$.

(ii) Le $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{P}}}$ -module $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{V}}}$ est localement libre.

Montrons d'abord un lemme :

2.5. LEMME. — Soit A un anneau commutatif noethérien et intègre, et B une A -algèbre finie irréductible, dominante, et génériquement réduite. Notons \mathcal{N} l'idéal des éléments nilpotents de l'anneau B et $\text{Tors}_A B$ la A -torsion de B . Alors on a :

$$\mathcal{N} = \text{Tors}_A B.$$

Démonstration du lemme 2.5. — En effet \mathcal{N} est un A -module de type fini génériquement nul donc $\mathcal{N} \subset \text{Tors}_A B$. L'algèbre B_{red} est intègre donc sans A -torsion, car dominante, d'où $\text{Tors}_A B \subset \mathcal{N}$.

Démonstration de la proposition 2.4. — Donc on a par la formule de projection pour les morphismes non nécessairement plats [Gr] :

$$\mathcal{O}_{\mathcal{V}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}}^{\mathbb{L}} Rq_* (\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{P}}}) = Rq_* \left(\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{P}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{\mathcal{V}} \right)$$

où le $\otimes^{\mathbb{L}}$ dénote le produit tensoriel dans la catégorie dérivée.

Étant donné que \mathcal{S} est une singularité rationnelle, on a :

$$Rq_* (\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{P}}}) = \mathcal{O}_{\mathcal{S}},$$

et par suite :

$$\mathcal{O}_{\mathcal{V}} = Rq_* \left(\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{P}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{\mathcal{V}} \right).$$

Donc on a une suite spectrale, dont le terme E_2^r est $R^r q_* \left(\mathcal{H}^s \left(\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{P}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{\mathcal{V}} \right) \right)$, qui aboutit à $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}$.

Comme $R^r q_* = 0$ pour $r \neq 0, 1$, on a la suite exacte de $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ -module :

$$0 \rightarrow R^1 q_* (\text{Tor}_1^{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}}(\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}, \mathcal{O}_{\mathcal{V}})) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{V}} \rightarrow q_*(\mathcal{O}_{\mathcal{V}'}) \rightarrow 0,$$

et :

$$R^1 q_* \mathcal{O}_{\mathcal{V}'} = 0.$$

Or le support de $R^1 q_*(\text{Tor}_1^{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}}(\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}, \mathcal{O}_{\mathcal{V}}))$ est de codimension positive, donc $R^1 q_*(\text{Tor}_1^{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}}(\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}, \mathcal{O}_{\mathcal{V}})) = 0$, car $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}$ est intègre, et par suite $\mathcal{O}_{\mathcal{V}} \rightarrow q_*(\mathcal{O}_{\mathcal{V}'})$ est un isomorphisme.

Par ailleurs, $\text{Tors}_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}} \mathcal{O}_{\mathcal{V}'}$ est l'idéal des éléments nilpotents de $\mathcal{O}_{\mathcal{V}'}$ (lemme 2.5) car \mathcal{V}' est irréductible et génériquement étale sur $\tilde{\mathcal{S}}$. Donc on a la suite exacte de $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}$ -modules :

$$0 \rightarrow \text{Tors}_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}} \mathcal{O}_{\mathcal{V}'} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{V}'} \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}} \rightarrow 0.$$

Or $q_* \text{Tors}_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}} \mathcal{O}_{\mathcal{V}'} = 0$ car $q_* \mathcal{O}_{\mathcal{V}'} \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{V}}$ est intègre.

En vertu de ce qui précède on en déduit $R^1 q_* \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}} = 0$, et la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{V}} \rightarrow q_* \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}} \rightarrow R^1 q_* \text{Tors}_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}} \mathcal{O}_{\mathcal{V}'} \rightarrow 0$.

L'algèbre $q_* \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}$ est intègre et $R^1 q_* \text{Tors}_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}} \mathcal{O}_{\mathcal{V}'}$ est à support ponctuel. Comme $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}$ est normal, on a $R^1 q_* \text{Tors}_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}} \mathcal{O}_{\mathcal{V}'} = 0$.

Finalement, le $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}$ -module $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}$ est localement libre si et seulement si $\text{Ext}_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}}^1(\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}, \omega_{\tilde{\mathcal{S}}}) = 0$, où $\omega_{\tilde{\mathcal{S}}}$ est le faisceau dualisant de $\tilde{\mathcal{S}}$, et la dualité relative pour q donne un isomorphisme :

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}}^1(\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}, \omega_{\tilde{\mathcal{S}}}) = \text{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}}^1(\mathbf{R}q_* \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}, \mathbf{K}_{\mathcal{S}}[-2]),$$

où $\mathbf{K}_{\mathcal{S}}$ est le complexe dualisant de \mathcal{S} . Mais on a $\mathbf{R}q_* \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}} \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{V}}$, d'où un isomorphisme :

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}}^1(\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}, \omega_{\tilde{\mathcal{S}}}) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}}^1(\mathcal{O}_{\mathcal{V}}, \mathbf{K}_{\mathcal{S}}[-2]).$$

La dualité relative pour p donne un isomorphisme :

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}}^1(\mathcal{O}_{\mathcal{V}}, \mathbf{K}_{\mathcal{S}}) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathcal{V}}}^1(\mathcal{O}_{\mathcal{V}}, \mathbf{K}_{\mathcal{V}}[-2]),$$

mais comme \mathcal{V} est normale, \mathcal{V} est de Cohen-Macaulay, donc $\mathbf{K}_{\mathcal{V}}[-2]$ n'a qu'un seul module de cohomologie non nul en degré 0. Par suite $\text{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathcal{V}}}^1(\mathcal{O}_{\mathcal{V}}, \mathbf{K}_{\mathcal{V}}[-2]) = 0$, donc $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}$ est localement libre, ce qui achève la démonstration de la proposition 2.4.

2.6. REMARQUE. — La proposition 2.4 montre que $\tilde{\mathcal{S}}$ est un platificateur de \mathcal{V} sur \mathcal{S} . Nous verrons plus loin que, sous les hypothèses du théorème 2.2 (i. e. \mathcal{V} lisse, \mathcal{S} point double rationnel et $\tilde{\mathcal{S}}$ désingularisation minimale de \mathcal{S}) $\tilde{\mathcal{S}}$ est le platificateur normal de \mathcal{V} sur \mathcal{S} .

2.7. L'application $\pi : \mathbf{R}(G) \rightarrow \mathbf{K}(\tilde{\mathcal{S}})$ du théorème 2.2 est \mathbb{Z} -linéaire, donc il suffit, pour déterminer π , de calculer $\pi(\rho)$ pour chaque représentation irréductible ρ de G .

Soit \mathcal{M}_{ρ} le $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ -module défini par :

$$\mathcal{M}_{\rho} = \text{Hom}_{\mathbf{C}[G]}(\mathbf{E}_{\rho}, \mathcal{O}_{\mathcal{V}}).$$

On pose $\mathcal{F}_\rho = (\mathcal{O}_{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}} \mathcal{M}_\rho) / \text{Tors}_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}}$, où $\text{Tors}_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}}$ dénote la $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ -torsion de $\mathcal{O}_{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}} \mathcal{M}_\rho$.

Avec les notations précédentes on a :

2.8. PROPOSITION. — Les $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ -modules $(\mathcal{O}_{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}} (\mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \otimes_{\mathbb{C}} E_\rho^-))^G$ et \mathcal{F}_ρ sont isomorphes.

Démonstration. — Notons \mathcal{N} l'idéal des éléments nilpotents d'un anneau et T_A la torsion d'un A-module.

On a :

$$\begin{aligned}
 & (\mathcal{O}_{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}} (\mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \otimes_{\mathbb{C}} E_\rho^-))^G \\
 & \simeq (\mathcal{O}_{\mathcal{F}} \otimes_{\mathbb{C}} E_\rho^-)^G \text{ (par simplification du produit tensoriel)} \\
 & = (((\mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}}) / \mathcal{N}) \otimes_{\mathbb{C}} E_\rho^-)^G \text{ (définition de } \mathcal{O}_{\mathcal{F}}) \\
 & = (((\mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}}) / T_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}}) \otimes_{\mathbb{C}} E_\rho^-)^G \text{ (lemme 2.5)} \\
 & \simeq ((\mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}} \otimes_{\mathbb{C}} E_\rho^-) / T_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}})^G \\
 & \text{(commutativité de la torsion avec la somme directe)} \\
 & \simeq (\mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}} \otimes_{\mathbb{C}} E_\rho^-)^G / T_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}}^G \\
 & \text{(commutativité de l'action de } G \text{ avec la torsion)} \\
 & \simeq (\mathcal{O}_{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}} (\mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \otimes_{\mathbb{C}} E_\rho^-)^G) / T_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}}^G \\
 & \hspace{15em} \text{(car } \mathcal{O}_{\mathcal{F}} \text{ et } \mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \text{ sont invariants par } G). \\
 & \simeq \mathcal{F}_\rho \text{ car on a un isomorphisme canonique :}
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{M}_\rho = \text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(E_\rho, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}) \cong (\mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \otimes_{\mathbb{C}} E_\rho^-)^G.$$

En vue de la définition de l'application π du théorème 2.2, on a :

2.9. COROLLAIRE (prop. 2.8). — L'application $\pi : R(G) \rightarrow K(\mathcal{F})$ est induite aussi par celle qui associe à chaque représentation irréductible ρ de G le $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ -module \mathcal{F}_ρ .

2.10. COROLLAIRE. — (i) On a $q_* \mathcal{F}_\rho = \mathcal{M}_\rho$, $R^1 q_* \mathcal{F}_\rho = 0$.

(ii) Le $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ -module \mathcal{F}_ρ est localement libre de rang égal au degré de ρ .

Démonstration. — Notons $\text{Irr}(G) := \text{Irr}(G) \cup \{\rho_0\}$. Si A est un anneau, $A[G]$ dénote la A -algèbre du groupe G .

Il résulte de la proposition 2.8 et de la décomposition canonique des G -modules qu'on a un isomorphisme canonique de $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}[G]$ -modules :

$$\mathcal{O}_{\mathcal{F}} \simeq \bigoplus_{\rho \in \text{Irr}(G)} \mathcal{F}_{\rho} \otimes_{\mathbb{C}} E_{\rho}$$

et par suite :

$$q_{*} \mathcal{O}_{\mathcal{F}} \simeq \bigoplus_{\rho \in \text{Irr}(G)} q_{*} \mathcal{F}_{\rho} \otimes_{\mathbb{C}} E_{\rho},$$

$$R^1 q_{*} \mathcal{O}_{\mathcal{F}} \simeq \bigoplus_{\rho \in \text{Irr}(G)} R^1 q_{*} \mathcal{F}_{\rho} \otimes_{\mathbb{C}} E_{\rho}.$$

De même, on a un isomorphisme canonique de $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}[G]$ -modules :

$$\mathcal{O}_{\mathcal{M}} \simeq \bigoplus_{\rho \in \text{Irr}(G)} \mathcal{M}_{\rho} \otimes_{\mathbb{C}} E_{\rho}$$

d'où (i) d'après la proposition 2.4 et le fait que \mathcal{F}_{ρ} , facteur direct d'un module localement libre, est localement libre.

Localement, en dehors du diviseur D , $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}[G]$, et (ii) résulte alors de la structure de la représentation régulière.

3. Rappel sur les groupes engendrés par des réflexions; les modules M_{ρ}

3.1. Pour chaque sous-groupe fini G de $SL(2, \mathbb{C})$, il existe un produit scalaire hilbertien de $V = \mathbb{C}^2$ invariant par G et dans la suite on supposera donc que G est un sous-groupe fini de $SU(2, \mathbb{C})$; on sait par ailleurs que deux sous-groupes de $SU(2, \mathbb{C})$ sont conjugués si et seulement si ils le sont dans $SL(2, \mathbb{C})$.

Pour la démonstration du théorème 2.2 on utilisera le fait que chaque groupe polyédral binaire G est un sous-groupe d'indice 2 d'un groupe $G' \subset U(2, \mathbb{C})$ engendré par des réflexions complexes d'ordre 2 (voir [S-T], [Co]). Ceci est dû essentiellement au fait que déjà les groupes polyédraux purs sont des sous-groupes d'indice 2 de groupes engendrés par des réflexions de \mathbb{R}^3 ; ces derniers sont obtenus en considérant, en plus des rotations, les réflexions qui laissent fixe un polyèdre (voir [K], chap. 1, § 11 ou [D], § 12). Nous utiliserons le fait que G'/G opère sur les représentations de G en associant à chaque représentation ρ , sa contragrédiente $\tilde{\rho}$.

3.2. Notons $S' = V/G'$ la surface obtenue comme quotient de V par G' , A_V l'anneau de polynômes à deux variables à coefficients dans \mathbb{C} , A_S (resp. $A_{S'}$) l'anneau de fonctions régulières globales sur S (resp. sur S'). Dans la suite on identifie l'anneau A_S (resp. $A_{S'}$) au sous-anneau de A_V des invariants de A_V par G (resp. G').

On sait que A_V est un A_S -module libre, et que A_S est une \mathbb{C} -algèbre (graduée) de polynômes ([Ch], [Bo], chap. V, § 5).

Notons Y, Z deux invariants homogènes de G' qui engendrent A_S comme \mathbb{C} -algèbre; et considérons $X = J(Y, Z)$ le déterminant jacobien de Y et Z .

Alors X est un semi-invariant de G' (cf. [Bo]), dont le carré est invariant par G' car les réflexions de G' sont d'ordre 2; et X, Y, Z sont trois invariants homogènes de G qui engendrent A_S comme \mathbb{C} -algèbre ([K], chap. 2).

Pour fixer les notations, soient Y et Z choisis de telle façon que $\deg(Z) \leq \deg(Y)$; cette convention détermine X à un facteur constant près (sauf si G est de type A_1), de même pour Y (sauf si G est de type A_n avec n impair ou D_n avec n pair), de même pour Z (sauf si G est de type A_1 ou D_4).

Dans le tableau suivant on donne les degrés de X, Y, Z dans chaque cas :

Type de G	$\deg(X)$	$\deg(Y)$	$\deg(Z)$
$A_n (n \geq 1)$	$n+1$	$n+1$	2
$D_n (n \geq 4)$	$2(n-1)$	$2(n-2)$	4
E_6	12	8	6
E_7	18	12	8
E_8	30	20	12

3.3. Notons ε la représentation de degré 1 de G' définie par l'action de G' sur $\mathbb{C}X$, où X est le semi-invariant considéré au paragraphe précédent.

Soit ρ (resp. ρ') une représentation de G (resp. G'). Par abus de notation on écrira $\varepsilon\rho'$ au lieu de $\varepsilon \otimes \rho$, $\text{Ind } \rho$ au lieu de $\text{Ind}_G^G \rho$ (i. e. la représentation induite sur G' par ρ [Se], § 7.1) et $\text{Res } \rho'$ au lieu de $\text{Res}_G \rho'$ (i. e. la représentation restreinte à G de ρ').

3.4. PROPOSITION. — Soit ρ une représentation irréductible de G . Alors on a :

- (i) $\varepsilon \text{ Ind } \rho = \text{Ind } \rho = \text{Ind } \rho^\vee$.
- (ii) $\rho \neq \rho^\vee$ si et seulement si $\text{Ind } \rho$ est irréductible.
- (iii) $\rho = \rho^\vee$ si et seulement si $\text{Ind } \rho = \rho' \oplus \varepsilon\rho'$, où ρ' est une représentation irréductible de G' .

Soit ρ' une représentation irréductible de G' . Alors on a :

- (i') $\text{Res } \rho' = \text{Res } \varepsilon\rho' = (\text{Res } \rho')^\vee$.
- (ii') $\rho' \neq \varepsilon\rho'$ si et seulement si $\text{Res } \rho'$ est irréductible.
- (iii') $\rho' = \varepsilon\rho'$ si et seulement si $\text{Res } \rho' = \rho \oplus \rho^\vee$, où ρ est une représentation irréductible de G .

Démonstration. — Quelque soit ρ' représentation de G' on a :

$$(1) \quad (\text{Ind } \rho) \otimes \rho' = \text{Ind}(\rho \otimes \text{Res } \rho'),$$

donc, si $\rho' = \varepsilon$ on a :

$$(2) \quad \varepsilon \text{ Ind } \rho = \text{Ind } \rho,$$

car $\text{Res } \varepsilon = \rho_0$, où ρ_0 est la représentation triviale de rang 1 de G ; et si $\rho = \rho_0$ dans (1), alors :

$$(3) \quad \text{Ind } \text{Res } \rho' = \rho' \oplus \varepsilon\rho',$$

car $\text{Ind } \rho_0 = \rho'_0 \oplus \varepsilon$, où ρ'_0 est la représentation triviale de rang 1 de G' . Par ailleurs, le groupe quotient G'/G agit sur les représentations de G en associant à chaque représentation ρ la contragrédiente ρ^\vee . Par suite on a :

$$(4) \quad \text{Res Ind } \rho = \rho \oplus \rho^\vee.$$

En appliquant Ind aux deux membres de (4), on a, par (3) :

$$\text{Ind } \rho \oplus \varepsilon \text{ Ind } \rho = \text{Ind } \rho \oplus \text{Ind } \rho^\vee,$$

par suite $\varepsilon \text{ Ind } \rho = \text{Ind } \rho^\vee$, d'où (i), par (2).

Par le critère d'irréductibilité de Mackey ([Se], § 7.5), on a que $\text{Ind } \rho$ est irréductible si et seulement si $\rho \neq \rho^\vee$, d'où (ii), et on a $\rho = \rho^\vee$ si et seulement si $\text{Ind } \rho = \bigoplus_{i=1}^m \rho'_i$, avec $m > 1$ et ρ'_i irréductible pour tout i . Or en appliquant Res aux deux membres on a, par (4), une somme de deux représentations irréductibles, donc $m \leq 2$ et par suite $m = 2$. Si $\rho = \rho^\vee$ on a donc

$$\text{Res}(\rho'_1 \oplus \rho'_2) = \rho \oplus \rho,$$

par suite

$$\text{Res } \rho'_1 = \text{Res } \rho'_2 = \rho, \quad \text{d'où } \rho'_1 \oplus \rho'_2 = \text{Ind } \rho = \text{Ind Res } \rho'_1 = \rho'_1 \oplus \varepsilon \rho'_1,$$

la dernière égalité par (3), d'où $\varepsilon \rho'_1 = \rho'_2$, ce qui montre (iii).

Par ailleurs on a $\text{Res } \varepsilon \rho' = (\text{Res } \varepsilon) \otimes (\text{Res } \rho') = \text{Res } \rho'$, car $\text{Res } \varepsilon = \rho_0$; et par (4) on a :

$$(\text{Res } \rho') \oplus (\text{Res } \rho')^\vee = \text{Res Ind Res } \rho' = \text{Res}(\rho' \oplus \varepsilon \rho') = (\text{Res } \rho') \oplus (\text{Res } \rho')$$

par suite $\text{Res } \rho' = (\text{Res } \rho')^\vee$, d'où (i').

Soit $\text{Res } \rho' = \bigoplus_{i=1}^m \rho_i$ la décomposition en somme de représentation irréductibles de $\text{Res } \rho'$; alors, par (3), on a $m \leq 2$.

Si $\text{Res } \rho' = \rho_1 \oplus \rho_2$, alors $\rho' \oplus \varepsilon \rho' = \text{Ind Res } \rho' = (\text{Ind } \rho_1) \oplus (\text{Ind } \rho_2)$ et par suite $\text{Ind } \rho_i$ est irréductible ($i=1, 2$), et on peut supposer $\text{Ind } \rho_1 = \rho'$, $\text{Ind } \rho_2 = \varepsilon \rho'$. En ce cas on a, par (4), $\rho_1 \oplus \rho_1^\vee = \text{Res Ind } \rho_1 = \text{Res } \rho' = \rho_1 \oplus \rho_2$, d'où $\rho_1^\vee = \rho_2$ et par (i) on a $\rho' = \varepsilon \rho'$.

Finalement, si $\text{Res } \rho' = \rho$, alors par (3) on a $\text{Ind } \rho = \rho' \oplus \varepsilon \rho'$. Or par la formule de réciprocity de Frobenius on a :

$$1 = (\chi_\rho | \chi_{\text{Res } \rho'})_G = (\chi_{\text{Ind } \rho} | \chi_{\rho'})_{G'},$$

où χ dénote le caractère, et par conséquent $\rho' \neq \varepsilon \rho'$, ce qui achève la démonstration.

3.5. Soit ρ (resp. ρ') une représentation irréductible de G (resp. de G'). On considère le A_S -module gradué (resp. le $A_{S'}$ -module gradué) M_ρ (resp. $M_{\rho'}$) défini par :

$$M_\rho = \text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(E_\rho, A_V) \quad [\text{resp. } M_{\rho'} = \text{Hom}_{\mathbb{C}[G']} (E_{\rho'}, A_V)].$$

On pose $U_\rho = M_\rho / \mathcal{M}_S M_\rho$ et $U_{\rho'} = M_{\rho'} / \mathcal{M}_S M_{\rho'}$, où \mathcal{M}_S est l'idéal maximal de A_S des éléments de degré strictement positif [i. e. $\mathcal{M}_S = (Y, Z)$]; U_ρ (resp. $U_{\rho'}$) est un \mathbb{C} -espace vectoriel muni de la graduation canonique induite par celle de M_ρ (resp. $M_{\rho'}$). Il résulte de la proposition 3.4 le corollaire suivant :

3.6. COROLLAIRE. — (i) Si $\rho \neq \rho^\sim$, soit $\rho' = \text{Ind } \rho$. On a des A_S -isomorphismes (resp. des \mathbb{C} -isomorphismes) homogènes de degré 0 :

$$M_\rho = M_{\rho'} = M_{\rho'} \quad (\text{resp. } U_\rho = U_{\rho'} = U_{\rho'})$$

(ii) Si $\rho = \rho^\sim$, soit $\text{Ind } \rho = \rho' \oplus \varepsilon \rho'$ la décomposition en représentations irréductibles de $\text{Ind } \rho$. On a un A_S -isomorphisme (resp. un \mathbb{C} -isomorphisme) homogène de degré 0 :

$$M_\rho = M_{\rho'} \oplus M_{\varepsilon \rho'} \quad (\text{resp. } U_\rho = U_{\rho'} \oplus U_{\varepsilon \rho'})$$

3.7. Notons c' la représentation canonique de G' définie par l'inclusion $G' \subset U(2, \mathbb{C})$. On peut définir un diagramme $\tilde{\Gamma}(G')$, de façon analogue à celle qui définit $\tilde{\Gamma}(G)$, en considérant maintenant le produit tensoriel par la représentation c' . Or, étant donné qu'on a en général $c' \neq \varepsilon c'$ (en fait on a égalité seulement si G est de type A_n), on introduit lorsque $c' \neq \varepsilon c'$ des arêtes orientées : si ρ'_1 et ρ'_2 sont deux représentations irréductibles de G' , on joint les deux sommets correspondants par une arête orientée de source ρ'_1 et de but ρ'_2 si ρ'_2 apparaît dans la décomposition de $c' \otimes \rho'_1$ en représentations irréductibles.

Dans la liste suivante on donne les diagrammes qu'on obtient. On utilise les notations de la proposition 3.4, et on fixe une numérotation des sommets qui sera maintenue dans la suite. Le sommet correspondant à la représentation triviale est indiqué par une croix.

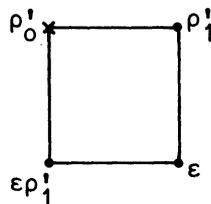
3.7.1. Type A_n ($n \geq 1$)

(a) $n = 1$:

\tilde{A}_1 :
($c = 2\rho_1$)

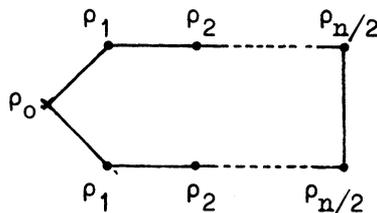


\tilde{A}'_1 :
($c' = \rho'_1 \oplus \varepsilon \rho'_1$)

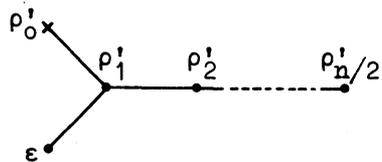


(b) n pair :

\tilde{A}_n :
($c = \rho_1 \oplus \rho_1$)

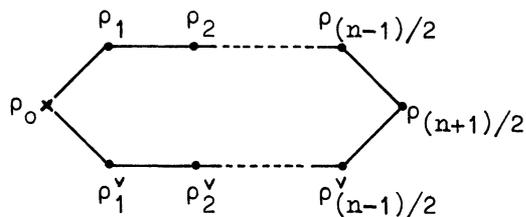


\tilde{A}'_n :
($c' = \rho'_1$)

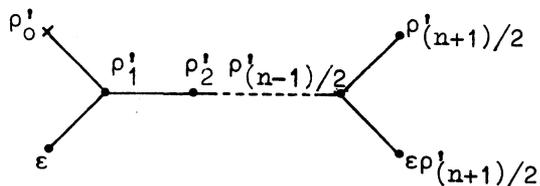


(c) n impair, $n > 1$:

\tilde{A}_n :
($c = \rho_1 \oplus \rho_1$)



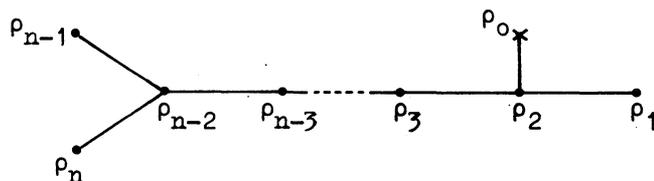
\tilde{A}'_n :
($c' = \rho'_1$)



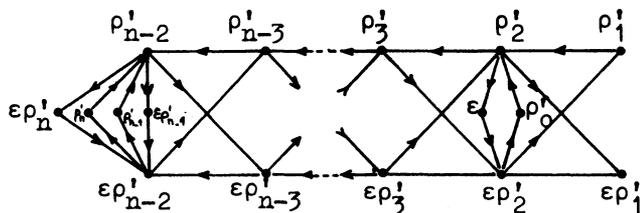
3.7.2. Type D_n ($n \geq 4$)

(a) n pair :

\tilde{D}_n :
($c = \rho_2$)

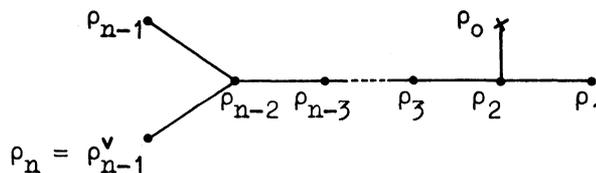


\tilde{D}'_n :
($c' = \rho'_2$)

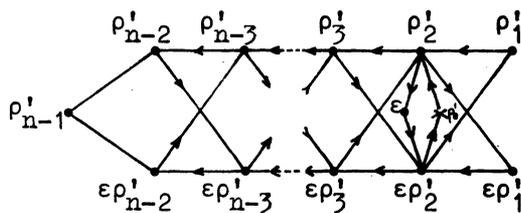


(b) n impair :

\tilde{D}_n :
($c = \rho_2$)

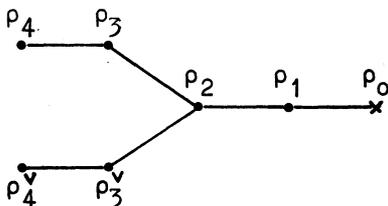


$\tilde{D}'_n :$
($c = \rho'_2$)

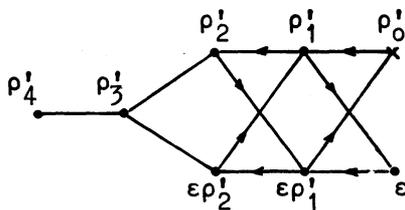


3.7.3. Type E_6

$\tilde{E}_6 :$
($c = \rho_1$)

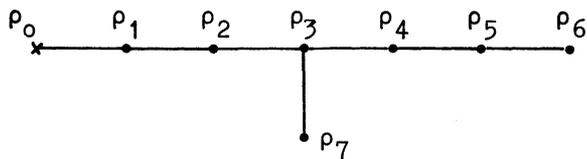


$\tilde{E}'_6 :$
($c' = \rho'_1$)

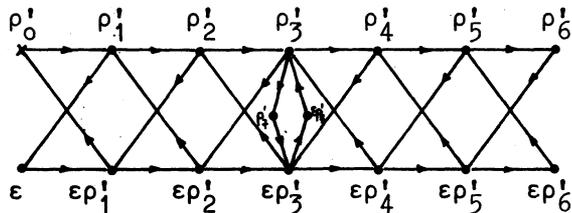


3.7.4. Type E_7

$\tilde{E}_7 :$
($c = \rho_1$)

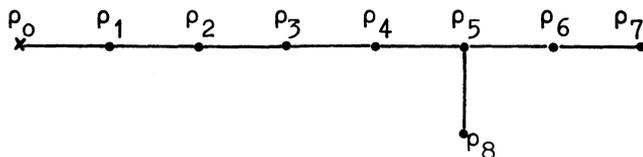


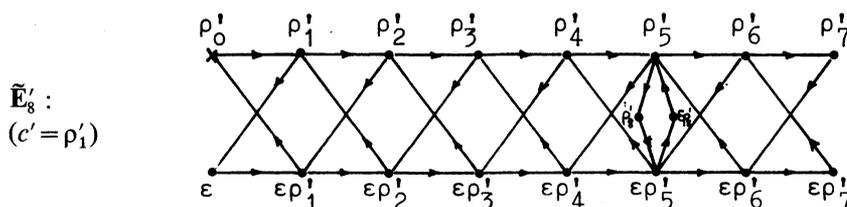
$\tilde{E}'_7 :$
($c' = \rho'_1$)



3.7.5. Type E_8

$\tilde{E}_8 :$
($c = \rho_1$)





4. Résolution G-équivariante de A_V ; l'opérateur Θ

4.1. On utilise les notations du paragraphe précédent. L'anneau A_V est muni d'une structure de $A_S[G]$ -module gradué (resp. de $A_S[G']$ -module gradué, resp. de $A_S[G]$ -module gradué).

Soit $\Theta : A_V \rightarrow A_V$ l'opérateur $A_S[G]$ -linéaire défini par $\Theta f = Xf$ pour $f \in A_V$; il est homogène de degré égal au degré de X et il est aussi $A_S[G]$ -linéaire.

Notons $\sigma : A_S \rightarrow A_S$ l'automorphisme d'ordre 2 de A_S -algèbre tel que $\sigma(X) = -X$. Pour tout $f \in A_V$ et $h \in A_S$ posons $h \cdot_{\sigma} f = \sigma(h)f$. On obtient ainsi une nouvelle structure de A_S -module sur A_V ; cet A_S -module est noté A_V^{σ} .

Considérons le $A_S[G']$ -module $A_V \otimes_{A_S} A_V^{\sigma}$; il est aussi muni d'une structure de $A_S[G]$ -module, et il est libre en tant que A_S -module.

4.2. LEMME. — (i) Le rang de $A_V \otimes_{A_S} A_V^{\sigma}$ comme A_S -module est égal à $2|G'|$ — où $|G'|$ dénote l'ordre de G' —; et son rang comme A_S -module est $2|G|$.

(ii) On a deux suites exactes de $A_S[G]$ -modules :

$$0 \rightarrow A_V^{\sigma} \xrightarrow{i^-} A_V \otimes_{A_S} A_V^{\sigma} \xrightarrow{j^+} A_V \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow A_V \xrightarrow{i^+} A_V \otimes_{A_S} A_V^{\sigma} \xrightarrow{j^-} A_V^{\sigma} \rightarrow 0$$

avec $i^+(f) = i^-(f) = f \otimes X - \Theta f \otimes 1$:

$$j^+(f \otimes h) = fh, \quad j^-(f \otimes h) = h \cdot_{\sigma} f,$$

$$\forall f \in A_V, \quad \forall h \in A_S.$$

Démonstration. — On a un isomorphisme de $A_S[G']$ -modules $A_V \simeq A_S \otimes_{\mathbb{C}} A_V / \mathcal{M}_S A_V$, où \mathcal{M}_S dénote l'idéal maximal de A_S engendré par Y et Z [Bo]; et d'autre part le $\mathbb{C}[G]$ -module gradué $A_V / \mathcal{M}_S A_V$ fournit une représentation régulière de G' , d'où (i). La vérification de l'exactitude des suites de (ii) est immédiate.

4.3. Considérons par ailleurs l'opérateur $A_S[G]$ -linéaire homogène de A_S dans lui-même défini par la multiplication par X ; on le notera aussi X . Il est aussi $A_S[G]$ -linéaire.

4.4. PROPOSITION. — (i) On a l'égalité $\Theta^2 = X^2 \text{Id}_{A_V}$ où $X^2 \text{Id}_{A_V}$ désigne la multiplication par $X^2 \in A_{S'}$.

(ii) Soient T^+ (resp. T^-) : $A_V \otimes_{A_{S'}} A_S \rightarrow A_V \otimes_{A_{S'}} A_S$ l'opérateur $A_S[G]$ -linéaire homogène défini par :

$$T^+ = \Theta \otimes \text{Id}_{A_S} + \text{Id}_{A_V} \otimes X \quad (\text{resp. } T^- = \Theta \otimes \text{Id}_{A_S} - \text{Id}_{A_V} \otimes X).$$

Alors on a la suite exacte de $A_S[G]$ -modules :

$$\dots \xrightarrow{T^-} A_V \otimes_{A_{S'}} A_S \xrightarrow{T^+} A_V \otimes_{A_{S'}} A_S \xrightarrow{T^-} A_V \otimes_{A_{S'}} A_S \xrightarrow{j^+} A_V \rightarrow 0$$

où j^+ est défini dans le lemme 4.2. On obtient ainsi une résolution du $A_S[G]$ -module gradué A_V par des $A_S[G]$ -modules gradués libres en tant que A_S -modules.

Démonstration. — L'opérateur Θ est défini comme étant la multiplication par X , or $X^2 \in A_{S'}$, d'où (i). D'autre part on a $T^+ = i^+ \circ j^+$ et $T^- = i^- \circ j^-$. L'exactitude de la suite de (ii) est donc conséquence du lemme 4.1(ii).

4.5. Pour chaque représentation irréductible ρ de G , on considère le module M_ρ comme $A_{S'}$ -module (§ 3.5).

Soit $\theta_\rho = M_\rho \rightarrow M_\rho$ (resp. $j_\rho^+ : M_\rho \otimes_{A_{S'}} A_S \rightarrow M_\rho$) l'application $A_{S'}$ -linéaire obtenue en appliquant $\text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(E_\rho, -)$ à Θ (resp. à j^+). Posons :

$$\begin{aligned} T_\rho^+ &= \theta_\rho \otimes \text{Id}_{A_S} + \text{Id}_{M_\rho} \otimes X \\ T_\rho^- &= \theta_\rho \otimes \text{Id}_{A_S} - \text{Id}_{M_\rho} \otimes X. \end{aligned}$$

On définit ainsi des opérateurs $A_{S'}$ -linéaires (resp. A_S -linéaires) homogènes de $M_\rho \otimes_{A_{S'}} A_S$ dans lui-même. On a alors :

4.6. COROLLAIRE. — On a la suite exacte de A_S -modules gradués :

$$\dots \xrightarrow{T_\rho^-} M_\rho \otimes_{A_{S'}} A_S \xrightarrow{T_\rho^+} M_\rho \otimes_{A_{S'}} A_S \xrightarrow{T_\rho^-} M_\rho \otimes_{A_{S'}} A_S \xrightarrow{j_\rho^+} M_\rho \rightarrow 0.$$

Cette suite exacte fournit une résolution de M_ρ par des A_S -modules gradués libres (sur A_S) de rang 2 $\deg \rho$.

4.7. REMARQUE. — Pour $\rho \neq \rho_0$, on peut montrer que cette résolution est une résolution minimale.

5. La série de Poincaré; graduations et matrices

5.1. Soit $\rho \in \text{Irr}(G)$ [resp. $\rho' \in \text{Irr}(G')$] une représentation irréductible de G (resp. de G'). On considère le \mathbb{C} -espace vectoriel gradué $U_\rho = M_\rho / \mathcal{M}_S M_\rho$ (resp. $U_{\rho'} = M_{\rho'} / \mathcal{M}_{S'} M_{\rho'}$) de

dimension égal à $2 \deg \rho$ (resp. égale à $\deg \rho'$). Notons $U_{\rho, n}$ (resp. $U_{\rho', n}$) le sous-espace des éléments homogènes de degré n .

Posons :

$$P_{\rho}(T) = \sum_n (\dim_{\mathbb{C}} U_{\rho, n}) T^n, \quad P_{\rho'}(T) = \sum_n (\dim_{\mathbb{C}} U_{\rho', n}) T^n;$$

ce sont des polynômes dans $\mathbb{Z}[T]$.

Soit $R(G)[T]$ (resp. $R(G')[T]$) l'anneau des polynômes à une variable à coefficients dans $R(G)$ [resp. dans $R(G')$].

Soit c (resp. c') la représentation canonique de G (resp. de G') et ρ_0 (resp. ρ'_0) la représentation triviale de degré 1 de G (resp. de G').

5.2. PROPOSITION. — Dans l'anneau $R(G)[T]$ (resp. $R(G')[T]$) on a l'égalité :

$$\left(\sum_{\rho \in \text{Irr}(G)} \rho P_{\rho}(T) \right) (\rho_0(1+T^2) - cT) = \rho_0(1 - T^{\deg Y})(1 - T^{\deg Z})$$

$$[\text{resp. } \left(\sum_{\rho' \in \text{Irr}(G')} \rho' P_{\rho'}(T) \right) (\rho'_0 - c'T + \varepsilon T^2) = \rho'_0(1 - T^{\deg Y})(1 - T^{\deg Z})].$$

Démonstration. — Nous ferons la démonstration pour G , celle pour G' est analogue. Si M est un $\mathbb{C}[G]$ -module, on note $[M]$ sa classe dans $R(G)$. Soit $A_V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_{V, n}$ la décomposition en sous-espaces homogènes de A_V . On définit la série de Poincaré $\langle A_V \rangle$ dans l'anneau de séries formelles $R(G)[[T]]$ par :

$$\langle A_V \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} [A_{V, n}] T^n.$$

Étant donnée que $[A_{V, n}] = [\text{sym}^n(c)]$, alors on a :

$$\langle A_V \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} [\text{sym}^n(c)] T^n = 1 / \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [\Lambda^n(c)] T^n \right).$$

Or $\Lambda^0(c) = \rho_0$, $\Lambda^1(c) = c$, $\Lambda^2(c) = \rho_0$ car $G \subset \text{SU}(2, \mathbb{C})$, et $\Lambda^n(c) = 0, \forall n > 2$. Par suite on a :

$$(1) \quad \langle A_V \rangle = 1 / (\rho_0(1+T^2) - cT).$$

Considérons par ailleurs la décomposition de A_V en $\mathbb{C}[G]$ -sous-modules isotypiques,

$A_V = \bigoplus_{\rho \in \text{Irr}(G)} A_{V, \rho}$, et soit $\langle A_{V, \rho} \rangle$ la série de Poincaré de $A_{V, \rho}$ dans $R(G)[[T]]$. Alors on a :

$$(2) \quad \langle A_V \rangle = \sum_{\rho \in \text{Irr}(G)} \langle A_{V, \rho} \rangle.$$

Posons $S_{\rho}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (\dim_{\mathbb{C}} M_{\rho, n}) T^n \in \mathbb{C}[[T]]$. Par la définition de M_{ρ} on a un isomorphisme

homogène $A_{V, \rho} = M_{\rho} \otimes_{\mathbb{C}} E_{\rho}$. Par suite on a :

$$(3) \quad \langle A_{V, \rho} \rangle = \rho S_{\rho}(T).$$

Finalement on a $M_{\rho} = U_{\rho} \otimes_{\mathbb{C}} A_S$, d'où :

$$(4) \quad S_{\rho}(T) = P_{\rho}(T) / (1 - T^{\deg Y})(1 - T^{\deg Z}).$$

La proposition résulte des égalités (1) à (4).

5.3. La proposition précédente fournit une méthode effective pour le calcul de la graduation de U_{ρ} (resp. de $U_{\rho'}$), qui est donné par le polynôme $P_{\rho}(T)$ [resp. $P_{\rho'}(T)$]. Par ailleurs, on a (cor. 3.6) :

$$\begin{aligned} P_{\rho}(T) &= P_{\rho^{\sim}}(T) = P_{\rho'}(T) & \text{si } \rho \neq \rho^{\sim} \text{ et } \rho' = \text{Ind } \rho, \\ P_{\rho}(T) &= P_{\rho'}(T) + P_{\varepsilon\rho'}(T) & \text{si } \rho = \rho^{\sim} \text{ et } \text{Ind } \rho = \rho' \oplus \varepsilon\rho'; \end{aligned}$$

par conséquent, il suffit de calculer $P_{\rho'}(T)$ pour toute représentation irréductible ρ' de G' pour déterminer $P_{\rho}(T)$ pour toute représentation irréductible ρ de G .

Dans la table suivante on donne la liste des résultats. Le calcul est réalisé en utilisant le fait que $P_{\rho_0}(T) = 1$ et $P_{\varepsilon}(T) = T^{\deg X}$. Si $P_{\rho'}(T) = \sum_{i=1}^k a_i T^{n_i}$, on donne la suite des degrés n_i , avec chaque entier n_i répété a_i fois, $i = 1, \dots, k$.

Les notations utilisées pour les représentations sont celles introduites au paragraphe 3.7.

5.3.1. Type $A_n (n \geq 1)$

	<i>représentation</i>	<i>degrés</i>
(a) <i>n</i> impair :	$\rho'_j (1 \leq j \leq (n-1)/2)$	$j; (n+1-j)$
	$\rho'_{(n+1)/2}$	$(n+1)/2$
	$\varepsilon\rho'_{(n+1)/2}$	$(n+1)/2$
(b) <i>n</i> pair :	$\rho'_j (1 \leq j \leq n/2)$	$j; (n+1-j)$

5.3.2. Type $D_n (n \geq 4)$

(a) <i>n</i> pair :	ρ'_1	$(2n-4)$
	$\varepsilon\rho'_1$	2
	$\rho'_j (j \text{ pair})$	$(j-1); (2n-j-1)$
	$\varepsilon\rho'_j (j \text{ pair})$	$(j+1); (2n-j-3)$
	$\rho'_j (j \text{ impair})$	$(j-1); (2n-j-3)$
	$\varepsilon\rho'_j (j \text{ impair})$	$(j+1); (2n-j-1)$
	$\rho'_j (j = n-1, n)$	n
	$\varepsilon\rho'_j (j = n-1, n)$	$n-2$

(b) *n* impair : Pour $j \leq n-2$, mêmes résultats que ceux du cas *n* pair.

$$\rho'_{n-1} \quad n-2; n$$

5.3.3. Type E_6

représentation	degrés
ρ'_1	1; 11
$\varepsilon\rho'_1$	5; 7
ρ'_2	2; 4; 6
$\varepsilon\rho'_2$	6; 8; 10
ρ'_3	3; 5; 7; 9
ρ'_4	4; 8

5.3.4. Type E_7

représentation	degrés	représentation	degrés
ρ'_1	1; 17	$\varepsilon\rho'_1$	7; 11
ρ'_2	2; 6; 10	$\varepsilon\rho'_2$	8; 12; 16
ρ'_3	3; 7; 11; 15	$\varepsilon\rho'_3$	5; 9; 9; 13
ρ'_4	4; 8; 12	$\varepsilon\rho'_4$	6; 10; 14
ρ'_5	5; 13	$\varepsilon\rho'_5$	7; 11
ρ'_6	6	$\varepsilon\rho'_6$	12
ρ'_7	4; 8	$\varepsilon\rho'_7$	10; 14

5.3.5. Type E_8

représentation	degrés	représentation	degrés
ρ'_1	1; 29	$\varepsilon\rho'_1$	11; 19
ρ'_2	2; 10; 18	$\varepsilon\rho'_2$	12; 20; 28
ρ'_3	3; 11; 19; 27	$\varepsilon\rho'_3$	9; 13; 17; 21
ρ'_4	4; 8; 12; 16; 20	$\varepsilon\rho'_4$	10; 14; 18; 22; 26
ρ'_5	5; 9; 13; 17; 21; 25	$\varepsilon\rho'_5$	7; 11; 15; 15; 19; 23
ρ'_6	6; 14; 18; 22	$\varepsilon\rho'_6$	8; 12; 16; 24
ρ'_7	7; 23	$\varepsilon\rho'_7$	13; 17
ρ'_8	6; 10; 14	$\varepsilon\rho'_8$	16; 20; 24

5.4. DÉFINITION DES MATRICES $[\theta_\rho]$; QUELQUES REMARQUES UTILES.

5.4.1. Soit M un A_S -module gradué libre de type fini. Posons $U = M/\mathcal{M}_S M$; U est gradué canoniquement par la graduation induite par celle de M . Notons M_n (resp. U_n) le sous-groupe de M (resp. de U) des éléments homogènes de degré n . Soit n un entier tel que $U_n \neq 0$. On considère le sous-ensemble I_n de \mathbb{Z} défini par :

$$I_n = \{m \mid m = n + i, \text{ avec } U_m \neq 0, A_{S, i} \neq 0\}.$$

On dira que M est bien gradué s'il satisfait la condition suivante : (BGr) : Si n et n' sont deux entiers tels que $n < n'$, $U_n \neq 0$, $U_{n'} \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned} n' \in I_n &\Rightarrow I_n \subset I_{n'} \\ n' \notin I_n &\Rightarrow I_n \cap I_{n'} = \emptyset. \end{aligned}$$

Soient $I(1), \dots, I(h)$ les éléments maximaux (pour l'inclusion) de la famille $\{I_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Avec les notations précédentes on a :

5.4.2. PROPOSITION. — *Supposons que M soit bien gradué.*

(i) *On a une décomposition canonique de U en somme directe :*

$$U = \bigoplus_{k=1}^h U^{(k)} \quad \text{avec} \quad U^{(k)} = \bigoplus_{l \in I_k} U_l, \quad 1 \leq k \leq h.$$

(ii) *Il existe une décomposition unique de M en somme directe de sous-modules gradués $M = \bigoplus_{k=1}^h M^{(k)}$, qui induit, modulo \mathcal{M}_S , la décomposition de U précédente.*

Démonstration. — Puisque M satisfait la condition (BGr), la famille $\{I(k) \mid 1 \leq k \leq h\}$ est une partition de l'ensemble $\{n \mid U_n \neq 0\}$, d'où (i).

Par ailleurs, si $M = \bigoplus_k M^{(k)}$ est une décomposition de M en somme directe telle que $M^{(k)}/\mathcal{M}_S M^{(k)} = U^{(k)}$, alors $M^{(k)}$ est le A_S -sous-module de M engendré par les sous-groupes M_l avec $l \in I(k)$; et il est clair que la famille des sous-modules $M^{(k)}$ ainsi définie donne une décomposition de M en somme directe, d'où (ii).

5.4.3. Par inspection de la table 5.3, on vérifie que le module $M_{\rho'}$ est bien gradué pour toute représentation irréductible ρ' de G' , à la seule exception de ρ'_3 du type E_7 et ρ'_5 de E_8 . Or le type E_7 est traité facilement à partir du type E_6 (comme on verra dans le paragraphe 5.5) et le cas ρ'_5 de E_8 sera traité à part; donc, sauf indication contraire, on exclue dans la suite les cas exceptionnels. En conséquence de la proposition précédente, il y a une décomposition canonique de $M_{\rho'}$ en somme directe de sous-modules $M_{\rho'}^{(k)}$, avec $1 \leq k \leq h = h(\rho')$.

Supposons maintenant que ρ' apparaisse dans la décomposition en représentations irréductibles de $\text{Ind } \rho$ où ρ est une représentation irréductible de G . Étant donné que l'opérateur θ_ρ est défini par la multiplication par le semi-invariant X de G' , on a l'inclusion : $\theta_\rho(M_{\rho'}) \subset M_{\varepsilon\rho'}$.

Notons $\theta_{\rho'} : M_{\rho'} \rightarrow M_{\varepsilon\rho'}$ la restriction de θ_ρ à $M_{\rho'}$. On appelle *matrice* $[\theta_{\rho'}]$ associée à l'opérateur $\theta_{\rho'}$ le tableau indexé par $\{(k, \bar{k}), 1 \leq k \leq h(\rho'), 1 \leq \bar{k} \leq h(\varepsilon\rho')\}$ formé des blocks $[\theta_{\rho'}^{(k, \bar{k})}] : M_{\rho'}^{(k)} \rightarrow M_{\varepsilon\rho'}^{(\bar{k})}$.

5.4.4. *Remarques.* — (1) Notons $I_{\rho'}$ l'ensemble de degrés $\{l \mid U_{\rho', l} \neq 0\}$, et $\{I_{\rho'}(k) \mid 1 \leq k \leq h\}$ la partition canonique de $I_{\rho'}$ définie en 5.4.1. La table 5.3 montre que $\dim_{\mathbb{C}} U_{\rho'}^{(k)}$ est égal à 1 ou 2 (et par suite $\text{rang}_{A_S} M_{\rho'}^{(k)}$ est égal à 1 ou 2).

De fait on trouve trois cas possibles :

(a) $I_{\rho'}(k) = \{l\}$ et $\dim_{\mathbb{C}} U_{\rho', l} = 1$;

(b) $I_{\rho'}(k) = \{l\}$ et $\dim_{\mathbb{C}} U_{\rho', l} = 2$;

(c) $I_{\rho'}(k) = \{l_1, l_2\}$ avec $l_1 < l_2$

et $\dim_{\mathbb{C}} U_{\rho', l_1} = \dim_{\mathbb{C}} U_{\rho', l_2} = 1$.

Dans le dernier cas on a une filtration de $M_{\rho'}(k)$, $N_{\rho'}^{(k)} \subset M_{\rho'}^{(k)}$, où $N_{\rho'}^{(k)}$ est le A_S -sous-module de $M_{\rho'}^{(k)}$ engendré par le sous-groupe M_{ρ', l_1} .

(2) En considérant les différents cas possibles [(a), (b) ou (c) de la remarque précédente] pour k et \bar{k} , on constate le fait suivant : Soit $B_{\rho'}^{(k)}$ une base, formée d'éléments homogènes, de $M_{\rho'}^{(k)}$. Alors il existe une base $B_{\varepsilon\rho'}^{(\bar{k})}$, formée d'éléments homogènes, de $M_{\varepsilon\rho'}^{(\bar{k})}$ telle que la matrice de $[\theta_{\rho'}^{(k, \bar{k})}]$ soit du type indiqué suivant le cas :

$\text{rang}_{A_S} M_{\rho'}^{(k)}$	$\text{rang}_{A_S} M_{\varepsilon\rho'}^{(\bar{k})}$	matrice de $[\theta_{\rho'}^{(k, \bar{k})}]$
1	1	$[f]$
1	2	$\begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$
2	1	$[f \ 0]$
2	2	$\begin{bmatrix} f & h \\ 0 & g \end{bmatrix}$

où f (resp. g , resp. h) est un élément de A_S , déterminé à un facteur scalaire près, ou nul.

(3) Posons $I_S = \{i \mid A_{S,i} \neq 0\}$. Soit $l \in I_{\rho'}(k)$, et $\bar{l} \in I_{\rho'}(\bar{k})$. Considérons un élément m (resp. \bar{m}) homogène de degré l (resp. \bar{l}) appartenant à une base homogène $B_{\rho'}^{(k)}$ (resp. $B_{\varepsilon\rho'}^{(\bar{k})}$) de $M_{\rho'}^{(k)}$ (resp. de $M_{\varepsilon\rho'}^{(\bar{k})}$).

Alors, la composante de $\theta_{\rho'}(m)$ suivant \bar{m} est un polynôme de la forme $\sum_{(a,b)} \alpha_{a,b} Y^a Z^b$, où a, b est un couple d'entiers positifs ou nuls parcourant l'ensemble :

$$\{(a, b) \mid a \deg Y + b \deg Z = l - \bar{l} + \deg X\},$$

et où les $\alpha_{a,b}$ sont des constantes.

On en déduit donc, que si $(l - \bar{l} + \deg X) \notin I_S$, alors ce polynôme est nul. De plus, sauf pour quelques représentations dans les cas D_n et E_7 , les polynômes en question sont des monômes.

(4) Soit ρ une représentation autoduale de G , et $\rho' \oplus \varepsilon\rho' = \text{Ind } \rho$ la décomposition de $\text{Ind } \rho$ en représentations irréductibles de G' (prop. 3.4). Alors la décomposition $M_{\rho} = M_{\rho} \oplus M_{\varepsilon\rho'}$ (cor. 3.6) induit une décomposition antidiagonale de θ_{ρ} , i. e. de la forme :

$$\begin{bmatrix} 0 & [\theta_{\varepsilon\rho'}] \\ [\theta_{\rho}] & 0 \end{bmatrix}$$

(5) Soient ρ une représentation irréductible de G et $(x_i)_{i \in I}$ une famille finie d'éléments homogènes de A_V tels que pour tout i , $\mathbb{C}[G]x_i$ soit un sous- G -module simple de A_V de type ρ et tels que pour tout couple (i, j) il existe un $\mathbb{C}[G]$ -isomorphisme $u_{i,j} : \mathbb{C}[G]x_i \rightarrow \mathbb{C}[G]x_j$ qui envoie x_i sur x_j . Alors il existe une famille $\langle x_i \rangle$, $i \in I$, d'éléments homogènes de $M_{\rho} = \text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(E_{\rho}, A_V)$ tels que :

$$(a) \langle x_i \rangle (E_{\rho}) = \mathbb{C}[G]x_i.$$

(b) Le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathbb{C}[G] x_i \\
 & \nearrow \langle \lambda_i \rangle & \downarrow u_{ij} \\
 E_\rho & & \mathbb{C}[G] x_j \\
 & \searrow \langle \lambda_j \rangle &
 \end{array}$$

Une telle famille est déterminée au choix d'un scalaire non nul près. La même remarque est valable si on remplace G par G' .

(6) Étant donné que X^2 est un invariant du groupe G' , on a une relation de la forme :

$$(\star) \quad X^2 = f(Y, Z)$$

où f est un polynôme à coefficients constants. On retrouve ainsi le fait que les points singuliers considérés sont des points doubles. Soient $\langle 1 \rangle, \langle X \rangle$ les éléments de la base de M_{ρ_0} (comme A_G -module) déterminés par le polynôme constant 1 et par X respectivement. Avec cette base, la matrice de θ_{ρ_0} est la suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & f(Y, Z) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(7) Comme conséquence de la proposition 4.4 (i), on a l'égalité :

$$(\theta_\rho)^2 = f(Y, Z) \cdot \text{Id}_{M_\rho},$$

où $f(Y, Z)$ provient de l'équation (\star) de la remarque précédente. En particulier, si ρ est autoduale [voir remarque (4)], on a :

$$\begin{aligned}
 [\theta_\rho][\theta_{\varepsilon\rho}] &= f(Y, Z) \text{Id}_{M_{\varepsilon\rho}}, \\
 [\theta_{\varepsilon\rho}][\theta_\rho] &= f(Y, Z) \text{Id}_{M_\rho}.
 \end{aligned}$$

(8) Soient ρ_i, ρ_j et ρ_k trois représentations de G telles qu'on ait $\rho_i \otimes \rho_j = \rho_k$. Alors on a l'inclusion $M_{\rho_i} \cdot M_{\rho_j} \subset M_{\rho_k}$, où $M_{\rho_i} \cdot M_{\rho_j}$ désigne le produit symétrique de M_{ρ_i} avec M_{ρ_j} . Par suite, si m_i (resp. m_j) est un élément de M_{ρ_i} (resp. de M_{ρ_j}) on a les égalités :

$$\theta_{\rho_k}(m_i \cdot m_j) = (\theta_{\rho_i}(m_i)) \cdot m_j = m_i \cdot (\theta_{\rho_j}(m_j)).$$

5.5. CALCUL DE LA RÉOLUTION G -ÉQUIVARIANTE DE A_V (PROP. 4.4). — On utilisera la notation du paragraphe 3.7 pour les représentations. Les matrices données dans la liste suivante sont associées à des bases dont les éléments sont ordonnés par degrés croissants (voir table 5.3), pour chaque module M_ρ . Les calculs sont effectués en utilisant les remarques 5.4.4. Pour chaque matrice on donne ses coordonnées en précisant la valeur du facteur constant seulement dans les cas où cette information est utile pour la suite, i. e. si la coordonnée en question n'est pas un monôme, ou si la représentation n'est pas autoduale; dans les autres cas on indique par \star un coefficient constant non nul.

5.5.1. *Type A_n ($n \geq 1$).* – Dans ce cas il est plus facile de faire un calcul explicite.

Soit G le sous-groupe de $SL(2, \mathbb{C})$ engendré par $g = \begin{bmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{bmatrix}$, où $\xi = e^{2i\pi/(n+1)}$.

Dans l'algèbre $A_V = \mathbb{C}[x, y]$ les polynômes $Y = x^{n+1} + y^{n+1}$ et $Z = xy$ engendrent A_S , et le jacobien de Y et Z est égal (à un facteur scalaire près) à $(x^{n+1} - y^{n+1})$.

Pour simplifier les calculs, on considère les invariants de A_V pour l'action de G , définis par :

$$\bar{X} = x^{n+1}, \quad \bar{Y} = y^{n+1}, \quad \bar{Z} = Z = xy.$$

On notera que \bar{X} et \bar{Y} ne sont pas des invariants sous G' et qu'on a $X = \bar{X} - \bar{Y}$ à un facteur près.

Notons ρ_j ($1 \leq j \leq n$) la représentation irréductible (à isomorphisme près) dont le caractère en g vaut :

$$\chi_{\rho_j}(g) = \xi^j.$$

Posons $s_1(j) = \langle x^j \rangle$, $s_2(j) = \langle y^{n+1-j} \rangle$; ils forment une base de M_{ρ_j} [cf. remarque (5) de 5.4.4], $1 \leq j \leq n$.

Alors on a les relations :

$$(R) \quad \begin{cases} \bar{Y} s_1(j) = \bar{Z}^j s_2(j) \\ \bar{Z}^{(n+1-j)} s_1(j) = \bar{X} s_2(j) \end{cases} \quad (1 \leq j \leq n).$$

La relation $\bar{X}\bar{Y} = \bar{Z}^{(n+1)}$, qui n'est autre chose que l'équation, en termes de \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} , de la singularité quotient, détermine avec les relations (R) la résolution de A_V (comme $A_S[G]$ -module) de la proposition 4.4.

5.5.2. *Type D_n ($n \geq 4$).* – Dans ce cas aussi on peut faire les calculs explicitement, en considérant le groupe diédral binaire G engendré par :

$$g = \begin{bmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \xi = e^{2i\pi/2(n-2)} \quad \text{et par} \quad \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Soient $Y = x^{2(n-2)} + (-1)^n y^{2(n-2)}$, $Z = x^2 y^2$ deux générateurs de A_S , et notons X le polynôme $xy(x^{2(n-2)} + (-1)^{n-1} y^{2(n-2)})$, qui est égal au jacobien de Y et Z à un facteur scalaire près. On détermine une base de M_{ρ} , $\rho \in \text{Irr}(G)$, en utilisant le cas cyclique (5.5.1) et le fait que G contient le sous-groupe distingué cyclique d'ordre $2(n-2)$ engendré par g . Avec les notations du paragraphe 3.7 pour les représentations de G on trouve :

(a) ρ_1 :

$$[\theta_{\rho_1}] = \begin{bmatrix} 0 & Y^2 + 4(-1)^{(n-1)} Z^{(n-2)} \\ Z & 0 \end{bmatrix}.$$

[Avec les bases de M_{ρ_1} et M_{ρ_1} respectivement : $\langle xy \rangle$, $\langle x^{2n-4} + (-1)^{n-1} y^{2n-4} \rangle$].

(b) ρ_j , $2 \leq j \leq n-2$: j pair :

$$[\theta_{\rho_j}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \star YZ & \star Z^{(n-1-j/2)} \\ 0 & 0 & \star Z^{j/2} & \star Y \\ \star Y & \star Z^{n-1-j/2} & 0 & 0 \\ \star Z^{j-2} & \star YZ & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Avec les bases :

de $M_{\rho_j} : \langle x^{j-1} \rangle, \langle xy^{2n-j-2} \rangle$;de $M_{\varepsilon\rho_j} : \langle x^j y \rangle, \langle y^{2n-j-3} \rangle$). j impair :

$$[\theta_{\rho_j}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \star YZ & \star Z^{(n-1-(j-1)/2)} \\ 0 & 0 & \star Z^{(j+1)/2} & \star YZ \\ \star Y & \star Z^{(n-2-(j-1)/2)} & 0 & 0 \\ \star Z^{(j-1)/2} & \star Y & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Avec les bases :

de $M_{\rho_j} : \langle x^{j-1} \rangle, \langle y^{2n-j-3} \rangle$;de $M_{\varepsilon\rho_j} : \langle x^j y \rangle, \langle xy^{2n-j-2} \rangle$).(c) ρ_{n-1} : n pair :

$$[\theta_{\rho_{n-1}}] = \begin{bmatrix} 0 & Y + 2Z^{(n-2)/2} \\ YZ - 2Z^{n/2} & 0 \end{bmatrix}$$

(Avec les bases :

de $M_{\rho_{n-1}} : \langle xy(x^{n-2} + (-1)^{n-1}y^{n-2}) \rangle$;de $M_{\varepsilon\rho_{n-1}} : \langle x^{n-2} + (-1)^j y^{n-2} \rangle$). n impair :

$$[\theta_{\rho_{n-1}}] = \begin{bmatrix} YZ & -2Z^{(n-1)/2} \\ 2Z^{(n-1)/2} & Y \end{bmatrix}$$

(même base).

(d) ρ_n : n pair :

$$[\theta_{\rho_n}] = \begin{bmatrix} 0 & Y - 2Z^{(n-2)/2} \\ YZ + 2Z^{n/2} & 0 \end{bmatrix}$$

(Avec les bases :

de $M_{\rho_n} : \langle xy(x^{n+2} + (-1)^n y^{n-2}) \rangle$;de $M_{\varepsilon\rho_n} : \langle x^{n-2} + (-1)^{n-1} y^{n-2} \rangle$).

n impair :

$$[\theta_{\rho_n}] = \begin{bmatrix} YZ & 2Z^{(n-1)/2} \\ -2Z^{(n-1)/2} & Y \end{bmatrix}$$

(même base).

5.5.3. Type E_6

Quitte à multiplier X, Y, Z par des facteurs scalaires, on peut normaliser l'équation de S de sorte qu'on ait :

$$X^2 = Y^3 + Z^4.$$

Les représentations ρ_1 et ρ_2 sont autoduales. On peut choisir des bases ordonnées par ordre ascendant des degrés telles que les matrices soient :

$$\begin{aligned} [\theta_{\rho_1}] &= \begin{bmatrix} \star Y & \star Z^3 \\ \star Z & \star Y^2 \end{bmatrix}, & [\theta_{\rho_1^*}] &= \begin{bmatrix} \star Y^2 & \star Z^3 \\ \star Z & \star Y \end{bmatrix}, \\ [\theta_{\rho_2}] &= \begin{bmatrix} \star Y & 0 & \star Z^2 \\ \star Z & \star Y & 0 \\ 0 & \star Z & \star Y \end{bmatrix}, & [\theta_{\rho_2^*}] &= \begin{bmatrix} \star Y^2 & \star Z^3 & \star YZ^2 \\ \star YZ & \star Y^2 & \star Z^3 \\ \star Z^2 & \star YZ & \star Y^2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

Pour les représentations $\rho_3, \rho_3^*, \rho_4, \rho_4^*$ on trouve :

$$\begin{aligned} [\theta_{\rho_3}] &= \begin{bmatrix} \alpha Z^2 & 0 & Y^2 & 0 \\ 0 & \alpha Z^2 & \beta YZ & Y^2 \\ Y & 0 & -\alpha Z^2 & 0 \\ -\beta Z & Y & 0 & -\alpha Z^2 \end{bmatrix}, \\ [\theta_{\rho_3^*}] &= \begin{bmatrix} -\alpha Z^2 & 0 & Y^2 & 0 \\ 0 & -\alpha Z^2 & \beta YZ & Y^2 \\ Y & 0 & \alpha Z^2 & 0 \\ -\beta Z & Y & 0 & \alpha Z^2 \end{bmatrix}, \\ [\theta_{\rho_4}] &= \begin{bmatrix} \alpha Z^2 & Y^2 \\ Y & -\alpha Z^2 \end{bmatrix}, & [\theta_{\rho_4^*}] &= \begin{bmatrix} -\alpha Z^2 & Y^2 \\ Y & \alpha Z^2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

où α et β sont deux constantes non nulles, $\alpha^2 = 1$ (on peut déterminer la valeur de β , mais c'est inutile pour la suite).

En fait le choix $\alpha = 1$ (ou $\alpha = -1$) précise la représentation de G notée ρ_3 (et par suite détermine les trois autres).

On a utilisé en particulier le fait qu'on a les égalités :

$$\rho_1 \otimes \rho_4 = \rho_3 \quad \text{et} \quad \rho_4 \otimes \rho_4^* = \rho_0$$

et la remarque (8) de 5.4.4.

A titre d'exemple, on montre comment on détermine les matrices dans le cas ρ_1 :

Notons $\{(1), (11)\}$ [resp. $\{(5), (7)\}$] une base de M_{ρ_1} (resp. de $M_{\varepsilon\rho_1}$) dont les éléments sont de degré égal au chiffre indiqué (voir table 5.3.3).

Par des considérations de degrés [remarque (3) de 5.4.4], en considérant les degrés de X, Y, Z (voir § 3.2), les matrices associées aux opérateurs $\theta_{\rho_1} : M_{\rho_1} \rightarrow M_{\varepsilon\rho_1}$ et $\theta_{\varepsilon\rho_1} : M_{\varepsilon\rho_1} \rightarrow M_{\rho_1}$ avec ces bases, sont de la forme :

$$[\theta_{\rho_1}] = \begin{bmatrix} \theta(1) & \theta(11) \\ aY & bZ^3 \\ cZ & dY^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} (5) \\ (7) \end{matrix}, \quad [\theta_{\varepsilon\rho_1}] = \begin{bmatrix} \theta(5) & \theta(7) \\ eY^2 & fZ^3 \\ gZ & hY \end{bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (11) \end{matrix}$$

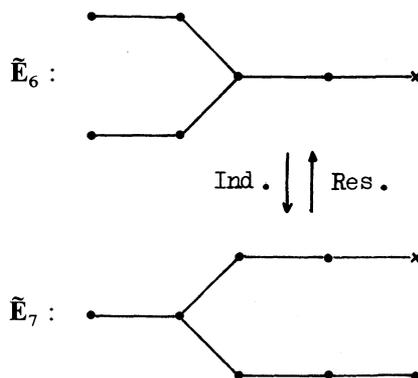
où a, b, \dots, h sont des coefficients constants. Or ces matrices doivent satisfaire les égalités :

$$[\theta_{\rho_1}][\theta_{\varepsilon\rho_1}] = (Y^3 + Z^4) \text{Id}_{M_{\varepsilon\rho_1}} \quad \text{et} \quad [\theta_{\varepsilon\rho_1}][\theta_{\rho_1}] = (Y^3 + Z^4) \text{Id}_{M_{\rho_1}}$$

[remarque (7) de 5.4.4], d'où en particulier : $ae = bg = ef = dh = 1$, et par suite tous les coefficients sont non nuls. En fait on peut être plus précis, car en faisant des homothéties sur les éléments des bases, on peut supposer $a = b = c = 1$, d'où $e = f = g = 1$. D'autre part on a aussi $1 + h = af + bh = 0$, d'où $h = -1$ et par suite $d = -1$:

$$\begin{bmatrix} Y & Z^3 \\ Z & -Y^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} Y^2 & Z^3 \\ Z & -Y \end{bmatrix}.$$

5.5.4. Type E_7 . — Un groupe G de type E_7 contient un sous-groupe distingué d'indice 2 de type E_6 (ceci est dû essentiellement au fait que la réunion des sommets d'un tétraèdre et du tétraèdre dual est l'ensemble de sommets d'un cube). La relation (par induction ou restriction) entre les représentations irréductibles de l'un et de l'autre est exprimée schématiquement par la correspondance de diagrammes suivante :



de sorte que la restriction (resp. l'induction) d'une représentation irréductible du groupe de type E_7 (resp. de type E_6) correspondante à un sommet du diagramme E_7 (resp. de E_6) est la somme de représentations correspondantes aux sommets du diagramme E_6 (resp. E_7) qui se trouvent sur la même verticale.

D'autre part, si on note Y_6, Z_6 (resp. Y_7, Z_7) des générateurs de A_6 et X_6 (resp. X_7) leur jacobien dans le cas E_6 (resp. E_7), on a les égalités (à un facteur constant non nul près) suivantes :

$$X_7 = X_6 Z_6, \quad Y_7 = Z_6^2, \quad Z_7 = Y_6.$$

Ces deux remarques permettent de déduire la résolution équivariante de A_7 pour le type E_7 à partir de celle de type E_6 .

Quitte à multiplier $X = X_7$, $Y = Y_7$ et $Z = Z_7$ par des constantes, on a la relation :

$$X^2 = Y(Y^2 + Z^3).$$

Les matrices trouvées sont les suivantes :

$$\begin{aligned} [\theta_{\rho_1}] &= \begin{bmatrix} \star Y & \star YZ^2 \\ \star Z & \star Y^2 \end{bmatrix}, & [\theta_{\varepsilon\rho_1}] &= \begin{bmatrix} \star Y^2 & \star YZ^2 \\ \star Z & \star Y \end{bmatrix}, \\ [\theta_{\rho_2}] &= \begin{bmatrix} \star Y & 0 & \star YZ \\ \star Z & \star Y & 0 \\ 0 & \star Z & \star Y \end{bmatrix}, & [\theta_{\varepsilon\rho_2}] &= \begin{bmatrix} \star Y^2 & \star YZ^2 & \star Y^2 Z \\ \star YZ & \star Y^2 & \star YZ^2 \\ \star Z^2 & \star YZ & \star Y^2 \end{bmatrix}, \\ [\theta_{\rho_3}] &= \begin{bmatrix} 0 & \star YZ & \star Y^2 & \star YZ^2 \\ \star Y & 0 & \star YZ & \star Y^2 \\ \star Y & \star Z^2 & 0 & 0 \\ \star Z & \star Y & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ [\theta_{\varepsilon\rho_3}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \star Y^2 & \star YZ^2 \\ 0 & 0 & \star YZ & \star Y^2 \\ \star Y & \star Z^2 & 0 & \star YZ \\ \star Z & \star Y & \star Y & 0 \end{bmatrix}, \\ [\theta_{\rho_4}] &= \begin{bmatrix} 0 & \star YZ & \star Y^2 \\ \star Y & 0 & \star YZ \\ \star Z & \star Y & 0 \end{bmatrix}, & [\theta_{\varepsilon\rho_4}] &= \begin{bmatrix} \star YZ & \star Y^2 & \star YZ^2 \\ \star Z^2 & \star YZ & \star Y^2 \\ \star Y & \star Z^2 & \star YZ \end{bmatrix}, \\ [\theta_{\rho_5}] &= \begin{bmatrix} \star Z^2 & \star Y \\ \star Y & \star YZ \end{bmatrix}, & [\theta_{\varepsilon\rho_5}] &= \begin{bmatrix} \star YZ & \star Y^2 \\ \star Y & \star Z^2 \end{bmatrix}, \\ [\theta_{\rho_6}] &= [Y], & [\theta_{\varepsilon\rho_6}] &= [Y^2 + Z^3], \\ [\theta_{\rho_7}] &= \begin{bmatrix} \star Y & \star Z^2 \\ \star Z & \star Y \end{bmatrix}, & [\theta_{\varepsilon\rho_7}] &= \begin{bmatrix} \star Y^2 & \star YZ^2 \\ \star YZ & \star Y^2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

5.5.5. *Type E₈*. — Quitte à multiplier X, Y, Z par des facteurs constants, on a la relation :

$$X^2 = Y^3 + Z^5$$

Les matrices trouvées sont les suivantes :

$$[\theta_{\rho_1}] = \begin{bmatrix} \star Y & \star Z^4 \\ \star Z & \star Y^2 \end{bmatrix}, \quad [\theta_{e\rho_1}] = \begin{bmatrix} \star Y^2 & \star Z^4 \\ \star Z & \star Y \end{bmatrix},$$

$$[\theta_{\rho_2}] = \begin{bmatrix} \star Y & 0 & \star Z^3 \\ \star Z & \star Y & 0 \\ 0 & \star Z & \star Y \end{bmatrix}, \quad [\theta_{e\rho_2}] = \begin{bmatrix} \star Y^2 & \star Z^4 & \star YZ^3 \\ \star YZ & \star Y^2 & \star Z^4 \\ \star Z^2 & \star YZ & \star Y^2 \end{bmatrix},$$

$$[\theta_{\rho_3}] = \begin{bmatrix} \star Z^2 & 0 & \star Y^2 & \star Z^4 \\ \star Y & 0 & \star Z^3 & \star YZ^2 \\ 0 & \star Z^2 & \star YZ & \star Y^2 \\ \star Z & \star Y & 0 & \star Z^3 \end{bmatrix},$$

$$[\theta_{e\rho_3}] = \begin{bmatrix} \star Z^3 & \star Y^2 & \star YZ^2 & \star Z^4 \\ 0 & \star YZ & \star Z^3 & \star Y^2 \\ \star Y & \star Z^2 & 0 & 0 \\ \star Z & 0 & \star Y & \star Z^2 \end{bmatrix},$$

$$[\theta_{\rho_4}] = \begin{bmatrix} \star Z^2 & 0 & 0 & 0 & \star Y^2 \\ \star Y & 0 & 0 & 0 & \star Z^3 \\ 0 & \star Y & \star Z^2 & 0 & 0 \\ \star Z & 0 & \star Y & \star Z^2 & 0 \\ 0 & \star Z & 0 & \star Y & \star Z^2 \end{bmatrix},$$

$$[\theta_{e\rho_4}] = \begin{bmatrix} \star Z^3 & \star Y^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \star Z^3 & \star Y^2 & \star YZ^2 & \star Z^4 \\ 0 & \star YZ & \star Z^3 & \star Y^2 & \star YZ^2 \\ \star Z^2 & 0 & \star YZ & \star Z^3 & \star Y^2 \\ \star Y & \star Z^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\theta_{\rho_5}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \star Z^3 & \star Y^2 & \star YZ^2 & \star Z^4 \\ \star Z^2 & 0 & 0 & \star Z^3 & \star Y^2 & \star YZ^2 \\ 0 & \star Z^2 & 0 & \star YZ & \star Z^3 & \star Y^2 \\ \star Y & \star Z^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \star Y & \star Z^2 & 0 & 0 & 0 \\ \star Z & 0 & \star Y & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\theta_{\varepsilon \rho_5}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \star Y^2 & \star YZ^2 & \star Z^4 \\ 0 & 0 & 0 & \star Z^3 & \star Y^2 & \star YZ^2 \\ 0 & 0 & 0 & \star YZ & \star Z^3 & \star Y^2 \\ \star Y & \star Z^2 & 0 & 0 & 0 & \star Z^3 \\ 0 & \star Y & \star Z^2 & \star Z^2 & 0 & 0 \\ \star Z & 0 & \star Y & 0 & \star Z^2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\theta_{\rho_6}] = \begin{bmatrix} 0 & \star Z^3 & \star Y^2 & \star YZ \\ \star Z^2 & 0 & 0 & \star Y^2 \\ \star Y & 0 & 0 & \star Z^3 \\ \star Z & \star Y & \star Z & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\theta_{\varepsilon \rho_6}] = \begin{bmatrix} 0 & \star Z^3 & \star Y^2 & 0 \\ \star Z^2 & 0 & \star YZ & \star Y^2 \\ \star Y & \star Z^2 & 0 & \star Z^3 \\ 0 & \star Y & \star Z^2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\theta_{\rho_7}] = \begin{bmatrix} \star Z^2 & \star Y^2 \\ \star Y & \star Z^3 \end{bmatrix}, \quad [\theta_{\varepsilon \rho_7}] = \begin{bmatrix} \star Z^3 & \star Y^2 \\ \star Y & \star Z^2 \end{bmatrix},$$

$$[\theta_{\rho_8}] = \begin{bmatrix} \star Y & \star Z^2 & 0 \\ 0 & \star Y & \star Z^2 \\ \star Z & \star Z^2 & \star Y^2 \end{bmatrix}, \quad [\theta_{\varepsilon \rho_8}] = \begin{bmatrix} \star Y^2 & \star YZ^2 & \star Z^4 \\ \star Z^3 & \star Y^2 & \star YZ^2 \\ \star YZ & \star Z^3 & \star Y^2 \end{bmatrix},$$

Les matrices correspondantes aux indices 1, 2, 7 et 8 sont déterminées par des considérations de degrés [remarque (3), § 5.4.4] et par la condition de la remarque (7), § 5.4.4. La même méthode détermine les autres matrices, à quelques coefficients près; et ces derniers sont déterminés par la connaissance des matrices d'indices 1, 2, 7, 8 et la remarque (8) appliquée (par exemple) aux égalités :

$$\rho_1 \otimes \rho_8 = \rho_5, \quad \rho_1 \otimes \rho_7 = \rho_6, \quad \rho_1 \otimes \rho_2 = \rho_1 \oplus \rho_3, \quad \rho_1 \otimes \rho_3 = \rho_2 \oplus \rho_4.$$

6. Désingularisations minimales; démonstration du théorème 2.2

6.1. On dispose de désingularisations minimales explicites $q : \tilde{S} \rightarrow S$ qui sont construites par une procédure de « soudure » à partir de plusieurs copies de \mathbb{C}^2 ([G], voir aussi [H], [L]). Le morphisme q qui contracte le diviseur exceptionnel $D = \bigcup_k d_k$ de \tilde{S} est déterminé essentiellement par la donnée des cycles (à support dans D) de la forme $\sum_n n_k d_k$, qui seront représentés par des diagrammes analogues au graphe dual associé à D , où on remplace le sommet correspondant à une composante irréductible d_k par la multiplicité n_k .

6.1.1. *Type A_n ($n \geq 1$).* — Pour chaque entier k , $0 \leq k \leq n$, soit \mathcal{U}_k une copie de \mathbb{C}^2 de coordonnées (u_k, v_k) . Soit \tilde{S} la surface (lisse) obtenue en identifiant les ouverts $\mathcal{U}_{k-1} - \{u_{k-1} = 0\}$ et $\mathcal{U}_k - \{v_k = 0\}$, $1 \leq k \leq n$, par les recollements :

$$u_{k-1} = 1/v_k, \quad v_{k-1} = u_k v_k^2.$$

Soit d_k la courbe rationnelle lisse définie par $v_{k-1} = 0$ dans \mathcal{U}_{k-1} et par $u_k = 0$ dans \mathcal{U}_k , $1 \leq k \leq n$. Alors chaque d_k a une auto-intersection -2 et le graphe dual associé à $D = \bigcup_k d_k$ est A_n . Notons $C(\bar{X})$, $C(\bar{Y})$, $C(\bar{Z})$ les cycles à support dans D définis par les diagrammes :

$$\begin{aligned} C(\bar{X}) : n(n-1) \dots 1 & \left[\text{i. e. } C(\bar{X}) = \sum_{k=1}^n (n+1-k) d_k \right] \\ C(\bar{Y}) : 1 \ 2 \dots n & \left[\text{i. e. } C(\bar{Y}) = \sum_{k=1}^n k d_k \right] \\ C(\bar{Z}) : 1 \ 1 \dots 1 & \left[\text{i. e. } C(\bar{Z}) = \sum_{k=1}^n d_k \right]. \end{aligned}$$

A l'aide de ces cycles on définit une application $q : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{C}^3$ par :

$$q|_{\mathcal{U}_k}(u_k, v_k) = (u_k^{(n+1-k)} v_k^{(n-k)}, u_k^k v_k^{+1}, u_k v_k), \quad 0 \leq k \leq n.$$

Notons $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ les coordonnées de \mathbb{C}^3 . On vérifie que l'application q est une désingularisation minimale de la surface S (plongée dans \mathbb{C}^3) d'équation : $\bar{X}\bar{Y} = \bar{Z}^{(n+1)}$.

6.1.2. *Type D_n ($n \geq 4$).* — Pour chaque entier k , $0 \leq k \leq n$, soit \mathcal{U}_k une copie de \mathbb{C}^2 de coordonnées (u_k, v_k) . Soit \tilde{S} la surface (lisse) obtenue en identifiant :

les ouverts $\mathcal{U}_{k-1} - \{u_{k-1} = 0\}$ et $\mathcal{U}_k - \{v_k = 0\}$, $1 \leq k \leq n-2$ par les recollements :

$$u_{k-1} = 1/v_k \quad \text{et} \quad v_{k-1} = u_k v_k^2,$$

les ouverts $\mathcal{U}_{n-2} - \{u_{n-2} = 0\}$ et $\mathcal{U}_{n-1} - \{v_{n-1} = 0\}$ par les recollements :

$$u_{n-2} = 1/v_{n-1} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_{n-2} + i = u_{n-1} v_{n-1}^2 & \text{si } n \text{ pair,} \\ v_{n-2} + 1 = u_{n-1} v_{n-1}^2 & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases}$$

les ouverts $\mathcal{U}_{n-2} - \{u_{n-2}=0\}$ et $\mathcal{U}_n - \{v_n=0\}$ par les recollements :

$$u_{n-2} = 1/v_n \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_{n-2} - i = u_n v_n^2 & \text{si } n \text{ pair,} \\ v_{n-2} - 1 = u_n v_n^2 & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases}$$

Soit d_k la courbe rationnelle lisse définie par $v_{k-1} = u_k = 0$, avec $1 \leq k \leq n-2$;

d_{n-1} définie par :

$$u_{n-1} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_{n-2} + i = 0 & \text{si } n \text{ pair,} \\ v_{n-2} + 1 = 0 & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases}$$

d_n définie par :

$$u_n = 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_{n-2} - i = 0 & \text{si } n \text{ pair,} \\ v_{n-2} - 1 = 0 & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases}$$

Alors chaque d_k a une auto-intersection -2 et le graphe dual associé à $D = \bigcup_k d_k$ est \mathbf{D}_n .

Avec les cycles $C(X)$, $C(Y)$, $C(Z)$ définis par :

$n \text{ pair}$	$n \text{ impair}$
$C(X) : 2 \ 3 \dots (n-1) \begin{matrix} n/2 \\ n/2 \end{matrix}$	$2 \ 3 \dots (n-1) \begin{matrix} (n-1)/2 \\ (n-1)/2 \end{matrix}$
$C(Y) : 1 \ 2 \dots (n-2) \begin{matrix} n/2-1 \\ n/2-1 \end{matrix}$	$1 \ 2 \dots (n-2) \begin{matrix} (n-1)/2 \\ (n-1)/2 \end{matrix}$
$C(Z) : 2 \ 2 \dots 2_1^1$	$2 \ 2 \dots 2_1^1$

On définit une application $q : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{C}^3$, dont les restrictions aux ouverts précédents sont données par :

si $0 \leq k \leq n-3$:

$$X = u_k^{k+1} v_k^{k+2} (1 + (-1)^n u_k^{2(n-k-2)} v_k^{2(n-k-3)})^{a_k},$$

$$\text{avec } a_k = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ pair,} \\ (n-1)/2 & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases}$$

$$Y = u_v^k v_k^{k+1} (1 + (-1)^n u_k^{2(n-k-2)} v_k^{2(n-k-3)})^{b_k},$$

$$\text{avec } b_k = \begin{cases} n/2 - 1 & \text{si } n \text{ pair,} \\ (n-1)/2 & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases}$$

$$Z = u_k^2 v_k^2 (1 + (-1)^n u_k^{2(n-k-2)} v_k^{2(n-k-3)}).$$

$$X = \begin{cases} u_{n-2}^{n-1} (1 + v_{n-2}^2)^{n/2} & (\text{si } n \text{ pair}), \\ u_{n-2}^{n-1} v_{n-2} (v_{n-2}^2 - 1)^{(n-1)/2} & (\text{si } n \text{ impair}), \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} u_{n-2}^{n-2} v_{n-2} (1 + v_{n-2}^2)^{n/2-1} & (\text{si } n \text{ pair}), \\ u_{n-2}^{n-2} (v_{n-2}^2 - 1)^{(n-1)/2} & (\text{si } n \text{ impair}), \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} u_{n-2}^2 (1 + v_{n-2}^2) & (\text{si } n \text{ pair}), \\ u_{n-2}^2 (v_{n-2}^2 - 1) & (\text{si } n \text{ impair}), \end{cases}$$

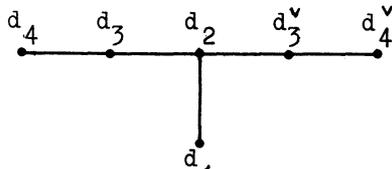
$$\begin{aligned}
 X &= \begin{cases} [u_{n-1}(u_{n-1}v_{n-1}^2 - 2i)]^{n/2} v_{n-1} & \text{si } n \text{ pair,} \\ [u_{n-1}(u_{n-1}v_{n-1}^2 - 2)]^{(n-1)/2} (u_{n-1}v_{n-1}^2 - 1) & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases} \\
 Y &= \begin{cases} [u_{n-1}(u_{n-1}v_{n-1}^2 - 2i)]^{n/2-1} (u_{n-1}v_{n-1}^2 - i) & \text{si } n \text{ pair,} \\ [u_{n-1}(u_{n-1}v_{n-1}^2 - 2)]^{(n-1)/2} v_{n-1} & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases} \\
 Z &= \begin{cases} u_{n-1}(u_{n-1}v_{n-1}^2 - 2i) & \text{si } n \text{ pair,} \\ u_{n-1}(u_{n-1}v_{n-1}^2 - 2) & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases} \\
 \hline
 X &= \begin{cases} [u_n(u_n v_n^2 + 2i)]^{n/2} v_n & \text{si } n \text{ pair,} \\ [u_n(u_n v_n^2 + 2)]^{(n-1)/2} (u_n v_n^2 + 1) & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases} \\
 Y &= \begin{cases} [u_n(u_n v_n^2 + 2i)]^{n/2-1} (u_n v_n^2 + i) & \text{si } n \text{ pair,} \\ [u_n(u_n v_n^2 + 2)]^{(n-1)/2} & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases} \\
 Z &= \begin{cases} u_n(u_n v_n^2 + 2i) & \text{si } n \text{ pair,} \\ u_n(u_n v_n^2 + 2) & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

L'application q est une désingularisation minimale de la surface S (plongée dans \mathbb{C}^3) d'équation $X^2 = Z(Y^2 + Z^{n-2})$.

6.1.3. Type E_6 . — Soient $\mathcal{U}_k, 0 \leq k \leq 4, \tilde{\mathcal{U}}_3, \tilde{\mathcal{U}}_4$ des copies de \mathbb{C}^2 de coordonnée $(u_k, v_k), 0 \leq k \leq 4, (u_3, v_3), (u_4, v_4)$, respectivement. On considère la surface \tilde{S} (lisse) (resp. la famille des courbes rationnelles lisses d de \tilde{S}) définie par les recollements (resp. par les équations) :

$$\begin{aligned}
 u_1 &= u_0^2 v_0, & v_1 &= 1/u_0, & d_1 &: u_1 = v_0 = 0, \\
 u_2 &= u_0 v_0^2, & v_2 &= 1/v_0, & d_2 &: u_2 = u_0 = 0, \\
 u_3 &= u_0^2 (v_0 + 1), & v_3 &= 1/u_0, & d_3 &: u_3 = v_0 + 1 = 0, \\
 \tilde{u}_3 &= u_0^2 (v_0 - 1), & \tilde{v}_3 &= 1/u_0, & \tilde{d}_3 &: \tilde{u}_3 = v_0 - 1 = 0, \\
 u_4 &= u_3^2 v_3, & v_4 &= 1/u_3, & d_4 &: u_4 = v_3 = 0, \\
 \tilde{u}_4 &= u_3^2 \tilde{v}_3, & \tilde{v}_4 &= 1/\tilde{u}_3, & \tilde{d}_4 &: \tilde{u}_4 = \tilde{v}_3 = 0.
 \end{aligned}$$

Chacune de ces courbes rationnelles a une auto-intersection -2 , et le graphe dual associé à leur réunion est E_6 :



A l'aide des cycles définis par les diagrammes suivants :

$$\begin{aligned}
 C(X) : & \quad 2 \ 4 \ 6 \ 4 \ 2, & C(Y) : & \quad 2 \ 3 \ 4 \ 3 \ 2, & C(Z) : & \quad 1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 1 \\
 & \quad \quad \quad 3 & & \quad \quad \quad 2 & & \quad \quad \quad 2
 \end{aligned}$$

on définit une application $q : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{C}^3$ dont les restrictions aux ouverts précédents sont

$$\begin{aligned} Z &= u_0 v_0^2 (u_0^5 v_0^4 + 1)^3 = u_1^2 v_1^3 (u_1^4 v_1^3 + 1)^3 = u_2^3 v_2^4 (u_2^3 v_2^2 + 1)^3 = u_3^4 v_3^5 (u_3^2 v_3 + 1)^3 \\ &= u_4^5 v_4^6 (u_4 + 1)^3 = u_5^6 v_5^4 (v_5 + 1)^3 = u_6^4 v_6^2 (u_6 v_6^2 + 1)^3 = u_7^2 (u_7^2 v_7^3 + 1)^3 \\ &= u_8^3 (u_8 v_8 - 1)^4. \end{aligned}$$

L'application q est une désingularisation minimale de la surface S (plongée dans \mathbb{C}^3) d'équation $X^2 = Y^3 + Z^5$.

6.2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.2

6.2.1. *Démonstration de (i) : plan de la démonstration.* — Pour tout $\rho \in \text{Irr}(G)$, considérons le fibré \mathcal{F}_ρ (défini en paragraphe 2.7). On a $(\text{rg } \mathcal{F}_\rho, c_1(\mathcal{F}_\rho)) = \pi(\rho)$ (prop. 1.2, cor. 2.9).

Nous allons montrer, cas par cas, qu'il existe un et un seul $d_\rho \in \text{Irr}(D)$ tel que $\deg(\mathcal{F}_\rho|_{d_\rho}) = 1$ et $\deg(\mathcal{F}_\rho|_d) = 0$ pour $d \neq d_\rho$, $d \in \text{Irr}(D)$. Par inspection on vérifiera que $\rho \mapsto d_\rho$ est bijective et que $(d_{\rho_i}, d_{\rho_j}) = a_{ij}$ pour $\rho_i \neq \rho_j$. On aura donc $c_1(\mathcal{F}_\rho) = b_{d_\rho}$ ce qui achèvera la démonstration de (i).

Le fibré \mathcal{F}_ρ s'obtient en annulant la torsion de $q^* \mathcal{M}_\rho$, torsion qui est à support dans D . On a une résolution (induite par celle de 4.6) :

$$\mathcal{M}_\rho \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}} \mathcal{O}_{\mathcal{F}} \xrightarrow{T_\rho^-} \mathcal{M}_\rho \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}} \mathcal{O}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{M}_\rho \rightarrow 0$$

d'où une suite exacte sur $\tilde{\mathcal{F}}$:

$$\mathcal{M}_\rho \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}} \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{F}}} \xrightarrow{\tilde{T}_\rho^-} \mathcal{M}_\rho \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}} \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{F}}} \rightarrow q^* \mathcal{M}_\rho \rightarrow 0$$

et par suite un homomorphisme surjectif :

$$\mathcal{M}_\rho \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}} \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{F}}} \xrightarrow{\bar{\omega}_\rho} \mathcal{F}_\rho \rightarrow 0.$$

Les modules \mathcal{M}_ρ sont des $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{F}}}$ -modules libres, et les homomorphismes $T_\rho^- = \theta_\rho \otimes \text{Id}_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{F}}}} - \text{Id}_{\mathcal{M}_\rho} \otimes X$ ont été décrits par des matrices (§ 5.5).

Sur chaque ouvert \mathcal{U}_k de $\tilde{\mathcal{F}}$ on va décrire un sous-module libre L_k de $(\mathcal{M}_\rho \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}} \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{F}}})|_{\mathcal{U}_k}$ tel que la projection $\bar{\omega}_\rho|_{\mathcal{U}_k}$ induise un isomorphisme de L_k sur L_k sur $\mathcal{F}_\rho|_{\mathcal{U}_k}$.

Le $c_1(\mathcal{F}_\rho)$ s'obtient alors en examinant les diviseurs sur D des matrices de changement de base de L_k à $L_{k'}$, sur $\mathcal{U}_k \cap \mathcal{U}_{k'}$. Comme on connaît explicitement les matrices décrivant T_ρ^- et l'application $q|_{\mathcal{U}_k} : \mathcal{U}_k \rightarrow \mathcal{S}$, le calcul est purement mécanique. On se bornera donc à traiter l'exemple de \mathbf{A}_n et l'exemple de la représentation ρ_5 de \mathbf{E}_8 (correspondant au sommet central de \mathbf{E}_8).

6.2.2. *Démonstration de (i), type \mathbf{A}_n ($n \geq 1$).* — Soit j un entier, $1 \leq j \leq n$. En vue de la définition de $q|_{\mathcal{U}_k}$ (voir § 6.1.1) on a $q^* \bar{Z}^j|_{\mathcal{U}_k} = u_k^j v_k^j$, $q^* \bar{Y}|_{\mathcal{U}_k} = u_k^k v_k^{k+1}$, $0 \leq k \leq n$. Par

conséquent, si $k \geq j$, $q^* \bar{Z}^j|_{\mathcal{U}_k}$ divise $q^* \bar{Y}|_{\mathcal{U}_k}$, et si $k < j$, $q^* \bar{Y}|_{\mathcal{U}_k}$ divise $q^* \bar{Z}^j|_{\mathcal{U}_k}$; et par suite le $\mathcal{O}_{\mathcal{U}_k}$ -module $\mathcal{F}_{\rho_j}|_{\mathcal{U}_k}$ est isomorphe au module libre de rang 1, L_k , engendré par :

$$\begin{aligned} s_1(j) & \text{ si } k \geq j, \\ s_2(j) & \text{ si } k < j \end{aligned}$$

(voir § 5.5.1).

On a donc $\deg \mathcal{F}_{\rho_j}|_{d_k} = 0$ si $k \neq j$, $1 \leq k \leq n$, car les changements de base sur $\mathcal{U}_{k-1} \cap \mathcal{U}_k$ sont triviaux, et $\deg \mathcal{F}_{\rho_j}|_{d_i} = 1$, car le changement de base sur $\mathcal{U}_{j-1} \cap \mathcal{U}_j$ est : $s_2(j) = v_j s_1(j)$. Par suite $d_{\rho_j} = d_j$, $1 \leq j \leq n$, et $(d_i \cdot d_j) = a_{ij}$, $1 \leq i \neq j \leq n$, d'où (i).

6.2.3. Cas ρ_5 , type E_8 . — Avec la décomposition $M_{\rho_5} = M_{\rho_5'} \oplus M_{\epsilon \rho_5'}$, l'homomorphisme $T_{\rho_5}^-$ est de la forme :

$$\begin{bmatrix} [-X \text{Id}_{M_{\rho_5'}}] & [\theta_{\epsilon \rho_5'}] \\ [\theta_{\rho_5'}] & [-X \text{Id}_{M_{\epsilon \rho_5'}}] \end{bmatrix}$$

où $[\theta_{\rho_5'}]$ et $[\theta_{\epsilon \rho_5'}]$ ont été décrites en paragraphe 5.5.5 avec des bases qu'on notera de la façon suivante : $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6)$ pour $M_{\rho_5'}$ et $(s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{11}, s_{12})$ pour $M_{\epsilon \rho_5'}$, où les s_i , $1 \leq i \leq 12$, sont homogènes de degrés $(5, 9, 13, 17, 21, 25)$ et $(7, 11, 15, 15, 19, 23)$ respectivement (§ 5.3.5).

Nous allons montrer que le $\mathcal{O}_{\mathcal{U}_k}$ -module $\mathcal{F}_{\rho_5}|_{\mathcal{U}_k}$ est isomorphe au module libre de rang 6, L_k , engendré par :

$$\begin{aligned} s_1, s_2, s_3, s_7, s_8, s_9 & \text{ si } 0 \leq k \leq 4, \\ s_1, s_2, s_3, s_7, s_8, s_{10} & \text{ si } 5 \leq k \leq 8. \end{aligned}$$

Notons c_i la colonne correspondante à $T_{\rho_5}^-(s_i)$, $1 \leq i \leq 12$, de la matrice associée à $T_{\rho_5}^-$ avec les bases précédentes. Par abus de notation on écrira, dans ce paragraphe, X, Y, Z , à la place de $q^* X, q^* Y, q^* Z$, respectivement. En vue de la définition du morphisme de désingularisation q (§ 6.1.5) on a :

Sur $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1$: X divise c_4, c_5, c_6, c_{10} , et Y divise c_2, c_3 , d'où on peut éliminer s_4, s_5, s_6, s_{10} et s_{11}, s_{12} respectivement.

Sur $\mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3, \mathcal{U}_4$: X divise c_4, c_5, c_6 , et Y divise c_2, c_3 ; d'où on peut éliminer s_4, s_5, s_6 et s_{11}, s_{12} respectivement. Par ailleurs Z^2 divise c_{10} , donc on peut former une combinaison linéaire de la forme $c_{10}/Z^2 + \star c_5/X$ qui soit divisible par X/Z^2 , d'où on peut éliminer s_{10} .

Sur $\mathcal{U}_5, \mathcal{U}_6$: par les mêmes propriétés de divisibilité que pour $\mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3, \mathcal{U}_4$, on peut éliminer $s_4, s_5, s_6, s_{11}, s_{12}$. Or la combinaison linéaire $c_1/Z^2 + \star c_5/X$ précédente est divisible par Z^3/X , d'où on peut éliminer s_9 .

Sur \mathcal{U}_7 : Z divise c_1, c_7 et Z^2 divise c_2, c_3, c_8, c_9 ; d'où on peut éliminer s_{12}, s_6 et s_9, s_{11}, s_4, s_5 respectivement.

Sur \mathcal{U}_8 : Y divise c_2, c_3, c_8, c_9 et YZ divise c_4 , d'où on peut éliminer s_{11}, s_{12}, s_5, s_6 et s_9 respectivement. Par ailleurs Z^2 divise c_{10} , donc on peut former une combinaison linéaire de la forme $c_{10}/Z^2 + \star c_8/Y$ qui soit divisible par Z^2/Y , d'où on peut éliminer s_9 .

d'où :

$$\pi((c-2)\rho_i) = (0, \sum_{j>0} a_{ij}\rho_j - 2\rho_i).$$

Or l'élément e_{d_i} de $\text{Pic}_D(\tilde{\mathcal{S}})$ s'exprime dans la base $\{b_d\}$ de $\text{Pic}(\tilde{\mathcal{S}})$ de la façon suivante :

$$e_{d_i} = \sum_{j>0} a_{ij}b_{d_j} - 2b_{d_i}$$

où on a d_i à la place de d_{ρ_i} . Par suite de ce qui précède et de la proposition 1.2(iii), on a :

$$\pi((c-2)\rho_i) = [d_{\rho_i}], \quad \forall i > 0,$$

d'où l'assertion (ii).

L'assertion (i) et le fait que $\pi(\rho_0) = (1, 0)$ impliquent (iii). L'assertion (iv) résulte immédiatement de la dernière partie de (ii). L'assertion (v) est conséquence du fait que $R(G)/(2-c)R(G)$ est isomorphe à $\tilde{K}^G(\mathcal{V} - \{0\})$ (voir § 1.5), et du fait que

$$q^{-1} \circ p|_{\mathcal{V} - \{0\}} : \mathcal{V} - \{0\} \rightarrow \tilde{\mathcal{S}} - D$$

est un morphisme étale, ce qui achève la démonstration du théorème.

7. Corollaire : Caractérisation de la désingularisation minimale

Soit \mathcal{V} le germe de \mathbb{C}^2 à l'origine, G un sous-groupe fini de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ qui agit librement sur $\mathcal{V} - \{0\}$; $p : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{S} = \mathcal{V}/G$ le morphisme quotient. Alors la désingularisation minimale $q : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ est le platicateur normal minimal de \mathcal{V} sur \mathcal{S} .

Démonstration. — Soit $\bar{q} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{S}$ le platicateur normal minimal de \mathcal{V} sur \mathcal{S} . En vertu de la proposition 2.4 on sait que $q : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ est un platicateur de \mathcal{V} sur \mathcal{S} , qui de plus est normal car $\tilde{\mathcal{S}}$ est lisse. Par suite, le morphisme q se factorise par \mathcal{P} , i. e. on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{S}} & & \\ \downarrow q & \searrow \sigma & \\ \mathcal{S} & & \mathcal{P} \\ & \nearrow \bar{q} & \end{array}$$

Par minimalité, le morphisme σ est un isomorphisme en dehors du diviseur exceptionnel $D \subset \tilde{\mathcal{S}}$. Nous allons montrer que, en fait, σ est un isomorphisme. S'il ne l'est pas, alors, en vertu de la normalité de \mathcal{P} il contracte un sous-diviseur $D^c \subset D$, i. e. $\sigma(D^c)$ est de dimension zéro. Soit ρ une représentation irréductible de G dans un \mathbb{C} -espace vectoriel E_ρ . Posons $\overline{\mathcal{F}}_\rho = \bar{q}^* \mathcal{M}_\rho / \text{Tors}_{\mathcal{P}}$ où $\mathcal{M}_\rho = \text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(E_\rho, \mathcal{O}_{\mathcal{V}})$; on a :

$$\mathcal{O}_{\mathcal{V}} = \bigoplus_{\rho} (\mathcal{M}_\rho \otimes_{\mathbb{C}} E_\rho) \quad \text{d'où} \quad \overline{\mathcal{F}}_\rho^* \mathcal{O}_{\mathcal{V}} / \text{Tors}_{\mathcal{P}} = \bigoplus_{\rho} (\overline{\mathcal{F}}_\rho \otimes_{\mathbb{C}} E_\rho).$$

Par conséquent, $\overline{\mathcal{F}}_\rho$ est localement libre car \mathcal{P} est un platicateur de \mathcal{V} sur \mathcal{S} . De même, le $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ -module $\mathcal{F}_\rho = q^* \mathcal{M}_\rho / \text{Tors}_{\mathcal{S}}$ est localement libre, et par la commutativité du diagramme précédent on a :

$$\sigma^* \overline{\mathcal{F}}_\rho = \mathcal{F}_\rho.$$

Soit ρ telle que la composante irréductible d_ρ de D (th. 2.2) soit contractée par σ , i. e. telle que $d_\rho \subset D^c$. Alors on a une contradiction, car d'une part la restriction de \mathcal{F}_ρ à d_ρ est non triviale [$\text{car } (c_1(\mathcal{F}_\rho) \cdot d_\rho) = 1$], et d'autre part $\overline{\mathcal{F}}_\rho$ est libre au voisinage du point $\sigma(d_\rho) \in \mathcal{P}$, et par suite $\sigma^* \overline{\mathcal{F}}_\rho$ est trivial au voisinage de d_ρ . Par conséquent D^c est vide et σ est un isomorphisme.

RÉFÉRENCES

- [A] M. ARTIN, *On Isolated Rational Singularities of Surfaces* (Amer. J. Math., 88, 1966, p. 129-136).
- [Bo] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*, chap. IV, V, VI, Hermann, Paris, 1968.
- [Br] E. BRIESKORN, *Rationale Singularitäten Komplexer Flächen* (Inv. Math., 4, 1968, p. 336-358).
- [Ch] C. CHEVALLEY, *Invariants of Finite Groups Generated by Reflections* (Amer. J. Math., Vol. 77, 1955, p. 778-782).
- [Co] A. M. COHEN, *Finite Complex Reflection Groups* (Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 1976, p. 379-436).
- [D] P. DUVAL, *Homographies, Quaternions and Rotations*, Oxford Clarendon Press, 1964.
- [E] EUCLIDE, *Éléments*, Livre XIII, § 18. A, Dover, 1956.
- [G] G. GONZALEZ-SPRINBERG, *Résolution de Nash des points doubles rationnels* (Ann. de l'Inst. Fourier, vol. 32, n° 2, 1982, p. 111-178).
- [G-V] G. GONZALEZ-SPRINBERG et J. L. VERDIER, *Points doubles rationnels et représentations de groupes* (C.R. Acad. Sc., Paris, t. 293, 1981, p. 111-113).
- [Gr] A. GROTHENDIECK, *Éléments de géométrie algébrique IV*, Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.
- [H] F. HIRZBRUCH, *Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen* (Math. Ann., vol. 126, 1953, p. 1-22).
- [K] F. KLEIN, *The Icosahedron and the General 5th Degree Equation*, 1884, Dover reprint 1956.
- [Kn] H. KNORRER, *Lettre* (décembre 1981).
- [L] H. LAUFER, *Normal Two-Dimensional Singularities* (Annals of Math. Studies, n° 71, Princeton, 1971).
- [M] J. MCKAY, *Graphs, Singularities and Finite Groups* (Proc. of Symp. in Pure Math., vol. 37, 1980, p. 183-186).
- [P] PLATON, *Timée*.
- [Se] J.-P. SERRE, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, Paris, 1967.
- [Sl] P. SLODOWY, *Simple Singularities and Simple Algebraic Groups* (Springer Lecture Notes, n° 815, 1980).
- [St] J. STEINBERG, *Subgroups of SU_2 and Dynkin Diagrams*, preprint.
- [S-T] G. C. SHEPARD et J. A. TODD, *Finite Unitary Reflection Groups* (Canad. J. Math., vol. 5, 1953, p. 364-383).

(Manuscrit reçu le 30 avril 1982,
révisé le 25 mars 1983)

G. GONZALEZ-SPRINBERG
Faculté des Sciences de Tours,
Département de Mathématiques
et
École Normale Supérieure,
Centre de Mathématiques,
E.R.A. 589.
J. L. VERDIER
École Normale Supérieure,
Centre de Mathématiques,
E.R.A. 589.