ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JACQUES DÉSARMÉNIEN

Fonctions symétriques associées à des suites classiques de nombres

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 16, nº 2 (1983), p. 271-304

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1983_4_16_2_271_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4e série, t. 16, 1983, p. 271 à 304.

FONCTIONS SYMÉTRIQUES ASSOCIÉES A DES SUITES CLASSIQUES DE NOMBRES

PAR JACQUES DÉSARMÉNIEN

0. Introduction

Le q-dénombrement est désormais une technique combinatoire éprouvée, par exemple dans [27], [14], [10], [25]. Les identités sur les q-analogues de suites classiques de nombres reçoivent ainsi une interprétation géométrique. Les objets sous-jacents sont essentiellement des structures ordonnées, permutations, tableaux de Young. Il n'est donc pas étonnant que nombre de ces identités soient les dégénérescences de formules purement algébriques sur les fonctions symétriques. Ces dégénérescences sont obtenues en remplaçant dans l'algèbre des fonctions symétriques les variables par les puissances successives de l'indéterminée q. Par cette substitution, les fonctions de Schur deviennent des q-dénombrements sur les tableaux de Young ([23], p. 49 et prop. 2.1 ci-dessous). Cette méthode a été utilisée notamment par Stanley [26], Gessel [16], Lascoux et Schützenberger [20].

L'un des buts de cet article est de replacer les derniers travaux de Foulkes ([12], [13]) dans cette optique. Celui-ci avait obtenu des formules inattendues pour les caractères du groupe symétrique associés aux nombres d'Euler et aux polynômes eulériens. Le raffinement des méthodes employées faisait d'autant plus ressortir la simplicité des résultats. En fait nous montrons que ceux-ci proviennent seulement de manipulations de séries génératrices de fonctions symétriques (th. 4.3 et 10.2); ces séries ont la même structure formelle que les séries génératrices des nombres d'Euler et des polynômes eulériens. Le même schéma de manipulations s'applique à d'autres séries (th. 8.1).

Les séries génératrices de fonctions symétriques que nous considérons sont analogues aux séries génératrices étudiées par Kummer. Ce dernier [19] a montré que leur structure formelle détermine le comportement modulo p de leurs coefficients. Le passage des fonctions symétriques à ces derniers se fait en deux étapes : d'abord, par remplacement des variables par les puissances successives de q (ou q-dégénérescence), ce qui donne des q-analogues, puis en faisant $q=1$, ce qui donne des nombres. Une idée naturelle est donc de s'intéresser aux q-analogues, étape intermédiaire entre suites classiques de nombres et fonctions symétriques

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE. — 0012-9593/1983/271/$ 5.00

associées. Plus précisément, nous établissons, pour les q-analogues de suites classiques de nombres, des congruences qui se déduisent des formules pour les caractères précédemment obtenues et qui impliquent à leur tour les congruences de Kummer lorsque $q=1$ (th. 7.3, 9.2 et 10.4).

Les analogues des congruences de Kummer que nous donnons sont des congruences modulo les polynômes cyclotomiques. Ceux-ci peuvent prétendre au titre de q-analogues des nombres premiers : ils sont les diviseurs premiers des q-analogues des nombres entiers et, lorsque $q=1$, ils valent 1 ou un nombre premier. D'autres ont étudié modulo des polynômes cyclotomiques certaines suites de q-analogues. Citons par exemple Carlitz [5] qui a fourni pour des q-nombres de Bernoulli un analogue du théorème de Von Staudt-Clausen et, pour les q-nombres d'Euler, Andrews et Gessel [3], Foata [9], Andrews et Foata [4], qui ont donné certaines congruences modulo des produits de polynômes cyclotomiques. Nous avons nous-même donné un analogue des congruences de Lucas-Kummer pour les q-nombres d'Euler [8], résultat que nous retrouvons dans le présent article comme conséquence des formules de Foulkes pour les caractères associés aux nombres d'Euler.

Les deux premiers paragraphes de cet article constituent les préliminaires. Dans le troisième, nous introduisons un paramètre entier n, donnons des résultats sur des fonctions symétriques qui en découlent ainsi que sur leurs q-dégénérescences : nous définissons le *q-n-dénombrement* des tableaux de Young. Le paragraphe 4 contient la définition des fonctions symétriques d'Euler, leurs séries génératrices et la démonstration des formules de Foulkes pour les caractères associés aux nombres d'Euler. Le paragraphe 5 généralise les résultats du paragraphe 4 aux fonctions symétriques d'Euler à deux indices. Comme conséquence nous obtenons au paragraphe 6 les séries génératrices et les interprétations combinatoires des q-nombres d'Euler à un ou deux indices. Au paragraphe 7 nous trouvons les q-congruences de Kummer pour les q-nombres d'Euler. Le paragraphe 8 est l'étude des fonctions symétriques dont la série génératrice a la structure formelle des séries étudiées par Kummer. On y donne la valeur des caractères du groupe symétrique attachés à ces fonctions symétriques. Le paragraphe 9 est l'étude des q-dégénérescences de ces fonctions symétriques modulo les polynômes cyclotomiques. A titre d'illustration de ces deux derniers paragraphes, nous étudions dans le paragraphe 10 les fonctions symétriques eulériennes, leur série génératrice, les caractères associés et leurs q-dégénérescences, les polynômes eulériens; nous retrouvons ainsi leur série génératrice et leur interprétation combinatoire. Nous achevons sur des q-congruences de Kummer pour les q-polynômes eulériens.

1. Fonctions symétriques

Pour tout ce paragraphe, le lecteur est renvoyé à [23], chap. I.

Soit $X=\{x_1, x_2, \ldots\}$ un ensemble d'indéterminées. Nous supposerons, sauf mention contraire, que X est infini dénombrable, considéré comme limite d'un ensemble fini de cardinal N lorsque N tend vers l'infini. Soit $S_n(X)$ la *fonction symétrique complète* de degré n sur l'ensemble X, c'est-à-dire la somme de tous les monômes *distincts* de degré n en les indéterminées de X. On sait que la $\mathbb{Z}$-algèbre des fonctions symétriques sur X coïncide avec la

$\mathbb{Z}$-algèbre des polynômes en les $S_n(X)$, $n \geqq 1$. Une autre famille fondamentale de fonctions symétriques est celle des *sommes de puissances* $\Psi_k(X) = \sum_i x_i^k$. Cette famille engendre toujours l'algèbre des fonctions symétriques, à condition de remplacer l'anneau de base $\mathbb{Z}$ par le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels.

On pose par convention $S_0(X) = 1$ et $\Psi_0(X) = 0$.

Enfin, nous omettrons d'écrire l'argument X dans les fonctions lorsque aucune ambiguïté ne sera à craindre.

A toute suite finie $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$ d'entiers positifs ou nuls correspond bi-univoquement un *partage* $1^{a_1} 2^{a_2} \ldots p^{a_p}$ constitué de a_1 parts égales à 1, de a_2 parts égales à 2, etc. et que nous noterons également $\mathbf{a}$. L'entier $|\mathbf{a}| = a_1 + 2a_2 + \ldots + p\,a_p$ est le *poids* de $\mathbf{a}$. Posons également $g_{\mathbf{a}} = 1^{a_1} 2^{a_2} \ldots p^{a_p} a_1!\, a_2! \ldots a_p!$ et désignons par $\Psi^{\mathbf{a}}$ le produit $\Psi^{\mathbf{a}} = \Psi_1^{a_1} \Psi_2{}^{a_2} \ldots \Psi_p^{a_p}$.

PROPOSITION 1.1. — *Soit* $S(X)$ *la série formelle* :

$$S(X) = \sum_{n \geqq 0} S_n(X).$$

On a les identités :

$$\text{(i)} \qquad S(X) = \prod_j (1 - x_j)^{-1};$$

$$\text{(ii)} \qquad S(X) = \prod_{k \geqq 1} \exp\left(\frac{1}{k} \Psi_k(X)\right);$$

$$\text{(iii)} \qquad S_n(X) = \sum_{\mathbf{a}} \frac{1}{g_{\mathbf{a}}} \Psi^{\mathbf{a}}(X), \qquad (|\mathbf{a}| = n).$$

L'identité (i) est immédiate; en en prenant le logarithme, on obtient (ii), d'où résulte (iii) par identification des termes de degré n.

Introduisons maintenant quelques notations relatives aux tableaux. Soit $\mathbf{a} = 1^{a_1} 2^{a_2} \ldots p^{a_p}$ un partage de l'entier n. La *forme principale* associée, également notée $\mathbf{a}$, est l'ensemble des couples (i, j) d'entiers tels que :

$$1 \leqq i \leqq p \qquad \text{et} \qquad 1 \leqq j \leqq a_i + a_{i+1} + \ldots + a_p.$$

Le premier indice du couple (i, j) est celui de la colonne dans la représentation de $\mathbf{a}$ comme diagramme de Ferrers. Lorsque $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont deux formes principales avec $\mathbf{b} \subset \mathbf{a}$, on dit que la différence $\mathbf{a}/\mathbf{b}$ est une *forme*; son *poids* est la différence des poids de $\mathbf{a}$ et de $\mathbf{b}$:

$$|\mathbf{a}/\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|.$$

Pour désigner des formes, principales ou non, nous utiliserons souvent des lettres minuscules grecques. Si $\theta = \mathbf{a}/\mathbf{b}$ et $\theta' = \mathbf{a}'/\mathbf{b}$, avec $\mathbf{a}' \subset \mathbf{a}$, on dira que θ' est *incluse* dans θ, et on notera :

$$\theta/\theta' = \mathbf{a}/\mathbf{a}'.$$

Supposons l'alphabet X totalement ordonné, l'ordre étant celui des indices. Un *tableau semi-standard* de forme θ à valeurs dans X est une application $\mathcal{T}$ de θ dans X satisfaisant :

$$\begin{cases} i<i' & \Rightarrow \quad \mathcal{T}(i,j) \leqq \mathcal{T}(i',j), \\ j<j' & \Rightarrow \quad \mathcal{T}(i,j) < \mathcal{T}(i,j'). \end{cases}$$

Exemple. — Le tableau :

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_2 & & \\ & x_1 & x_1 & x_3 & \\ & & & x_2 & x_4 \\ & & & x_1 & x_2 \end{array}$$

est semi-standard de forme $\mathbf{a}/\mathbf{b}$, *avec* $\mathbf{a}=345^2$ *et* $\mathbf{b}=13^2$.

A chaque forme θ est associée une fonction $S_\theta(X)$ des indéterminées, appelée *fonction de Schur*, ainsi définie :

$$S_\theta(X)=\sum_{\mathcal{T}}\Big(\prod_{(i,j)\in\theta} x_{\mathcal{T}(i,j)}\Big),$$

où la somme est sur les tableaux semi-standard $\mathcal{T}$ de forme θ. Cette définition est équivalente à la définition classique comme quotient de deux déterminants [23], p. 42. On montre que la transposition qui échange x_i et x_{i+1} laisse S_θ invariante. Il en résulte que les fonctions de Schur sont des *fonctions symétriques*. Une conséquence de cette symétrie est que l'ordre utilisé sur X peut être pris arbitrairement.

Lorsque θ est la forme principale associée au partage $\mathbf{n}=1^0, 2^0, \ldots, (n-1)^0, n^1$, constitué d'une seule part égale à n, la fonction de Schur S_θ est égale à la fonction symétrique complète S_n.

Les fonctions de Schur sont à coefficients entiers; elles s'écrivent donc comme polynômes en les fonctions symétriques complètes à coefficients entiers. En tenant compte de la proposition 1.1, on obtient la proposition suivante.

PROPOSITION 1.2. — *La décomposition de* S_θ *suivant les sommes de puissances est de la forme :*

$$S_\theta=\sum_{\mathbf{a}}\frac{1}{g_{\mathbf{a}}}\chi^\theta(\mathbf{a})\Psi^{\mathbf{a}}, \qquad (|\mathbf{a}|=|\theta|),$$

où $\chi^\theta(\mathbf{a})$ *est un nombre entier.*

Mentionnons l'importante propriété suivante, que nous n'utiliserons pas par la suite : on peut montrer que χ^θ est un caractère du groupe symétrique $\mathfrak{S}_{|\theta|}$. Lorsque θ est une forme principale, ce caractère est irréductible, et on obtient ainsi une et une seule fois tous les caractères irréductibles du groupe symétrique [21], chap. VI et [23], chap. I, § 7.

Nous aurons ultérieurement besoin d'adjoindre à l'ensemble X un autre ensemble d'indéterminées $Y=\{y_1, y_2, \ldots\}$. Dans ce cas, les fonctions symétriques complètes et les sommes de puissances sur l'ensemble $X \cup Y$ sont simplement :

$$S_n(X \cup Y) = \sum_{0 \leqq i \leqq n} S_i(X) S_{n-i}(Y),$$
$$\Psi_k(X \cup Y) = \Psi_k(X) + \Psi_k(Y).$$

Le cas des fonctions de Schur est plus intéressant.

PROPOSITION 1.3. — *Soit* θ *une forme. On a l'identité* :

$$S_\theta(X \cup Y) = \sum_{\theta'} S_{\theta'}(X) S_{\theta/\theta'}(Y), \qquad (\theta' \subset \theta).$$

En effet, on peut supposer que l'ordre sur $X \cup Y$ est le suivant : ordre naturel sur X et sur Y, et tout élément de Y est plus grand que tout élément de X. Dans un tableau semi-standard de forme θ à valeurs dans $X \cup Y$, les éléments de X occupent une forme θ' incluse dans θ. La proposition est la traduction de cette constatation.

2. Fonctions de Schur et q-dénombrements

Soit θ une forme de poids n. Un *tableau standard* (tableau de Young) de forme θ est une application T de θ dans $[n]=\{1, 2, \ldots, n\}$ satisfaisant :

$$\begin{cases} i<i' \Rightarrow T(i,j)<T(i',j), \\ j<j' \Rightarrow T(i,j)<T(i,j'). \end{cases}$$

Exemple. — Le tableau :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 5 & 6 & & \\ & 2 & 3 & 9 & \\ & & & 7 & 10 \\ & & & 4 & 8 \end{array}$$

est standard, de forme $\mathbf{a}/\mathbf{b}$ *avec* $\mathbf{a}=345^2$ *et* $\mathbf{b}=13^2$.

Lorsque T est un tableau standard et k un élément de $[n]$, notons (i_k, j_k) l'image réciproque de k, définie par $T(i_k, j_k)=k$, c'est-à-dire la *position* de k dans le tableau T. Considérons maintenant l'ensemble :

$$R(T)=\{k \in [n-1] : j_k < j_{k+1}\},$$

appelé *ensemble des reculs* de T. C'est géométriquement l'ensemble des éléments de T dont le successeur se trouve dans une ligne plus élevée. A ce même tableau, associons l'entier :

$$\mathrm{IMAJ}(T)=\sum\{k : k \in R(T)\}.$$

Exemple. — *Dans l'exemple précédent, au tableau* T *sont associés* $R(T)=\{4,8\}$ *et* $IMAJ(T)=4+8=12$.

Soit q une indéterminée. Posons, comme il est d'usage, $(x;q)_n=(1-x)(1-xq)\ldots(1-xq^{n-1})$ pour $n\geqq 1$ et $(x;q)_0=1$ et, pour simplifier, désignons par $1/(1-q)$ l'ensemble $\{1, q, q^2, \ldots\}$ des puissances successives de q; par $S_\theta(1/(1-q))$ on entend donc la fonction de Schur en les indéterminées $1, q, q^2, \ldots$; c'est une série formelle en q.

Notons enfin $f_q(\theta)$ le *q-dénombrement* des tableaux standard de forme θ suivant IMAJ, c'est-à-dire le polynôme :

$$f_q(\theta)=\sum_{T} q^{IMAJ(T)},$$

où la somme est sur les tableaux standard T de forme θ. On a alors la proposition suivante, pour la démonstration de laquelle on est renvoyé à [23], p. 49.

PROPOSITION 2.1. — *Soit* θ *une forme de poids* n. *Le polynôme* $f_q(\theta)$ *est donné par* :

$$f_q(\theta)=(q;q)_n S_\theta\left(\frac{1}{1-q}\right).$$

Exemple. — *Prenons pour* θ. *la forme associée au partage constitué d'une seule part égale à* n. *La fonction de Schur correspondante est la fonction symétrique complète* S_n. *La forme est constituée d'une seule ligne de longueur* n. *Il existe un seul tableau standard de cette forme, à savoir* :

$$T=1\quad 2\quad 3\ldots n.$$

Pour ce tableau, $IMAJ(T)=0$. *Le q-dénombrement donne donc* $f_q(n)=1$; *on en déduit :*

$$S_n\left(\frac{1}{1-q}\right)=\frac{1}{(q;q)_n}.$$

Dans la proposition 1.1, *prenons* $X=u/(1-q)=\{u, uq, uq^2, \ldots\}$. *On obtient :*

$$\sum_{n\geqq 0} S_n\left(\frac{u}{1-q}\right)=\prod_{j\geqq 0}(1-uq^j)^{-1},$$

soit encore, puisque S_n *est homogène de degré* n, *et compte tenu du calcul de* $S_n(1/(1-q))$,

$$\sum_{n\geqq 0}\frac{u^n}{(q;q)_n}=\prod_{j\geqq 0}(1-uq^j)^{-1}.$$

Cette dernière expression, appelée q-exponentielle, est désignée par $e(u,q)$ (*cf.* [2]).

Lorsqu'on fait $q=1$, le q-dénombrement devient le dénombrement au sens usuel. En particulier, en notant $f(\theta)=f_1(\theta)$ le nombre de tableaux standard de forme θ, on a l'expression suivante:

$$f(\theta)=(q;q)_n S_\theta\left(\frac{1}{1-q}\right)\bigg|_{q=1}.$$

Un cas particulièrement intéressant apparaît lorsque la forme θ est un *ruban*, c'est-à-dire lorsque :

$$(i, j)\in\theta \quad \Rightarrow \quad (i+1, j+1)\notin\theta.$$

Exemple. — Des trois formes suivantes, les deux premières sont des rubans, mais non la troisième :

$$\text{(i)} \quad \begin{array}{cccccc} & x & x & x & & \\ & & & x & & \\ & & & x & x & x \end{array} \; ,$$

$$\text{(ii)} \quad \begin{array}{cccccc} x & x & & & & \\ & & x & x & & \\ & & & x & x & x \end{array} \; ,$$

$$\text{(iii)} \quad \begin{array}{cccccc} & x & x & x & & \\ & & x & x & & \\ & & & x & x & x \end{array} \; .$$

Lorsque θ est un ruban, le q-dénombrement des tableaux standard de forme θ suivant IMAJ équivaut au q-dénombrement de certaines permutations.

Étant donnée $\sigma=\sigma_1\,\sigma_2\,\ldots\,\sigma_n$ une permutation de $[n]$, on dit, pour $1\leqq i\leqq n-1$, qu'il y a en i une *montée* (resp. une *descente*) lorsque $\sigma_i<\sigma_{i+1}$ (resp. $\sigma_i>\sigma_{i+1}$). La suite des montées et descentes de σ est une suite de longueur $n-1$, constituée de symboles M ou D en position i selon qu'il y a en i une montée ou une descente. On définit d'autre part un certain nombre de fonctions de σ :

(*a*) le *nombre d'inversions*, $\mathrm{INV}(\sigma)=|\{(i, j) : i<j \text{ et } \sigma_i>\sigma_j\}|$;

(*b*) l'*ensemble des reculs*, $\mathrm{R}(\sigma)=\{i : \sigma_i^{-1}>\sigma_{i+1}^{-1}\}$;

(*c*) l'*indice du major-inverse*, $\mathrm{IMAJ}(\sigma)=\sum\{i : i\in\mathrm{R}(\sigma)\}$.

Étant donné un tableau T dont la forme est un ruban θ, sa lecture de gauche à droite fournit une permutation $\sigma(\mathrm{T})$. La forme θ traduit des contraintes sur la suite des montées et descentes de la permutation associée; de plus, il y a bijection entre les tableaux standard de forme θ et les permutations satisfaisant à ces contraintes. Enfin, les nombres $\mathrm{IMAJ}(\mathrm{T})$ et $\mathrm{IMAJ}(\sigma(\mathrm{T}))$ sont visiblement égaux.

Exemple. — Le tableau T *et la permutation* σ *ci-dessous sont associés de la manière décrite ci-dessus :*

$$\mathrm{T}=\begin{array}{ccccc} 6 & & & & \\ 1 & 4 & & & \\ & & 3 & & \\ & & 2 & 5 & 7 \end{array}\;, \qquad \sigma=6\;\;1\;\;4\;\;3\;\;2\;\;5\;\;7.$$

A tout tableau de même forme que T *correspond une permutation dont la suite des montées et descentes est :*

$$\mathrm{DM} \star \mathrm{DMM},$$

l'étoile $\star$ *pouvant être, selon les cas, une montée ou une descente. Pour* T *et pour* σ *les reculs sont :*

$$\mathrm{R}(\mathrm{T}) = \mathrm{R}(\sigma) = \{2, 3, 5\} \qquad et \qquad \mathrm{IMAJ}(\mathrm{T}) = \mathrm{IMAJ}(\sigma) = 10.$$

Lorsqu'on a affaire avec des tableaux standard, la statistique IMAJ apparaît naturellement, nous l'avons vu. En revanche, la statistique INV est, généralement, la plus simple à utiliser sur les permutations. Le lien entre les deux est établi grâce à la bijection φ utilisée par Foata et Schützenberger [10], qui a les propriétés suivantes :

(*a*) φ est une bijection de $\mathfrak{S}_n$ sur lui-même,

(*b*) les suites de montées et descentes de σ et de $\varphi(\sigma)$ sont identiques,

(*c*) $\mathrm{INV}(\sigma) = \mathrm{IMAJ}(\varphi(\sigma))$.

On en déduit la proposition suivante.

PROPOSITION 2.2. — *Soit* E *l'ensemble des permutations ayant une suite donnée de montées et descentes. Alors les q-dénombrements de* E *suivant* INV *et suivant* IMAJ *sont égaux :*

$$\sum\{q^{\mathrm{INV}(\sigma)} : \sigma \in \mathrm{E}\} = \sum\{q^{\mathrm{IMAJ}(\sigma)} : \sigma \in \mathrm{E}\}.$$

Cette proposition permet d'appliquer des résultats sur les fonctions symétriques aux problèmes de q-dénombrement de permutations suivant INV.

3. Le q-n-dénombrement

Nous allons maintenant introduire deux nouvelles statistiques, sur les tableaux et sur les permutations. La seconde a déjà été introduite dans [8]. Soit θ une forme de poids $m+n$, $m, n \geqq 0$, et T un tableau standard de forme θ. L'*ensemble des n-reculs* de T est l'ensemble :

$$\mathrm{R}_n(\mathrm{T}) = \{k \in [n-1] : j_k < j_{k+1}\} = \mathrm{R}(\mathrm{T}) \cap [n-1].$$

C'est l'ensemble des éléments de T dont le successeur se trouve dans une ligne plus élevée *et vaut au plus n*. A ce même tableau, on associe l'entier $\mathrm{IMAJ}_n(\mathrm{T}) = \sum\{k : k \in \mathrm{R}_n(\mathrm{T})\}$. De la même manière, lorsque σ est une permutation de $[m+n]$, notons $\mathrm{INV}_n(\sigma)$ le nombre $|\{(i, j) : i<j \text{ et } n \geqq \sigma_i > \sigma_j\}|$.

Exemple. — Pour le tableau suivant, dont la forme est de poids 10 *:*

$$\mathrm{T} = \begin{array}{ccccc} 1 & 5 & 6 & & \\ & 2 & 3 & 9 & \\ & & & 7 & 10 \\ & & & 4 & 8 \end{array}$$

on a pour n le choix $0 \leqq n \leqq 10$; *puisque* $R(T)=\{4, 8\}$, *on trouve :*

$$\begin{array}{llll} si & 0 \leqq n \leqq 4, & R_n(T)=\emptyset & et \quad \mathrm{IMAJ}_n(T)=0, \\ si & 5 \leqq n \leqq 8, & R_n(T)=\{4\} & et \quad \mathrm{IMAJ}_n(T)=4, \\ si & 9 \leqq n \leqq 10, & R_n(T)=\{4, 8\} & et \quad \mathrm{IMAJ}_n(T)=12. \end{array}$$

Posons :

$$f_{q,n}(\theta)=\sum_{T} q^{\mathrm{IMAJ}_n(T)},$$

où la somme est sur les tableaux standard de forme θ.

Puisque la valeur de $\mathrm{IMAJ}_n(T)$ ne dépend que des n premiers éléments de T, que ces éléments occupent une forme θ' de poids n incluse dans θ et que sur ce sous-tableau IMAJ et IMAJ_n coïncident, on a la relation :

$$f_{q,n}(\theta)=\sum_{\theta'} f_q(\theta') f(\theta/\theta'), \qquad (\theta' \subset \theta, |\theta'|=n).$$

Plus généralement, soit θ une forme de poids s; posons alors, pour $0 \leqq n \leqq s$:

$$S_{\theta,n}(X)=\sum_{\theta'} S_{\theta'}(X) f(\theta/\theta'), \qquad (\theta' \subset \theta \text{ et } |\theta'|=n).$$

En appliquant la proposition 2.1 à $S_{\theta'}(X)$, on obtient la proposition suivante, entre $f_{q,n}(\theta)$ et $S_{\theta,n}$, qui généralise la proposition 2.1.

PROPOSITION 3.1. — *Soient* θ *une forme de poids* s *et* n *un entier,* $0 \leqq n \leqq s$. *Le polynôme* $f_{q,n}(\theta)$ *est donné par :*

$$f_{q,n}(\theta)=(q; q)_n S_{\theta,n}\left(\frac{1}{1-q}\right).$$

Le lien entre les fonctions $S_\theta(X)$ et $S_{\theta,n}(X)$ est établi au moyen de la proposition 1.3. Désignons en effet par $v/(1-r)$ l'ensemble $\{v, vr, vr^2, \ldots\}$, où v et r sont des indéterminées. La proposition 1.3 donne :

$$S_\theta\left(X \cup \frac{v}{1-r}\right)=\sum_{\theta'} S_{\theta'}(X) S_{\theta/\theta'}\left(\frac{v}{1-r}\right), \qquad (\theta' \subset \theta),$$

soit encore, en ordonnant suivant les puissances de v :

$$S_\theta\left(X \cup \frac{v}{1-r}\right)=\sum_{0 \leqq n \leqq s} v^{s-n} \sum_{\theta'} S_{\theta'}(X) S_{\theta/\theta'}\left(\frac{1}{1-r}\right), \qquad (\theta' \subset \theta \text{ et } |\theta'|=n).$$

En utilisant la proposition 2.1, il vient :

$$S_\theta\left(X \cup \frac{v}{1-r}\right)=\sum_{0 \leqq n \leqq s} \frac{v^{s-n}}{(r; r)_{s-n}} \sum_{\theta'} S_{\theta'}(X) f_r(\theta/\theta'), \qquad (\theta' \subset \theta \text{ et } |\theta'|=n).$$

Dans le second membre de cette dernière expression figure $S_{\theta, n}(X)$, à condition de faire $r=1$. Cependant, dans le dénominateur $(r; r)_{s-n}$ intervient le facteur $1-r$ à la puissance $s-n$. Ce problème disparaît si l'on remplace v par $v(1-r)$ *avant* de faire $r=1$. En effet :

$$\left.\frac{(r; r)_{s-n}}{(1-r)^{s-n}}\right|_{r=1}=(s-n)!$$

Notons donc $S_\theta(X \cup v^*)$ la fonction de X et de v obtenue à partir de $S_\theta(X \cup v/(1-r))$ en remplaçant v par $v(1-r)$, puis en faisant $r=1$.

THÉORÈME 3.2. — *Soit* θ *une forme de poids* s.

(i) *Les fonctions* $S_{\theta, n}(X)$, $0 \leqq n \leqq s$ *sont données par :*

$$S_\theta(X \cup v^*)=\sum_{0 \leqq n \leqq s} \frac{v^{s-n}}{(s-n)!} S_{\theta, n}(X).$$

(ii) *Les polynômes* $f_{q, n}(\theta)$, $0 \leqq n \leqq s$ *sont donnés par :*

$$S_\theta\left(\frac{u}{1-q} \cup v^*\right)=\sum_{0 \leqq n \leqq s} \frac{u^n v^{s-n}}{(q; q)_n (s-n)!} f_{q, n}(\theta).$$

La partie (i) résulte du calcul fait de $S_\theta(X \cup v/(1-r))$; la partie (ii) se déduit de la partie (i) en faisant $X=u/(1-q)$, et en appliquant la proposition 3.1.

Exemple. — Le théorème 3.2 *ne permet un calcul effectif des polynômes* $f_{q, n}(\theta)$ *que lorsque la fonction* $S_\theta(X)$ *est connue sous une forme explicite simple. C'est par exemple le cas lorsqu'on considère la fonction symétrique complète* $S_s(X)$. *D'après la proposition* 1.1, *on a en effet :*

$$\sum_{s \geqq 0} S_s(X)=\prod_j (1-x_j)^{-1},$$

donc :

$$\sum_{s \geqq 0} S_n\left(X \cup \frac{v}{1-r}\right)=\prod_j (1-x_j)^{-1} \prod_{i \geqq 0} (1-vr^i)^{-1},$$

ce qui peut s'écrire :

$$S\left(X \cup \frac{v}{1-r}\right)=S(X)\, S\left(\frac{v}{1-r}\right)=S(X)\, e(v, r),$$

en utilisant la notation de « q-exponentielle » de l'exemple suivant la proposition 2.1. *Toujours d'après cet exemple, on a :*

$$S\left(\frac{v}{1-r}\right)=\sum_{n \geqq 0} \frac{v^n}{(r; r)_n}.$$

En remplaçant v *par* $v(1-r)$ *puis en faisant* $r=1$, *on obtient :*

$$S(v^*)=\sum_{n \geqq 0} \frac{v^n}{n!}=\exp v.$$

On obtient finalement :

$$S(X \cup v^*) = S(X) \exp v.$$

De par sa définition, la fonction $S_{\theta, n}(X)$ *est de degré n. Lorsque la forme* θ *est égale à s, on trouve* $S_{s, n}(X)$ *comme coefficient de degré n de* $v^{s-n}/(s-n)\,!$ *dans l'expression de* $S(X \cup v^*)$, *c'est-à-dire :*

$$S_{s, n}(X) = S_n(X).$$

En appliquant la proposition 3.1 *et la valeur de* $S_n(1/(1-q)) = 1/(q;\, q)_n$, *on a :*

$$f_{q, n}(s) = 1.$$

Ceci était évident a priori. *En effet, il existe un seul tableau* T *à une seule ligne de longueur* s, *et pour ce tableau, on a* $\mathrm{IMAJ}_n(T) = 0$, *d'où l'identité* $f_{q, n}(s) = 1$.

La statistique INV_n n'est pas développée ici. Reprenons en effet la relation $f_{q, n}(\theta) = \sum_{\theta'} f_q(\theta') f(\theta/\theta')$, $(\theta' \subset \theta$ et $|\theta'| = n)$, et supposons que θ soit un ruban. La forme θ' est alors un ruban. D'après la proposition 2.2, le polynôme $f_q(\theta')$ est le q-dénombrement suivant INV des permutations de forme associée à θ'. Il s'ensuit que $f_{q, n}(\theta)$ est le q-dénombrement suivant INV_n des permutations de forme associée à θ.

4. Fonctions symétriques d'Euler

Les nombres d'Euler (nombres tangents et sécants) sont les coefficients des développements en série de Taylor de la tangente et de la sécante :

$$\sum_{n \geqq 0} E_n \frac{u^n}{n\,!} = \tan u + \sec u.$$

On sait depuis Désiré André que E_n est le nombre de permutations *alternantes* de $[n]$, c'est-à-dire dont la suite des montées et descentes est MDMD... (*cf.* [1]). Le q-dénombrement de ces permutations, suivant IMAJ ou INV, fournit des q-analogues des nombres d'Euler. Ces q-analogues ont été largement étudiés (*cf.* par exemple [27], [3], [4], [16], [9], [25]). Nous allons pour notre part étudier les fonctions de Schur dont la forme correspond aux permutations alternantes.

Pour tout entier $n \geqq 0$, définissons la *forme escalier* de longueur n :

$$]n[= 2 \quad 3 \quad 4 \ldots \left(\frac{n}{2}+1\right) \Big/ 1 \quad 2 \ldots \left(\frac{n}{2}-1\right) \text{ si } n \text{ est pair;}$$

$$]n[= 2 \quad 3 \quad 4 \ldots \left(\frac{n-1}{2}\right) \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \Big/ 1 \quad 2 \ldots \left(\frac{n-1}{2}\right) \text{ si } n \text{ est impair.}$$

Exemple:

$$]8[=2\quad 3\quad 4\quad 5/1\quad 2\quad 3=\begin{array}{ccccc} x & x & & & \\ & x & x & & \\ & & x & x & \\ & & & x & x \end{array}$$

$$]9[=2\quad 3\quad 4\quad 5^2/1\quad 2\quad 3\quad 4=\begin{array}{ccccc} x & x & & & \\ & x & x & & \\ & & x & x & \\ & & & x & x \\ & & & & x \end{array}$$

La donnée d'un tableau standard de forme $]n[$ est équivalente à celle d'une permutation alternante de $[n]$.

On appelle *n-ième fonction symétrique d'Euler* la fonction de Schur $S_{]n[}$.

Lorsque α est un scalaire et X un ensemble d'indéterminées, posons :

$$S(\alpha X)=\prod_j (1-\alpha\, x_j)^{-1},$$

et définissons des analogues des fonctions trigonométriques :

$$\mathrm{SIN}(X)=\frac{S(iX)-S(-iX)}{2i},$$

$$\mathrm{COS}(X)=\frac{S(iX)+S(-iX)}{2},$$

$$\mathrm{TAN}(X)=\frac{\mathrm{SIN}(X)}{\mathrm{COS}(X)},$$

$$\mathrm{SEC}(X)=\frac{1}{\mathrm{COS}(X)}.$$

Lorsque X est vide, on a $S(\alpha\, X)=1$; par conséquent :

$$\mathrm{SIN}(\emptyset)=\mathrm{TAN}(\emptyset)=0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{COS}(\emptyset)=\mathrm{SEC}(\emptyset)=1.$$

Soit x_k un élément de X, et soit $X'=X-\{x_k\}$.

PROPOSITION 4.1. — *Les seules solutions des équations :*

$$\begin{cases} F(X)-F(X')=x_k(1+F(X)\,F(X')), \\ G(X)-G(X')=x_k\,F(X)\,G(X'), \end{cases}$$

avec les conditions initiales $F(\emptyset)=0$ *et* $G(\emptyset)=1$ *sont* :

$$F(X)=\mathrm{TAN}(X) \qquad et \qquad G(X)=\mathrm{SEC}(X).$$

Lorsque X est un ensemble fini, on le vérifie par récurrence sur le nombre d'éléments de X, et on passe à la limite pour X infini.

On peut noter l'analogie de la proposition 4.1 avec les équations différentielles définissant $\tan x$ et $\sec x$:

$$\begin{cases} (\tan x)'=1+(\tan x)^2, \\ (\sec x)'=\sec x \tan x, \end{cases}$$

avec les conditions initiales $\tan 0=0$ et $\sec 0=1$.

PROPOSITION 4.2. — *Les fonctions symétriques d'Euler sont données par* :

$$\sum_{m\geqq 0} S_{]2m+1[}(X)=\mathrm{TAN}(X),$$

$$\sum_{m\geqq 0} S_{]2m[}(X)=\mathrm{SEC}(X).$$

Cette proposition, énoncée dans [16], ne semble pas avoir été publiée. C'est pourquoi nous en donnons une démonstration.

Soit $\mathcal{T}$ un tableau semi-standard de forme $]n[$, $n\geqq 2$, et supposons $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Lors de la lecture de $\mathcal{T}$ ligne après ligne, notons la position du *dernier* x_k rencontré. Deux cas se présentent :

(i) il n'y a pas de x_k;

(ii) le dernier x_k se trouve dans la ligne j, $1\leqq j\leqq n/2$.

Dans ce dernier cas, la lettre x_k se trouve en bout de ligne. Ces deux éventualités fournissent les deux termes de la récurrence suivante, où $X'=\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\}$:

$$S_{]n[}(X)=S_{]n[}(X')+x_k \sum_{1\leqq j\leqq n/2} S_{]2j-1[}(X)\, S_{]n-2j[}(X'),$$

lorsque $n\geqq 2$.

Si l'on pose $F(X)=\sum_{m\geqq 0} S_{]2m+1[}(X)$ et $G(X)=\sum_{m\geqq 0} S_{]2m[}(X)$, en tenant compte de $S_{]0[}(X)=1$ et de $S_{]1[}(X)=S_1(X)$, la relation de récurrence donne :

$$F(X)-S_1(X)=F(X')-S_1(X')+x_k F(X)\, F(X')$$

et :

$$G(X)-1=G(X')-1+x_k F(X)\, G(X'),$$

soit encore :

$$\begin{cases} F(X)-F(X')=x_k(1+F(X)\, F(X')), \\ G(X)-G(X')=x_k F(X)\, G(X'). \end{cases}$$

Puisque, de toute évidence, on a $F(\emptyset)=0$ et $G(\emptyset)=1$, la proposition 4.1 permet de conclure.

Le résultat suivant est dû à Foulkes [12]. Ce dernier le démontrait en utilisant la règle de Frobenius-Littlewood pour le calcul des caractères du groupe symétrique, ainsi que sa « χ-λ-ρ structure » (*cf.* [21], p. 142 et [11]). Nous allons ici l'obtenir à partir des fonctions génératrices de la proposition 4.2.

Rappelons (prop. 1.2) que la décomposition de $S_{]n[}$ suivant les sommes de puissances est de la forme :

$$S_{]n[}=\sum_{\mathbf{a}} \frac{1}{g_{\mathbf{a}}}\chi^{]n[}(\mathbf{a})\Psi^{\mathbf{a}},\ (|\mathbf{a}|=n).$$

Au partage $\mathbf{a}=1^{a_1}2^{a_2}\dots p^{a_p}$ de l'entier n, on fait correspondre $\mathbf{a}(0)=a_4+a_8+\dots$, nombre de parts multiples de 4; de même, $\mathbf{a}(1)=a_1+a_5+\dots$, $\mathbf{a}(2)=a_2+a_6+\dots$ et $\mathbf{a}(3)=a_3+a_7+\dots$

THÉORÈME 4.3. — *Les coefficients de la décomposition des fonctions symétriques d'Euler suivant les sommes de puissances sont donnés par :*

si n est impair :

$$\chi^{]n[}(\mathbf{a})=0 \qquad \textit{quand} \quad \mathbf{a}(0)+\mathbf{a}(2)\neq 0,$$

$$\chi^{]n[}(\mathbf{a})=(-1)^{\mathbf{a}(3)}E_{\mathbf{a}(1)+\mathbf{a}(3)}\ \textit{sinon;}$$

si n est pair :

$$\chi^{]n[}(\mathbf{a})=(-1)^{\mathbf{a}(0)+\mathbf{a}(3)}E_{\mathbf{a}(1)+\mathbf{a}(3)}.$$

Dans tous les cas, $|\mathbf{a}|=n$.

D'après la proposition 4.2 et les définitions de TAN(X) et SEC(X), on a :

$$\sum_{m\geq 0} S_{]2m+1[}(X)=\frac{1}{i}\,\frac{S(iX)-S(-iX)}{S(iX)+S(-iX)},$$

$$\sum_{m\geq 0} S_{]2m[}(X)=\frac{2}{S(iX)+S(-iX)}.$$

A partir de la proposition 1.1, on peut écrire :

$$S(\pm iX)=\exp\left(\sum_{k\geq 1}\frac{(\pm i)^k}{k}\Psi_k(X)\right).$$

La recherche des parties réelle et imaginaire de la somme $\sum_{k\geq 1} i^k/k\,\Psi_k(X)$ amène à définir les séries U et V ci-dessous où l'on écrit, par abréviation, $(k\equiv r)$ pour ($k\geq 1$ et $k\equiv r$ modulo 4). Posons donc :

$$U=\sum_{k\equiv 2}\frac{1}{k}\Psi_k-\sum_{k\equiv 0}\frac{1}{k}\Psi_k,$$

$$V=\sum_{k\equiv 1}\frac{1}{k}\Psi_k-\sum_{k\equiv 3}\frac{1}{k}\Psi_k.$$

On a alors :

$$S(iX)=\exp(-U)\exp(iV),$$
$$S(-iX)=\exp(-U)\exp(-iV).$$

On en déduit les expressions suivantes des fonctions génératrices des fonctions symétriques d'Euler :

$$\sum_{m\geqq 0} S_{]2m+1[}=\tan(V),$$

$$\sum_{m\geqq 0} S_{]2m[}=\exp(U)\sec(V).$$

On utilise alors les développements :

$$\tan(V)=\sum_{p\geqq 0}\frac{E_{2p+1}}{(2p+1)!}V^{2p+1}$$

et :

$$\sec(V)=\sum_{p\geqq 0}\frac{E_{2p}}{(2p)!}V^{2p},$$

ainsi que les identités, faciles à vérifier:

$$V^l=\left(\sum_{k\equiv 1}\frac{1}{k}\Psi_k-\sum_{k\equiv 3}\frac{1}{k}\Psi_k\right)^l=\sum_{\mathbf{a}}\frac{l!}{g_{\mathbf{a}}}(-1)^{\mathbf{a}(3)}\Psi^{\mathbf{a}},$$
$$(\mathbf{a}(0)+\mathbf{a}(2)=0,\ \mathbf{a}(1)+\mathbf{a}(3)=l),$$
$$U^l=\left(\sum_{k\equiv 2}\frac{1}{k}\Psi_k-\sum_{k\equiv 0}\frac{1}{k}\Psi_k\right)^l=\sum_{\mathbf{a}}\frac{l!}{g_{\mathbf{a}}}(-1)^{\mathbf{a}(0)}\Psi^{\mathbf{a}},$$
$$(\mathbf{a}(1)+\mathbf{a}(3)=0,\ \mathbf{a}(0)+\mathbf{a}(2)=l),$$

pour obtenir finalement :

$$\sum_{m\geqq 0} S_{]2m+1[}=\sum_{\mathbf{a}}\frac{(-1)^{\mathbf{a}(3)}}{g_{\mathbf{a}}}E_{\mathbf{a}(1)+\mathbf{a}(3)}\Psi^{\mathbf{a}},$$
$$(\mathbf{a}(0)+\mathbf{a}(2)=0,\ \mathbf{a}(1)+\mathbf{a}(3)\ \text{impair}),$$
$$\sum_{m\geqq 0} S_{]2m[}=\sum_{\mathbf{a}}\frac{(-1)^{\mathbf{a}(0)+\mathbf{a}(3)}}{g_{\mathbf{a}}}E_{\mathbf{a}(1)+\mathbf{a}(3)}\Psi^{\mathbf{a}},$$
$$(\mathbf{a}(1)+\mathbf{a}(3)\ \text{pair}).$$

Le théorème 4.3 s'en déduit immédiatement. On remarque que les conditions sur la parité de $\mathbf{a}(1)+\mathbf{a}(3)$ peuvent être remplacées par la condition de l'énoncé sur le poids de **a**.

5. Fonctions symétriques d'Euler à deux indices

Dans le paragraphe 3, nous avons défini des fonctions symétriques $S_{\theta,n}(X)$ lorsque $0\leqq n\leqq|\theta|$. Nous allons maintenant particulariser ces résultats au cas où θ est la forme escalier de longueur s.

On appelle *fonction symétrique d'Euler à deux indices* la fonction $S_{]s[,\, n}(X)$, où $0 \leqq n \leqq s$. Pour des questions de commodité d'écriture, nous adopterons la notation suivante : soit $m = s - n \geqq 0$;

on pose :

$$S_{]m,\, n[}(X) = S_{]m+n[,\, n}(X), \qquad m,\, n \geqq 0.$$

Le théorème 3.2 permet d'exprimer $S_{]m,\, n[}$ en fonction de $S_{]s[}$:

$$S_{]s[}(X \cup v^*) = \sum_{0 \leqq n \leqq s} \frac{v^{s-n}}{(s-n)\,!}\, S_{]s-n,\, n[}(X).$$

Cette relation et la proposition 4.2 fournissent les fonctions génératrices des fonctions symétriques d'Euler à deux indices :

$$\sum_{m,\, n \geqq 0} S_{]m,\, n[}(X) \frac{v^m}{m\,!} = \mathrm{TAN}(X \cup v^*), \qquad (m+n \text{ impair}),$$

$$\sum_{m,\, n \geqq 0} S_{]m,\, n[}(X) \frac{v^m}{m\,!} = \mathrm{SEC}(X \cup v^*), \qquad (m+n \text{ pair}).$$

Revenons à l'expression développée de $\mathrm{TAN}(X \cup v^*)$:

$$\mathrm{TAN}(X \cup v^*) = \frac{1}{i}\, \frac{S(iX \cup iv^*) - S(-iX \cup -iv^*)}{S(iX \cup iv^*) + S(-iX \cup -iv^*)}.$$

On peut alors utiliser le calcul fait après le théorème 3.2, dont le résultat est :

$$S(X \cup v^*) = S(X) \exp v.$$

On en déduit :

$$\mathrm{TAN}(X \cup v^*) = \frac{1}{i}\, \frac{S(iX) \exp(iv) - S(-iX) \exp(-iv)}{S(iX) \exp(iv) + S(-iX) \exp(-iv)}.$$

Il est facile de vérifier que cette dernière relation est équivalente à :

$$\mathrm{TAN}(X \cup v^*) = \frac{\mathrm{TAN}(X) + \tan v}{1 - \mathrm{TAN}(X) \tan v}.$$

On peut noter l'analogie de cette dernière formule avec la formule classique donnant $\tan(a+b)$.

On procède de même pour $\mathrm{SEC}(X \cup v^*)$ et l'on obtient les fonctions génératrices suivantes.

PROPOSITION 5.1. — *Les fonctions symétriques d'Euler à deux indices sont données par :*

$$\sum_{m,\, n \geqq 0} S_{]m,\, n[}(X) \frac{v^m}{m\,!} = \frac{\mathrm{TAN}(X) + \tan v}{1 - \mathrm{TAN}(X) \tan v}, \qquad (m+n \textit{ impair}),$$

$$\sum_{m,\, n \geqq 0} S_{]m,\, n[}(X) \frac{v^m}{m\,!} = \frac{\mathrm{SEC}(X) \sec v}{1 - \mathrm{TAN}(X) \tan v}, \qquad (m+n \textit{ pair}).$$

On a pour les fonctions symétriques d'Euler à deux indices des formules analogues à celles du théorème 4.3. Définissons en effet $\chi^{]m,\, n[}$ par :

$$S_{]m,\, n[} = \sum_{\mathbf{a}} \frac{1}{g_{\mathbf{a}}} \chi^{]m,\, n[}(\mathbf{a}) \Psi^{\mathbf{a}}.$$

La valeur de $\chi^{]m,\, n[}(\mathbf{a})$ peut être calculée en utilisant les fonctions génératrices de la proposition 5.1, de façon analogue à ce qui a été fait pour le théorème 4.3.

THÉORÈME 5.2. — *Les coefficients de la décomposition des fonctions symétriques d'Euler à deux indices suivant les sommes de puissances sont donnés par :*

si $m+n$ est impair :

$$\chi^{]m,\, n[}(\mathbf{a}) = 0 \qquad \textit{quand} \quad \mathbf{a}(0) + \mathbf{a}(2) \neq 0$$

$$\chi^{]m,\, n[}(\mathbf{a}) = (-1)^{\mathbf{a}(3)} E_{m+\mathbf{a}(1)+\mathbf{a}(3)} \textit{ sinon;}$$

si $m+n$ est pair :

$$\chi^{]m,\, n[}(\mathbf{a}) = (-1)^{\mathbf{a}(0)+\mathbf{a}(3)} E_{m+\mathbf{a}(1)+\mathbf{a}(3)}.$$

Dans tous les cas, $|\mathbf{a}| = n$.

6. Les q-nombres d'Euler

Le *q-nombre d'Euler* $E_n(q)$ est le q-dénombrement des permutations alternantes de $[n]$ suivant IMAJ ou INV, ce qui est équivalent (prop. 2.2). C'est également le q-dénombrement suivant IMAJ des tableaux standard dont la forme est l'escalier $]n[$, ce que nous avons noté $f_q(]n[)$.

Rappelons la définition de la q-exponentielle, introduite au paragraphe 1 :

$$e(u, q) = S\left(\frac{u}{1-q}\right) = \prod_{j \geqq 0} (1 - uq^j)^{-1} = \sum_{n \geqq 0} \frac{u^n}{(q;\, q)_n}.$$

Les q-analogues des fonctions trigonométriques semblent avoir été introduites pour la première fois par Jackson [17]. Posons donc :

$$\mathrm{SIN}(u, q) = \frac{1}{2i}(e(iu, q) - e(-iu, q)),$$

$$\mathrm{COS}(u, q) = \frac{1}{2}(e(iu, q) + e(-iu, q)),$$

$$\mathrm{TAN}(u, q) = \sin(u, q)/\cos(u, q),$$

$$\mathrm{SEC}(u, q) = 1/\cos(u, q).$$

PROPOSITION 6.1. — (i) *Les q-nombres d'Euler sont donnés par :*

$$E_n(q)=(q;\, q)_n\, S_{]n[}\left(\frac{1}{1-q}\right).$$

(ii) *Leur fonction génératrice est :*

$$\sum_{m\geqq 0} E_{2m+1}(q)\frac{u^{2m+1}}{(q;\, q)_{2m+1}}=\mathrm{TAN}(u,\, q);$$

$$\sum_{m\geqq 0} E_{2m}(q)\frac{u^{2m}}{(q;\, q)_{2m}}=\mathrm{SEC}(u,\, q).$$

La première partie vient de la proposition 2.1 et la seconde de la proposition 4.2, en prenant comme indéterminées $X=1/(1-q)$.

Soit maintenant la forme escalier de longueur $m+n$, et $f_{q,\,n}(]m+n[)$ le q-dénombrement des tableaux standard de cette forme suivant IMAJ_n. C'est également le q-dénombrement des permutations alternantes de $[m+n]$ suivant IMAJ_n ou INV_n. Pour cette dernière définition, voir [8]. Appelons *q-nombre d'Euler à deux indices* le polynôme :

$$E_{m,\,n}(q)=f_{q,\,n}(]m+n[).$$

Ces polynômes ont des fonctions génératrices mixtes. Posons :

$$\mathrm{TAN}(v;\, u,\, q)=\frac{\mathrm{TAN}(u,\, q)+\tan v}{1-\mathrm{TAN}(u,\, q)\tan v},$$

$$\mathrm{SEC}(v;\, u,\, q)=\frac{\mathrm{SEC}(u,\, q)\sec v}{1-\mathrm{TAN}(u,\, q)\tan v}.$$

PROPOSITION 6.2. — (i) *Les q-nombres d'Euler à deux indices sont donnés par :*

$$E_{m,\,n}(q)=(q;\, q)_n\, S_{]m,\,n[}\left(\frac{1}{1-q}\right).$$

(ii) *Leur fonction génératrice est :*

$$\sum_{m,\,n\geqq 0} E_{m,\,n}(q)\frac{v^m u^n}{m\,!\,(q;\, q)_n}=\mathrm{TAN}(v;\, u,\, q), \qquad (m+n \textit{ impair});$$

$$\sum_{m,\,n\geqq 0} E_{m,\,n}(q)\frac{v^m u^n}{m\,!\,(q;\, q)_n}=\mathrm{SEC}(v;\, u,\, q), \qquad (m+n \textit{ pair}).$$

La première partie résulte de la proposition 3.1. En combinant ce résultat et la proposition 5.1, on obtient les fonctions génératrices.

7. Congruences de Kummer pour les q-nombres d'Euler

Kummer [19] puis Lucas [22] ont montré que les nombres d'Euler satisfont, entre autres, les congruences suivantes :

(*a*) *les nombres d'indice impair* (*nombres tangents*) *sont pairs;*

(*b*) *les nombres d'indice pair* (*nombres sécants*) *sont impairs;*

(*c*) *la suite* E_n, $n \geqq 1$ *est périodique modulo p premier impair; la période est* $p-1$ *ou* $2(p-1)$ *selon que* $p \equiv 1$ *ou* 3 *modulo* 4.

Sur ce sujet, on peut également consulter [18] et [24], p. 270.

Dans [8], les q-nombres d'Euler ont été étudiés modulo un polynôme cyclotomique. L'étude y est faite à l'aide de relations de récurrence qui peuvent se déduire des fonctions génératrices établies au paragraphe 6.

Nous allons ici établir ces congruences (th. 7.3 ci-dessous) à l'aide des résultats des paragraphes 4 et 5, plus précisément des théorèmes 4.3 et 5.2. En effet, au partage $\mathbf{a}=1^{a_1}2^{a_2}\ldots$ de n, associons :

$$T_{\mathbf{a}}(q)=(q;\, q)_n/\prod_j (1-q^j)^{a_j}.$$

On constate aisément (par exemple par récurrence sur le nombre de parts distinctes de $\mathbf{a}$) que $T_{\mathbf{a}}(q)$ est un polynôme de degré $n(n-1)/2$.

D'autre part, on peut aussi écrire :

$$T_{\mathbf{a}}(q)=(q;\, q)_n\, \Psi^{\mathbf{a}}\left(\frac{1}{1-q}\right).$$

En utilisant les propositions 1.2 et 2.1 on a la relation :

$$f_q(\theta)=\sum_{\mathbf{a}} \frac{1}{g_{\mathbf{a}}}\chi^{\theta}(\mathbf{a})\, T_{\mathbf{a}}(q).$$

En se restreignant aux formes principales, les relations d'orthogonalité des caractères permettent d'écrire :

$$T_{\mathbf{a}}(q)=\sum_{\theta} \chi^{\theta}(\mathbf{a})\, f_q(\theta), \qquad (\theta \text{ forme principale}).$$

La partie (i) de la proposition 6.1 et le théorème 4.3 pour les q-nombres d'Euler, la partie (i) de la proposition 6.2 et le théorème 5.2 pour les q-nombres d'Euler à deux indices donnent des relations entre ces polynômes et les polynômes $T_{\mathbf{a}}(q)$.

PROPOSITION 7.1. — *Les polynômes* $E_n(q)$ *et* $E_{m,\,n}(q)$ *vérifient :*

$$E_n(q)=\sum_{\mathbf{a}} \frac{1}{g_{\mathbf{a}}}\, \chi^{]n[}(\mathbf{a})\, T_{\mathbf{a}}(q),$$

$$E_{m,\,n}(q)=\sum_{\mathbf{a}} \frac{1}{g_{\mathbf{a}}}\, \chi^{]m,\, n[}(\mathbf{a})\, T_{\mathbf{a}}(q),$$

où $\chi^{]n[}$ *et* $\chi^{]m,\,n[}$ *sont donnés par les théorèmes* 4.3 *et* 5.2 *respectivement.*

Notons Φ_k le k-ième polynôme cyclotomique, dont les racines sont les racines primitives k-ièmes de l'unité si $k>1$, et $\Phi_1=1-q$.

L'étude modulo Φ_k des q-nombres d'Euler résulte de la proposition 7.1 et de la constatation que les polynômes $T_{\mathbf{a}}(q)$ sont aisés à étudier modulo Φ_k. Plus précisément, on peut vérifier la proposition suivante en donnant comme valeur à q une racine primitive k-ième de l'unité dans $T_{\mathbf{a}}(q)$ (*cf.* [8]).

PROPOSITION 7.2. — *Soit* $\mathbf{a}=1^{a_1}2^{a_2}\ldots$ *un partage de* n; *soit* $n=ks+t$, $0\leqq t\leqq k-1$, *la division de* n *par* k; *on a les congruences suivantes modulo* Φ_k :

si $a_k\neq s$, *alors* $T_{\mathbf{a}}(q)\equiv 0$,

si $a_k=s$, *notons* $\mathbf{a}'$ *le partage de* t *obtenu en enlevant de* $\mathbf{a}$ *les* s *parts égales à* k, *alors* $T_{\mathbf{a}}(q)\equiv k^s s\,!\; T_{\mathbf{a}'}(q)$.

Exemple. — *Prenons* $k=3$ *et* $n=5=3+2$. *Les seuls partages* $\mathbf{a}$ *de* 5 *tels que* $T_{\mathbf{a}}(q)\not\equiv 0$ *modulo* Φ_3 *seront ceux où* $a_3=s=1$. *On a donc* $T_{1^2 3}(q)\equiv 3\,T_{1^2}(q)$ *et* $T_{23}(q)\equiv 3\,T_2(q)$ *modulo* $1+q+q^2=\Phi_3$.

THÉORÈME 7.3 (q-congruences de Kummer pour les q-nombres d'Euler). — *Soient* m, k, a *et* b *des entiers*, $m, b\geqq 0, k, a\geqq 1$; *les polynômes* $E_{m,\,ka+b}(q)$ *vérifient les congruences suivantes modulo* Φ_k :

lorsque k *est pair* :

si $m+ka+b$ *est impair, alors* $E_{m,\,ka+b}(q)\equiv 0$,

si $m+ka+b$ *est pair, alors* $E_{m,\,ka+b}(q)\equiv(-1)^{(k+2)\,a/2}\,E_{m,\,b}(q)$;

lorsque k *est impair, alors* $E_{m,\,ka+b}(q)\equiv(-1)^{(k-1)\,a/2}\,E_{m+a,\,b}(q)$.

Faisons $m=0$ dans le théorème précédent. Puisque $E_{0,\,n}(q)=E_n(q)$, q-nombre d'Euler, on obtient des congruences pour les q-nombres d'Euler. D'autre part, on constate aisément qu'en faisant $q=1$ lorsque k est un nombre premier, on retrouve les congruences classiques de Kummer.

Démonstration du théorème 7.3. — Posons $n=ka+b=ks+t$, où $0\leqq t\leqq k-1$; on a $1\leqq a\leqq s$. Partons de la proposition 7.1 :

$$E_{m,\,n}(q)=\sum_{\mathbf{a}}\frac{1}{g_{\mathbf{a}}}\,\chi^{]m,\,n[}(\mathbf{a})\;T_{\mathbf{a}}(q),\qquad (|\mathbf{a}|=n)$$

et prenons cette identité modulo Φ_k. On peut appliquer la proposition 7.2. En remarquant que $g_{\mathbf{a}}=k^s s\,!\;g_{\mathbf{a}'}$, on trouve :

$$E_{m,\,n}(q)\equiv\sum_{\mathbf{a}'}\frac{1}{g_{\mathbf{a}'}}\,\chi^{]m,\,n[}(\mathbf{a})\;T_{\mathbf{a}'}(q),\qquad (|\mathbf{a}'|=t).$$

Le théorème 5.2 nous donne la valeur de $\chi^{]m,\,n[}$.

Lorsque k *est pair*;

alors :

$$\mathbf{a}(1)=\mathbf{a}'(1)\quad\text{et}\quad\mathbf{a}(3)=\mathbf{a}'(3)\ \text{d'une part,}$$

$$\mathbf{a}(0)+\mathbf{a}(2)=\mathbf{a}'(0)+\mathbf{a}'(2)+s\geqq 1\ \text{d'autre part,}$$

enfin $m+n$ et $m+t$ ont même parité.

Si $m+n$ est impair,
on a :

$$\mathbf{a}(0)+\mathbf{a}(2)\geqq 1, \qquad \text{donc} \quad \chi^{]m,\, n[}(\mathbf{a})=0,$$

d'où :

$$E_{m,\, n}(q)\equiv 0 \text{ modulo } \Phi_k.$$

Si $m+n$ est pair,
on a :

$$\chi^{]m,\, n[}(\mathbf{a})=(-1)^{\mathbf{a}(0)+\mathbf{a}(3)}\, E_{m+\mathbf{a}(1)+\mathbf{a}(3)}, =(-1)^{\mathbf{a}(0)-\mathbf{a}'(0)}(-1)^{\mathbf{a}'(0)+\mathbf{a}'(3)}\, E_{m+\mathbf{a}'(1)+\mathbf{a}'(3)},$$

soit :

$$\chi^{]m,\, n[}(\mathbf{a})=(-1)^{\mathbf{a}(0)-\mathbf{a}'(0)}\chi^{]m,\, t[}(\mathbf{a}').$$

Si $k\equiv 2$ modulo 4, alors $\mathbf{a}(0)-\mathbf{a}'(0)=0$ a même parité que $(k+2)s/2$;si $k\equiv 0$ modulo 4, alors $\mathbf{a}(0)-\mathbf{a}'(0)=s$ a même parité que $(k+2)s/2$. Dans tous les cas, on a $\chi^{]m,\, n[}(\mathbf{a})=(-1)^{(k+2)\, s/2}\chi^{]m,\, t[}(\mathbf{a}')$, et par conséquent :

$$E_{m,\, n}(q)\equiv(-1)^{(k+2)\, s/2}\, E_{m,\, t}(q) \text{ modulo } \Phi_k.$$

Lorsque k est impair;
alors :

$$\mathbf{a}(0)=\mathbf{a}'(0) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{a}(2)=\mathbf{a}'(2) \text{ d'une part,}$$

$$\mathbf{a}(1)+\mathbf{a}(3)=\mathbf{a}'(1)+\mathbf{a}'(3)+s \text{ d'autre part,}$$

enfin $m+n$ et $m+s+t$ ont même parité.

Si $m+n$ est impair,
lorsque $\mathbf{a}(0)+\mathbf{a}(2)=0$, on a :

$$\chi^{]m,\, n[}(\mathbf{a})=(-1)^{\mathbf{a}(3)}\, E_{m+\mathbf{a}(1)+\mathbf{a}(3)}, \;=(-1)^{\mathbf{a}(3)-\mathbf{a}'(3)}(-1)^{\mathbf{a}'(3)}\, E_{m+s+\mathbf{a}'(1)+\mathbf{a}'(3)},$$

soit :

$$\chi^{]m,\, n[}(\mathbf{a})=(-1)^{\mathbf{a}(3)-\mathbf{a}'(3)}\chi^{]m+s,\, t[}(\mathbf{a}').$$

Si $m+n$ est pair, on aboutit à la même relation.

Si $k\equiv 1$ modulo 4, alors $\mathbf{a}(3)-\mathbf{a}'(3)=0$ a même parité que $(k-1)s/2$; si $k\equiv 3$ modulo 4, alors $\mathbf{a}(3)-\mathbf{a}'(3)=s$ a même parité que $(k-1)s/2$. Dans tous les cas, on a $\chi^{]m,\, n[}(\mathbf{a})=(-1)^{(k-1)\, s/2}\chi^{]m+s,\, t[}(\mathbf{a}')$, et par conséquent :

$$E_{m,\, n}(q)\equiv(-1)^{(k-1)\, s/2}\, E_{m+s,\, t}(q) \text{ modulo } \Phi_k.$$

Ceci démontre le théorème lorsque $s=a$ et $t=b$. Quand ce n'est pas le cas, en appliquant aux deux membres des congruences du théorème le résultat que nous venons d'établir, on démontre la congruence de ces deux membres.

8. Fonctions symétriques associées à d'autres suites de nombres

Dans les paragraphes 4 et 5 nous avons étudié les fonctions de Schur associées aux formes escaliers, nous en avons donné les fonctions génératrices ainsi que les identités sur les caractères associés dues à Foulkes. Ce dernier s'est également intéressé aux fonctions symétriques associées aux polynômes eulériens [13]. En utilisant les méthodes précédentes, nous allons retrouver et généraliser ces résultats.

Supposons que $f(u)$ soit une série formelle en u possédant les développements :

$$f(u)=\sum_{n\geqq 0} \mathrm{C}_n \frac{u^n}{n\,!}=\sum_{i\geqq 0} c_i(\exp u-1)^i,$$

où les c_i sont quelconques (par exemple des indéterminées).

Posons, comme au début du premier paragraphe, $\mathrm{S}(\mathrm{X})=\prod_j (1-x_j)^{-1}$.

On définit alors une suite $\mathscr{C}_n(\mathrm{X})$, $n\geqq 0$, de fonctions symétriques de X homogènes, de degré égal à leur indice, par :

$$\mathrm{F}(\mathrm{X})=\sum_{i\geqq 0} c_i(\mathrm{S}(\mathrm{X})-1)^i=\sum_{n\geqq 0} \mathscr{C}_n(\mathrm{X}).$$

Notons $l(\mathbf{a})=a_1+a_2+\ldots$ le nombre de parts d'un partage $\mathbf{a}$.

Le théorème suivant est analogue au théorème 4.3.

THÉORÈME 8.1. — *La décomposition des fonctions $\mathscr{C}_n(\mathrm{X})$ suivant les sommes de puissances est :*

$$\mathscr{C}_n(X)=\sum_{\mathbf{a}} \frac{1}{g_{\mathbf{a}}}\, \chi^{(n)}(\mathbf{a})\, \Psi^{\mathbf{a}}(\mathrm{X}), \qquad (|\mathbf{a}|=n),$$

où l'on a $\chi^{(n)}(\mathbf{a})=\mathrm{C}_{l(\mathbf{a})}$.

La démonstration se fait en partant de l'identité (ii) de la proposition 1.1 :

$$\mathrm{S}(\mathrm{X})=\exp\left(\sum_{k\geqq 1} \frac{1}{k}\, \Psi_k(\mathrm{X})\right).$$

Celle-ci, reportée dans la fonction symétrique F(X) donne :

$$\mathrm{F}(\mathrm{X})=\sum_{i\geqq 0} c_i\left(\exp\left(\sum_{k\geqq 1} \frac{1}{k}\, \Psi_k(\mathrm{X})\right)-1\right)^i,$$

qui n'est autre que $f(\sum_{k\geqq 1} (1/k)\, \Psi_k(\mathrm{X}))$. On a finalement :

$$\mathrm{F}(\mathrm{X})=\sum_{n\geqq 0} \frac{\mathrm{C}_n}{n\,!}\left(\sum_{k\geqq 1} \frac{1}{k}\, \Psi_k(\mathrm{X})\right)^n,$$

d'où se déduit le théorème par identification.

De la même manière que pour les fonctions symétriques d'Euler à deux indices, on définit une suite double $\mathscr{C}_{m,n}(\mathrm{X})$, m, $n \geqq 0$, de fonctions symétriques :

$$\mathscr{C}_s(\mathrm{X} \cup v^*) = \sum_{0 \leqq n \leqq s} \frac{v^{s-n}}{(s-n)!} \mathscr{C}_{s-n,n}(\mathrm{X}).$$

On prend ici comme définition ce qui était dans le paragraphe 3 le résultat (i) du théorème 3.2.

Le calcul fait au paragraphe 3 de $\mathrm{S}(\mathrm{X} \cup v^*)$ fournit la proposition suivante.

PROPOSITION 8.2. — *La fonction génératrice de la suite* $\mathscr{C}_{m,n}(\mathrm{X})$ *vaut :*

$$\sum_{m,n \geqq 0} \mathscr{C}_{m,n}(\mathrm{X}) \frac{v^m}{m!} = \sum_{i \geqq 0} c_i (\mathrm{S}(\mathrm{X}) \exp v - 1)^i.$$

Comme pour le théorème 8.1, on obtient le résultat suivant, analogue au théorème 5.2.

THÉORÈME 8.3. — *La décomposition des fonctions* $\mathscr{C}_{m,n}(\mathrm{X})$ *suivant les sommes de puissances est :*

$$\mathscr{C}_{m,n}(\mathrm{X}) = \sum_{\mathbf{a}} \frac{1}{g_{\mathbf{a}}} \chi^{(m,n)}(\mathbf{a}) \Psi^{\mathbf{a}}(\mathrm{X}), \qquad (|\mathbf{a}| = n),$$

où l'on a $\chi^{(m,n)}(\mathbf{a}) = \mathrm{C}_{m+l(\mathbf{a})}$.

9. q-analogues et congruences de Kummer

Kummer [19] a établi le résultat suivant :

Soient p un nombre premier, et $f(u)$ une série formelle en u possédant les développements :

$$f(u) = \sum_{n \geqq 0} \mathrm{D}_n \frac{u^n}{n!} = \sum_{i \geqq 0} d_i (e^{ru} - e^{su})^i,$$

où r, s et d_i, $i \geqq 0$ sont des nombres rationnels n'ayant aucun facteur p au dénominateur. Les coefficients D_n vérifient alors toute une famille de congruences, dont la première est, pour tout $n \geqq 1$:

$$\mathrm{D}_n \equiv \mathrm{D}_{n+p-1} \text{ modulo } p.$$

Lorsque $r=1$ et $s=0$, on obtient la fonction génératrice de la suite C_n définie au paragraphe 7. Cette suite C_n vérifie donc les congruences de Kummer.

De même que nous avons déduit un q-analogue de ces congruences pour les q-nombres d'Euler à partir des théorèmes 4.3 et 5.2, de même allons-nous déduire un q-analogue des congruences de Kummer pour les C_n à partir du théorème 8.3.

Par analogie avec les propositions 2.1 et 3.1, posons :

$$\mathrm{C}_n(q)=(q;\,q)_n\,\mathscr{C}_n\left(\frac{1}{1-q}\right),$$

$$\mathrm{C}_{m,\,n}(q)=(q;\,q)_n\,\mathscr{C}_{m,\,n}\left(\frac{1}{1-q}\right).$$

En vertu du théorème 8.3, on a la décomposition :

$$\mathrm{C}_{m,\,n}(q)=\sum_{\mathbf{a}}\frac{1}{g_{\mathbf{a}}}\,\chi^{(m,\,n)}(\mathbf{a})\,\mathrm{T}_{\mathbf{a}}(q),\qquad (|\mathbf{a}|=n),$$

et puisque $\mathrm{T}_{\mathbf{a}}(q)$ est un polynôme de degré $n(n-1)/2$, il s'ensuit que $\mathrm{C}_{m,\,n}(q)$ est un polynôme de degré au plus $n(n-1)/2$. Il en est évidemment de même pour $\mathrm{C}_n(q)=\mathrm{C}_{0,\,n}(q)$.

On obtient les fonctions génératrices des polynômes $\mathrm{C}_n(q)$ et $\mathrm{C}_{m,\,n}(q)$ en faisant $\mathrm{X}=u/(1-q)$ dans la proposition 8.2.

PROPOSITION 9.1. — *Les polynômes* $\mathrm{C}_n(q)$ *et* $\mathrm{C}_{m,\,n}(q)$ *ont pour fonctions génératrices :*

$$\sum_{n\geqq 0}\mathrm{C}_n(q)\frac{u^n}{(q;\,q)_n}=\sum_{i\geqq 0}c_i(e(u,\,q)-1)^i,$$

$$\sum_{m,\,n\geqq 0}\mathrm{C}_{m,\,n}(q)\frac{v^m u^n}{m\,!\,(q;\,q)_n}=\sum_{i\geqq 0}c_i(e(u,\,q)\exp v-1)^i.$$

En comparant ces fonctions génératrices avec $f(u)$, fonction génératrice exponentielle de la suite C_n :

$$f(u)=\sum_{n\geqq 0}\mathrm{C}_n\frac{u^n}{n\,!}=\sum_{i\geqq 0}c_i(\exp u-1)^i,$$

on constate que le polynôme $\mathrm{C}_n(q)$ est un q-analogue raisonnable de C_n.

On a enfin pour ces polynômes un théorème qui généralise les congruences de Kummer pour les nombres C_n.

THÉORÈME 9.2 (q-congruences de Kummer). — *Soit k un entier positif et soit* $\mathrm{C}_{m,\,n}(q)$ *la suite double de polynômes de fonction génératrice mixte :*

$$\sum_{m,\,n\geqq 0}\mathrm{C}_{m,\,n}(q)\frac{v^m u^n}{m\,!\,(q;\,q)_n}=\sum_{i\geqq 0}c_i(e(u,\,q)\exp v-1)^i.$$

On a alors les congruences :

$$\mathrm{C}_{m,\,ka+b}(q)\equiv\mathrm{C}_{m+a,\,b}(q)\ \text{modulo}\ \Phi_k.$$

Comme pour le théorème 7.3, on pose $n=ka+b=ks+t$, où $0\leqq t\leqq k-1$. Nous avons vu plus haut la décomposition :

$$\mathrm{C}_{m,\,n}(q)=\sum_{\mathbf{a}}\frac{1}{g_{\mathbf{a}}}\,\chi^{(m,\,n)}(\mathbf{a})\,\mathrm{T}_{\mathbf{a}}(q),\qquad (|\mathbf{a}|=n).$$

En utilisant la proposition 7.2, on obtient, modulo Φ_k,

$$C_{m,n}(q) \equiv \sum_{\mathbf{a}'} \frac{1}{g_{\mathbf{a}'}} \chi^{(m,n)}(\mathbf{a})\, T_{\mathbf{a}'}(q), \qquad (|\mathbf{a}'|=t).$$

Le théorème 8.3 nous donne la valeur de $\chi^{(m,n)}(\mathbf{a})$, d'où :

$$C_{m,n}(q) \equiv \sum_{\mathbf{a}'} \frac{1}{g_{\mathbf{a}'}} C_{m+l(\mathbf{a})} T_{\mathbf{a}'}(q), \qquad (|\mathbf{a}'|=t).$$

Puisque $\mathbf{a}'$ est obtenu en enlevant à $\mathbf{a}$ les s parts égales à k (*cf.* prop. 7.2), on a $m+l(\mathbf{a})=m+s+l(\mathbf{a}')$, soit :

$$C_{m,n}(q) \equiv \sum_{\mathbf{a}'} \frac{1}{g_{\mathbf{a}'}} C_{m+s+l(\mathbf{a}')} T_{\mathbf{a}'}(q), \qquad (|\mathbf{a}'|=t).$$

Toujours à cause du théorème 8.3, le second membre ci-dessus est égal à $C_{m+s,t}(q)$.

On conclut comme pour le théorème 7.3.

On retrouve les congruences de Kummer ordinaires mentionnées au début de ce paragraphe en faisant $q=1$ lorsque k est un nombre premier.

10. Les q-polynômes eulériens

A titre d'illustration des résultats des paragraphes 8 et 9, nous allons traiter les q-polynômes eulériens.

Notons A_n^k le nombre de permutations de n ayant (exactement) $k-1$ descentes. C'est également le nombre de tableaux standard dont la forme est un ruban de poids n, ayant k lignes et $n-k+1$ colonnes (ce ruban est donc connexe).

La fonction génératrice des A_n^k est connue (*cf.* [7], p. 84) :

$$\sum_{n,k \geqq 0} A_n^k t^k \frac{x^n}{n!} = \frac{1-t}{1-t\exp((1-t)x)}.$$

On notera les conditions initiales $A_n^0=0$ si $n \geqq 1$ et $A_0^0=1$.

Le polynôme :

$$A_n(t) = \sum_k A_n^k t^k$$

est appelé *polynôme eulérien*. Son degré est n.

Notons maintenant $\mathscr{A}_n^k(X)$ la somme des fonctions de Schur relatives aux formes rubans de poids n, ayant k lignes et $n-k+1$ colonnes, $n, k \geqq 0$.

En particulier, $\mathscr{A}_n^k(X)=0$ si $n<k$. Les conditions initiales sont $\mathscr{A}_n^0(X)=0$ si $n \geqq 1$ et $\mathscr{A}_0^0(X)=1$. La fonction symétrique $\mathscr{A}_n^k(X)$ est homogène, de degré n.

PROPOSITION 10.1. — *On a la fonction génératrice :*

$$\mathrm{F}(\mathrm{X})=\sum_{n,\,k\geqq 0}\mathscr{A}_n^k(\mathrm{X})\,t^k=\frac{1-t}{1-t\,\mathrm{S}((1-t)\,\mathrm{X})}.$$

Posons :

$$\mathrm{F}^k(\mathrm{X})=\sum_{n\geqq 0}\mathscr{A}_n^k(\mathrm{X}),$$

et donc $\mathrm{F}^0(\mathrm{X})=1$. Soit $\mathrm{X}=\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ l'ensemble des indéterminées, supoosé fini. Il suffit de montrer la proposition dans ce cas, le cas général s'en déduit par passage à la limite sur p. Notons $\mathrm{X}'=\{x_2, x_3, \ldots, x_p\}=\mathrm{X}-\{x_1\}$. Étant donné un tableau semi-standard ayant k lignes, on cherche le premier x_1 lors de sa lecture ligne par ligne. Trois cas se présentent :

(i) il n'y a pas de x_1;

(ii) le premier x_1 se trouve au début d'une ligne d'indice 1 à k et il y a d'autres indéterminées après lui dans cette même ligne;

(iii) le premier x_1 se trouve dans la ligne k qui contient ce seul élément.

Ces trois cas se retrouvent dans la relation suivante, obtenue en sommant sur les tableaux semi-standard ayant k lignes :

$$\mathrm{F}^k(\mathrm{X})=\mathrm{F}^k(\mathrm{X}')+x_1\sum_{1\leqq i\leqq k}\mathrm{F}^{i-1}(\mathrm{X}')\,\mathrm{F}^{k-i+1}(\mathrm{X})+x_1\,\mathrm{F}^{k-1}(\mathrm{X}'),$$

qui se récrit :

$$\mathrm{F}^k(\mathrm{X})=\mathrm{F}^k(\mathrm{X}')+x_1\sum_{0\leqq i\leqq k}\mathrm{F}^{i}(\mathrm{X}')\,\mathrm{F}^{k-i}(\mathrm{X})-x_1\,\mathrm{F}^k(\mathrm{X}')+x_1\,\mathrm{F}^{k-1}(\mathrm{X}');$$

en multipliant par t^k et en sommant sur k, on obtient :

$$\mathrm{F}(\mathrm{X})\,(1-x_1\,\mathrm{F}(\mathrm{X}'))=(1-x_1(1-t))\,\mathrm{F}(\mathrm{X}').$$

Cette relation permet la démonstration par récurrence sur le nombre d'éléments de X. Lorsqu'il n'y a aucune indéterminée, toutes les fonctions de Schur sont nulles, sauf celle de degré 0 qui vaut 1, donc $\mathrm{F}(\emptyset)=1$. D'autre part, $\mathrm{S}((1-t)\mathrm{X})=\prod_j(1-(1-t)\,x_j)^{-1}$ vaut 1 si $\mathrm{X}=\emptyset$, et la proposition est vraie dans ce cas. Le cas général s'ensuit.

Si l'on pose :

$$\mathscr{A}_n(\mathrm{X},\,t)=\sum_{k\geqq 0}\mathscr{A}_n^k(\mathrm{X})\,t^k,$$

on a alors :

$$\sum_{n\geqq 0}\mathscr{A}_n(\mathrm{X},\,t)=\frac{1-t}{1-t\,\mathrm{S}((1-t)\,\mathrm{X})},$$

ou bien encore, en posant :

$$\mathscr{A}_n^*(X, t) = (1-t)^{-n} \mathscr{A}_n(X, t)$$

(ce qui revient à remplacer l'indéterminée x_j par $x_j/(1-t)$, $j \geqq 1$),

$$\sum_{n \geqq 0} \mathscr{A}_n^*(X, t) = \frac{1-t}{1-t\,S(X)},$$

qu'on peut aussi écrire :

$$\sum_{n \geqq 0} \mathscr{A}_n^*(X, t) = \frac{1}{1-t/(1-t)(S(X)-1)} = \sum_{i \geqq 0} \left(\frac{t}{1-t}\right)^i (S(X)-1)^i.$$

La suite $\mathscr{A}_n^*(X, t)$ a les propriétés requises au paragraphe 8. On peut appliquer tous les résultats de ce paragraphe en prenant :

$$\mathscr{C}_n(X) = \mathscr{A}_n^*(X, t) = (1-t)^{-n} \mathscr{A}_n(X, t),$$

et :

$$C_n = (1-t)^{-n} A_n(t).$$

En particulier, le théorème 8.1 prend la forme suivante.

THÉORÈME 10.2. — *La décomposition de $\mathscr{A}_n(X, t)$ suivant les sommes de puissances est :*

$$\mathscr{A}_n(X, t) = \sum_{\mathbf{a}} \frac{1}{g_{\mathbf{a}}} (1-t)^{n-l(\mathbf{a})} A_{l(\mathbf{a})}(t)\, \Psi^{\mathbf{a}}(X), \qquad (|\mathbf{a}| = n).$$

La formule ci-dessus fournit une forme explicite simple pour les relations de récurrence entre caractères associés aux $\mathscr{A}_n(X, t)$ obtenues par Foulkes [13] par un calcul de $\chi - \lambda - \rho$ structure.

Lorsqu'on fait $X = 1/(1-q)$, on définit un polynôme en q et t, appelé *q-polynôme eulérien* par :

$$A_n(q, t) = (q; q)_n \mathscr{A}_n\left(\frac{1}{1-q}, t\right).$$

Voir également à ce sujet [27], [15], [14], [25]. Ces polynômes sont d'autres q-analogues que ceux introduits par Carlitz [6].

D'après l'étude générale faite au paragraphe 2, ce polynôme $A_n(q, t) = \sum_k A_n^k(q)\, t^k$, a comme coefficients $A_n^k(q)$ le q-dénombrement suivant IMAJ des tableaux standard de forme ruban ayant k lignes et $n-k+1$ colonnes. Le polynôme $A_n^k(q)$ est également le q-dénombrement suivant INV ou IMAJ des permutations de $[n]$ ayant $k-1$ descentes.

Définissons maintenant la suite $\mathscr{A}_{m,n}(X, t)$, $m, n \geqq 0$:

$$\mathscr{A}_s(X \cup v^*, t) = \sum_{0 \leqq n \leqq s} \frac{v^{s-n}}{(s-n)\,!} \mathscr{A}_{s-n,\, n}(X, t).$$

Les *q-polynômes eulériens à deux indices*, obtenus à partir de $\mathscr{A}_{m,n}(\mathrm{X}, t)$ par :

$$\mathrm{A}_{m,n}(\mathrm{X}, t)=(q; q)_n \mathscr{A}_{m,n}\left(\frac{1}{1-q}, t\right),$$

ont comme coefficients les q-dénombrements suivant IMAJ_n ou INV_n des permutations de $[m+n]$ ayant un nombre donné de descentes. Ceci résulte du paragraphe 3. La proposition 9.1 fournit les fonctions génératrices de $\mathrm{A}_n(q, t)$ et de $\mathrm{A}_{m,n}(q, t)$. La première de ces fonctions est due à Stanley [26]. *Voir* également [14], [25] pour d'autres démonstrations.

PROPOSITION 10.3. — *On a les fonctions génératrices :*

$$\sum_{n\geqq 0} \mathrm{A}_n(q, t) \frac{u^n}{(q; q)_n}=\frac{1-t}{1-te((1-t)u, q)};$$

$$\sum_{m,n\geqq 0} \mathrm{A}_{m,n}(q, t)\frac{v^m u^n}{m!(q; q)_n}=\frac{1-t}{1-te((1-t)u, q)\exp((1-t)v)}.$$

Enfin, on peut appliquer le théorème 9.2 à la suite $\mathrm{A}^*_{m,n}(q, t)=(1-t)^{-m-n}\mathrm{A}_{m,n}(q, t)$, dont la fonction génératrice est :

$$\sum_{m,n\geqq 0} \mathrm{A}^*_{m,n}(q, t)\frac{v^m u^n}{m!(q; q)_n}=\frac{1-t}{1-te(u, q)\exp v},$$

$$=\sum_{i\geqq 0}\left(\frac{t}{1-t}\right)^i(e(u, q)\exp v-1)^i,$$

et a donc la forme requise. On en déduit des congruences de type Kummer.

THÉORÈME 10.4 (q-congruences de Kummer pour les q-polynômes eulériens). — *Soit k un entier positif. On a les congruences :*

$$\mathrm{A}_{m,ka+b}(q, t)\equiv(1-t)^{(k-1)a}\mathrm{A}_{m+a,b}(q, t) \textit{ modulo } \Phi_k.$$

Remerciements

L'auteur tient à remercier le rapporteur du présent article pour ses judicieux conseils. Le tableau I ci-après lui est due, et c'est avec sa permission qu'il est reproduit.

TABLEAU I

Polynômes $f_q(\theta)$, $0 \leqq |\theta| \leqq 6$ et θ forme principale.

θ	$f_q(\theta)$
$\emptyset$	1
1	1
1^2	q
2	1
1^3	q^3
12	$q+q^2$
3	1
1^4	q^6
$1^2 2$	$q^3+q^4+q^5$
13	$q+q^2+q^3$
2^2	q^2+q^4
4	1
1^5	q^{10}
$1^3 2$	$q^6+q^7+q^8+q^9$
$1^2 3$	$q^3+q^4+2q^5+q^6+q^7$
12^2	$q^4+q^5+q^6+q^7+q^8$
14	$q+q^2+q^3+q^4$
23	$q^2+q^3+q^4+q^5+q^6$
5	1
1^6	q^{15}
$1^4 2$	$q^{10}+q^{11}+q^{12}+q^{13}+q^{14}$
$1^3 3$	$q^6+q^7+2q^8+2q^9+2q^{10}+q^{11}+q^{12}$
$1^2 2^2$	$q^7+q^8+2q^9+q^{10}+2q^{11}+q^{12}+q^{13}$
$1^2 4$	$q^3+q^4+2q^5+2q^6+2q^7+q^8+q^9$
123	$q^4+2q^5+2q^6+3q^7+3q^8+2q^9+2q^{10}+q^{11}$
15	$q+q^2+q^3+q^4+q^5$
2^3	$q^3+q^5+q^6+q^7+q^9$
24	$q^2+q^3+2q^4+q^5+2q^6+q^7+q^8$
3^2	$q^6+q^8+q^9+q^{10}+q^{12}$
6	1

TABLEAU II

Polynômes $T_{\mathbf{a}}$, $0 \leqq |\mathbf{a}| \leqq 6$.

$\mathbf{a}$	1	q	q^2	q^3	q^4	q^5	q^6	q^7	q^8	q^9	q^{10}	q^{11}	q^{12}	q^{13}	q^{14}	q^{15}
$\emptyset$	1															
1	1															
1^2	1	1														
2	1	−1														
1^3	1	2	2	1												
12	1	0	0	−1												
3	1	−1	−1	1												
1^4	1	3	5	6	5	3	1									
$1^2 2$	1	1	1	0	−1	−1	−1									
13	1	0	−1	0	−1	0	1									
2^2	1	−1	1	−2	1	−1	1									
4	1	−1	−1	0	1	1	−1									
1^5	1	4	9	15	20	22	20	15	9	4	1					
$1^3 2$	1	2	3	3	2	0	−2	−3	−3	−2	−1					
$1^2 3$	1	1	0	0	−1	−2	−1	0	0	1	1					
12^2	1	0	1	−1	0	−2	0	−1	1	0	1					
14	1	0	−1	−1	0	0	0	1	1	0	−1					
23	1	−1	0	0	−1	0	1	0	0	1	−1					
5	1	−1	−1	0	0	2	0	0	−1	−1	1					
1^6	1	5	14	29	49	71	90	101	101	90	71	49	29	14	5	1
$1^4 2$	1	3	6	9	11	11	8	3	−3	−8	−11	−11	−9	−6	−3	−1
$1^3 3$	1	2	2	2	1	−1	−3	−4	−4	−3	−1	1	2	2	2	1
$1^2 2^2$	1	1	2	1	1	−1	−2	−3	−3	−2	−1	1	1	2	1	1
$1^2 4$	1	1	0	−1	−1	−1	−2	−1	1	2	1	1	1	0	−1	−1
123	1	0	0	0	−1	−1	−1	0	0	1	1	1	0	0	0	−1
15	1	0	−1	−1	−1	1	0	1	1	0	1	−1	−1	−1	0	1
2^3	1	−1	2	−3	3	−5	4	−5	5	−4	5	−3	3	−2	1	−1
24	1	−1	0	−1	1	−1	0	1	1	0	−1	1	−1	0	−1	1
3^2	1	−1	−1	2	−2	−1	3	−1	−1	3	−1	−2	2	−1	−1	1
6	1	−1	−1	0	0	1	1	1	−1	−1	−1	0	0	1	1	−1

Par exemple :

$$T_{1^3 2} = 1 + 2q + 3q^2 + 3q^3 + 2q^4 - 2q^6 - 3q^7 - 3q^8 - 2q^9 - q^{10}.$$

TABLEAU III

q-nombres d'Euler à deux indices $E_{m,n}(q)$, $0 \leqq m \leqq 5$, $0 \leqq n \leqq 6$.

n	0	1	2		3			
m	1	1	1	q	1	q	q^2	q^3
0	1	1	1			1	1	
1	1	1	1	1	1	2	2	
2	1	2	3	2	2	6	6	2
3	2	5	8	8	11	22	22	6
4	5	16	33	28	40	96	96	40
5	16	61	136	136	241	482	482	180

n				4			
m	1	q	q^2	q^3	q^4	q^5	q^6
0		1	2	1	1		
1	2	4	4	4	2		
2	2	9	16	15	13	6	
3	6	34	62	68	62	34	6
4	52	189	326	345	293	156	24
5	240	992	1 744	1 984	1 744	992	240

n						5					
m	1	q	q^2	q^3	q^4	q^5	q^6	q^7	q^8	q^9	q^{10}
0			1	2	3	4	3	2	1		
1		2	6	9	12	13	10	6	3		
2		6	20	34	48	56	48	34	20	6	
3	6	46	120	189	252	275	230	156	87	84	
4	24	216	592	992	1 368	1 552	1 368	992	592	216	24
5	300	1 682	4 146	6 669	8 892	9 733	8 410	5 946	3 423	1 200	120

n								6								
m	1	q	q^2	q^3	q^4	q^5	q^6	q^7	q^8	q^9	q^{10}	q^{11}	q^{12}	q^{13}	q^{14}	q^{15}
0			1	3	5	8	10	10	9	7	5	2	1			
1			3	9	17	28	37	42	42	37	28	17	9	3		
2		6	27	61	105	156	196	212	203	171	125	74	37	12		
3		24	120	288	520	800	1 040	1 176	1 176	1 040	800	520	288	120	24	
4	24	276	993	2 147	3 681	5 400	6 806	7 486	7 297	6 291	4 729	3 010	1 613	648	120	
5	120	1 560	5 928	13 344	23 552	35 368	45 592	51 432	51 432	45 592	35 368	23 552	13 344	5 928	1 560	120

Par exemple :

$$E_{2,4}(q) = 2 + 9q + 16q^2 + 15q^3 + 13q^4 + 6q^5.$$

TABLEAU IV

q-polynômes eulériens à deux indices $A_{m,n}(q, t)$, $0 \leqq m+n \leqq 6$.

$A_{m,0}(q, t) = A_{m-1,1}(q, t) = A_m(t)$ ne dépend pas de l'indéterminée q pour tout $m \geqq 1$; $A_{0,0}(q, t) = 1$; $A_{1,0}(q, t) = A_{0,1}(q, t) = t$.

(m, n)	(2, 0) (1, 1)		(3, 0) (2, 1)			(4, 0) (3, 1)				(5, 0) (4, 1)					(6, 9) (5, 1)					
	t	t²	t	t^2	t^3	t	t^2	t^3	t^4	t	t^2	t^3	t^4	t^5	t	t^2	t^3	t^4	t^5	t^6
	1	1	1	4	1	1	11	11	1	1	26	66	26	1	1	57	302	302	57	1

(m, n)	(0, 2)		(1,2)			(2, 2)				(3, 2)					(4, 2)					
	t	t^2	t	t^2	t^3	t	t^2	t^3	t^4	t	t^2	t^3	t^4	t^5	t	t^2	t^3	t^4	t^5	t^6
1	1		1	2		1	7	4		1	18	33	8		1	41	171	131	16	
q		1		2	1		4	7	1		8	33	18	1		16	131	171	41	1

(m, n)	(0, 3)			(1, 3)				(2, 3)					(3, 3)					
	t	t^2	t^3	t	t^2	t^3	t^4	t	t^2	t^3	t^4	t^5	t	t^2	t^3	t^4	t^5	t^6
1	1			1	3			1	10	9			1	25	65	27		
q		2			4	4			8	24	8			16	104	104	16	
q^2		2			4	4			8	24	8			16	104	104	16	
q^3			1			3	1			9	10	1			27	67	25	1

(m, n)	(0, 4)				(1, 4)					(2, 4)					
	t	t^2	t^3	t^4	t	t^2	t^3	t^4	t^5	t	t^2	t^3	t^4	t^5	t^6
1	1				1	4				1	13	16			
q		3				6	9				12	51	27		
q^2		4	1			8	15	2			16	77	53	4	
q^3		3	3			6	18	6			12	78	78	12	
q^4		1	4			2	15	8			4	53	77	16	
q^5			3				9	6				27	51	12	
q^6				1				4	1				16	13	1

TABLEAU IV (*suite*)

(m, n)	(0, 5)					(1, 5)					
	t	t^2	t^3	t^4	t^5	t	t^2	t^3	t^4	t^5	t^6
1	1					1	5				
q		4					8	16			
q^2		6	3				12	33	9		
q^3		6	9				12	51	27		
q^4		6	12	2			12	60	44	4	
q^5		2	18	2			4	62	62	4	
q^6		2	12	6			4	44	60	12	
q^7			9	6				27	51	12	
q^8			3	6				9	33	12	
q^9				4					16	8	
q^{10}					1					5	1

(m, n)	(0, 6)					
	t	t^2	t^3	t^4	t^5	t^6
1	1					
q		5				
q^2		8	6			
q^3		9	19	1		
q^4		11	30	8		
q^5		9	45	17		
q^6		7	52	30	1	
q^7		4	53	41	3	
q^8		3	41	53	4	
q^9		1	30	52	7	
q^{10}			17	45	9	
q^{11}			8	30	11	
q^{12}			1	19	9	
q^{13}				6	8	
q^{14}					5	
q^{15}						1

Par exemple :

$$A_{1,3}(q, t) = t + 3t^2 + 4qt^2 + 4qt^3 + 4q^2t^2 + 4q^2t^3 + 3q^3t^3 + q^3t^4.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. ANDRÉ, *Sur les permutations alternées* (*J. Math. Pures Appl.*, vol. 7, 1881, p. 167-184).

[2] G. E. ANDREWS, *The theory of partitions* (*Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, vol. 2, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1976).

[3] G. E. ANDREWS et I. GESSEL, *Divisibility Properties of the q-Tangent Numbers* (*Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 68, 1978, p. 380-384).

[4] G. E. ANDREWS et D. FOATA, *Congruences for the q-Secant Numbers* (*European J. Combin.*, vol. 1, 1980, p. 283-287).

[5] L. CARLITZ, *q-Bernoulli Numbers and Polynomials* (*Duke Math. J.* vol. 15, 1948, p. 987-1000).

[6] L. CARLITZ, *q-Bernoulli and Eulerian Numbers* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 76, 1954, p. 332-350).

[7] L. COMTET, *Analyse combinatoire*, tome second, Presses Universitaires de France, Paris, 1970.

[8] J. DÉSARMÉNIEN, *Un analogue des congruences de Kummer pour les q-nombres d'Euler* (*European J. Combin.*, vol. 3, 1982, p. 19-28).

[9] D. FOATA, *Further Divisibility Properties of the q-Tangent Numbers* (*Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 81, 1981, p. 143-148).

[10] D. FOATA et M.-P. SCHÜTZENBERGER, *Major Index and Inversion Number of Permutations* (*Math. Nachr.*, vol. 83, 1978, p. 143-159).

[11] H. O. FOULKES, *Paths in Ordered Structures of Partitions* (*Discrete Math.*, vol. 9, 1974, p. 365-374).

[12] H. O. FOULKES, *Tangent and Secant Numbers and Representations of Symmetric Groups* (*Discrete Math.*, vol. 15, 1976, p. 311-324).

[13] H. O. FOULKES, *Eulerian Numbers, Newcomb's Problem and Representations of Symmetric Groups* (*Discrete Math.*, vol. 30, 1980, p. 3-49).

[14] A. GARSIA et I. GESSEL, *Permutations Statistics and Partitions* (*Adv. in Math.*, vol. 31, 1979, p. 288-305).

[15] I. GESSEL, *Generating Functions and Enumeration of Sequences*, Doctoral Thesis, M.I.T., 1977.

[16] I. GESSEL, *Symmetric Functions and Permutation Enumeration*, Communication orale, Oberwolfach, 1980.

[17] F. H. JACKSON, *A Basic Sine and Cosine with Symbolical Solutions of Certain Differential Equations* (*Proc. Edinburgh Math. Soc.*, vol. 22, 1904, p. 28-39).

[18] D. E. KNUTH et T. J. BUCKHOLTZ, *Computation of Tangent, Euler, and Bernoulli Numbers* (*Math. Comp.*, vol. 21, 1967, p. 663-668).

[19] E. E. KUMMER, *Über eine Allgemeine Eigenschaft der Rationalen Entwickelungscoëfficienten einer Bestimmten Gattung Analytischer Funktionen* (*J. Reine Angew. Math.*, vol. 41, 1851, p. 368-372 (= *Collected Papers*, vol. 1, Springer-Verlag, Berlin, 1975, p. 358-362).

[20] A. LASCOUX et M.-P. SCHÜTZENBERGER, *Sur une conjecture de H. O. Foulkes* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, vol. 286, 1978, p. 323-324).

[21] D. E. LITTLEWOOD, *The Theory of Group Characters and Matrix Representations of Groups*, 2ᵉ éd., Clarendon Press, Oxford, 1950.

[22] E. LUCAS, *Sur les congruences des nombres eulériens et des coefficients différentiels des fonctions, suivant un module premier* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, vol. 6, 1872, p. 49-54).

[23] I. G. MACDONALD, *Symmetric Functions and Haal Polynomials*, Clarendon Press, Oxford, 1979.

[24] N. NIELSEN, *Traité élémentaire des nombres de Bernoulli*, Gauthier-Villars, Paris, 1923.

[25] D. P. RAWLINGS, *Generalized Worpitzky Identities with Applications to Permutation Enumeration* (*European J. Combin.*, vol. 2, 1981, p. 67-78).

[26] R. P. STANLEY, *Theory and Application of Plane Partitions I-II*, (*Studies in Appl. Math.*, vol. 50, 1971, p. 167-188, 259-279).

[27] R. P. STANLEY, *Binomial Posets, Möbius Inversion and Permutation Enumeration* (*J. Combin. Theory Ser. A*, vol. 20, 1976, p. 336-356).

J. DÉSARMÉNIEN,
Département de Mathématique,
Université Louis-Pasteur,
7, rue René-Descartes,
67084 Strasbourg Cedex.

(Manuscrit reçu le 12 juillet 1982,
révisé le 18 octobre 1982).