

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

P. CHOSSAT

## **Interactions entre bifurcation par brisure partielle de symétrie sphérique**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4<sup>e</sup> série*, tome 15, n° 1 (1982), p. 117-145

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1982\\_4\\_15\\_1\\_117\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1982_4_15_1_117_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# INTERACTIONS ENTRE BIFURCATION PAR BRISURE PARTIELLE DE SYMÉTRIE SPHÉRIQUE

PAR P. CHOSSAT

## SOMMAIRE

1. Introduction .....	117
2. Équations de bifurcation dans le cas $l_0=2$ .....	121
3. Bifurcation et stabilité dans le cas $b_1 \neq 0$ .....	126
3.1. Solutions stationnaires pures .....	127
3.2. Ondes rotatives de 1 <sup>re</sup> espèce .....	128
3.3. Ondes rotatives de 2 <sup>e</sup> espèce .....	130
3.4. Diagrammes récapitulatifs .....	131
4. Bifurcation et stabilité dans le cas $b_1=0$ .....	132
4.1. Solutions stationnaires pures .....	133
4.2. Ondes rotatives de 1 <sup>re</sup> espèce .....	135
4.3. Ondes rotatives de 2 <sup>e</sup> espèce .....	138
4.4. Diagrammes récapitulatifs .....	139
5. Justification du calcul de bifurcation et de stabilité sur les équations réduites .....	139
5.1. Existence .....	139
5.2. Stabilité : justification de l'étude sur l'équation de bifurcation (1.6) .....	141
5.3. Stabilité : justification de l'étude sur les équations tronquées .....	143
Bibliographie .....	145

## 1. Introduction

Ces dernières années l'étude des problèmes de bifurcation stationnaire invariants par l'action d'un groupe de symétrie  $\mathcal{G}$  a fait d'importants progrès, notamment par Sattinger [13], qui a introduit le formalisme des groupes et algèbres de Lie dans la théorie des

bifurcations, et Golubitsky et Schaeffer [4], qui se placent du point de vue de la théorie des singularités. La principale difficulté de ces problèmes provient de ce que (généralement) l'invariance par un groupe conduit à une équation de bifurcation dans un espace de dimension  $n > 1$ . On observe que les solutions bifurquées ne sont plus invariantes que par un sous-groupe de transformations, chaque solution engendrant une orbite de solutions par action du groupe  $\mathcal{G}$ -phénomène de « brisure spontanée de symétrie », dont l'importance semble grande, en physique notamment (Michel [10]).

Parallèlement d'autres auteurs (Keener [8], Langford et Iooss [9]) ont étudié l'interaction entre bifurcations lorsque, sous l'action d'un second paramètre, un point de bifurcation stationnaire et un point de bifurcation de Hopf peuvent se confondre. Ils ont montré que des branchements secondaires de solutions périodiques et des branchements tertiaires de solutions quasi périodiques peuvent apparaître.

Dans le présent article, on analyse une situation où le problème dépend effectivement de deux paramètres —  $\mu$  (paramètre de bifurcation) et  $\varepsilon$  (paramètre de brisure) — et de plus satisfait aux propriétés d'invariance suivantes : lorsque  $\varepsilon = 0$ , le problème est invariant par le groupe des rotations  $SO(3)$  (rotations dans  $\mathbb{R}^3$ ), tandis que pour  $\varepsilon \neq 0$ , il n'est plus invariant que par le sous-groupe des rotations autour d'un axe  $Oz$ . *Contrairement aux cas étudiés par Golubitsky-Schaeffer dans [5], cette perturbation ne préserve pas la symétrie initiale.* Une telle situation se rencontre dans le cas de la convection d'un fluide dans un domaine sphérique pouvant tourner autour d'un axe. Le paramètre  $\mu$  est alors un nombre caractéristique de la force d'Archimède tendant à provoquer le mouvement de convection (nombre de Rayleigh), et  $\varepsilon$  est proportionnel à la vitesse angulaire de rotation du domaine. Ce cas spécifique sera traité ultérieurement.

Si on écrit le problème sous la forme :

$$(1.1) \quad \frac{dZ}{dt} = F(\mu, \varepsilon, Z), \quad F(\mu, \varepsilon, -) \text{ agissant dans un certain espace } V,$$

( $V \cong \mathbb{R}^n$  ou  $V$  espace de Banach réel), ces propriétés se traduisent ainsi :

Rappelons qu'une représentation d'un groupe  $\mathcal{G}$  dans  $V$  est un homomorphisme  $g \mapsto T_g$  de  $\mathcal{G}$  dans l'ensemble des endomorphismes linéaires inversibles de  $V$ . On suppose alors qu'il existe une représentation  $T_g$  de  $SO(3)$  dans  $V$  telle que :

$$(H-1) \quad F(\mu, 0, T_g Z) = T_g F(\mu, 0, Z) \quad (\text{covariance de } F(\mu, 0, -) \text{ par } T_g),$$

$$(H-2) \quad F(\mu, \varepsilon, T_\varphi Z) = T_\varphi F(\mu, \varepsilon, Z) \quad (\text{covariance de } F(\mu, \varepsilon, -) \text{ par } T_\varphi),$$

pour tous  $g \in SO(3)$ ,  $\varphi \in C_\infty$  (groupe des rotations autour de l'axe  $Oz$ ),  $(\mu, \varepsilon) \in \mathbb{R}^2$  et  $Z \in \mathcal{D} \subset V$  ( $\mathcal{D}$  domaine de définition de  $F$ ).

On note :

$$\mathcal{L}_{\mu, \varepsilon} = D_Z F(\mu, \varepsilon, 0), \\ \mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_{0, 0}.$$

Pour  $\varepsilon=0$  on suppose que  $\mu=0$  est un point de bifurcation stationnaire à partir de  $Z=0$ . Plus précisément, on suppose :

- (H-3)  $\left\{ \begin{array}{l} (1) F(\mu, \varepsilon, 0)=0 \text{ quels que soient } (\mu, \varepsilon); \\ (2) \mathcal{L}_0 \text{ est un opérateur de Fredholm d'indice } 0 \text{ (i. e. la dimension de } \ker \mathcal{L}_0 \text{ est finie et égale à la codimension de l'image } \operatorname{Im} \mathcal{L}_0) \text{ et autoadjoint, et son spectre est } \sigma = \{0\} \cup \sigma_1, \text{ où } \sigma_1 \subset \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z \leq \xi < 0\}; \\ (3) F \text{ est suffisamment régulière en } (\mu, \varepsilon, Z) \text{ au voisinage de } (0, 0, 0), \text{ au sens que l'on peut appliquer la décomposition de Lyapounov-Schmidt pour les solutions bifurquées stationnaires – ou la méthode analogue [6] pour les solutions bifurquées périodiques – ramenant ainsi cette étude à celle d'une équation dans l'espace de dimension finie } V_0 = \ker \mathcal{L}_0. \end{array} \right.$

Par ailleurs on sait que  $V_0$  est invariant par  $T_g$ ,  $g \in \operatorname{SO}(3)$  [13]. On fait l'hypothèse suivante :

- (H-4)  $V_0$  est le sous-espace associé à une représentation irréductible  $T_g^{(l_0)}$ . Autrement dit : (1)  $\dim V_0 = 2l_0 + 1$ ; (2) il n'existe pas de sous-espace de  $V_0$  autre que  $\{0\}$  ou  $V_0$  qui soit invariant par  $T_g$ . On note alors  $T_{g|_{V_0}} = T_g^{(l_0)}$  (voir [11] par exemple).

L'hypothèse (H-4) est par exemple vérifiée pour le problème de Bénard sphérique [3].

A présent on considère  $\mathcal{L}_{\mu, \varepsilon}$  comme une perturbation de  $\mathcal{L}_0$  ( $\mu$  et  $\varepsilon$  voisins de 0). On admettra que 0 est une valeur propre isolée de  $\mathcal{L}_0$ . En généralisant un résultat de [3], on peut alors aisément montrer que, sous les hypothèses H-1, H-2, H-3, H-4.

(1) Pour  $\varepsilon=0$ , la valeur propre 0 de  $\mathcal{L}_0$  est « perturbée » en une valeur propre  $\sigma(\mu)$  de  $\mathcal{L}_{\mu, 0}$  ( $\mu \mapsto \sigma(\mu)$  analytique au voisinage de 0),  $\sigma(\mu)$  ayant la même multiplicité que 0.

(2) Pour  $\varepsilon \neq 0$ ,  $\sigma(\mu)$  éclate en  $2l_0 + 1$  valeurs propres simples, dont l'une,  $\sigma_0(\mu, \varepsilon)$ , est réelle et les autres sont complexes conjuguées. On a donc, *a priori*, la possibilité d'ajuster  $\mu$  en fonction de  $\varepsilon$  pour obtenir soit une condition de bifurcation stationnaire – en posant  $\sigma_0(\mu, \varepsilon)=0$  – soit des conditions de bifurcation de Hopf – en posant  $\operatorname{Re} \sigma_j(\mu, \varepsilon)=0$  ( $j \neq 0$ ), ces relations permettant d'obtenir une valeur critique de  $\mu$  en fonction de  $\varepsilon$ .

Ce problème peut donc être considéré comme un cas « dégénéré » du problème d'interactions à deux paramètres du type étudié par Iooss-Langford.

Le cas  $l_0=1$  (i. e.  $\dim V_0=3$ ) a été complètement résolu d'abord par Babskii-Sklovskaja quand  $\varepsilon=0$  [1] [cas de l'invariance totale par l'action de  $\operatorname{SO}(3)$ ], puis par Chossat [2] pour  $\varepsilon \neq 0$ . Il ne donne pas lieu à des interactions entre bifurcations.

Dans cet article on va s'intéresser au cas  $l_0=2$ . Ce cas correspond, pour le problème de Bénard sphérique, à un domaine dont l'épaisseur est environ 1/3 du rayon de la sphère extérieure. Dans ce cas le problème de bifurcation stationnaire a été résolu quand  $\varepsilon=0$  par Chossat [3] et Golubitsky et Schaeffer [5] (qui ont décrit, *via* la théorie des singularités, l'action de toutes les perturbations régulières préservant la symétrie du problème).

On va voir que la perturbation  $\varepsilon \neq 0$  donne effectivement lieu à des solutions périodiques dans le temps avec interaction entre solutions de type différent et possibilité de bifurcation tertiaire quasi périodique.

L'idée est de rechercher les solutions bifurquées périodiques sous la forme :

$$(1.2) \quad Z(t) = T_{\varphi_t} y, \quad y \in \mathcal{D} \subset V, \quad \varphi_t = \omega t.$$

De telles solutions sont T-périodiques,  $T = 2\pi/\omega$ , puisque  $\varphi$  mesure un angle autour de l'axe Oz. On les appelle « ondes rotatives » (Renardy [12]).

Formellement on a alors :

$$\frac{dz}{dt} = \omega T_{\varphi_t} L y \quad \text{où } L \text{ est le générateur infinitésimal de } T_{\varphi}.$$

Sous l'hypothèse H-2, (1.2) est donc solution de (1.1) si et seulement si  $y$  est solution de l'équation :

$$(1.3) \quad \omega L y = F(\mu, \varepsilon, y).$$

Si on cherche des solutions du type « ondes rotatives » (1.2), le problème de bifurcation de Hopf se ramène donc à un problème de bifurcation stationnaire, et sous réserve que l'opérateur  $L$  vérifie de « bonnes » propriétés de régularité ( $L$  « relativement borné » par rapport à  $\mathcal{L}_{\mu, \varepsilon}$  [12]), le problème se réduit donc à une équation de bifurcation dans  $V_0$  :

$$(1.4) \quad \omega LX = G(\mu, \varepsilon, \omega, X), \quad X \in V_0.$$

L'application  $G$  est covariante par  $T_{\varphi}$  [13] et sera supposée analytique au voisinage de  $(0, 0, 0, 0)$  dans  $\mathbb{R}^3 \times V_0$ .

Compte tenu de l'invariance par  $T_{\varphi}$ , chaque solution de (1.4), donc de (1.3) engendrera une famille à un paramètre (orbite) de solutions. La stabilité « orbitale » de ces solutions (c'est-à-dire la stabilité globale de l'orbite) entraînera bien sûr la stabilité des solutions périodiques correspondantes de (1.1).

En fait  $y$  est solution stationnaire d'une équation d'évolution :

$$(1.5) \quad \frac{dy}{dt} = F(\mu, \varepsilon, y) - \omega L y.$$

On verra au paragraphe 5 en utilisant la « variété centrale » de (1.5) [7], que l'étude de la stabilité de ces solutions se ramène à l'étude de la stabilité des solutions correspondantes de l'équation dans  $V_0$ .

$$(1.6) \quad \frac{dX}{dt} = G(\mu, \varepsilon, \omega, X) - \omega LX.$$

Dans le paragraphe 2 on étudie la structure de l'équation (1.4) dans le cas  $l_0 = 2$  et sous les hypothèses (H-1), (H-2), (H-3), (H-4).

Dans les paragraphes 3 et 4 on calculera les solutions bifurquées et on étudiera leur stabilité. On verra notamment qu'il existe, outre les solutions purement stationnaires, deux types de solutions « ondes rotatives », dont l'interaction peut donner lieu à des

branchements secondaires ou tertiaires de solutions *périodiques*  $t \mapsto X(t)$  de l'équation (1.6), i. e. de solutions *quasi périodiques*  $t \mapsto Z(t)$  de l'équation (1.1) (deux fréquences couplées  $\omega$  et  $\omega_1$ ).

## 2. L'équation de bifurcation dans le cas $l_0 = 2$

Pour déterminer la forme « normale » (c'est-à-dire la plus simple possible) de l'équation (1.4), le point essentiel à noter est que l'application  $G(\mu, \varepsilon, \omega, \cdot)$  est covariante dans  $V_0$  par  $T_g^{(2)}$  ( $g \in \text{SO}(3)$ ) si  $\varepsilon = \omega = 0$ , et elle est covariante par  $T_\varphi^{(2)}$  ( $\varphi \in C_\infty$ ) si  $\varepsilon \neq 0$  [13].

On pose  $V_0^c = V_0 + iV_0$ . Il existe dans  $V_0^c$  une base orthonormée canoniquement<sup>(1)</sup> associée à la représentation irréductible  $T_g^{(2)}$ , notée  $\{\xi_k\}_{-l_0 \leq k \leq l_0}$  telle que :

$$(2.1) \quad \xi_{-k} = (-1)^k \bar{\xi}_k.$$

Soit  $X = \sum_{k=-l_0}^{l_0} x_k \xi_k$ . Comme on cherche  $X$  réel solution de (1.4), on doit avoir :

$$(2.2) \quad x_{-k} = (-1)^k \bar{x}_k.$$

De même,  $G$  étant une application réelle, si l'on pose :

$$G(\mu, \varepsilon, \omega, X) = \sum_{k=-l_0}^{l_0} g_k(\mu, \varepsilon, \omega, X) \xi_k, \quad \text{on doit avoir :}$$

$$(2.3) \quad g_{-k} = (-1)^k \bar{g}_k.$$

LEMME 1. —  $g_k(\mu, 0, 0, X) = a(\mu, |X|^2, p(X))x_k + b(\mu, |X|^2, p(X))B_k(X, X)$  ( $-2 \leq k \leq 2$ )  
où :

$$(i) \quad |X|^2 = x_0^2 + 2|x_1|^2 + 2|x_2|^2,$$

$$p(X) = \frac{2}{3}x_0^3 + 2x_0x_1\bar{x}_1 - 4x_0x_2\bar{x}_2 + \sqrt{6}(x_1^2\bar{x}_2 + \bar{x}_1^2x_2),$$

$$(ii) \quad B_0(X, X) = -\frac{1}{2}x_0^2 - \frac{1}{2}x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2,$$

$$B_1(X, X) = -\frac{1}{2}x_0x_1 - \frac{\sqrt{6}}{2}x_2\bar{x}_1,$$

$$B_2(X, X) = x_0x_2 - \frac{\sqrt{6}}{4}x_1^2,$$

(iii)  $a$  et  $b$  sont des fonctions analytiques réelles, et l'on a :

$$a(\mu, |X|^2, p(X)) = a_1\mu + a_2|X|^2 + a_3p(X) + 0[(|\mu| + |X|^2)^2],$$

$$b(\mu, |X|^2, p(X)) = b_1 + b_2\mu + b_3|X|^2 + 0(|\mu|^2 + |\mu| \cdot |X|^2 + |X|^3).$$

<sup>(1)</sup> On trouvera dans [13] toutes les précisions utiles sur cette base et son importance dans le calcul des applications covariantes par  $T_g^{(2)}$ .

La partie principale des fonctions  $g_k(\mu, 0, 0, X)$  avait été déterminée dans [3] en utilisant la méthode de calcul de Sattinger [13] pour calculer les tenseurs covariants par  $T_g^{(0)}$ ,  $g \in \text{SO}(3)$ . La détermination globale de la structure de  $G$  requiert une analyse un peu plus fine (voir [5]).

On remarquera que ce lemme donne la structure de l'équation de bifurcation pour le problème stationnaire lorsque  $\varepsilon = 0$ . On a montré dans [3] que les solutions dans ce cas sont toutes axisymétriques (i. e. invariants par les rotations autour d'un axe) et déductibles l'une de l'autre en appliquant simplement une rotation à leur axe de symétrie. On a donc en fait des orbites à deux paramètres de solutions lorsque  $\varepsilon = 0$ . Pour calculer les branches bifurquées il suffit de poser  $x_1 = x_2 \equiv 0$ . Dans ce cas  $g_1$  et  $g_2$  s'annulent identiquement, et il reste une seule équation réelle en  $x_0$  et  $\mu$ . La résolution de cette équation donne la solution axisymétrique par rapport à l'axe  $Oz$  (propriété du vecteur  $\xi_0$ ).

Pour le diagramme de bifurcation et de stabilité, plusieurs cas se présentent. On supposera toujours  $a_1 > 0$ , pour que la solution triviale perde sa stabilité lorsque  $\mu$  devient positif. La stabilité des solutions bifurquées sera du type *orbitale* [3].

Il y a alors deux cas :

(1)  $b_1 \neq 0$ . La bifurcation est alors transcritique, mais on montre qu'elle est instable des deux côtés du point de bifurcation [5].

(2)  $b_1 = 0$ . Si  $a_2 < 0$ , la bifurcation est supercritique, et l'une des branches est stable tandis que l'autre est instable. Par exemple on montre que si la quantité  $B = b_3 - a_1^{-1} a_2 b_2$  est négative la branche supérieure est stable (fig. 1).

Si  $a_2 > 0$ , la bifurcation est subcritique et instable (voir [3]).

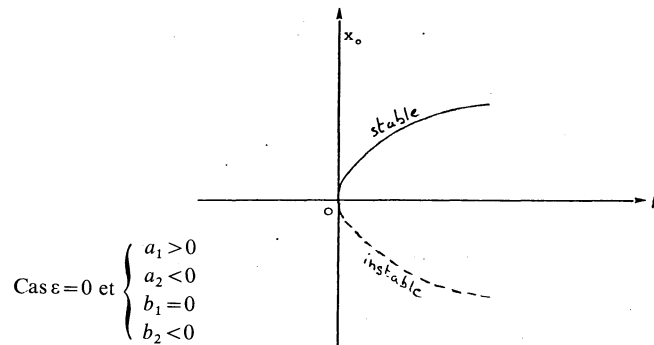


Fig. 1

Dans la suite on supposera toujours :

$$(H-5) \left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad a_1 > 0, \quad a_2 < 0 \text{ (cas « intéressants »);} \\ \text{(ii)} \quad b_1 \neq 0 \quad \text{ou} \quad b_1 = 0 \quad \text{et} \quad B = b_3 - a_1^{-1} a_2 b_2 \neq 0 \\ \text{(l'intérêt de cette hypothèse apparaîtra dans le calcul des solutions au} \\ \text{paragraphe 4).} \end{array} \right.$$

Revenons à présent au cas  $\varepsilon \neq 0$ .

LEMME 2. — Notons  $C_{v,v'}^{(k)}(\mu, \varepsilon, \omega)$   $x_0^{v_0} x_1^{v_1} \bar{x}_1^{v'_1} x_2^{v_2} \bar{x}_2^{v'_2}$  ( $v=(v_0, \dots, v_2)$ ,  $v'=(v'_0, \dots, v'_2)$ ) le terme général du développement de Taylor de  $g_k(\mu, \varepsilon, \omega, X)$  par rapport à  $X$ . Alors

$$v_1 - v'_1 + 2(v_2 - v'_2) = k.$$

Ce lemme est démontré dans [3] et résulte de la covariance de  $G(\mu, \varepsilon, \omega, \cdot)$  par  $T_\varphi$ ,  $\varphi \in C_\infty$ .  
D'après ce lemme, on a :

$$(2.4) \quad \begin{cases} g_1(\mu, \varepsilon, \omega, X) = x_1 g'_1(\mu, \varepsilon, \omega, X) + x_2 \bar{x}_1 g''_1(\mu, \varepsilon, \omega, X), \\ g_2(\mu, \varepsilon, \omega, X) = x_2 g'_2(\mu, \varepsilon, \omega, X) + x_1^2 g''_2(\mu, \varepsilon, \omega, X), \end{cases}$$

où les  $g'_k$ ,  $g''_k$  sont régulières en leurs arguments.

Dans la base canonique,  $L|_{V_0^{\mathbb{C}}}$  est la matrice diagonale

$$(2.5) \quad \begin{pmatrix} -2i & & & & & \\ & -i & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & i & \\ & 0 & & & & 2i \end{pmatrix}, \quad [11]$$

Par ailleurs on remarquera que l'on peut toujours choisir  $x_1$  réel, compte-tenu de l'invariance par  $T_\varphi$ ,  $\varphi \in C_\infty$  (« ajustage » de la phase arbitraire).

Finalement on peut écrire l'équation de bifurcation en termes de composantes dans la base canonique (il suffit d'écrire l'équation réelle dans la direction  $\xi_0$  et les équations complexes dans les directions  $\xi_1$  et  $\xi_2$ ) :

$$(2.6) \quad 0 = g_0(\mu, \varepsilon, \omega, X),$$

$$(2.7) \quad \omega i x_1 = x_1 g'_1(\mu, \varepsilon, \omega, X) + x_2 x_1 g''_1(\mu, \varepsilon, \omega, X),$$

$$(2.8) \quad 2\omega i x_2 = x_2 g'_2(\mu, \varepsilon, \omega, X) + x_1^2 g''_2(\mu, \varepsilon, \omega, X),$$

où  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ ,  $x_2 \in \mathbb{C}$ .

A présent on étudie la partie de ces équations invariantes par  $T_\varphi$  ( $\varphi \in C_\infty$ ) *seulement* (i. e. dépendant de  $\varepsilon$  et  $\omega$ ).

Posons :

$$h_k(\mu, \varepsilon, \omega, X) = g_k(\mu, \varepsilon, \omega, X) - g_k(\mu, 0, 0, X), \quad (k=0, 1, 2).$$

LEMME 3 :

$$\begin{aligned} h_0 &= \alpha_0 \varepsilon x_0 + \alpha_{00} \varepsilon x_0^2 + \alpha_{01} \varepsilon x_1 \bar{x}_1 + \alpha_{02} \varepsilon x_2 \bar{x}_2 + r_0, \\ h_1 &= (\alpha_1 + i\beta_1) \varepsilon x_1 + (\alpha_{10} + i\beta_{10}) \varepsilon x_0 x_1 + (\alpha_{11} + i\beta_{11}) \varepsilon x_2 \bar{x}_1 + r_1, \\ h_2 &= (\alpha_2 + i\beta_2) \varepsilon x_2 + (\alpha_{20} + i\beta_{20}) \varepsilon x_0 x_2 + (\alpha_{21} + i\beta_{21}) \varepsilon x_1^2 + r_2, \end{aligned}$$



où :

$$|r_0| + |r_1| + |r_2| = \varepsilon 0[|X|(|\mu| + |\varepsilon| + |X|^2)] + \omega 0[|X|(|\mu| + |\varepsilon| + |X|)^2].$$

*Démonstration.* — La forme du développement par rapport aux variables  $x_j$  est une conséquence du lemme 2.

Le fait que  $\omega$  n'apparaisse pas dans les termes d'ordre plus faible est dû à la décomposition de Lyapounov-Schmidt.

En effet, soit  $P_0$  la projection orthogonale sur  $V_0$ . On considère l'équation (1.3) et l'on pose  $X = P_0 y$ ,  $v = (1 - P_0)y$ . L'opérateur  $F$  s'écrit  $F(\mu, \varepsilon, y) = \mathcal{L}_0 y + R_{\mu, \varepsilon}(y)$ , où  $\mathcal{L}_0$  est auto-adjoint et :

$$(2.9) \quad \|R_{\mu, \varepsilon}(y)\| = \|y\| 0(|\mu| + |\varepsilon| + \|y\|).$$

L'équation (1.3) se décompose alors en une équation dans  $V_0$  :

$$(2.10) \quad \omega P_0 L(X+v) = P_0 R_{\mu, \varepsilon}(X+v)$$

et une équation dans  $V_0^\perp$  :

$$(2.11) \quad \omega(1 - P_0)L(X+v) = (1 - P_0)\mathcal{L}_0 v + (1 - P_0)R_{\mu, \varepsilon}(X+v).$$

Or on peut montrer (Sattinger [13]) que  $L$  commute avec  $P_0$  (on suppose que le domaine de définition de  $L$  contient celui de  $\mathcal{L}_{\mu, \varepsilon}$ ). D'où  $P_0 L(X+v) = LX$  et  $(1 - P_0)L(X+v) = Lv$ .

L'équation (2.11) se réécrit :

$$(2.12) \quad v = S[\omega Lv - (1 - P_0)R_{\mu, \varepsilon}(X+v)],$$

où  $S$  est le pseudo-inverse de  $\mathcal{L}_0$ , c'est-à-dire :

$$S\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_0 S = \text{Id} - P_0.$$

L'équation (2.12) donne  $v = v(\mu, \varepsilon, \omega, X)$  (au voisinage de 0) par le théorème des fonctions implicites, et en reportant  $v$  dans l'équation (2.10), on obtient l'équation «de bifurcation» (1.4).

En calculant la partie principale de  $v$ , on obtient le résultat cherché, compte tenu de (2.9).

*Remarque.* — On va toujours supposer que les coefficients  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  sont différents de 0. Ceci n'est pas toujours vrai. En particulier dans le cas du problème de Bénard sphérique avec rotation (convection dans un domaine sphérique), où  $\varepsilon$  représente la perturbation due à l'action de la rotation autour d'un axe (force de Coriolis), on peut montrer que tous les termes indépendants de  $\omega$  où  $\varepsilon$  apparaît avec une puissance impaire ont des coefficients imaginaires, les autres termes (indépendants de  $\omega$ ) ayant des coefficients réels. Une telle situation sera analysée dans un article différent, pour le problème de Bénard sphérique.

A présent on considère l'application linéaire :

$$(2.13) \quad A_{\mu, \varepsilon} = D_X G(\mu, \varepsilon, 0, 0).$$

D'après les lemmes 1 et 2, il est clair que  $A_{\mu, \varepsilon}$  est une matrice diagonale dans la base canonique de  $V_0$ , notée  $(\sigma_j(\mu, \varepsilon) \delta_{jk})_{-2 \leq j, k \leq 2}$ .

L'application linéaire  $A_{\mu, \varepsilon}$  possède donc, pour  $\varepsilon \neq 0$ , une valeur propre réelle  $\sigma_0(\mu, \varepsilon)$  et deux paires de valeurs propres complexes conjuguées  $(\sigma_1(\mu, \varepsilon), \bar{\sigma}_1(\mu, \varepsilon))$  et  $(\sigma_2(\mu, \varepsilon), \bar{\sigma}_2(\mu, \varepsilon))$ . D'après le lemme 3, ces valeurs propres ont un développement de Taylor de la forme suivante :

$$(2.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_0(\mu, \varepsilon) = a_1 \mu + \alpha_0 \varepsilon + 0[(|\mu| + |\varepsilon|)^2], \\ \operatorname{Re} \sigma_j(\mu, \varepsilon) = a_1 \mu + \alpha_j \varepsilon + 0[(|\mu| + |\varepsilon|)^2], \quad (j=1, 2), \\ \operatorname{Im} \sigma_j(\mu, \varepsilon) = \beta_j \varepsilon + \varepsilon 0(|\mu| + |\varepsilon|). \end{array} \right.$$

D'où l'existence de trois points de bifurcation à partir de la solution nulle :

$$(2.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_0(\varepsilon) = -\frac{\alpha_0}{a_1} \varepsilon + 0(|\varepsilon|^2) \quad \text{tel que } \sigma_0(\mu_0(\varepsilon), \varepsilon) = 0, \\ \mu_j(\varepsilon) = -\frac{\alpha_j}{a_1} \varepsilon + 0(|\varepsilon|^2) \quad \text{tel que } \operatorname{Re} \sigma_j(\mu_j(\varepsilon), \varepsilon) = 0, \quad j=1 \quad \text{ou} \quad 2. \end{array} \right.$$

Ces points seront ordonnés suivant le signe des quantités  $(\alpha_i - \alpha_j) \varepsilon$ .

$$(H-6) \quad \alpha_i - \alpha_j \neq 0 \quad (i \neq j), \quad \beta_j \neq 0.$$

Avec les trois lemmes précédents, on peut aisément calculer le développement en série de Taylor des équations de bifurcation (2.6)-(2.7)-(2.8). Il est clair d'autre part que la partie principale de ces équations contiendra des termes à un ordre plus élevé dans le cas où  $b_1 = 0$ . Ce cas sera étudié au paragraphe 4, tandis que le paragraphe 3 sera consacré au cas plus simple  $b_1 \neq 0$ .

Auparavant on remarquera que si  $x_1$  et  $x_2$  sont nuls, les équations (2.7) et (2.8) sont automatiquement vérifiées. L'équation (2.6) donne alors  $x_0(\mu, \varepsilon)$ , solution *purement stationnaire* ( $\omega$  n'intervient plus), se branchant à partir de la solution triviale en  $\mu = \mu_0(\varepsilon)$ . Inversement, on montre le résultat suivant (valable quel que soit  $b_1$ ) :

LEMME 4. — (i) Si  $\beta_1 \cdot \beta_2 > 0$ , les solutions telles que  $\omega = 0$  (solutions stationnaires pures) doivent vérifier  $x_1 = x_2 = 0$ .

(ii) Si  $\beta_1 \cdot \beta_2 < 0$ , d'autres solutions stationnaires pures, de la forme  $X = X(\varepsilon)$  et  $\mu = \mu(\varepsilon)$ , peuvent apparaître à partir de  $\mu = \mu_1(\varepsilon)$ .

*Démonstration.* — (1) Si  $x_1 \equiv 0$  on peut diviser (2.8) par  $x_2$  ( $x_2 \neq 0$ ). D'après le lemme 1 et le développement de  $h_2$ , la partie imaginaire de cette équation est alors de la forme (pour  $\omega = 0$ ) :

$$0 = \varepsilon [\beta_2 + 0(|\mu| + |\varepsilon| + |X|)],$$

qui n'a pas de solution voisine de 0 si  $\varepsilon \neq 0$ .

(2) Si  $x_1 \neq 0$ , on peut diviser (2.7) par  $x_1$ . Séparant la partie réelle et la partie imaginaire de cette équation, on obtient, par le théorème des fonctions implicites, lorsque  $\omega = 0$  :

$$(2.16) \quad \begin{cases} \mu = -a_1^{-1} \left[ b_1 \left( -\frac{1}{2} x_0 - \frac{\sqrt{6}}{2} \operatorname{Re} x_1 \right) + \alpha_1 \varepsilon + 0(|\varepsilon|^2 + |X|^2) \right], \\ \varepsilon = \frac{\sqrt{6}}{2} \frac{b_1}{\beta_1} \operatorname{Im} x_2 [1 + 0(|X|)] \end{cases}$$

(si  $b_1 = 0$  il faut considérer l'ordre supérieur mais cela ne change pas la démonstration).

En reportant (2.16) dans la partie imaginaire de (2.8), on obtient :

$$(2.17) \quad x_0 = -\frac{\sqrt{6}}{3} \left( 1 + \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \operatorname{Re} x_2 - \frac{\sqrt{6}}{3} \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\beta_1} \operatorname{Im} x_2,$$

puis reportant (2.16) et (2.17) dans la partie réelle de (2.8), on trouve :

$$(2.18) \quad 0 = -\frac{\sqrt{6}}{2} b_1 \left( \frac{x_1^2}{2} + \frac{\beta_2}{\beta_1} |x_2|^2 \right) + 0(|x_1|^2 + |x_2|^2);$$

– si  $\beta_2/\beta_1 > 0$ , (2.18) n'a pas de solution voisine de 0 (et  $\neq 0$ );

– si  $\beta_2/\beta_1 < 0$ , (2.18) donne  $x_1^2 = 0(|x_2|^2)$ , et en reportant (2.16), (2.17) et (2.18) dans l'équation (2.6), on peut trouver une relation entre  $\operatorname{Im} x_2$  et  $\operatorname{Re} x_2$  (éventuellement  $\operatorname{Im} x_2 = \operatorname{Re} x_2 = 0$ , auquel cas, d'après (2.16) il n'existe pas de solution  $\neq 0$  pour  $\varepsilon \neq 0$ ). D'où, d'après l'expression de  $\varepsilon$  dans (2.16), la partie (ii) du lemme.

On verra que la solution stationnaire pure bifurquant (éventuellement) à partir de  $\mu_1(\varepsilon)$ , dans le cas  $\beta_1 \beta_2 < 0$ , peut être considéré comme un cas « singulier » de l'onde rotative apparaissant en  $\mu_1(\varepsilon)$ . Il est donc naturel de considérer trois types de solutions :

- (1) solution stationnaire *pure*  $\omega = 0$ ,  $x_1 = x_2 \equiv 0$ ;
- (2) solution « onde rotative » de 1<sup>re</sup> espèce  $\omega \neq 0$ ,  $x_1 \equiv 0$  (car  $x_1 = 0 \Rightarrow$  (2.7) automatiquement vérifiée);
- (3) solution « onde rotative » de 2<sup>e</sup> espèce  $\omega \neq 0$ ,  $x_1 \neq 0$ .

Les paragraphes suivants suivent le même plan :

- (1) calcul et stabilité des solutions stationnaires pures;
- (2) calcul et stabilité des ondes rotatives de 1<sup>re</sup> espèce;
- (3) calcul et stabilité des ondes rotatives de 2<sup>e</sup> espèce;
- (4) diagramme des branches de solutions bifurquées, et stabilité.

### 3. Bifurcation et stabilité dans le cas $b_1 \neq 0$

On étudie les trois types de solutions précédemment décrites. Si  $(\omega, X_0)$  est une telle solution, sa stabilité [au sens de l'équation (1.6)] sera donnée par le signe de la partie réelle des valeurs propres de l'application  $\mathcal{A}_{\mu, \varepsilon} : V_0^C \rightarrow V_0^C$  définie par :

$$(3.1) \quad \mathcal{A}_{\mu, \varepsilon} = D_X G(\mu, \varepsilon, \omega, X_0) - \omega L.$$

A présent on tronque délibérément le développement des équations (2.6)-(2.7)-(2.8) afin de simplifier les calculs. La justification de ce tronquage sera faite en 5. Les équations « tronquées » sont :

$$(3.2) \quad 0 = a_1 \mu x_0 + b_1 \left( -\frac{1}{2} x_0^2 - \frac{1}{2} x_1^2 + x_2 \bar{x}_2 \right) + \alpha_0 \varepsilon x_0,$$

$$(3.3) \quad i \omega x_1 = a_1 \mu x_1 - b_1 \left( \frac{1}{2} x_0 x_1 + \frac{\sqrt{6}}{2} x_2 x_1 \right) + (\alpha_1 \varepsilon + i \beta_1 \varepsilon) x_1,$$

$$(3.4) \quad 2 i \omega x_2 = a_1 \mu x_2 + b_1 \left( x_0 x_2 - \frac{\sqrt{6}}{4} x_1^2 \right) + (\alpha_2 \varepsilon + i \beta_2 \varepsilon) x_2.$$

3.1. SOLUTIONS STATIONNAIRES PURES. —  $\omega = 0$ ,  $x_1 = x_2 \equiv 0$ . Les équations (3.3) et (3.4) sont automatiquement vérifiées et l'équation (3.2) donne (pour  $x_0 \neq 0$ ) :

$$(3.5) \quad \mu = \frac{1}{2} \frac{b_1}{a_1} x_0 - \frac{\alpha_0}{a_1} \varepsilon.$$

La bifurcation est transcritique et tend vers la solution  $x_1 = x_2 = 0$  du problème avec  $\varepsilon = 0$ .

Pour cette solution la matrice  $\mathcal{A}_{\mu, \varepsilon}$  exprimée dans la base canonique de  $V_0^{\mathbb{C}}$  est diagonale (dém. au paragraphe 5). Pour le système tronqué on en déduit aisément ses valeurs propres en fonction de  $\varepsilon$  et  $x_0$ . On trouve :

$$(3.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_0 = -\frac{1}{2} b_1 x_0, \\ \operatorname{Re} \sigma_1 = \varepsilon (\alpha_1 - \alpha_0), \\ \operatorname{Re} \sigma_2 = \frac{3}{2} b_1 x_0 + \varepsilon (\alpha_2 - \alpha_0). \end{array} \right.$$

Pour fixer les idées on peut supposer  $b_1 > 0$  (le cas  $b_1 < 0$  s'en déduit en changeant  $x_0$  en  $-x_0$ ). Les quantités (3.6) seront alors simultanément négatives si :

$$(1) \quad (\alpha_1 - \alpha_0) \varepsilon < 0,$$

$$(2) \quad (\alpha_2 - \alpha_0) \varepsilon < 0 \quad \text{et} \quad 0 < x_0 < \hat{x}_0 \quad \text{où} \quad \hat{x}_0 = -\frac{2(\alpha_2 - \alpha_0)}{3b_1} \varepsilon.$$

Dans ce cas on aura donc le diagramme (fig. 2) où  $\mu_0 = -\alpha_0/a_1 \varepsilon$ ,  $\hat{\mu}_0 = -(\alpha_2 + 2\alpha_0)/3a_1 \varepsilon$ .

Le trait plein indique la partie « stable ».

*Remarque.* — La stabilité « orbitale » (au sens de [3]) se confond avec la stabilité au sens « classique » ( $0$  n'est pas valeur propre de  $\mathcal{A}_{\mu, \varepsilon}$  pour  $\varepsilon \neq 0$ ) car les solutions  $X_0 = x_0 \zeta_0$  sont

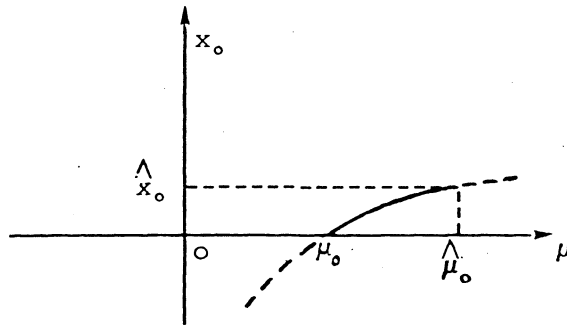


Fig. 2

invariantes par  $T_\varphi : T_\varphi \xi_0 = \xi_0$ , quel que soit  $\varphi \in C_\infty$ . L'orbite de solutions est réduite à un point.

3.2. ONDES ROTATIVES DE 1<sup>re</sup> ESPÈCE :  $\omega \neq 0$ ,  $x_1 \equiv 0$ . — Divisant l'équation (3.4) par  $x_2$  et séparant la partie réelle et la partie imaginaire, on trouve :

$$(3.7) \quad \mu = -\frac{b_1}{a_1} x_0 - \frac{\alpha_2}{a_1} \varepsilon,$$

$$(3.8) \quad \omega = \frac{1}{2} \beta_2 \varepsilon.$$

Comme  $x_1 \equiv 0$ , on peut toujours supposer  $x_2$  réel.

Reportant (3.7) dans l'équation (3.2), on obtient alors :

$$(3.9) \quad 0 = b_1 \left( \frac{3}{2} x_0^2 - x_2^2 \right) + (\alpha_2 - \alpha_0) \varepsilon x_0.$$

Pour  $\varepsilon$  fixé, (3.9) est l'équation d'une hyperbole admettant les droites :

$$x_2 = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \left[ x_0 + \left( \frac{\alpha_2 - \alpha_0}{3 b_1} \right) \varepsilon \right]$$

pour asymptotes. Suivant le signe de  $(\alpha_2 - \alpha_0) b_1$ , deux cas se présentent (fig. 3).

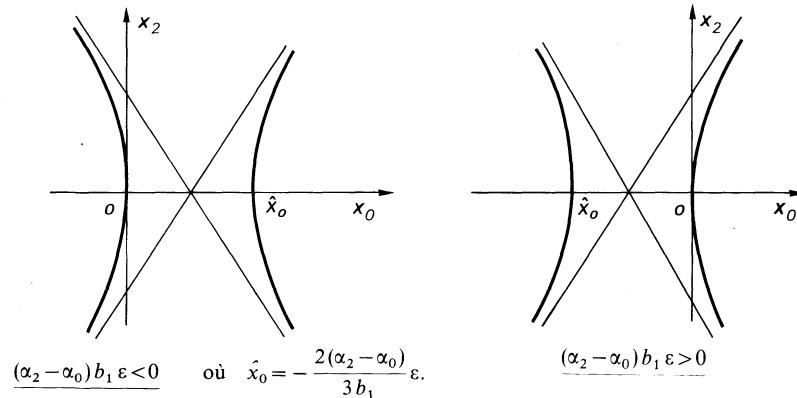


Fig. 3

Outre la branche de solutions bifurquant à partir de  $\mu_2 = -(\alpha_2/a_1)\varepsilon$  et  $x_0 = x_1 = x_2 = 0$  (bifurcation primaire), il existe une branche passant par le point :

$$\hat{\mu}_0 = \frac{-\alpha_2 - 2\alpha_0}{3a_1} \varepsilon, \quad \hat{x}_0 = x_0 \quad \text{et} \quad x_1 = x_2 = 0.$$

Il s'agit d'une bifurcation *secondaire* à partir de la solution stationnaire pure, en  $\mu = \hat{\mu}_0$ .

On vérifie facilement que si  $(\alpha_2 - \alpha_0)\varepsilon > 0$ , la bifurcation primaire est *subcritique* et la bifurcation secondaire est *supercritique*, tandis que si  $(\alpha_2 - \alpha_0)\varepsilon < 0$ , la bifurcation primaire est *supercritique* et la bifurcation secondaire est *subcritique*.

On remarque enfin que lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , les courbes (3.9) tendent uniformément vers les droites  $x_2 = \pm\sqrt{3/2}x_0$ . Or ces droites sont solutions du problème avec  $\varepsilon = 0$  [cas complètement invariant par  $SO(3)$ ]. Elles correspondent à des solutions axisymétriques par rapport à un axe  $Oz'$  obtenu en faisant tourner l'axe  $Oz$  avec les angles  $\eta = \pi/2$  et  $\varphi = \pm\pi/2$  (voir [3]).

*Stabilité.* — On note  $V^{(0)}$  le sous-espace de  $V_0^{\mathbb{C}}$  engendré par  $\{\xi_0, \xi_2, \bar{\xi}_2\}$  et  $V^{(1)}$  le sous-espace engendré par  $\{\xi_1, \bar{\xi}_1\}$ .

LEMME 4. — Pour les ondes rotatives de 1<sup>re</sup> espèce :

$$\mathcal{A}_{\mu, \varepsilon} = (A_{\mu, \varepsilon}^{(0)}, A_{\mu, \varepsilon}^{(1)}), \quad \text{où} \quad A_{\mu, \varepsilon}^{(0)} \in \mathcal{L}(V^{(0)}) \quad \text{et} \quad A_{\mu, \varepsilon}^{(1)} \in \mathcal{L}(V^{(1)}).$$

Ce lemme est aisément vérifié sur les équations complètes (2.6)-(2.7)-(2.8) en utilisant le lemme 2. Dans les bases ci-dessus, on a (pour le système d'équations tronquées) :

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{\mu, \varepsilon}^{(0)} = \begin{pmatrix} -2b_1 x_0 + (\alpha_0 - \alpha_2)\varepsilon & b_1 x_2 & b_1 x_2 \\ b_1 x_2 & 0 & 0 \\ b_1 x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ A_{\mu, \varepsilon}^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}b_1 x_0 + (\alpha_1 - \alpha_2)\varepsilon + i\left(\beta_1 - \frac{\beta_2}{2}\right)\varepsilon & -\frac{\sqrt{6}}{2}b_1 x_2 \\ -\frac{\sqrt{6}}{2}b_1 x_2 & -\frac{3}{2}b_1 x_0 + (\alpha_1 - \alpha_2)\varepsilon - i\left(\beta_1 - \frac{\beta_2}{2}\right)\varepsilon \end{pmatrix}, \end{array} \right.$$

$\varepsilon$ ,  $x_0$  et  $x_2$  étant liés par la relation (3.9).

(1) Le calcul des valeurs propres de  $A_{\mu, \varepsilon}^{(0)}$  montre que celles-ci sont 0 d'une part et deux valeurs propres réelles de signes *opposés* d'autre part. Donc  $\mathcal{A}_{\mu, \varepsilon}$  possède toujours une valeur propre positive, ce qui entraîne l'instabilité des ondes rotatives de 1<sup>re</sup> espèce.

(2) L'équation caractéristique de  $A_{\mu, \varepsilon}^{(1)}$  s'écrit :

$$(3.11) \quad 0 = \lambda^2 - 2\left(-\frac{3}{2}b_1 x_0 + (\alpha_1 - \alpha_2)\varepsilon\right)\lambda + \left(-\frac{3}{2}b_1 x_0 + (\alpha_1 - \alpha_2)\varepsilon\right)^2 + \left(\beta_1 - \frac{\beta_2}{2}\right)^2 \varepsilon^2 - \frac{3}{2}b_1^2 x_2^2.$$

Un calcul simple montre que la condition pour que (3.11) puisse avoir deux racines imaginaires pures, avec  $(\varepsilon, x_0, x_1)$  vérifiant (3.9), est que :

$$(3.12) \quad 0 < (\alpha_1 - \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_2) < \left(\beta_1 - \frac{\beta_2}{2}\right)^2.$$

Dans ce cas il y a donc possibilité de bifurcation de Hopf, à partir de l'onde rotative de 1<sup>re</sup> espèce, c'est-à-dire de bifurcation de solutions quasi périodiques pour l'équation (1.1).

L'étude du branchement de solutions quasi périodiques à partir d'une onde rotative a été faite, dans un contexte différent (bifurcation à un paramètre), par Renardy [12].

3.3. ONDES ROTATIVES DE 2<sup>e</sup> ESPÈCE :  $\omega \neq 0, x_1 \equiv 0$ . — On divise l'équation (3.3) par  $x_1$ . En notant  $\text{Re } x_2$  la partie réelle et  $\text{Im } x_2$  la partie imaginaire de  $x_2$ , on en déduit :

$$(3.13) \quad \mu = a_1^{-1} \left[ \frac{b_1}{2} x_0 + \frac{\sqrt{6}}{2} b_1 \text{Re } x_2 - \alpha_1 \varepsilon \right],$$

$$(3.14) \quad \omega = -\frac{\sqrt{6}}{2} b_1 \text{Im } x_2 + \beta_1 \varepsilon.$$

Reportant ces expressions dans les équations (3.2) et (3.4), on obtient :

$$(3.15) \quad 0 = b_1 \left( \frac{\sqrt{6}}{2} x_0 \text{Re } x_2 - \frac{1}{2} x_1^2 + |x_2|^2 \right) + (\alpha_0 - \alpha_1) \varepsilon x_0,$$

$$(3.16) \quad 0 = b_1 \left( \frac{3}{2} x_0 x_2 - \frac{\sqrt{6}}{4} x_1^2 + \sqrt{6} x_2^2 - \frac{\sqrt{6}}{2} \text{Re } x_2 x_2 \right) + (\alpha_2 - \alpha_1 + i(\beta_2 - 2\beta_1)) \varepsilon x_2,$$

Ces équations représentent une courbe dans  $\mathbb{R}^4$ , intersection de trois quadriques (pour  $\varepsilon$  fixé).

On va simplement calculer la solution dans un voisinage suffisamment petit du point de bifurcation  $\mu_1 = -\alpha_1/a_1 \varepsilon, x_0 = x_1 = x_2 = 0$ . La direction de la tangente à l'origine (intersection des trois plans tangents) suggère de prendre  $x_0, x_2$  fonctions de  $x_1$ . Pour cela on fait le changement d'échelle :

$$x_0 = \varepsilon \tilde{x}_0, \quad x_1 = \varepsilon \tilde{x}_1, \quad x_2 = \varepsilon \tilde{x}_2 = \varepsilon(s + it).$$

D'où les trois équations réelles :

$$(3.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = b_1 \left( \frac{\sqrt{6}}{2} \tilde{x}_0 s + \frac{s}{2} \tilde{x}_1^2 + |\tilde{x}_2|^2 \right) + (\alpha_0 - \alpha_1) \tilde{x}_0, \\ 0 = b_1 \left( \frac{3}{2} \tilde{x}_0 t - \frac{\sqrt{6}}{4} \tilde{x}_1^2 + \frac{\sqrt{6}}{2} s^2 - \sqrt{6} t^2 \right) + (\alpha_2 - \alpha_1) s - (\beta_2 - 2\beta_1) t, \\ 0 = b_1 \left( \frac{3}{2} \tilde{x}_0 t - 3 \frac{\sqrt{6}}{2} st \right) + (\alpha_2 - \alpha_1) t + (\beta_2 - 2\beta_1) s. \end{array} \right.$$

On peut résoudre (3.17) au voisinage de 0 en prenant  $\tilde{x}_1$  comme paramètre. En effet, si on écrit ce système :

$$0 = \mathcal{F}_\varepsilon(x_0, x_1, s, t),$$

on a :

$$D_{(\tilde{x}_0, s, t)} \mathcal{F}_\varepsilon(0, 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} \alpha_0 - \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 - \alpha_1 & -(\beta_2 - 2\beta_1) \\ 0 & \beta_2 - 2\beta_1 & \alpha_2 - \alpha_1 \end{pmatrix},$$

qui est non-singulière car  $\alpha_0 - \alpha_1 \neq 0$  et  $\alpha_2 - \alpha_1 \neq 0$ .

On trouve ainsi :

$$(3.18) \quad \begin{cases} \tilde{x}_0 = \frac{b_1}{2(\alpha_0 - \alpha_1)} \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_1^2 o(1), \\ \tilde{x}_2 = \frac{\sqrt{6}}{4} \frac{b_1}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2 - 2\beta_1)^2} (\alpha_2 - \alpha_1 + i(\beta_2 - 2\beta_1)) \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_1^2 o(1). \end{cases}$$

Reportant (3.18) dans l'expression de  $\mu$  (3.13), on trouve :

$$(3.19) \quad \mu - \mu_1 = -\frac{b_1^2}{4a_1} \left[ \frac{1}{\alpha_0 - \alpha_1} + \frac{3(\alpha_2 - \alpha_1)}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2 - 2\beta_1)^2} \right] \frac{x_1^2}{\varepsilon} + \frac{x_1^2}{\varepsilon} o(1).$$

Par conséquent la bifurcation est *subcritique* si  $(\alpha_0 - \alpha_1)\varepsilon > 0$  et  $(\alpha_2 - \alpha_1)\varepsilon > 0$  i. e. si  $\mu_1$  est le *premier* point de bifurcation (d'où l'instabilité des solutions correspondantes).

*Remarque.* — Si on pose  $\omega = 0$  dans (3.14), on trouve :

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{6}}{2} \frac{b_1}{\beta_1} \operatorname{Im} x_2.$$

D'après le lemme 4, il peut exister, si  $\beta_1 \beta_2 < 0$ , de telles solutions, qui sont en fait des ondes « stationnaires ».

#### 3.4. Diagrammes de bifurcation et de stabilité (fig. 4) :

— Les branches (1) représentent les solutions stationnaires pures, les branches (2) les solutions « ondes rotatives » de 1<sup>re</sup> espèce, les branches (3) les solutions « ondes rotatives » de 2<sup>e</sup> espèce (dessinées en projection sur le plan des composantes  $(x_0, \operatorname{Re} x_2)$ ). Les branches stables sont indiquées en traits pleins.

— Les points où une bifurcation de solutions périodiques de (1.6) [i. e. de solutions quasi périodiques de (1.1)] peut exister, sont indiquées par une croix X.

— On se place dans le cas  $b_1 > 0$  (le cas  $b_1 < 0$  s'en déduit simplement en changeant  $x_0$  en  $-x_0$ ).

*Remarque.* — Les fréquences des ondes rotatives sont petites : d'après (3.8) et (3.14), elles tendent vers 0 quand  $\varepsilon$  tend vers 0.



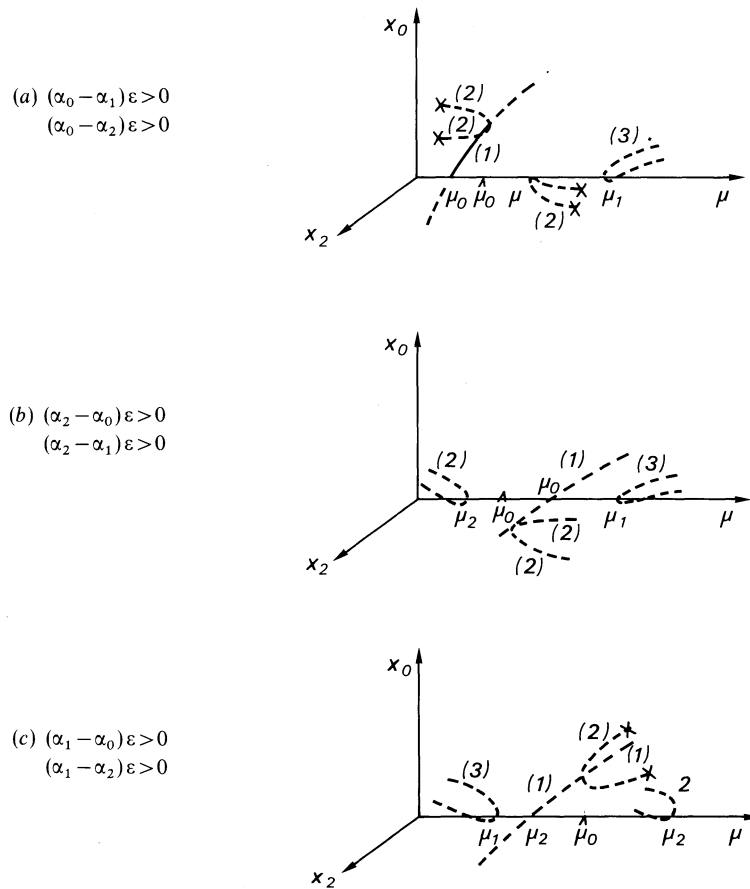


Fig. 4. — Diagrammes de bifurcation et de stabilité dans le cas  $b_1 > 0$ .

Les autres cas de figure possibles n'apportant pas de situation qualitativement différente (en particulier en ce qui concerne la stabilité des solutions).

#### 4. Bifurcation et stabilité dans le cas $b_1 = 0$

Comme dans le cas  $b_1 \neq 0$ , on simplifie les équations (2.6)-(2.7)-(2.8) en tronquant leur développement. (Cette opération est justifiée au paragraphe 5.)

$$(4.1) \quad 0 = ax_0 + (b_2 \mu + b_3 |X|^2) \left( -\frac{1}{2} x_0^2 - \frac{1}{2} x_1^2 + |x_2|^2 \right) \\ + \alpha_0 \varepsilon x_0 + \alpha_{00} \varepsilon x_0^2 + \alpha_{01} \varepsilon x_1^2 + \alpha_{02} \varepsilon |x_2|^2,$$

$$(4.2) \quad i\omega x_1 = ax_1 + (b_2\mu + b_3|X|^2) \left( -\frac{1}{2}x_0x_1 - \frac{\sqrt{6}}{2}x_2x_1 \right) \\ + (\alpha_1 + i\beta_1)\varepsilon x_1 + (\alpha_{10} + i\beta_{10})\varepsilon x_0x_1 + (\alpha_{11} + i\beta_{11})\varepsilon x_2x_1,$$

$$(4.3) \quad 2i\omega x_2 = ax_2 + (b_2\mu + b_3|X|^2) \left( x_0x_2 - \frac{\sqrt{6}}{4}x_1^2 \right) \\ + (\alpha_2 + i\beta_2)\varepsilon x_2 + (\alpha_{20} + i\beta_{20})\varepsilon x_0x_2 + (\alpha_{21} + i\beta_{21})\varepsilon x_1^2$$

où :

$$(4.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = a_1\mu + a_2|X|^2 + a_3p(X) \quad \text{avec } a_1 > 0 \text{ et } a_2 < 0 \text{ [hypothèse (H-5)],} \\ |X|^2 = x_0^2 + 2x_1^2 + 2|x_2|^2, \\ p(X) = \frac{2}{3}x_0^3 + 2x_0x_1^2 - 4x_0|x_2|^2 + \sqrt{6}x_1^2(x_2 + \bar{x}_2). \end{array} \right.$$

4.1. SOLUTIONS STATIONNAIRES PURES :  $\omega = 0$ ,  $x_1 \equiv x_2 \equiv 0$ . — Les équations (4.2) et (4.3) sont identiquement vérifiées (4.1) donne :

$$(4.5) \quad \mu = -a_1^{-1} \left[ a_2x_0^2 + \left( \frac{2}{3}a_3 - \frac{1}{2}B \right) x_0^3 + \alpha_0\varepsilon + \alpha_{00}\varepsilon x_0 + 0(|x_0|^4 + |\varepsilon| \cdot |x_0|^2) \right],$$

où  $B = b_3 - a_1^{-1}a_2b_3 \neq 0$  (par l'hypothèse (H-5)).

Au point  $\mu_0 = -(\alpha_0/a_1)\varepsilon$ , la bifurcation est transcritique supérieurement (i. e. pour  $x_0 > 0$ ) si  $\alpha_{00}\varepsilon > 0$ , transcritique inférieurement si  $\alpha_{00}\varepsilon < 0$  (fig. 5).

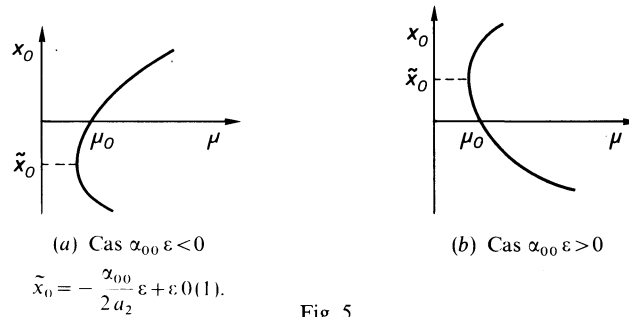


Fig. 5

La stabilité de ces solutions s'obtient en étudiant le signe de la partie réelle des valeurs propres de l'application  $\mathcal{A}_{\mu, \varepsilon}$  définie par (3.1).

Comme dans le cas  $b_1 = 0$ , la matrice de  $\mathcal{A}_{\mu, \varepsilon}$  dans la base canonique de  $V_0^{\mathbb{C}}$  est diagonale, ce qui permet de calculer aisément ses valeurs propres. On obtient leurs parties principales de la forme :

$$(4.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_0 = 2a_2x_0^2 + \alpha_{00}\varepsilon x_0, \\ \sigma_1 = (\alpha_1 - \alpha_0)\varepsilon + i\beta_1\varepsilon, \\ \sigma_2 = \frac{3}{2}x_0^3B + (\alpha_2 - \alpha_0)\varepsilon + i\beta_2\varepsilon. \end{array} \right.$$

(i) Si  $\varepsilon \alpha_{00} < 0$ ,  $\sigma_0 < 0$  ssi  $\tilde{x}_0 < x_0 < 0$ .

Si  $\varepsilon \alpha_{00} > 0$ ,  $\sigma_0 < 0$  ssi  $0 < x_0 < \tilde{x}_0$ .

Ceci correspond au phénomène classique de changement de signe de la valeur propre (cas d'une valeur propre simple) au point de retournement.

(ii)  $\text{Re } \sigma_1 < 0$  ssi  $(\alpha_1 - \alpha_0) \varepsilon < 0$ , i. e.  $\mu_0 < \mu_1$ .

(iii) On suppose  $\mathbf{B} < 0$ . Comme on l'a vu au paragraphe 2, ceci entraîne la stabilité (orbitale) des solutions stationnaires dans le cas  $\varepsilon = 0$ , correspondant à la branche supérieure du diagramme de bifurcation (voir *fig. 1*).

Il est clair que cette hypothèse ne restreint pas la généralité (si  $\mathbf{B}_2 > 0$  il suffit de changer le signe de  $\alpha_{00}$  pour retrouver le même résultat). On a alors :

$$(4.7) \quad \text{Re } \sigma_2 < 0 \quad \text{ssi } x_0 > \hat{x}_0 \quad \text{où } \hat{x}_0 = -\left(\frac{2(\alpha_2 - \alpha_0)}{3\mathbf{B}}\right)^{1/3} \varepsilon^{1/3}.$$

Les valeurs propres  $\sigma_2$  et  $\bar{\sigma}_2$  traversent l'axe imaginaire lorsque  $\hat{x}_0$ . On verra qu'en ce point se branchent des solutions du type ondes rotatives de 1<sup>re</sup> espèce.

On résume ces résultats dans les diagrammes suivants (*fig. 6*).

Les solutions stables sont indiquées en traits pleins. On représente le cas  $(\alpha_1 - \alpha_0) \varepsilon < 0$ .

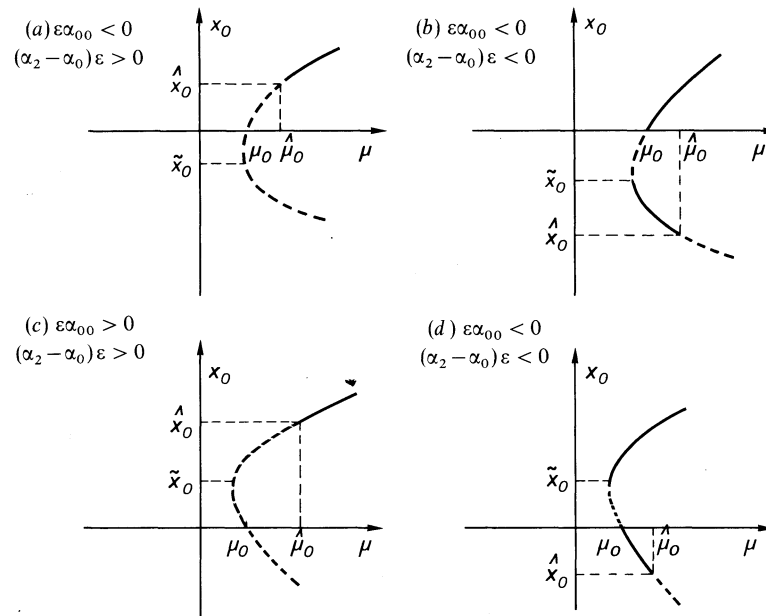


Fig. 6

$$\hat{\mu}_0 = -\frac{a_2}{a_1} \left( \frac{2(\alpha_2 - \alpha_0)}{3\mathbf{B}} \right)^{2/3} \varepsilon^{2/3} + \varepsilon^{2/3} o(1)$$

[d'où  $\hat{\mu}_0 > \mu_j$ ,  $j=0, 1, 2$  puisque  $\mu_j = 0(\varepsilon)$ ]

4.2. ONDES ROTATIVES DE 1<sup>re</sup> ESPÈCE :  $\omega \neq 0$ ,  $x_1 \equiv 0$ . — On divise (4.3) par  $x_2 \neq 0$  (on peut supposer  $x_2 \in \mathbb{R}$ ), ce qui donne, après séparation en partie réelle et en partie imaginaire :

$$(4.8) \quad \mu = -a_1^{-1} \left[ a_2 (x_0^2 + 2x_2^2) + a_3 \left( \frac{2}{3} x_0^3 - 4x_0 x_2^2 \right) + \mathbf{B} (x_0^2 + 2x_2^2) x_0 + \alpha_2 \varepsilon + \alpha_{20} \varepsilon x_0 + 0 (|\mathbf{X}|^4 + |\varepsilon| |\mathbf{X}|^2) \right],$$

$$(4.9) \quad 2\omega = \beta_2 \varepsilon + \beta_{20} \varepsilon x_0.$$

En reportant (4.8) dans l'équation (4.1) on obtient comme partie principale :

$$(4.10) \quad 0 = \mathbf{B} (x_0^2 + 2x_2^2) \left( \frac{3}{2} x_0^2 - x_2^2 \right) + (\alpha_2 - \alpha_0) \varepsilon x_0 - \alpha_{02} \varepsilon x_2^2,$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$(4.11) \quad 0 = (x_0^2 + 2x_2^2) \left( \frac{3}{2} x_0^2 - x_2^2 \right) + v \varepsilon x_0 + v' \varepsilon x_2^2,$$

où  $v = (\alpha_2 - \alpha_0)/\mathbf{B}$  et  $v' = -\alpha_{02}/\mathbf{B}$ .

Pour  $\varepsilon$  fixé, (4.11) est l'équation qu'une quartique formée de deux composantes connexes et admettant les asymptotes  $x_2 = \pm \sqrt{(3/2)} x_0$ .

On représente ces courbes sur les figures (7a, b) dans le cas  $v\varepsilon > 0$  (le cas  $v\varepsilon < 0$  s'en déduit par la symétrie  $x_0 \rightarrow -x_0$ ).

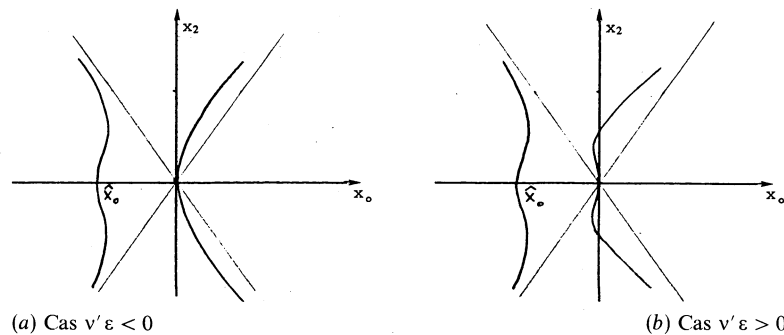


Fig. 7

$\hat{x}_0$  est défini par (4.7)

On vérifie aisément que la branche passant par  $\hat{x}_0$  est une bifurcation *secondaire* à partir des solutions stationnaires pures, au point  $\mu = \hat{\mu}_0 = \mu(\hat{x}_0)$ ,  $x_0 = \hat{x}_0$ ,  $x_2 = 0$ .

Au voisinage du point de bifurcation primaire  $\mu_2 = -(\alpha_2/a_1)\varepsilon$ ,  $x_0 = x_2 = 0$ , on a, compte tenu de (4.10) :

$$\mu = \mu_2 - \frac{a_2}{a_1} (x_0^2 + 2x_2^2) + 0 (|\mathbf{X}|^3 + |\varepsilon| |\mathbf{X}|^2),$$

la bifurcation est donc supercritique.

De même, au voisinage de  $\hat{\mu}_0$ ,  $x_0 = \hat{x}_0$ ,  $x_2 = 0$ , on a :

$$\mu = \hat{\mu}_0 - 2 \frac{a_2}{a_1} x_2^2 + x_2^2 o(1),$$

donc la bifurcation secondaire est, elle aussi, supercritique.

Enfin, on remarque que lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , les courbes définies par (4.11) tendent uniformément vers les droites  $x_2 = \pm \sqrt{(3/2)} x_0$ , lesquelles correspondent aux solutions stationnaires pures du problème avec  $\varepsilon = 0$ , déduites de la solution  $x_1 = x_2 = 0$  par une rotation d'angles  $\eta = \pi/2$  et  $\varphi = \pm \pi/2$  (voir paragraphe 3.2), la fréquence  $\omega$  tendant vers 0 avec  $\varepsilon$ , les ondes rotatives de 1<sup>re</sup> espèce tendent vers ces solutions stationnaires pures lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

*Stabilité.* — Le lemme 4 s'applique. On a :

$$A_{\mu, \varepsilon}^{(0)} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ c & d & d \\ \bar{c} & d & d \end{pmatrix},$$

avec, pour les parties principales,

$$(4.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 2a_2 x_0^2 - (4a_3 + 2b_3) x_0 x_2^2 + (2a_3 - 3b_3) x_0^3 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + 2a_1^{-1} a_2 b_2 (x_0^2 + 2x_2^2) x_0 + (\alpha_0 - \alpha_2) \varepsilon, \\ b = 2a_2 x_0 x_2 - 4a_3 x_0^2 x_2 + 4b_3 x_2^3 - a_1^{-1} a_2 b_2 (x_0^2 + 2x_2^2) x_2 + \alpha_{02} \varepsilon x_2, \\ c = 2a_2 x_0 x_2 + (2a_3 + 3b_3) x_0^2 x_2 - (4a_3 - 2b_3) x_2^3 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad - a_1^{-1} a_2 b_3 (x_0^2 + 2x_2^2) x_2 + (\alpha_{20} + i\beta_{20}) \varepsilon x_3, \\ d = 2a_2 x_2^2 - (4a_3 - 2b_2) x_0 x_2^2. \end{array} \right.$$

De même :

$$A_{\mu, \varepsilon}^{(1)} = \begin{pmatrix} f & g \\ \bar{g} & f \end{pmatrix}$$

avec, pour les parties principales :

$$(4.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} f = -\frac{3}{2} \mathbf{B}(x_0^2 + 2x_2^2) x_0 + (\alpha_1 - \alpha_2) \varepsilon + i \left( \beta_1 - \frac{\beta_2}{2} \right) \varepsilon, \\ g = -\frac{\sqrt{6}}{2} \mathbf{B}(x_0^2 + 2x_2^2) x_2 + (\alpha_{11} + i\beta_{11}) \varepsilon x_2. \end{array} \right.$$

(1) *Valeurs propres de  $A_{\mu, \varepsilon}^{(0)}$ .* — 0 est valeur propre, et les deux autres valeurs propres sont racines de :

$$(4.14) \quad 0 = \lambda^2 - (a + 2d)\lambda + 2(ad - b \operatorname{Re} c).$$

Le discriminant de (4.14) est  $\Delta = (a - 2d)^2 + 8b \operatorname{Re} c$ .

Il est aisé de vérifier que pour  $|\varepsilon| + |x_0| + |x_2|$  assez petit,  $\Delta > 0$ . D'où deux valeurs propres réelles  $\sigma_0$  et  $\sigma_2$ .

D'autre part le calcul de la partie principale de  $ad - b \operatorname{Re} c$  donne :

$$ad - b \operatorname{Re} c \sim -8 a_2 \mathbf{B} x_0 x_2^2 (x_0^2 + 2 x_2^2) + 2 a_2 (\alpha_0 - \alpha_2) \varepsilon x_2.$$

Si  $ad - b \operatorname{Re} c = 0$ , avec  $x_2 \neq 0$ , cela donne une relation  $\varepsilon(x_0, x_2)$ , qui, reportée dans (4. 10) donne :

$$0 = -\mathbf{B}(x_0^2 + 2x_2^2) \left( \frac{5}{2} x_0^2 + x_2^2 \right) + O(|X|^5),$$

qui n'a pas de solution non triviale puisque  $\mathbf{B} \neq 0$ .

Par conséquent  $ad - b \operatorname{Re} c$  ne peut s'annuler, ce qui implique que, sur chaque composante connexe des branches de solutions,  $\sigma_0$  et  $\sigma_2$  sont, soit toujours de même signe, soit toujours de signe opposé.

On vérifie alors que :

(i) si  $(\alpha_0 - \alpha_2)\varepsilon < 0$ ,  $\sigma_0$  et  $\sigma_2$  sont négatives sur la branche de bifurcation primaire [i. e. passant par le point  $\mu_0(\varepsilon)$ ], et de signes opposés sur la branche de bifurcation secondaire [i. e. passant par  $\hat{\mu}_0(\varepsilon)$ ].

(ii) si  $(\alpha_0 - \alpha_2)\varepsilon > 0$ ,  $\sigma_0, \sigma_2 < 0$  sur la branche de bifurcation primaire et  $\sigma_0, \sigma_2$  négatives sur la branche de bifurcation secondaire.

(2) Valeurs propres de  $\mathbf{A}_{\mu, \varepsilon}^{(1)}$ . — L'équation caractéristique de  $\mathbf{A}_{\mu, \varepsilon}^{(1)}$  s'écrit :

$$(4. 15) \quad 0 = \lambda^2 - 2 \operatorname{Re} f \lambda + |f|^2 - |g|^2.$$

Le discriminant de (4. 15) a pour partie principale :

$$\Delta' = -\left( \beta_1 - \frac{\beta_2}{2} \right)^2 \varepsilon^2 - \sqrt{6} \mathbf{B} \alpha_{11} \varepsilon x_2^2 (x_0^2 + 2 x_2^2) + \frac{3}{2} \mathbf{B}^2 x_2^2 (x_0^2 + 2 x_2^2)^2.$$

Lorsque  $x_2$  est petit devant  $\varepsilon$  [i. e.  $x_2 = o(\varepsilon)$ ],  $\Delta' < 0$ , donc les valeurs propres sont complexes conjuguées  $= \sigma_1, \bar{\sigma}_1$ . C'est donc le cas au voisinage du point de bifurcation primaire ou secondaire. Le signe de  $\operatorname{Re} \sigma_1$  est alors donné par la partie principale de  $\operatorname{Re} f$ , i. e. :

$$(4. 16) \quad \operatorname{sg}(\operatorname{Re} \sigma_1) = \operatorname{sg} \left( -\frac{3}{2} \mathbf{B} x_0 (x_0^2 + 2 x_2^2) + (\alpha_1 - \alpha_2) \varepsilon \right).$$

Au voisinage de  $\mu = \mu_2(\varepsilon)$ ,  $x_0 = x_2 = 0$  (point de bifurcation primaire), on a donc  $\operatorname{Re} \sigma_1 < 0$  ssi  $(\alpha_1 - \alpha_2)\varepsilon < 0$  [i. e.  $\mu_2(\varepsilon) < \mu_1(\varepsilon)$ ] tandis qu'au voisinage de  $\mu = \hat{\mu}_0(\varepsilon)$ ,  $x_0 = \hat{x}_0(\varepsilon)$ ,  $x_2 = 0$  (point de bifurcation secondaire), on a  $\operatorname{Re} \sigma_1 < 0$  ssi  $(\alpha_1 - \alpha_0)\varepsilon < 0$  [i. e.  $\mu_0(\varepsilon) < \mu_1(\varepsilon)$ ], ainsi que le montre un calcul simple.

Il peut toutefois exister un point où une valeur propre traverse l'axe imaginaire. En effet, supposons qu'en un point des branches de solutions, on ait  $\operatorname{Re} f = 0$ . Deux cas sont possibles :

(1) les valeurs propres sont réelles et de signes opposés, auquel cas on est sûr qu'une valeur propre a traversé l'axe imaginaire;

(2) les valeurs propres sont imaginaires (conjuguées), éventuellement nulles.

On va voir qu'il peut exister un tel point : d'après (4.16), si  $\operatorname{Re} f = 0$ , on a :

$$\varepsilon = \frac{3}{2} \frac{B}{\alpha_1 - \alpha_2} x_0 (x_0^2 + 2x_2^2) + 0 (|x_0|^2 + 2|x_2|^2)^4.$$

Reportant ceci dans (4.10) on obtient :

$$(4.17) \quad 0 = B \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \right) x_0^2 - x_2^2 \right] (x_0^2 + 2x_2^2) + 0 (x_0^2 + 2x_2^2)^5.$$

L'équation (4.17) n'admet une solution non triviale que si :

$$(4.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\alpha_1 - \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_2) > 0, \\ \text{i.e. si } \mu_1(\varepsilon) < \mu_0(\varepsilon) \quad \text{et} \quad \mu_1(\varepsilon) < \mu_2(\varepsilon) \\ \text{ou } \mu_1(\varepsilon) > \mu_0(\varepsilon) \quad \text{et} \quad \mu_1(\varepsilon) > \mu_2(\varepsilon). \end{array} \right.$$

Il y a alors possibilité de bifurcation à partir des ondes rotatives de 1<sup>re</sup> espèce, de solutions  $t \mapsto x(t)$  *périodiques* (avec une période tendant vers 0 avec  $\varepsilon$ ) de (1.6), c'est-à-dire vers des solutions *quasi périodiques* de (1.1). L'existence de cette bifurcation de Hopf sera assurée si les valeurs propres traversent effectivement l'axe imaginaire.

4.3. ONDES ROTATIVES DE 2<sup>e</sup> ESPÈCE :  $\omega \neq 0, x_1 \neq 0$ . — On simplifie l'équation (4.2) par  $x_1$ , ce qui permet d'obtenir  $\mu$  et  $\omega$  en fonction de  $\varepsilon, x_0, x_1$  et  $x_2 = \operatorname{Re} x_2 + i \operatorname{Im} x_2$  :

$$(4.19) \quad \mu = -a_1^{-1} \left[ a_2 |X|^2 + a_3 p(X) - \frac{B}{2} (x_0 + \sqrt{6} \operatorname{Re} x_2) |X|^2 \right. \\ \left. + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_{10} \varepsilon x_0 + \alpha_{11} \varepsilon \operatorname{Re} x_2 - \beta_{11} \varepsilon \operatorname{Im} x_2 \right],$$

$$(4.20) \quad \omega = -\frac{\sqrt{6}}{2} B \operatorname{Im} x_2 |X|^2 + \beta_1 \varepsilon + \beta_{10} \varepsilon x_0 + \alpha_{11} \varepsilon \operatorname{Im} x_2 + \beta_{11} \varepsilon \operatorname{Re} x_2.$$

Reportant (4.19) et (4.20) dans les équations (4.1) et (4.3), on obtient trois équations réelles en  $\varepsilon, x_0, x_1^2, \operatorname{Re} x_2$  et  $\operatorname{Im} x_2$ . Pour  $\varepsilon$  fixé les solutions sont donc représentées par des courbes dans  $\mathbb{R}^4$ , et, comme dans le cas  $b_1 \neq 0$ , on se contente de calculer les branches bifurquées dans un voisinage suffisamment petit du point de bifurcation  $\mu = \mu_1 = -\alpha_1/a_1 \varepsilon, x_0 = x_1 = x_2 = 0$ . Les calculs étant identiques à ceux du cas  $b_1 \neq 0$ , on ne les détaille pas. Posant :

$$x_0 = \varepsilon^2 \tilde{x}_0, \quad x_1^2 = \varepsilon^2 \tilde{x}_1^2, \quad x_2 = \varepsilon^2 \tilde{x}_2 \quad \text{où} \quad |\tilde{x}_0| + |\tilde{x}_1| + |\tilde{x}_2| = o(1),$$

on trouve, par application du théorème de fonctions implicites,

$$\tilde{x}_0 = 0(\tilde{x}_1^2) \quad \text{et} \quad \tilde{x}_2 = 0(\tilde{x}_1^2).$$

D'où, d'après (4.19),

$$\mu - \mu_1 = - \frac{a_2}{a_1} x_1^2 + x_1^2 o(1),$$

ce qui prouve que  $\mu_1$  est un point de bifurcation *supercritique*.

Par conséquent la stabilité « au démarrage » de ces solutions est déterminée par la position de la valeur critique  $\mu_1(\varepsilon)$  par rapport à  $\mu_0(\varepsilon)$  et  $\mu_2(\varepsilon)$ .

On peut faire la même remarque que dans le cas  $b_1 \neq 0$  sur la possibilité d'existence d'ondes « stationnaires » ( $\omega=0$ ) si  $\beta_1 \cdot \beta_2 < 0$ .

#### 4.4. DIAGRAMMES DE BIFURCATION ET DE STABILITÉ (fig. 8) :

— Les branches (1) représentent les solutions stationnaires pures, les branches (2) représentent les ondes rotatives de 1<sup>re</sup> espèce, les branches (3) représentent les ondes rotatives de 2<sup>e</sup> espèce [dessinées en projection sur le plan  $(x_0, \text{Re } x_2)$ ]. Les solutions stables sont indiquées en traits pleins.

— On indique par une croix les points où une bifurcation de solutions périodiques pour (1.6) [solutions *quasi périodiques* pour (1.1)] peut apparaître.

— On se place dans le cas  $B < 0$  (le cas  $B > 0$  s'en déduit en changeant  $x_0$  en  $-x_0$ ), et dans les cas 3, 4, 5 et 6 on suppose  $\varepsilon\alpha_{00} < 0$  (le cas  $\varepsilon\alpha_{00} > 0$  n'étant pas qualitativement différent).

*Remarque.* — D'après (4.9) et (4.20), la fréquence des ondes rotatives est d'ordre  $\varepsilon$  (donc elle tend vers 0 avec  $\varepsilon$ ).

### 5. Justification du calcul de bifurcation et de stabilité sur les équations réduites (3.2)-(3.3)-(3.4) et (4.1)-(4.2)-(4.3)

5.1. EXISTENCE DES SOLUTIONS. — (i) Le théorème des fonctions implicites s'applique dans tous les cas pour étendre les solutions aux équations de bifurcation complètes (2.6)-(2.7)-(2.8). C'est clair pour les solutions stationnaires pures et les ondes rotatives de 2<sup>e</sup> espèce, pour lesquelles on a déjà appliqué le théorème des fonctions implicites. Pour les ondes rotatives de 1<sup>re</sup> espèce, cela résulte de ce que les courbes d'équations (3.9) et (4.10) n'ont pas de singularités.

(ii) Pour qu'il n'y ait pas d'autres solutions que celles que l'on a calculées, il faut s'assurer que les équations réduites contiennent bien la partie principale des équations de bifurcation. On sait que celles-ci peuvent s'écrire :

$$(5.1) \quad 0 = g_k(\mu, 0, 0, X) + h_k(\mu, \varepsilon, \omega, X) - ki \omega x_k, \quad (k=0, 1, 2),$$

où  $X = (x_0, x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2)$ .

D'après le lemme 1,

$$(5.2) \quad g_k(\mu, 0, 0, X) = (a_1 \mu + a_2 |X|^2 + a_3 p(X)) x_k + (b_1 + b_2 \mu + b_3 |X|^2) B_k(X, X) \\ + x_k 0(|\mu| + |X|^2)^2 + B_k(X, X) 0(|\mu| \cdot |X| + |X|^3).$$

Donc pas de problème pour la partie indépendante de  $\varepsilon$  et  $\omega$ .



(1) = Solutions stationnaires pures  
 (2) = Ondes rotatives de 1ère espèce  
 (3) = Ondes rotatives de 2ème espèce  
 X = Points de bifurcation vers des solutions quasipériodiques (éventuels)

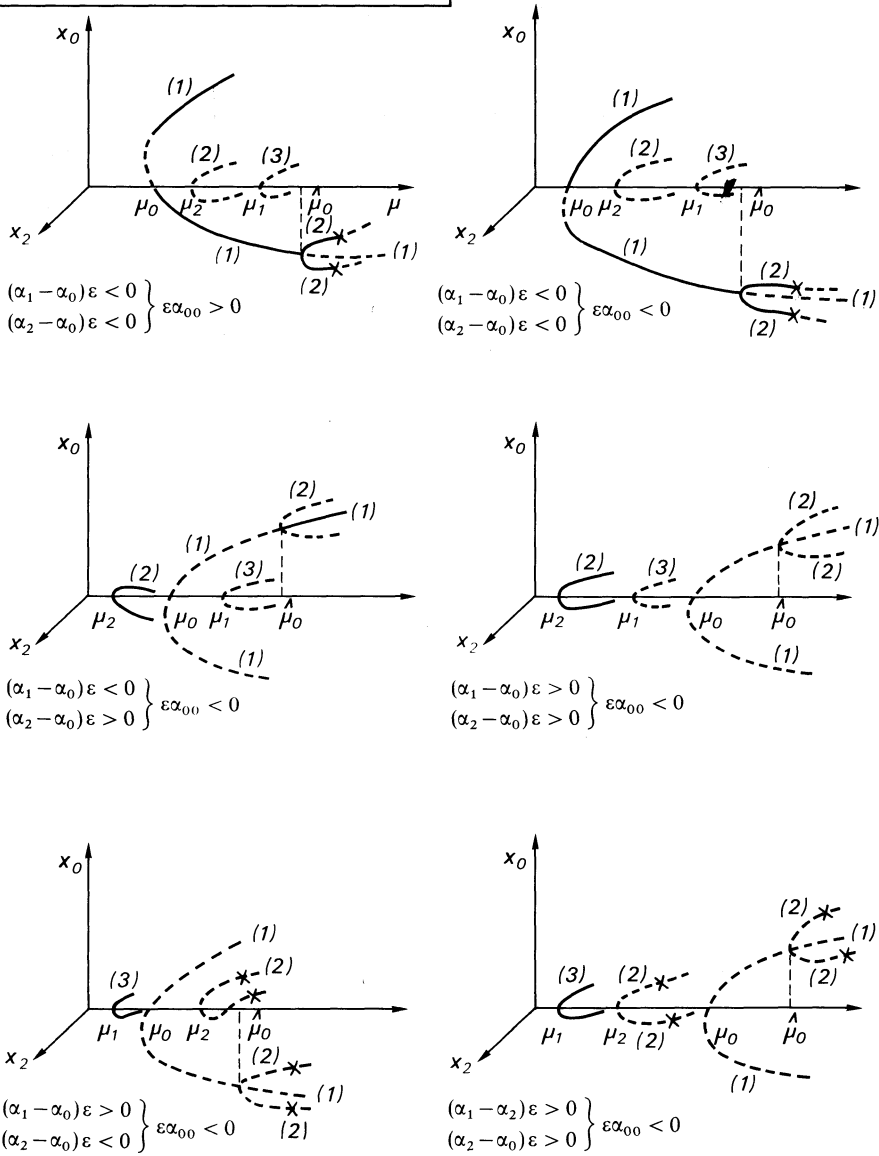


Fig. 8. - Diagramme de bifurcation et de stabilité dans le cas  $b_1=0$  et  $B < 0$ .

D'après les lemmes 2 et 3, on a, en prenant  $x_1 \in \mathbb{R}$ ,

$$(5.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} h_0(\mu, \varepsilon, \omega, X) = x_0 [\alpha_0 \varepsilon + \alpha_{00} \varepsilon x_0 + \varepsilon 0(|\mu| + |\varepsilon| + |X|^2) + \omega 0(|\mu| + |\varepsilon| + |X|^2)^2 \\ \quad + x_1^2 [\alpha_{01} \varepsilon + \varepsilon 0(|\mu| + |\varepsilon| + |X|) + \omega 0(|\mu| + |\varepsilon| + |X|^2)] \\ \quad + x_2 \bar{x}_2 [\alpha_{02} \varepsilon + \varepsilon 0(|\mu| + |\varepsilon| + |X|^2) + \omega 0(|\mu| + |\varepsilon| + |X|^2)], \\ h_1(\mu, \varepsilon, \omega, X) = x_1 [(\alpha_1 + i\beta_1)\varepsilon + (\alpha_{10} + i\beta_{10})\varepsilon x_0 + (\alpha_{12} + i\beta_{12})\varepsilon x_2 \\ \quad + \varepsilon 0(|\mu| + |\varepsilon| + |X|^2) + \omega 0(|\mu| + |\varepsilon| + |X|^2)^2], \\ h_2(\mu, \varepsilon, \omega, X) = x_2 [(\alpha_2 + i\beta_2)\varepsilon + (\alpha_{20} + i\beta_{20})\varepsilon x_0 + \varepsilon 0(|\mu| + |\varepsilon| + |X|^2) \\ \quad + \omega 0(|\mu| + |\varepsilon| + |X|^2)^2 \\ \quad + x_1^2 [(\alpha_{21} + i\beta_{21})\varepsilon + \varepsilon 0(|\mu| + |\varepsilon| + |X|) + \omega 0(|\mu| + |\varepsilon| + |X|)]]. \end{array} \right.$$

Compte tenu de (5.2) et de l'hypothèse  $a_1$  et  $a_2 \neq 0$ , les équations réduites donnent la partie principale des termes indépendant de  $\omega$ .

En ce qui concerne les termes dépendant de  $\omega$ , il faut remarquer que, si  $\omega \neq 0$ , le théorème des fonctions implicites peut s'appliquer à l'équation (5.1) ( $k=1$ ) si  $x_1 \neq 0$ , ou à l'équation (5.1) ( $k=2$ ) si  $x_1 \equiv 0$  pour donner  $\mu = \mu(\varepsilon, X)$  et  $\omega = \omega(\varepsilon, X)$ . Dans le cas  $b_1 \neq 0$  il n'y a pas de problème puisque les termes en  $\omega$  sont de la forme :

$$ki \omega x_k + \omega x_k 0 [|\mu| + |\varepsilon| + |X|^2] + \omega 0[(|\mu| + |\varepsilon| + |X|^2) |X|^2].$$

Dans le cas  $b_1 = 0$ , le théorème des fonctions implicites donne :

$$(a) \text{ si } x_1 \equiv 0, \quad \omega = 0(|\varepsilon|); \\ (b) \text{ si } x_1 \neq 0, \quad \omega = 0(|\varepsilon| + |X|^3)$$

[voir (4.9) et (4.20)].

Par conséquent dans tous les cas les termes dépendant de  $\omega$  dans  $h_k(\mu, \varepsilon, \omega, X)$  sont d'ordre suffisamment grand pour ne pas perturber la partie principale.

5.2. STABILITÉ : JUSTIFICATION DE L'ÉTUDE SUR L'ÉQUATION (1.6). — Il s'agit de montrer que la stabilité étudiée aux paragraphes 3 et 4, c'est-à-dire pour les solutions bifurquées de (1.6), équivaut à la stabilité des solutions correspondantes de l'équation (1.5).

D'après l'hypothèse (H-3),  $\mathcal{L}_0$  est un opérateur de Fredholm d'indice 0, et la partie du spectre ne contenant pas 0 se trouve dans un demi-plan  $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} z \leq \xi < 0\}$ . Sous réserve que les opérateurs vérifient les « bonnes » propriétés pour appliquer le théorème de la variété centrale (Iooss [7]), l'étude de la stabilité des solutions stationnaires de (1.5) se réduit à l'étude de stabilité pour les solutions appartenant à une variété invariante  $\mathcal{N}(\mu, \varepsilon)$ , dont la dimension est égale à celle de  $\ker \mathcal{L}_0$  [sous les hypothèses (H-3)].  $\mathcal{N}(\mu, \varepsilon)$  est tangente au sous-espace  $P_{\mu, \varepsilon} H$ , où  $P_{\mu, \varepsilon}$  est la projection commutant avec  $\mathcal{L}_{\mu, \varepsilon}$  (opérateur linéarisé autour de la solution étudiée) et associée à la partie du spectre voisine de 0.  $\mathcal{N}(0, 0)$  est tangente à  $P_0 H = V_0$ . On peut donc chercher l'équation de la variété centrale  $\mathcal{N}(\mu, \varepsilon)$  sous la forme :

$$(5.4) \quad r = \mathcal{V}(\mu, \varepsilon, \omega, X),$$

où  $X \in V_0$  et  $v \in V_0^\perp$ .

Si l'on pose  $y = X + v$ , l'équation (1.5) se décompose par projections en deux équations :

$$(5.5) \quad \frac{dX}{dt} = P_0 F(\mu, \varepsilon, X + v) - \omega P_0 L X,$$

$$(5.6) \quad \frac{dv}{dt} (1 - P_0) F(\mu, \varepsilon, X + v) - \omega (1 - P_0) L v,$$

où 1 désigne l'identité dans H.

En remplaçant  $v$  par (5.4) dans (5.5), on obtient une équation de la forme :

$$(5.7) \quad \frac{dX}{dt} = \mathcal{G}(\mu, \varepsilon, \omega, X),$$

où  $\mathcal{G}(\mu, \varepsilon, \omega, \cdot) : V_0 \rightarrow V_0$  vérifie les hypothèses d'invariance (H-1).

Il est clair que le signe des parties réelles des valeurs propres de  $D_X \mathcal{G}(\mu, \varepsilon, \omega, X)$ , pour une solution  $(\omega, X)$  donnera la stabilité des solutions  $Y = X + v$  correspondantes (fig. 9).

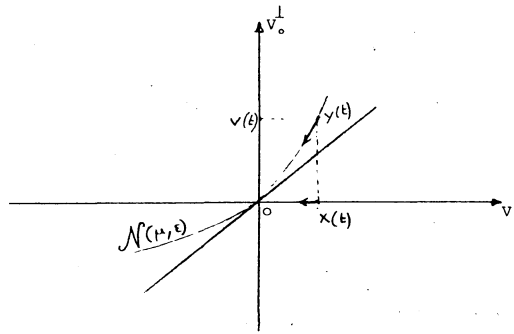


Fig. 9

Si l'équation de bifurcation (1.6) a été obtenue par ce procédé [i. e. est identique à l'équation (5.7)], il n'y a donc pas de problème.

Si par contre (1.6) a été obtenue par la méthode de Lyapounov-Schmidt, il faut vérifier que le développement de (1.6) donne les mêmes termes que celui de (5.7) jusqu'à un ordre suffisant, en l'occurrence celui des équations « réduites » (3.2)-(3.3)-(3.4) ou (4.1)-(4.2)-(4.3).

La méthode de Lyapounov-Schmidt consiste, pour chercher les solutions stationnaires de (1.5), à décomposer l'équation :

$$0 = F(\mu, \varepsilon, y) - \omega L y$$

en deux parties :

$$(5.8) \quad 0 = P_0 [F(\mu, \varepsilon, X + v) - \omega L X],$$

$$(5.9) \quad \mathcal{L}_0 v = -(1 - P_0) [F(\mu, \varepsilon, X + v) - \omega L v],$$

où  $X = P_0 y$  et  $v = (1 - P_0) y$ .

Le 2<sup>e</sup> membre de (5.8) étant le même que celui de l'équation (5.5), on voit qu'il suffit de comparer les développements de  $v(\mu, \varepsilon, \omega, X)$  à partir des équations (5.6) et (5.9).

Afin de ne pas alourdir les calculs, on se limite au cas où :

$$F(\mu, \varepsilon, y) = \mathcal{L}_0 y + \mu \mathcal{L}_1 y + \varepsilon \mathcal{L}_2 y + M(y, y),$$

[ $M(\cdot, \cdot)$  étant un opérateur bilinéaire symétrique]. Le résultat est aussi valable dans les cas plus généraux.

L'équation (5.9) donne alors :

$$(5.10) \quad v = -\mu S \mathcal{L}_1 X - \varepsilon S \mathcal{L}_2 X - SM(X, X) + 2 SM(X, SM(X, X)) \\ + 0 [|X| (|\mu| + |\varepsilon|) (|\mu| + |\varepsilon| + |X|) + |X|^4] + \omega 0 [|X| (|\mu| + |\varepsilon| + |X|)],$$

où  $S$  est défini par  $S \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_0 S = 1 - P_0$  (pseudo-inverse de  $\mathcal{L}_0$ ).

Ceci conduit, par (5.8), aux équations de bifurcation réduites.

Pour obtenir le développement de (5.4), on pose :

$$v = \mathcal{V}(\mu, \varepsilon, \omega, X) = \sum_{p, q, r, n} \mu^p \varepsilon^q \omega^r \mathcal{V}_{pq}^{rn}(X^{(n)}),$$

$\mathcal{V}_{pq}^{rn}$  étant  $n$ -linéaire symétrique en  $X$ , et on procède par identification dans (5.6), en tenant compte de (5.5) pour les termes en  $\mathcal{V}_{pq}^{rn}(X^{(n')})$ , ( $dX/dr^{(n')}$ ) ( $n' + n'' = n$ ).

On obtient ainsi :

$$(5.11) \quad \mathcal{V}(\mu, \varepsilon, \omega, X) = -\mu S \mathcal{L}_1 X - \varepsilon S \mathcal{L}_2 X - SM(X, X) + 2 SM(X, SM(X, X)) \\ - 2 SM(X, P_0 M(X, X)) + 0 [|X| (|\mu| + |\varepsilon|) (|\mu| + |\varepsilon| + |X|) + |X|^4] \\ + \omega 0 [|X| (|\mu| + |\varepsilon| + |X|)].$$

Si le coefficient  $b_1$  (lemme 1) est nul, les termes d'ordre 3 (et même d'ordre 2) en  $|X|$  dans (5.10) ou (5.11) n'interviennent pas pour le calcul des équations réduites. Si  $b_1 = 0$ , cela entraîne précisément que  $P_0 M(X, X) \equiv 0$ . Par conséquent il y a, dans tous les cas, identité entre les développements (5.10) et (5.11) pour le calcul des équations réduites, ce qui démontre le résultat cherché.

5.3. STABILITÉ : JUSTIFICATION DU CALCUL SUR LES ÉQUATIONS TRONQUÉES. — Il s'agit de justifier le calcul de la partie principale des valeurs propres de  $\mathcal{A}_{\mu, \varepsilon}$  [définie par (3.1)] à partir des équations tronquées (3.2)-(3.3)-(3.4) (si  $b_1 \neq 0$ ), et (4.1)-(4.2)-(4.3) (si  $b_1 = 0$ ). Seules les solutions stationnaires pures et les ondes rotatives de 1<sup>re</sup> espèce sont à considérer.

(i) *Solutions stationnaires pures.* — Il suffit de montrer que  $\mathcal{A}_{\mu, \varepsilon}$  est, dans ce cas, une matrice diagonale. Ceci est une conséquence de la covariance de  $\mathcal{A}_{\mu, \varepsilon}$  par l'action du groupe  $C_\infty$ , et se vérifie alors aisément à partir du lemme 2 (voir aussi [3]). Cette propriété de covariance est due au fait que :

$$\mathcal{A}_{\mu, \varepsilon} = D_X G(\mu, \varepsilon, \omega, X_0) - \omega L$$

où  $X_0$  est *axisymétrique* par rapport à l'axe  $Oz$ , et par conséquent  $T_\varphi X_0 = X_0$ ,  $\varphi \in C_\gamma$ .

(ii) *Ondes rotatives de 2<sup>e</sup> espèce.* — On sait (lemme 4) que  $\mathcal{A}_{\mu, \varepsilon} = (A_{\mu, \varepsilon}^{(0)}, A_{\mu, \varepsilon}^{(1)})$  où  $A_{\mu, \varepsilon}^{(0)}$  agit dans l'espace engendré par  $\{\xi_0, \xi_2, \bar{\xi}_2\}$  et  $A_{\mu, \varepsilon}^{(1)}$  agit dans l'espace engendré par  $\{\xi_1, \bar{\xi}_1\}$ . Il s'agit de montrer que, pour les équations complètes,

$$(5.12) \quad A_{\mu, \varepsilon}^{(0)} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ c & d & d \\ \bar{c} & \bar{d} & \bar{d} \end{pmatrix}, \quad A_{\mu, \varepsilon}^{(1)} = \begin{pmatrix} f & g \\ g & \bar{f} \end{pmatrix},$$

avec :

$$(5.13) \quad \begin{cases} a \text{ réel}, & b = x_2 \, 0(1), & c = x_2 \, 0(1), \\ d = x_2^2 \, 0(1) & \text{et} & g = x_2 \, 0(1). \end{cases}$$

Si  $b_1 = 0$ ,  $b$ ,  $c$  et  $g$  sont d'ordre  $x_2 \, 0(1)$ .

Ceci permet de justifier les calculs de stabilité des paragraphes (3.2) et (4.2). En effet, on peut alors vérifier sans difficultés que la structure des équations caractéristiques de  $A_{\mu, \varepsilon}^{(0)}$  et  $A_{\mu, \varepsilon}^{(1)}$  est la même que dans le cas des équations tronquées [équations (4.14) et (4.15) si  $b_1 = 0$ ].

Dans (5.12) on a, en notant  $X_1$  la solution onde rotative de 1<sup>re</sup> espèce.

$$(5.14) \quad \begin{cases} A_{\mu, \varepsilon}^{(0)} = \left[ \frac{\partial g_k}{\partial x_l}(\mu, \varepsilon, \omega, X_1) - ki \omega \delta_{kl} \right]_{k, l=0, 2, -2}, \\ A_{\mu, \varepsilon}^{(1)} = \left[ \frac{\partial g_k}{\partial x_l}(\mu, \varepsilon, \omega, X_1) - ki \omega \delta_{kl} \right]_{k, l=1, -1}, \end{cases}$$

où  $g_{-k} = (-1)^k \bar{g}_k$ .

On va montrer que :

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_2} - 2i\omega = \frac{\partial g_2}{\partial x_2} = d = x_2^2 \, 0(1).$$

Les autres coefficients dans (5.12) et (5.13) s'obtiennent par un raisonnement analogue.

D'après le lemme 2, on peut écrire :

$$g_2(\mu, \varepsilon, \omega, X_1) = x_2 g_2'(\mu, \varepsilon, \omega, x_0) + x_2^2 \bar{x}_2 g_2''(\mu, \varepsilon, \omega, x_0, x_2 \bar{x}_2) + x_1^2 g_2'''(\mu, \varepsilon, \omega, X_1).$$

D'autre part, en posant  $X_1 = x_0 \xi_0 + x_2(\xi_2 + \bar{\xi}_2)$ ,  $x_0, x_2 \in \mathbb{R}$ , on a, pour ces solutions :

$$(5.15) \quad 0 = g_2'(\mu, \varepsilon, \omega, x_0) + x_2^2 g_2''(\mu, \varepsilon, \omega, x_0, x_2^2) - 2i\omega.$$

Par conséquent :

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\mu, \varepsilon, \omega, X_1) - 2i\omega = x_2^2 g_2''(\mu, \varepsilon, \omega, x_0, x_2^2) + x_2^3 \frac{\partial g_2''}{\partial x_2}(\mu, \varepsilon, x_0, x_2^2),$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\mu, \varepsilon, \omega, X_1) = x_2^2 g_2''(\mu, \varepsilon, \omega, x_0, x_2^2) + x_2^3 \frac{\partial g_2''}{\partial x_2}(\mu, \varepsilon, x_0, \bar{x}_2).$$

Comme  $x_2$  et  $\bar{x}_2$  n'apparaissent dans  $g_2''$  que sous la forme  $(x_2 \bar{x}_2)^P$ , on a bien :

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\mu, \varepsilon, \omega, X_1) - 2i\omega = \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\mu, \varepsilon, \omega, X_1) = x_2^2 \cdot 0 \quad (1).$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] V. G. BABSKII et I. L. SKLOVSKAIA, *On Convection in a Self-Gravitating Fluid Sphere with Internal Heating* (*P.M.M.*, vol. 36, 1971, p. 6).
- [2] P. CHOSSAT, *Comptes rendus de l'École d'été de Jablonna*, Pologne, 1980 (à paraître).
- [3] P. CHOSSAT, *Bifurcation and Stability of Convective Flows in a Rotating or not Rotating Spherical Shell* (*S.I.A.M. J. Appl. Math.*, vol. 37, n° 3, 1979, p. 624-647).
- [4] M. GOLUBITSKY et D. SCHAEFFER, *Imperfect Bifurcation in the Presence of Symmetry* (*Comm. in Math. Phys.*, vol. 67, 1979, p. 205-232).
- [5] M. GOLUBITSKY et D. SCHAEFFER, *Bifurcation with 0 (3) Symmetry Including Applications to the Benard problem* (preprint).
- [6] G. IOOSS, Cours de 3<sup>e</sup> cycle, *Publications de la Faculté d'Orsay*, 1974.
- [7] G. IOOSS, *Bifurcation of Maps and Application* (*North Holland, Math. Studies*, vol. 36, Amsterdam - New York - Oxford, 1979).
- [8] J. P. KEENER, *Secondary Bifurcation in Non-Linear Diffusion-Reaction Equations* (*Studies in Appl. Math.*, vol. 55, 1976, p. 187-211).
- [9] W. F. LANGFORD et G. IOOSS, *Interactions of Hopf and Pitchfork Bifurcations*, in *Bifurcation Problems and Their Numerical Solution*, H. D. MITTELMANN et H. WEBER, éd., Dortmund, 1980.
- [10] L. MICHEL, *Les brisures spontanées de symétrie en physique* (*J. de Physique*, vol. 36, 1975, p. C7-41).
- [11] W. MILLER, *Symmetry Groups and their Applications*, Acad. Press, NY-London, 1972.
- [12] M. RENARDY, *Bifurcation from Rotating Waves* (preprint).
- [13] D. H. SATTINGER, *Group Theoretic Methods in Bifurcation* (*Lecture Notes in Math.*, n° 762, 1979, Springer Berlin - Heidelberg - New York).

(Manuscrit reçu le 5 mai 1981,  
accepté le 27 octobre 1981)

P. CHOSSAT,  
Université de Nice,  
Département de Mathématiques,  
Parc Valrose,  
06034 Nice Cedex.