Annales scientifiques de l'É.N.S.

S. Gallot

Équations différentielles caractéristiques de la sphère

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 12, nº 2 (1979), p. 235-267

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1979_4_12_2_235_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4[e] série, t. 12, 1979, p. 235 à 267.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES CARACTÉRISTIQUES DE LA SPHÈRE

PAR S. GALLOT

0. Introduction

Dans cet article, l'expression « variété riemannienne » ou v. r. *signifiera toujours* variété riemannienne *connexe* de dimension n supérieure ou égale à 2, sans qu'il soit besoin de le répéter. Le spectre d'une variété riemannienne (M, g) est l'ensemble des valeurs propres du laplacien Δ agissant sur l'espace des fonctions différentiables de M dans $\mathbf{R}$. Lorsque la variété est compacte, le spectre forme une suite de terme général λ_p et vérifiant $0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_p<\ldots$ Pour la sphère munie de sa métrique canonique, *notée* (S^n, can), on a $\lambda_p=p(n+p-1)$ pour tous les entiers $p\in\mathbf{N}$. Un théorème de Lichnerowicz montre que toutes les variétés riemanniennes compactes de dimension n dont la courbure de Ricci est supérieure ou égale à celle de (S^n, can) vérifient $\lambda_1\geqq n$. Par la suite, M. Obata a prouvé que, parmi ces variétés, seule la sphère canonique possède une valeur propre égale à n. Pour cela il observe que toute fonction f définie sur une de ces variétés qui vérifie $\Delta f=nf$ est une solution de l'équation $\mathrm{DD}f+f.g=0$ (où D est la dérivée covariante de la variété). *Notons* (E_1) cette équation différentielle de degré 2, le théorème d'Obata peut s'énoncer ainsi : sur une variété riemannienne complète, il existe une solution non nulle de (E_1) si et seulement si cette variété est la sphère canonique.

Dans le présent article, on généralise ce théorème aux autres valeurs propres du laplacien. Sur la sphère canonique, les fonctions propres correspondant à la valeur propre λ_p vérifient toutes une certaine équation différentielle (E_p) de degré $p+1$. Cette équation est définie en 4.0, une formulation explicite en est donnée par 4.4. Les propositions 4.1 et 4.14 montrent que, sur toute variété riemannienne complète, l'existence d'une solution non constante de (E_p) implique que la variété est localement isométrique à la sphère canonique. On retrouve ainsi le théorème d'Obata dans le cas de l'équation (E_1). Dans le cas de l'équation (E_2), cette proposition avait été conjecturée par M. Obata.

Pour se représenter l'équation (E_p), il suffit de plonger isométriquement la sphère canonique dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^{n+1}$. Une fonction f sur S^n vérifiant $\Delta f=\lambda_p.f$ est la restriction à la sphère d'un polynôme homogène harmonique F défini sur $\mathbf{R}^{n+1}$ et de degré p.

Si la dérivée covariante de $\mathbf{R}^{n+1}$ est notée D′, la fonction F est une solution de l'équation différentielle $D'^{p+1} F=0$. C'est cette équation qui, traduite par rapport à f, donne (E_p).

Dans le paragraphe 1, on considère la variété différentiable $M'=M\times]0+\infty[$. On construit sur M′ une métrique riemannienne analogue à celle qui permet d'identifier isométriquement les variétés $S^n\times]0, +\infty[$ et $\mathbf{R}^{n+1}\setminus 0$ (cette isométrie envoie $S^n\times\{r\}$ sur la sphère de rayon r de $\mathbf{R}^{n+1}$). Nous obtenons ainsi un plongement isométrique de M dans M′. Les dérivées covariantes de M et M′ *sont notées* D et D′.

Dans le paragraphe 2, cette construction sert à donner une nouvelle démonstration des théorèmes de Lichnerowicz et Obata. Pour cela on remarque que, si une fonction f de M dans $\mathbf{R}$ est une solution de (E_1), alors la fonction F définie sur M′ par l'égalité $F(m, r)=r.f(m)$ vérifie $D'^2 F=0$.

Dans les paragraphes 3 et 4, on généralise ceci en montrant que, si une fonction f de M dans $\mathbf{R}$ est une solution de l'équation (E_p) pour un certain entier $p\geqq 1$, alors la fonction F définie sur M′ par l'égalité $F(m, r)=r^p.f(m)$ vérifie $D'^{p+1} F=0$. On construit ainsi un tenseur symétrique parallèle sur M′. Lorsque la variété M est complète, ceci implique que les variétés (M, g) et $(S^n$, can) sont localement isométriques (prop. 4.1 et 4.14).

Dans le paragraphe 5, on étudie le cas où la variété M n'est pas complète. On montre en 5.2 que la version locale du théorème d'Obata est fausse : en fait, on construit des variétés non complètes de taille suffisamment petite pour qu'il existe $n-2$ solutions linéairement indépendantes de l'équation (E_1) sans que ces variétés soient localement isométriques à $(S^n$, can). Par contre, dans le cas général, l'existence de $n-1$ solutions de (E_1) implique que (M, g) est localement isométrique à $(S^n$, can) (*cf.* 5.1). Par extension, on montre pour tout p qu'un nombre suffisant de solutions de (E_p) permet d'aboutir à la même conclusion (*cf.* 5.3).

Dans le paragraphe 6, on utilise la construction du paragraphe 1 pour étudier le spectre du laplacien sur les q-formes différentielles de M. La première valeur propre de ce q-spectre *est notée* $\lambda_1(\Lambda^q M)$. Si la variété M est compacte et si son opérateur de courbure est supérieur ou égal à celui de la sphère canonique de même dimension n, on donne en 6.1 une nouvelle preuve de l'inégalité

$$\lambda_1(\Lambda^q M)\geqq\lambda_1(\Lambda^q S^n)$$

démontrée en [10], p. 270. Parmi toutes les variétés qui vérifient ces hypothèses, la proposition 6.3 étudie celles qui réalisent l'égalité

$$\lambda_1(\Lambda^q M)=\lambda_1(\Lambda^q S^n).$$

En dimension paire, seule la sphère canonique réalise cette égalité. En dimension impaire, il faut ajouter une hypothèse supplémentaire sur la dimension de l'espace propre associé pour obtenir une caractérisation de la sphère canonique par cette égalité. En dimension impaire, l'égalité peut être atteinte pour des variétés non isométriques à la sphère canonique; un exemple assez générique en est donné en 6.4. Une partie de ces résultats a déjà été publiée, avec des preuves résumées, dans [11].

1. Construction d'une métrique appropriée sur $M \times]0, +\infty[$

1.0. Dans la suite, *notons* (M, g) une variété riemannienne quelconque, D sa dérivée covariante et I l'intervalle $]0, +\infty[$. Si on munit $S^n \times I$ d'une métrique adéquate, on obtient une variété riemannienne isométrique à $\mathbf{R}^{n+1} \setminus 0$. Nous copions cette construction sur la variété $M \times I$, que *nous notons désormais* M'. Considérons un point quelconque $(m, r) \in M \times I$, il existe un isomorphisme canonique entre les espaces $T_{(m, r)} M'$ et $T_m M \oplus T_r I$. Considérons un champ de vecteurs quelconque X tangent à M et le champ unitaire d/dr tangent à I. Désormais, *nous notons* $\tilde{X}$ et e les champs définis canoniquement sur M' à partir de X et d/dr : au point (m, r) les champs $\tilde{X}$ et e sont alors les images respectives de X_m et d/dr par les injections canoniques de $T_m M$ et $T_r I$ dans $T_{(m, r)} M'$. Considérons trois champs de vecteurs quelconques X, Y et Z tangents à M, nous *définissons la métrique* $\langle ., . \rangle$ et *la dérivée covariante* D' sur M' en posant en tout point (m, r) :

$$\langle \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle = r^2 . g(X, Y); \qquad \langle \tilde{X}, e \rangle = 0; \qquad \langle e, e \rangle = 1;$$

$$D'_{\tilde{X}} \tilde{Y} = D_X Y - r . g(X, Y) . e; \qquad D'_e e = 0; \qquad D'_{\tilde{X}} e = D'_e \tilde{X} = \frac{1}{r} . \tilde{X}.$$

La connexion D' a été introduite par E. Ruh sur le fibré E (M) égal à la somme directe du fibré tangent T (M) et du fibré trivial $M \times \mathbf{R}$ (*cf.* [1]).

1.1. Lemme. — *La connexion* D' *est la connexion de Levi-Civita correspondant à la métrique* $\langle ., . \rangle$.

Preuve. — Considérons trois champs de vecteurs quelconques X, Y et Z tangents à M. La torsion de D' est nulle, car nous avons

$$D'_{\tilde{X}} \tilde{Y} - D'_{\tilde{Y}} \tilde{X} = \widetilde{D_X Y} - \widetilde{D_Y X} = \widetilde{[X, Y]} = [\tilde{X}, \tilde{Y}];$$
$$D'_{\tilde{X}} e - D'_e \tilde{X} = 0 = [\tilde{X}, e].$$

Par ailleurs, nous montrons que la métrique est parallèle par rapport à D'. En effet, nous avons

$$D'_e \left(\frac{1}{r} . \tilde{X} \right) = D'_e \left(\frac{1}{r} . \tilde{Y} \right) = 0,$$

nous en déduisons les deux égalités :

$$D'_e \left\langle \frac{1}{r} \tilde{X}, \frac{1}{r} \tilde{Y} \right\rangle = \frac{d}{dr} [g(X, Y)] = 0;$$

$$D'_e \left\langle \frac{1}{r} \tilde{X}, e \right\rangle = 0 = D'_e \langle e, e \rangle.$$

Pour achever la démonstration, il suffit d'écrire les trois égalités suivantes :

$$\langle D'_{\tilde{X}} \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle + \langle \tilde{Y}, D'_{\tilde{X}} \tilde{Z} \rangle = r^2 [g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z)] = \tilde{X} . \langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle,$$

$$\langle D'_{\tilde{X}}\tilde{Y}, e\rangle + \langle \tilde{Y}, D'_{\tilde{X}} e\rangle = -rg(X, Y) + \frac{1}{r}\langle \tilde{Y}, \tilde{X}\rangle = 0 = \tilde{X}.\langle \tilde{Y}, e\rangle,$$

$$\langle D'_{\tilde{X}} e, e\rangle + \langle e, D'_{\tilde{X}} e\rangle = 0 = \tilde{X}.\langle e, e\rangle.$$

1.2. LEMME. — *Soit* R′ *le tenseur de courbure associé à* D′, *pour tout champ de vecteurs* X′ *tangent à* M′, *nous avons* $R'(X', e)=0$. *Pour tous les champs de vecteurs* X, Y, Z *tangents à* M, *nous avons* : $R'(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} = \widetilde{R(X, Y)Z} - \widetilde{R_0(X, Y)Z}$ *où le tenseur de courbure* R_0 *est défini par l'égalité* $R_0(X, Y)Z = g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$.

Preuve. — Considérons des champs de vecteurs quelconques X, Y, Z tangents à M, nous avons les égalités :

$$R'(\tilde{X}, \tilde{Y})e = D'_{\tilde{X}} D'_{\tilde{Y}} e - D'_{\tilde{Y}} D'_{\tilde{X}} e - D'_{[\tilde{X}, \tilde{Y}]} e = \frac{1}{r}(D'_{\tilde{X}}\tilde{Y} - D'_{\tilde{Y}}\tilde{X} - [\tilde{X}, \tilde{Y}]) = 0,$$

$$R'(\tilde{X}, e)e = -D'_e D'_{\tilde{X}} e = \frac{1}{r^2}\tilde{X} - \frac{1}{r} D'_e \tilde{X} = 0.$$

Notons X′, Y′, Z′ des champs de vecteurs quelconques tangents à M′, nous avons

$$\langle R'(X', e)Y', Z'\rangle = \langle R'(Z', Y')e, X'\rangle = 0,$$

ce qui prouve l'égalité $R'(X', e)=0$.

En tout point $m \in M$, des vecteurs quelconques $x, y, z \in T_m M$ peuvent être prolongés par des champs de vecteurs X, Y, Z, définis sur un voisinage de m dans M et tels que $DX = DY = DZ = 0$ au point m. Nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned} R'(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} &= D'_{\tilde{X}} D'_{\tilde{Y}}\tilde{Z} - D'_{\tilde{Y}} D'_{\tilde{X}}\tilde{Z} \\ &= D'_{\tilde{X}}(\widetilde{D_Y Z}) - r.g(Y, Z) D'_{\tilde{X}} e - D'_{\tilde{Y}}(\widetilde{D_X Z}) + r.g(X, Z) D'_{\tilde{Y}} e \\ &= \widetilde{D_X D_Y Z} - \widetilde{D_Y D_X Z} - \widetilde{R_0(X, Y)Z}. \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration.

1.3. *Remarque.* — Soit γ une géodésique quelconque de M′. Pour tout nombre réel t, nous notons $(m(t), r(t))$ les composantes de $\gamma(t)$ pour le produit $M \times I$. Le champ de vecteurs X′, défini le long de γ par l'égalité $X'(t) = r(t).e_{\gamma(t)} - t.\dot{\gamma}(t)$, est parallèle : en effet, nous avons $D'_{\dot{\gamma}}[r.e] = \dot{\gamma}$ en vertu de 1.0.

Nous notons désormais Δ et Δ' les laplaciens sur les variétés M et M′. Pour un *entier p donné,* si f est une fonction différentiable de M dans **R**, *nous notons* F la fonction définie sur M′ par l'égalité $F(m, r) = r^p.f(m)$.

1.4. LEMME. — *Pour tout nombre réel* λ, *l'hypothèse* $\Delta f = \lambda f$ *implique que* $\Delta' F = [\lambda - p(n+p-1)] r^{-2}.F$.

Preuve. — Notons $\{X_1, \ldots, X_n\}$ un repère orthonormé de TM au voisinage d'un point quelconque $m \in M$, vérifiant $D_{X_i} X_j = 0$ au point m pour tous les entiers $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Pour la commodité de l'écriture, nous écrirons $D_i j$ et $D'_i j$ au lieu de $D_{X_i} X_j$ et $D'_{\tilde{X}_i} \tilde{X}_j$. Les vecteurs $\{(1/r).\tilde{X}_1, \ldots, (1/r).\tilde{X}_n, e\}$ forment un repère orthonormé de TM′ au voisinage du point (m, r). Un calcul au point (m, r) donne

$$\Delta' F = -r^{-2}\left(\sum_{k=1}^{n} D'_k D'_k F\right) - D'_e D'_e F$$

$$= -r^{-2} \sum_{k=1}^{n} (\tilde{X}_k . D'_k F - rg(X_k, X_k) D'_e F) - p(p-1) r^{p-2} f = r^{p-2} (\Delta f - p(n+p-1) f)$$

puisque nous avons

$$D'_e F = p . r^{p-1} . f \qquad \text{et} \qquad D'_k F = r^p . D_k f.$$

1.5. *Remarque.* — Pour toute géodésique c de M, l'application φ de $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^-$ dans M′ donnée par $\varphi(r . e^{i\theta}) = (c(\theta), r)$ est localement isométrique et totalement géodésique. L'application exponentielle de M′ étant notée exp′, on a

$$\exp'_{\varphi(r)} \circ T_r \varphi(z) = \varphi(r+z).$$

2. Théorèmes de Lichnerowicz et Obata

Nous considérons un point quelconque $m \in M$ et une base orthonormée $x_1, \ldots, x_n$ de $T_m M$. Dans la suite, *nous notons* r le tenseur de Ricci défini, pour tous les vecteurs x et y de $T_m M$, par l'égalité $r(x, y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(x, x_i) x_i, y)$. *La notation* $r \geqq \mu . g$ (où μ est un scalaire réel) signifie qu'en tout point m, on a $r(x, x) \geqq \mu . g(x, x)$ pour tout vecteur $x \in T_m M$. Quels que soient l'entier α, le tenseur covariant T d'ordre α et les champs de vecteurs $X, Y, Y_1, \ldots, Y_\alpha$ tangents à M, nous adopterons dans tout l'article *les conventions* suivantes :

$$D_X T(Y_1, \ldots, Y_\alpha) = DT(X, Y_1, \ldots, Y_\alpha),$$
$$D_X D_Y T(Y_1, \ldots, Y_\alpha) = DDT(X, Y, Y_1, \ldots, Y_\alpha).$$

2.1. Proposition (A. Lichnerowicz, *cf.* [2], p. 179). — *Soit* (M, g) *une variété riemannienne compacte, si son tenseur de Ricci vérifie* $r \geqq k(n-1) g$ *pour un certain nombre réel positif* k, *alors on a* $\lambda_1 \geqq n . k$.

2.2. Proposition (M. Obata, *cf.* [3] ou [2], p. 180). — *Si la variété riemannienne* (M, g) *vérifie les hypothèses de* 2.1 *et si on a* $\lambda_1 = n . k$, *alors les variétés* (M, g) *et* (S^n, can) *sont isométriques.*

Preuve de 2.1. — Pour prouver 2.1 et 2.2, on peut se limiter au cas où $k=1$. Considérons une valeur propre quelconque λ du laplacien et une fonction quelconque f vérifiant $\Delta f = \lambda . f$. Supposons que la fonction f n'est pas constante, on a alors $\lambda \neq 0$ et $Ddf \neq 0$ car les fonctions harmoniques sur une variété compacte vérifient $df = 0$. Nous définissons la fonction F sur M' par l'égalité $F(m, r) = r . f(m)$. *Notons* grad f et grad F les champs de vecteurs gradients des fonctions f et F sur M et M'. Le tenseur de Ricci de M' *est noté* r'. Nous écrivons la formule de Bochner-Lichnerowicz pour M et M' (*cf.* [2], p. 131) :

$$g(\Delta df, df) = \frac{1}{2}\Delta(|df|^2) + |Ddf|^2 + r(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f), \tag{1}$$

$$\langle \Delta'(D'F), D'F \rangle = \frac{1}{2}\Delta'(|D'F|^2) + |D'D'F|^2 + r'(\operatorname{grad} F, \operatorname{grad} F). \tag{2}$$

En intégrant (1) sur M et en remarquant que l'intégrale de $\Delta(|df|^2)$ est nulle, nous obtenons $\lambda > n-1 \geqq 1$. Nous considérons un point quelconque m de M et un repère orthonormé au voisinage de ce point $\{X_1, \ldots, X_n\}$. Nous remarquons que les vecteurs $\{(1/r)\tilde{X}_1, \ldots, (1/r)\tilde{X}_n, e\}$ forment un repère orthonormé local de TM', que $D'F((1/r)\tilde{X}_i) = df(X_i)$ et que $D'F(e) = f$. Nous en déduisons que $D'_e D'F = 0$, ce qui donne au point (m, r)

$$\Delta'(|D'F|^2) = -\frac{1}{r^2}\sum_{k=1}^{n} D'_{\tilde{X}_k} D'_{\tilde{X}_k}(|D'F|^2) = -\frac{1}{r^2}\sum_{k=1}^{n} D_{X_k} D_{X_k}(|D'F|^2) = \frac{1}{r^2}\Delta(f^2 + |df|^2).$$

D'autre part, pour tout entier $i \in \{1, \ldots, n\}$, le lemme 1.4 donne les égalités :

$$\Delta'(D'F)(\tilde{X}_i) = D'(\Delta'F)(\tilde{X}_i) = \frac{1}{r}(\lambda - n)\, df(X_i),$$

$$\Delta'(D'F)(e) = -\frac{1}{r^2}(\lambda - n) f.$$

Ceci donne

$$\langle \Delta'(D'F), D'F \rangle = \frac{1}{r^2}(\lambda - n)(|df|^2 - f^2).$$

Remarquons que la sous-variété $M \times \{1\}$ de M' peut être identifiée isométriquement à M et que l'intégrale sur M de la fonction $\Delta(f^2 + |df|^2)$ est nulle. L'hypothèse $r \geqq (n-1)g$ et le lemme 1.2 impliquent que $r' \geqq 0$. En intégrant l'égalité (2) sur $M \times \{1\}$, nous obtenons $(\lambda - n)\int_M (|df|^2 - f^2) . v_g \geqq 0$, ce qui donne $(\lambda - n)(\lambda - 1) \geqq 0$, d'où $\lambda \geqq n$.

Preuve de 2.2. — Nous supposons que la fonction f définie dans la preuve de 2.1 vérifie $\Delta f = n . f$, nous pouvons considérer que son maximum est égal à 1, en la multipliant au besoin par une constante appropriée. D'après 1.4, en intégrant l'égalité (2) sur $M \times \{r\}$, nous avons $\int_{M \times \{r\}} |D'D'F|^2 \leqq 0$, ce qui prouve que la 1-forme D'F est parallèle sur M'. La fonction f atteignant son maximum en un point m_0, nous avons

$$\operatorname{grad} F_{(m_0, 1)} = e_{(m_0, 1)}.$$

Nous considérons une géodésique quelconque γ issue du point $(m_0, 1)$. En vertu de 1.3, nous avons

$$t.\dot{\gamma}(t) = r(t).e_{\gamma(t)} - \operatorname{grad} F_{\gamma(t)}.$$

Le champ de vecteurs grad F étant parallèle, le lemme 1.2 permet de conclure que $R'(.,\dot{\gamma})=0$. Les champs de Jacobi le long de γ sont ceux d'une variété plate. La courbure R' est donc nulle en tout point de γ. Considérons un point quelconque $m' \in M'$ où $\operatorname{grad} F \neq \pm e$. Pour prouver que $R'=0$ en m', il suffit de trouver une géodésique γ reliant m' à un point m'_0 tel que $\operatorname{grad} F_{m'_0} = \pm e_{m'_0}$. En tout point $(m, r) \in M'$, définissons le champ de vecteurs e' par $e' = r.e$. La géodésique γ de M' vérifiant $\gamma(0)=m'$ et $\dot{\gamma}(0) = \operatorname{grad} F_{m'} - e'_{m'}$ est définie sur [0, 1] d'après 1.5. Nous avons $e'_{\gamma(1)} = \operatorname{grad} F_{\gamma(1)}$ d'après 1.3. Donc $R'=0$ et $R=R_0$ d'après 1.2. Si M est simplement connexe, alors on a $(M, g) = (S^n, \text{can})$. Si la variété (M, g) n'est plus supposée simplement connexe, son revêtement universel est (S^n, can). Notons $\hat{f}$ le relèvement de la fonction f sur S^n, $\hat{f}$ n'a qu'un seul maximum puisque $\hat{f}$ est la restriction à S^n d'une forme linéaire de $\mathbf{R}^{n+1}$. Le point m_0 n'ayant qu'un seul antécédent dans S^n, nous obtenons $(M, g) = (S^n, \text{can})$.

Dans sa propre démonstration du théorème 2.2, M. Obata avait d'abord démontré une autre proposition, à savoir qu'une variété complète admettant une solution non nulle pour l'équation $DDf + f.g = 0$ est isométrique à (S^n, can). Cette proposition implique 2.2, nous verrons en effet dans la suite que les égalités $DDf + f.g = 0$ et $D'D'F = 0$ sont équivalentes. Nous donnons ici un énoncé légèrement plus fort de cette proposition.

2.3. Proposition. — *Soit* (M, g) *une v. r. admettant une solution* f *non nulle pour l'équation* $DDf + f.g = 0$.

(i) *Si tout point de* (M, g) *peut être relié par une géodésique à un point critique de* f, *alors* (M, g) *est localement isométrique à* (S^n, can).

(ii) *Si* M *est complète, alors* $(M, g) = (S^n, \text{can})$.

Remarques. — L'intérêt de (i) est de s'appliquer au cas où la solution f est définie seulement au voisinage d'un de ses points critiques. Nous dirons que la v. r. vérifie *l'hypothèse* (H) autour du point m de M si l'application $\exp_m$ est définie sur tous les vecteurs de $T_m M$ de norme inférieure ou égale à $\pi/2$. Nous montrerons dans la preuve qui suit que toute solution de (E_1) dans une telle variété (à plus forte raison dans une variété complète) possède un point critique.

Preuve. — Nous *reprenons les notations* de la preuve de 2.1. Nous allons montrer que la fonction F (définie sur M' par l'égalité $F(m, r) = r.f(m)$) vérifie $D'D'F=0$. En effet, nous avons $D'F((1/r)\tilde{X}_i) = df(X_i)$ pour tout entier $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $D'F(e) = f$, ce qui implique que $D'_e D'F = 0$. D'autre part, d'après 1.0, nous avons, pour tous les entiers i et $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$D'_{\tilde{X}_i} D'F(\tilde{X}_j) = r.D_{X_i} df(X_j) + rg(X_i, X_j) D'F(e) = 0.$$

Le champ de vecteurs grad F est donc parallèle. En multipliant la fonction f par une constante appropriée, nous obtenons $|\operatorname{grad} F| = 1$. Si la fonction f admet un point critique m_0, nous avons grad $F_{(m_0, 1)} = \pm e_{(m_0, 1)}$. Nous reprenons alors la preuve de 2.2, ce qui achève la preuve de 2.3 (i).

Si la variété vérifie seulement l'hypothèse (H), il existe un point m tel que toute géodésique issue de m soit de longueur au moins $\pi/2$. Il existe un vecteur $v \in T_m M$ et un nombre $\theta \in [0, \pi]$ tels que nous puissions écrire :

$$\operatorname{grad} F_{(m, 1)} = \sin\theta . \tilde{v} + \cos\theta . e_{(m, 1)}.$$

Nous avons alors

$$f(m) = D' F(e) = \cos\theta \qquad \text{et} \qquad df(\tilde{v}) = D' F(\tilde{v}) = \sin\theta.$$

Considérons une géodésique β de M vérifiant $\beta(0) = m$ et $\dot{\beta}(0) = v$, par hypothèse nous avons

$$\frac{d^2}{dt^2}[f \circ \beta] = -f \circ \beta,$$

ce qui donne

$$f \circ \beta(t) = \cos\theta . \cos t + \sin\theta . \sin t.$$

Remarquons que

$$|f| = |D' F(e)| \leqq |D' F| = 1.$$

Lorsque le nombre θ est inférieur à $\pi/2$, nous avons $f \circ \beta(\theta) = +1$ et le point $\beta(\theta)$ est un maximum pour f. Dans le cas contraire, nous avons $\theta - \pi \in [-\pi/2, 0]$ et le point $\beta(\theta - \pi)$ est un minimum pour f puisque $f \circ \beta(\theta - \pi) = -1$. Nous sommes donc ramenés au cas où la fonction f a un point critique, ce qui achève la preuve.

3. Étude du cas où M′ est réductible

3.0. Rappels. — On considère un point quelconque m d'une v. r. (M, g). A chaque lacet ω de point-base m, on associe l'isométrie de la fibre $T_m M$ qui envoie tout vecteur sur son image par le transport parallèle le long de ω. L'ensemble de ces isométries est un groupe noté K_m. Si la variété est connexe, les groupes K_{m_1} et K_{m_2}, correspondant à deux points quelconques m_1 et m_2, sont conjugués. Il existe alors un sous-groupe K de O(n) agissant sur chaque fibre tangente et dont l'action sur $T_m M$ coïncide avec celle de K_m. Ce groupe est le *groupe d'holonomie* de M, sa composante connexe de l'identité est appelée *g.h.h.r.* (groupe d'holonomie homogène restreint) *de* M *et notée* G. *Nous noterons* désormais K′ et G′ le groupe d'holonomie et le g.h.h.r. de M′, munie de la métrique définie en 1.0. On rappelle que la représentation de l'algèbre de Lie de G sur $T_m M$ contient tous les endomorphismes du type R(x, y), où x et y sont des vecteurs quelconques de $T_m M$.

(*a*) Si un sous-espace vectoriel E de $T_m M$ est invariant par l'action de G, alors pour tous les vecteurs $x \in E$ et $y \in E^{\perp}$ on a $R(x, y)=0$.

La propriété (*a*) se déduit de ce qui précède : en effet, pour tous les vecteurs u et $v \in T_m M$, l'endomorphisme $R(u, v)$ envoie E sur E, ce qui donne :

$$g(R(x, y)u, v)=g(R(u, v)x, y)=0.$$

D'autre part, si la v. r. M′ est localement symétrique, pour tout point $m' \in M'$, l'ensemble des endomorphismes de $T_{m'} M'$ du type $R'(x', y')$ (où x' et y' sont deux vecteurs quelconques de $T_{m'} M'$) engendre l'algèbre de Lie de G′. Le lemme 1.2 donne la propriété suivante :

(*b*) Si la v.r. M′ est localement symétrique, alors le g.h.h.r. G′ agit trivialement sur le vecteur e.

3.1. Proposition. — *Si la v.r.* (M, g) *est complète et si le groupe* G′ *agit réductiblement sur* $\mathbf{R}^{n+1}$, *alors* (M, g) *est localement isométrique à* $(S^n, \text{can.})$. *Si de plus la variété est simplement connexe, alors* $(M, g)=(S^n, \text{can})$.

Avant de prouver 3.1, nous allons d'abord établir le lemme suivant. On peut décomposer le fibré TM′ en une somme de deux distributions orthogonales V_1 et V_2 invariantes par l'action de G′. Notons e' le champ de vecteurs sur M′ défini par $e'=r.e$ au point (m, r). L'ensemble des points de M′ où e' est situé dans V_1 (resp. V_2) est appelé C'_1 (resp. C'_2).

3.2. Lemme. — *Soient* m'_1 *et* m'_2 *deux points de* C'_1 *et* C'_2. *La sous-variété* M'_2 (*resp.* M'_1), *obtenue en projetant* $V_2(m'_1)$ [*resp.* $V_1(m'_2)$] *par l'application exponentielle de* M′ *au point* m'_1 (*resp.* m'_2) *est totalement géodésique et plate.*

Preuve. — Il suffit de faire la preuve pour M'_2. La sous-variété intégrale de V_2 passant par m'_1 est totalement géodésique, elle est donc égale à M'_2. Soit γ une géodésique quelconque de M'_2 issue de m'_1. D'après 1.3, le champ de vecteurs X′, défini le long de γ par l'égalité $X'(t)=e'_{\gamma(t)}-t.\dot{\gamma}(t)$, est parallèle relativement à D′. Les vecteurs $X'(0)$ et $\dot{\gamma}(0)$ étant situés respectivement dans V_1 et V_2, il en est de même pour $X'(t)$ et $\dot{\gamma}(t)$ au point $\gamma(t)$ car V_1 et V_2 sont invariants par transport parallèle sur M′. Le lemme 1.2 nous donne

$$R'(.,.)X'(t)=-t.R'(.,.)\dot{\gamma}(t).$$

D'après 3.0 (*a*), les deux membres de cette égalité sont respectivement situés dans V_1 et V_2, ce qui donne $R'(.,.)\dot{\gamma}=0$. Les champs de Jacobi le long de γ sont donc ceux d'une variété plate et M'_2 est plate.

Preuve de 3.1. — Les ensembles C'_1 et C'_2 sont de mesure nulle car $M'_2 \cap C'_1=\{m'_1\}$. Considérons un point m' hors de $C'_1 \cup C'_2$. Les composantes X'_1 et X'_2 de $e'_{m'}$ dans V_1 et V_2 sont non nulles. Les géodésiques γ_1 et γ_2 issues de m' et vérifiant $\dot{\gamma}_1(0)=-X'_1$ et $\dot{\gamma}_2(0)=-X'_2$ sont définies sur [0, 1] d'après 1.5. Les points $\gamma_1(1)$ et $\gamma_2(1)$ appartiennent respectivement à C'_2 et C'_1 d'après 1.3. Le point m' est à l'intersection de deux sous-variétés de types M'_1 et M'_2. Le lemme 3.2 donne $R'=0$, d'où $R=R_0$ d'après 1.2. Le revêtement universel de (M, g) est donc isométrique à $(S^n, \text{can.})$. Ceci prouve 3.1.

Remarque. — *Dans une v.r. vérifiant* (H) *autour d'un point m* (*cf.* 2.3), *si* G' *est réductible, la boule* B *de centre m et de rayon* $\pi/2$ *est localement isométrique à* (S^n, can).

Schéma de la preuve. — Posons $B' = \overline{B} \times]0, +\infty[$. Dans le sous-ensemble B' de M', notons M_1'' et M_2'' les sous-variétés intégrales de V_1 et V_2 passant par le point $m' = (m, r)$. Le raisonnement de 3.1 restant valable, il existe deux points m_1' et m_2' dans $M_2'' \cap C_1'$ et $M_1'' \cap C_2'$. Notons exp' l'application exponentielle de M'. En vertu de 1.5, l'application φ définie par l'égalité $\varphi(Y') = \exp'_{m'}(Y' - e'_{m'})$ est une surjection de l'ensemble V^+ des vecteurs $Y' \in T_{m'} M'$ tels que $\langle Y', e'_{m'} \rangle \geqq 0$ sur B'. Le lemme 3.2 permet de démontrer que φ est localement isométrique et totalement géodésique de $(e'_{m'} + V_2) \cap V^+$ dans M_2'. La sous-variété M_2'' est incluse dans M_2', donc plate. L'ensemble $M_1'' \times M_2''$, formé des points n' tels qu'il existe deux géodésiques α et β tangentes respectivement à V_1 et V_2 et vérifiant $\alpha(0) \in M_2''$, $\beta(0) \in M_1''$ et $\alpha(1) = \beta(1) = n'$, est plat. Pour tout vecteur Y' de V^+, notons Y_1' et Y_2' les composantes de $Y' - e'_{m'}$ dans V_1 et V_2. Si le nombre réel r est assez grand et si $\|Y'\| = 1$, la variation H donnée par $H(t, s) = \exp'_{m'}(t.Y_1' + s.Y_2')$ est définie pour tous les $(t, s) \in [0, 1]^2$. Les champs de vecteurs directeurs de H sont situés dans V_1 et V_2; ils sont obtenus en prolongeant Y_1' et Y_2' parallèlement en tout point de la variation (d'après 3.0 (*a*), ce prolongement est indépendant du chemin suivi dans la variation). Les courbes α et β données par $\alpha(t) = H(t, 1)$ et $\beta(s) = H(1, s)$ sont des géodésiques. Le point $\varphi(Y')$ appartient à $M_1'' \times M_2''$, d'où $R' = 0$ sur $\overline{B} \times \{1\}$. Le lemme 1.2 permet de conclure que φ est une isométrie locale de la demi-sphère sur $\overline{B} \times \{1\} \simeq \overline{B}$.

3.3. Corollaire. — *Soit* (M, g) *une v.r. sur laquelle il existe une fonction f non constante vérifiant, pour tous les champs de vecteurs* X, Y, Z *sur* M,

$$DDD f(X, Y, Z) + 2(Df \otimes g)(X, Y, Z) + (Df \otimes g)(Y, X, Z) + (Df \otimes g)(Z, X, Y) = 0.$$

(i) *Si* (M, g) *est complète, son revêtement universel est* (S^n, can.).

(ii) *Dans le cas où la v.r. n'est pas complète, si f possède un point critique isolé* m_1 *et si* (M, g) *est étoilée autour de* m_1 (*i.e.* $\exp_{m_1}$ *est surjective sur* M), *alors* (M, g) *est localement isométrique à* (S^n, can).

Cette proposition était une conjecture de M. Obata. Une autre démonstration, indépendante de celle-ci et valable dans le cas (i) a été simultanément obtenue par S. Tanno (*voir* [5]).

Remarquons que, si (M, g) *vérifie seulement l'hypothèse* (H) *autour d'un point m, alors la boule* B *de centre m et de rayon* $\pi/2$ *est localement isométrique à* (S^n, can).

Preuve. — *Considérons la fonction* F de M' dans **R** définie par l'égalité $F(m, r) = r^2 . f(m)$. Quel que soit le point $m \in M$, trois vecteurs quelconques de $T_m M$ peuvent toujours être prolongés par trois champs de vecteurs X, Y, Z définis sur un voisinage de m dans M et vérifiant $DX = DY = DZ = 0$. Définissons les champs de vecteurs X', Y', Z' tangents à M' par les égalités suivantes, valables au point (m, r) :

$$X' = \frac{1}{r}\tilde{X}, \qquad Y' = \frac{1}{r}\tilde{Y} \qquad \text{et} \qquad Z' = \frac{1}{r}\tilde{Z}.$$

Nous avons

$$D'_e e = D'_e X' = D'_e Y' = D'_e Z' = 0,$$

$$D'_{X'}e=\frac{1}{r}X' \qquad \text{et} \qquad D'_{X'}Y'=\frac{1}{r}g(X, Y).e.$$

Au premier degré, ceci donne

$$D'_{Z'}F=r.D_Z f \text{ et } D'_e F=2r.f.$$

Au second degré, nous en déduisons les égalités :

$$D'_{Z'}D'_e F=D'_e D'_{Z'}F=D_Z f, \qquad D'_e D'_e F=2f,$$

$$D'_{Y'}D'_{Z'}F=\frac{1}{r}.\tilde{Y}.D'_{Z'}F+\frac{1}{r}g(Y, Z)D'_e F=D_Y D_Z f+2g(Y, Z)f.$$

Au troisième degré, ce qui précède donne immédiatement $D'_e D' D' F=0$.

D'autre part, nous obtenons les égalités

$$D'_{X'}D'_{Z'}D'_e F=D'_{X'}D'_e D'_{Z'}F=\frac{1}{r}(X'.D'_{Z'}F-D'_{X'}D'_{Z'}F-D'_{D'_{X'}Z'}F)=0,$$

$$D'_{X'}D'_e D'_e F=\frac{1}{r}(\tilde{X}.D'_e D'_e F-D'_{X'}D'_e F-D'_e D'_{X'}F)=0,$$

$$\begin{aligned}D'_{\tilde{X}}D'_{Y'}D'_{Z'}F&=X.(D_Y D_Z f+2g(Y, Z)f)+g(X, Y)D'_e D'_{Z'}F+g(X, Z)D'_{Y'}D'_e F\\&=D_X D_Y D_Z f+2g(Y, Z)D_X f+g(X, Y)D_Z f+g(X, Z)D_Y f=0.\end{aligned}$$

Ceci achève de montrer que $D'D'D'F=0$. Le tenseur symétrique $D'^2F=D'D'F$ est parallèle. Si le g.h.h.r. G' agit irréductiblement sur $\mathbf{R}^{n+1}$, il existe une constante réelle λ telle que $D'^2F(.,.)=\lambda\langle .,.\rangle$ et nous avons $2f=D'^2F(e, e)=\lambda$, ce qui est exclu par hypothèse. Le groupe G' agit réductiblement sur $\mathbf{R}^{n+1}$ et la proposition 3.1 permet d'achever la preuve de 3.2 lorsque la variété vérifie l'hypothèse (H) ou est complète. Dans le cas contraire, il existe des distributions orthogonales $V_1, \ldots, V_k$ sur M' et des nombres réels $\mu_1, \ldots, \mu_k$ vérifiant les deux égalités suivantes en tout point $m'\in M'$:

$$T_{m'}M'=V_1(m')\oplus\ldots\oplus V_k(m'),$$

$$D'^2F(x, .)=\mu_i\langle x, .\rangle \quad \text{pour tout vecteur } x\in V_i(m').$$

Un point m_1 est un point critique de f si et seulement si nous avons

$$D'^2F(e, .)=\frac{1}{r}D'F(.)=2f(m_1)\langle e, .\rangle,$$

donc si et seulement si, pour un certain i, e est situé dans V_i au point $(m_1, 1)$. Pour toute géodésique c de M telle que $c(0)=m_1$, notons $\beta(t)=(c(t), 1)$. En vertu de 1.0, nous définissons un champ de vecteurs X'_θ, parallèle (selon D') le long de β, en posant

$$X'_\theta(t)=\cos(t-\theta).e_{\beta(t)}-\sin(t-\theta).\tilde{\dot{c}}(t) \qquad (\text{où } \theta \text{ est un nombre réel donné}).$$

Choisissons θ assez petit pour que $c(\theta)$ existe. Si le vecteur $X'_\theta(0)$ est dans V_i, il en est de même pour $e_{\beta(\theta)}$ car V_i est invariant par transport parallèle dans M′, alors $c(\theta)$ est un point critique de f. Dans le cas (ii), tout point m de M étant situé sur une géodésique c issue d'un point critique isolé m_1, nous avons $\dim(V_i)=1$ et $m=c(t)$ pour un certain $t\in[k\pi, (k+1)\pi[$. D'après 1.5, il existe une géodésique γ de M′ reliant les points $(c(k\pi), 1)$ et $(c(t), r)$. Le vecteur $e_{\beta(k\pi)}$, égal à $X'_{k\pi}(k\pi)$, est situé dans V_i. D'après 1.3, ceci implique que $e'_{\gamma(t)}-t.\dot{\gamma}(t)$ est dans V_i. A l'aide de 1.2 et 3.0(a), nous obtenons $R'(.,\dot{\gamma})=0$. Les champs de Jacobi le long de γ sont ceux d'une v.r. plate, d'où $R'=0$. D'après 1.2, (M, g) est localement isométrique à (S^n, can).

4. Généralisation aux solutions de (E_p)

Dans le cas où la v.r. (M, g) est la sphère canonique, la variété M′ est égale à $\mathbf{R}^{n+1}\setminus 0$. Nous *considérons* un entier quelconque $p\geqq 1$. Si une fonction f vérifie $\Delta f=p(n-p+1)f$, alors la fonction F, définie sur $\mathbf{R}^{n+1}\setminus 0$ par l'égalité $F(r.x)=r^p.f(x)$ pour tous les éléments (x, r) de $S^n\times]0, +\infty[$, est un polynôme homogène de degré p et vérifie $D'^{p+1}F=0$. Cette équation différentielle, traduite par rapport à f, donne une *équation* (E_p) du type :

$$(E_p)\quad D^{p+1}f(Y_1, \ldots, Y_{p+1})+\sum_{1\leqq s\leqq(p+1)/2}\ \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{p+1}}\lambda(s, \sigma)\,(g^s\otimes D^{p+1-2s}f)(Y_{\sigma(1)}, \ldots, Y_{\sigma(p+1)})=0,$$

où $\mathfrak{S}_\alpha$ désigne l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, \alpha\}$, où $\lambda(s, \sigma)$ représente un scalaire dépendant de s et σ et où $Y_1, \ldots, Y_{p+1}$ sont des champs de vecteurs quelconques tangents à M. La *forme exacte de* (E_p) — i.e. la valeur des scalaires $\lambda(s, \sigma)$ — sera donnée par 4.4. Dans la suite, lorsque nous prendrons un champ de vecteurs quelconque X (resp. X′) il sera entendu que X est tangent à M (resp. X′ est tangent à M′). Pour *un entier donné* $p\in\mathbf{N}$, nous *notons* F la fonction définie sur M′ par l'égalité $F(m, r)=r^p.f(m)$. Nous dirons désormais que la fonction f vérifie (E_p) *si et seulement si* $D'^{p+1}F(\tilde{Y}_0, \ldots, \tilde{Y}_p)=0$ pour tous les champs de vecteurs $Y_0, \ldots, Y_p$ *tangents à* M. Le lemme suivant prouve que (E_p) est bien du type annoncé ci-dessus.

4.0. Lemme. — *Soient α et l deux entiers quelconques vérifiant $1\leqq l\leqq\alpha\leqq p+1$ et $\mathscr{S}_\alpha$ l'ensemble des entiers s vérifiant $2\leqq 2s\leqq\alpha$.*

(★) *Il existe une application λ_α de $\mathscr{S}_\alpha\times\mathfrak{S}_\alpha$ dans* $\mathbf{Z}$ *telle que*

$$D'^\alpha F(\tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_\alpha)=r^p[D^\alpha f(Y_1, \ldots, Y_\alpha)+\sum_{(s, \sigma)\in\mathscr{S}_\alpha\times\mathfrak{S}_\alpha}\lambda_\alpha(s, \sigma).(g^s\otimes D^{\alpha-2s}f)(Y_{\sigma(1)}, \ldots, Y_{\sigma(\alpha)})],$$

pour tous les champs de vecteurs $Y_1, \ldots, Y_\alpha$ tangents à M.

$$(\star\star)\quad D'^{\alpha}F(Y'_1, \ldots, Y'_{l-1}, r.e, Y'_{l+1}, \ldots, Y'_{\alpha}) = (p-\alpha+l)D'^{\alpha-1}F(Y'_1, \ldots, \widehat{Y'_l}, \ldots, Y'_{\alpha})$$
$$-\sum_{i=1}^{l-1} D'^{\alpha-1}F(Y'_1, \ldots, \widehat{Y'_i}, \ldots, Y'_{l-1}, Y'_i, Y'_{l+1}, \ldots, Y'_{\alpha}),$$

pour tous les champs de vecteurs $Y'_1, \ldots, Y'_{\alpha}$ *tangents à* M′.

Preuve. — Tous les calculs sont faits en un point quelconque $(m, r) \in M'$. A l'ordre 1, les propriétés $(\star)$ et $(\star\star)$ sont vérifiées puisque nous avons $D'F(r.e) = p.F$ et $D'F(\tilde{Y}) = r^p.Df(Y)$ pour tout champ de vecteurs Y tangent à M. Supposons que ces deux propriétés soient vraies jusqu'à l'ordre k et montrons qu'il en est de même à l'ordre $k+1$. Considérons des champs de vecteurs quelconques $Y_0, \ldots, Y_k$ définis sur un voisinage de m dans M; sans modifier leur valeur au point m on peut supposer que $DY_0 = \ldots = DY_k = 0$ au point m. Nous obtenons

$$D'^{k+1}(\tilde{Y}_0, \ldots, \tilde{Y}_k) = \tilde{Y}_0.D'^k F(\tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_k)$$
$$+\sum_{1 \leq l \leq k} g(Y_0, Y_l).D'^k F(\tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_{l+1}, r.e, \tilde{Y}_{l+1}, \ldots, \tilde{Y}_k).$$

Grâce aux hypothèses de récurrence, ceci prouve $(\star)$ à l'ordre $k+1$. Considérons une partie quelconque $I = \{i_1, \ldots, i_q\}$ de l'ensemble $\{1, \ldots, k\}$ et les champs de vecteurs $Z'_1, \ldots, Z'_k$ définis par les égalités $Z'_i = \tilde{Y}_i$ si $i \in I$ et $Z'_i = r.e$ si $i \notin I$. Remarquons que $D'^k F(Z'_1, \ldots, Z'_k)$ est une combinaison linéaire à coefficients constants des fonctions $D'^q F(\tilde{Y}_{i_{\sigma(1)}}, \ldots, \tilde{Y}_{i_{\sigma(q)}})$ d'après l'hypothèse de récurrence $(\star\star)$. L'hypothèse de récurrence $(\star)$ permet d'en déduire

$$D'^{k+1}F(r.e, Z'_1, \ldots, Z'_k) = r.e.D'^k F(Z'_1, \ldots, Z'_k) - k\, D'^k F(Z'_1, \ldots, Z'_k)$$
$$= (p-k)D'^k F(Z'_1, \ldots, Z'_k).$$

Ceci prouve l'équation $(\star\star)$ à l'ordre $k+1$ lorsque le vecteur $r.e$ est en première place. Dans le cas contraire, considérons des champs de vecteurs quelconques $Y'_0, \ldots, Y'_k$ définis sur un voisinage de (m, r) dans M′, sans modifier leur valeur au point (m, r) on peut supposer que $D'Y'_0 = \ldots = D'Y'_k = 0$.

Remarquons que $D'_{Y'_0}(r.e) = Y'_0$, ce qui donne

$$D'^{k+1}F(Y'_0, \ldots, Y'_{l-1}, r.e, Y'_{l+1}, \ldots, Y'_k)$$
$$= Y'_0.D'^k F(Y'_1, \ldots, Y'_{l-1}, r.e, Y'_{l+1}, \ldots, Y'_k)$$
$$-D'^k F(Y'_1, \ldots, Y'_{l-1}, Y'_0, Y'_{l+1}, \ldots, Y^k) = (p-k+l)D'^k F(Y'_0, \ldots, \hat{Y}'_l, \ldots, Y^k)$$
$$-\sum_{i=0}^{l-1} D'^k F(Y'_0, \ldots, \hat{Y}'_i, \ldots, Y'_{l-1}, Y'_i, Y'_{l+1}, \ldots, Y'_k).$$

Ceci achève de prouver l'équation (★★) à l'ordre $k+1$.

4.1. Proposition. — *Soit* (M, g) *une v. r. sur laquelle l'équation* (E_p) *admet une solution non constante* f *pour au moins un* $p \in \mathbf{N}^*$. *Si* (M, g) *est complète, son revêtement universel est isométrique à* (S^n, can).

Remarque. — Si (M, g) vérifie seulement l'hypothèse (H) autour d'un point m, alors la boule B de centre m et de rayon $\pi/2$ est localement isométrique à (S^n, can).

Cette proposition sera démontrée en 4.14. Avant de démontrer 4.1, nous allons donner en 4.4 une formulation explicite de l'équation (E_p).

Pour tout entier $\alpha \in \mathbf{N}$, un α-tenseur symétrique covariant sur M est entièrement déterminé par sa valeur sur les α-uples $(Y, \ldots, Y)$ où Y est un champ de vecteurs quelconque tangent à M. *Nous définissons le tenseur symétrique* $S^\alpha f$ par l'égalité :

$$S^\alpha f(Y, \ldots, Y) = \sum_{0 \leqq s \leqq \alpha/2} a_\alpha(s) . D^{\alpha-2s} f(Y, \ldots, Y) . [g(Y, Y)]^s,$$

où *le scalaire* $a_\alpha(s)$ *est défini*, pour tous les entiers α et $s \in \mathbf{N}$, par les égalités :

$$a_\alpha(0) = 1,$$
$$a_1(s) = a_0(s) = 0 \quad \text{pour tout } s \geqq 1,$$
$$a_{\alpha+1}(s) = a_\alpha(s) + \alpha(p+1-\alpha)\, a_{\alpha-1}(s-1) \quad \text{pour tout } s \geqq 1.$$

De manière explicite, nous avons

$$a_\alpha(s) = 0 \qquad \text{si} \quad 2s > \alpha,$$

$$a_\alpha(s) = \sum_{1 \leqq k_1 \ll k_2 \ll \ldots \ll k_s < \alpha} k_1 . \ldots . k_i . \ldots . k_s \times (p+1-k_1) \ldots (p+1-k_i) \ldots (p+1-k_s) \qquad \text{si} \quad 2 \leqq 2s \leqq \alpha,$$

la notation $k_i \ll k_{i+1}$ signifiant que $k_i + 1 < k_{i+1}$. Remarquons que $S^0 f = f$ et que $S^1 f = D f$. Dans la suite, nous *noterons* $D'^{(\alpha)} F$ le symétrisé du tenseur $D'^\alpha F$.

4.2. Lemme. — *Soient* α *et* k *deux entiers quelconques vérifiant* $1 \leqq k < \alpha \leqq p+1$, *soient* $Y_1, \ldots, Y_\alpha$ *des champs de vecteurs quelconques tangents à* M. *En tout point* $(m, r) \in M'$, *nous avons*

$$D'^{(\alpha)} F(\tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_\alpha) = r^p . S^\alpha f(Y_1, \ldots, Y_\alpha), \tag{1}$$

$$D'^{(\alpha)} F(\tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_k, r.e, \ldots, r.e) = r^p . \left[\prod_{i=k}^{\alpha-1} (p-i)\right] S^k f(Y_1, \ldots, Y_k). \tag{2}$$

Preuve. — Tous les calculs sont faits *en un point quelconque* $(m, r) \in M'$. Nous nous donnons des champs de vecteurs quelconques $Y, Y_1, \ldots, Y_\alpha$ tangents à M. A l'ordre 0, les propriétés (1) et (2) sont vérifiées, puisque nous avons $D'^{(0)} F = F = r^p . S^0 f$. Il en est de même à l'ordre 1, puisque nous avons

$$D' F(r.e)=p.r^p.S^0 f \qquad \text{et} \qquad D' F(\tilde{Y})=r^p.D f(Y)$$

pour tout champ de vecteurs Y tangent à M. Supposons les propriétés (1) et (2) vérifiées jusqu'à l'ordre α, montrons qu'il en est de même à l'ordre $\alpha+1$. L'égalité 4.0(★★) donne

$$D'^{(\alpha+1)} F(\tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_k, r.e, \ldots, r.e)=(p-\alpha) D'^{(\alpha)} F(\tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_k, r.e, \ldots, r.e).$$

ce qui démontre (2) à l'ordre $\alpha+1$. Pour prouver (1), il suffit de montrer que

$$D'^{\alpha+1} F(\tilde{Y}, \ldots, \tilde{Y})=r^p.S^{\alpha+1} f(Y, \ldots, Y).$$

Sans modifier la valeur du champ Y au point m, nous pouvons supposer que $DY=0$ en ce point. D'après 4.0 (★★), nous avons

$$D'^{\alpha} F(\tilde{Y}, \ldots, \tilde{Y}, r.e, \tilde{Y}, \ldots, \tilde{Y})=(p-\alpha+1) D'^{\alpha-1} F(\tilde{Y}, \ldots, \tilde{Y})=D'^{\alpha} F(r.e, \tilde{Y}, \ldots, \tilde{Y}).$$

Ceci donne

$$\begin{aligned} D'^{\alpha+1} F(\tilde{Y}, \ldots, \tilde{Y}) &= \tilde{Y}.D'^{\alpha} F(\tilde{Y}, \ldots, \tilde{Y})+\alpha.g(Y, Y) D'^{\alpha} F(r.e, \tilde{Y}, \ldots, \tilde{Y}) \\ &= r^p [D_Y S^{\alpha} f(Y, \ldots, Y)+\alpha(p-\alpha+1) g(Y, Y).S^{\alpha-1} f(Y, \ldots, Y)] \\ &= r^p.S^{\alpha+1} f(Y, \ldots, Y) \end{aligned}$$

d'après la formule de récurrence qui donne les coefficients $a_{\alpha+1}(s)$.

4.3. Considérons un *espace euclidien* V, muni d'un *produit scalaire noté* $(.|.)$. Dans ce qui suit, α est un entier naturel quelconque et $x, y, v, w, y_1, \ldots, y_\alpha$ sont des vecteurs quelconques de V. Nous nous intéressons à *l'espace des tenseurs de courbure sur* V, c'est-à-dire à l'espace $\mathcal{R}$ des applications linéaires Q de $V \otimes V$ dans l'espace des endomorphismes de V qui vérifient les deux égalités :

$$(Q(x, y) v \mid w)=-(Q(y, x) v \mid w)=-(Q(x, y) w \mid v)=(Q(v, w) x \mid y),$$
$$Q(x, y) v+Q(y, v) x+Q(v, x) y=0.$$

Pour tout tenseur de courbure $Q \in \mathcal{R}$ et toute forme α-linéaire τ, *nous définissons une forme* α-*linéaire* $Q(x, y)\tau$ et *une forme* $(\alpha+2)$-*linéaire* $Q\tau$ par les égalités :

$$Q\tau(x, y, y_1, \ldots, y_\alpha)=Q(x, y)\tau(y_1, \ldots, y_\alpha) = \sum_{i=1}^{\alpha} \tau(y_1, \ldots, -Q(x, y) y_i, \ldots, y_\alpha).$$

Par récurrence, nous définissons la forme $(\alpha+2l)$-linéaire $Q^l\tau$ égale à $Q(Q^{l-1}\tau)$.

Les tenseurs R et R_0 (*cf.* 1.2) sont des tenseurs de courbure sur chaque fibre tangente de TM, il en est de même pour *le tenseur* $\overline{R}=R-R_0$. Considérons deux tenseurs covariants T et T' sur M et M'. *Un résultat classique* (généralisation de [9], p. 54) donne

$$R(X, Y)T = D_X D_Y T - D_Y D_X T$$

pour tous les champs X, Y tangents à M,

$$R'(X', Y')T' = D'_{X'} D'_{Y'} T' - D'_{Y'} D'_{X'} T'$$

pour tous les champs X', Y' tangents à M'.

Remarquons que, si T est un 0-tenseur (i.e. une fonction), alors nous avons $RT = \overline{R}T = 0$.

4.4. LEMME. — *Soit f une fonction vérifiant l'équation* (E_p) *en un point* $m \in M$, *alors les équations suivantes sont vérifiées en ce point :*

(i) $$S^{p+1} f = 0,$$

(ii) $$\overline{R}^l S^{p+1-2l} f = 0 \quad \textit{pour tout entier } l \leqq \frac{p}{2},$$

(iii) $$D_{y_0}[\overline{R}^l S^{p-2l} f](y_1, \ldots, y_p) + (2l+1) \sum_{2l+1 \leqq i \leqq p} g(y_0, y_i) . \overline{R}^l S^{p-2l-1} f(y_1, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_p) = 0$$

pour tous les vecteurs $y_0, \ldots, y_p \in T_m M$ *et pour tout entier l inférieur ou égal à* $(p-1)/2$.

Dans la démonstration qui suit, les champs de vecteurs $X, Y, Y_0, \ldots, Y_p$ *désigneront* des champs de vecteurs quelconques définis sur un voisinage de m dans M. Remarquons, à l'aide de 4.3, que

$$\begin{aligned}\overline{R}(X, Y) S^\alpha f(Y_1, \ldots, Y_\alpha) &= (D_X D_Y - D_Y D_X) S^\alpha f(Y_1, \ldots, Y_\alpha) \\ &+ \sum_{i=1}^{\alpha} g(Y, Y_i) S^\alpha f(Y_1, \ldots, Y_{i-1}, X, Y_{i+1}, \ldots, Y_\alpha) \\ &- g(X, Y_i) S^\alpha f(Y_1, \ldots, Y_{i-1}, Y, Y_{i+1}, \ldots, Y_\alpha) \quad \text{pour tout entier } \alpha \leqq p-1.\end{aligned}$$

Le lemme 4.4 permet donc une formulation explicite de l'équation (E_p).

Preuve. — Tous les calculs sont *faits au point* $(m, r) \in M'$. Par convention, la fonction f vérifie l'équation (E_p) au point m si et seulement si nous avons $D'^{p+1} F(\tilde{Y}_0, \ldots, \tilde{Y}_p) = 0$ au point (m, r) (*cf.* le début du chapitre 4). L'équation (i) est donc une conséquence immédiate de 4.2 (1). En utilisant 4.3, puis 1.2 et 4.2 (1), nous obtenons

$$\begin{aligned}(D'_{\tilde{X}} D'_{\tilde{Y}} - D'_{\tilde{Y}} D'_{\tilde{X}}) D'^{(\alpha)} F(\tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_\alpha) &= R'(\tilde{X}, \tilde{Y}) D'^{(\alpha)} F(\tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_\alpha) \\ &= r^p . \overline{R}(X, Y) S^\alpha f(Y_1, \ldots, Y_\alpha) \quad \text{pour tout entier } \alpha \leqq p-1.\end{aligned}$$

Par hypothèse nous avons $R'^l D'^{(p+1-2l)} F(\tilde{Y}_0, \ldots, \tilde{Y}_p) = 0$, l'équation (ii) s'en déduit immédiatement.

Pour tout tenseur covariant T' défini sur M', nous avons $R'(e,\ .)T'=0$ d'après 1.2. Sans modifier la valeur des champs de vecteurs $Y_0, \ldots, Y_p$ au point m, nous pouvons supposer que $DY_0=\ldots=DY_p=0$. Nous en déduisons, à l'aide de 4.2,

$$\begin{aligned}
D'_{\tilde{Y}_0} R'^l D'^{(p-2l)} F(\tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_p) &= \tilde{Y}_0 . R'^l D'^{(p-2l)} F(\tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_p) \\
&+ \sum_{i=2l+1}^{p} R'^l D'^{(p-2l)} F(\tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_{i-1}, g(Y_0, Y_i) r.e, \tilde{Y}_{i+1}, \ldots, \tilde{Y}_p) \\
&= r^p [D_{Y_0}(\overline{R}^l S^{p-2l} f)(Y_1, \ldots, Y_p) \\
&\quad + (2l+1) \sum_{i=2l+1}^{p} g(Y_0, Y_i) \overline{R}^l S^{p-2l-1} f(Y_1, \ldots, \hat{Y}_i, \ldots, Y_p)].
\end{aligned}$$

L'équation (iii) s'en déduit immédiatement.

4.5. Proposition. — *Pour un entier p donné, si la fonction f vérifie les équations* (i), (ii) *et* (iii) *en tout point de* M, *alors nous avons* $D'^{p+1} F(Y'_0, \ldots, Y'_p)=0$ *pour tous les champs de vecteurs* $Y'_0, \ldots, Y'_p$ *tangents à* M'.

La preuve de 4.5 sera donnée après les lemmes 4.9, 4.11 et 4.12 dont elle se déduit.

Dans le lemme qui suit, nous considérons une base orthonormée de l'espace euclidien V (*cf.* 4.3) *notée* $\{v_1, \ldots, v_n\}$*;* nous *noterons* $\sum_i$ et $\sum_{i,j}$ les sommes $\sum_{i=1}^{n}$ et $\sum_{i,j=1}^{n}$. *Nous considérons* également un tenseur de courbure quelconque Q et une forme multilinéaire quelconque τ sur V.

4.6. Lemme. — *Si nous avons* $\sum_{i,j} Q^2 \tau(v_i, v_j, v_i, v_j, ., \ldots, .)=0$, *alors nous obtenons* $Q\tau=0$.

Preuve. — Pour tout entier $\alpha \in \mathbf{N}$, *nous noterons* $(.|.)$ le produit scalaire de V et celui que nous obtenons par extension sur les formes α-linéaires. Pour deux formes α-linéaires quelconques τ_1 et τ_2 et pour deux vecteurs quelconques x et y de V, on vérifie aisément que

$$(Q(x, y)\tau_1 | \tau_2)+(\tau_1 | Q(x, y)\tau_2)=0.$$

Notons $\tau_{i,j}$ la forme α-linéaire définie par l'égalité $\tau_{i,j}=Q(v_i, v_j)\tau$. *Notons* q le tenseur de Ricci associé à Q et défini par l'égalité $q(x, y)=\sum_i (Q(x, v_i)v_i | y)$. Nous obtenons les égalités

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j} Q^2 \tau(v_i, v_j, v_i, v_j, ., \ldots, .) \\
&\qquad = \sum_{k,j} q(v_k, v_j) . Q(v_k, v_j)\tau - \sum_{k,i} q(v_k, v_i) . Q(v_i, v_k)\tau + \sum_{i,j} Q(v_i, v_j)\tau_{i,j}.
\end{aligned}$$

Or nous avons

$$\sum_{k,j} q(v_k, v_j) . Q(v_k, v_j)\tau=0$$

car les tenseurs q et Q sont respectivement symétrique et antisymétrique en k et j.

Nous obtenons donc $\sum_{i,j} Q(v_i, v_j)\tau_{i,j}=0$, d'où la conclusion :

$$\|Q\tau\| = \sum_{i,j}(Q(v_i, v_j)\tau \mid \tau_{i,j}) = \sum_{i,j}(\tau \mid Q(v_i, v_j)\tau_{ij}) = 0.$$

Ceci achève la preuve.

4.7. Corollaire. — *Si la fonction f vérifie les équations* (ii) *et* (iii), *alors, pour tout entier l vérifiant* $1 \leqq l \leqq p/2$, *les tenseurs* $\overline{R}S^{p+1-2l}f$ *et* $\overline{R}^l S^{p-2l} f$ *sont respectivement nul et parallèle.*

Preuve. — L'équation (ii) et le lemme 4.6 donnent immédiatement $\overline{R}S^{p+1-2l}f=0$. En remplaçant dans l'équation (iii), nous obtenons $D(\overline{R}^l S^{p-2l}f)=0$ pour tout entier l vérifiant $1 \leqq l \leqq (p-1)/2$. Nous achevons la preuve en remarquant que $\overline{R}^l S^0 f=0$ lorsque nous avons $p=2l$.

4.8. *Remarque.* — Considérons l'espace $\mathscr{E}_p^0$ des fonctions constantes qui vérifient (i) (ii) et (iii). Si l'entier p est pair, $\mathscr{E}_p^0$ est l'espace des fonctions constantes. Par contre, si l'entier p est impair, nous avons $\mathscr{E}_p^0 = \{0\}$. Remarquons aussi que, pour tous les entiers p et $k \in \mathbf{N}$ et pour toute fonction constante f nous avons $\overline{R}S^k f=0$. Considérons en effet un entier quelconque $r \in \mathbf{N}$; si la fonction f est constante, il apparaît dans le calcul des tenseurs $S^{2r+1}f$ et $S^{2r}f$ (*cf.* ce qui précède 4.2) que

$$S^{2r+1}f=0$$

et que

$$S^{2r}f(Y, \ldots, Y) = a_{2r}(r)[g(Y, Y)]^r.f,$$

pour tout champ de vecteurs Y tangent à M. Le tenseur $\overline{R}g$ étant nul, nous obtenons $\overline{R}S^{2r}f=0$.

4.9. Lemme. — *Reprenons les notations de* 3.0. *Si le g.h.h.r.* G *de la v.r.* (M, g) *agit réductiblement sur* $\mathbf{R}^n$, *alors l'espace des solutions de* (i), (ii) *et* (iii) *est égal à* $\mathscr{E}_p^0$.

Preuve. — *Considérons une fonction* f qui vérifie les équations (i), (ii) et (iii). Dans cette démonstration, nous nous plaçons en un point quelconque $m \in M$. Il existe un sous-espace non-trivial E de $T_m M$ (i.e. E est différent de $\{0\}$ et de $T_m M$) qui est invariant par l'action de G. *Considérons* deux vecteurs quelconques x et y, de norme égale à 1, pris respectivement dans E et $E^\perp$. D'après 3.0 (*a*), nous avons $R(x, y)=0$. Si l'entier p est pair, nous avons $\overline{R}(x, y)\,df=0$ d'après 4.7. Pour tout vecteur $z \in T_m M$, ceci donne

$$df(y).g(x, z) - df(x)\,g(y, z) = R_0(x, y)\,df(z) = R(x, y)\,df(z) = 0.$$

Ceci prouve que $df(x)=df(y)=0$. La fonction f est donc constante.

Lorsque l'entier p est impair, nous remarquons les égalités :

$$\overline{R}(x, y)\,x = -R_0(x, y)\,x = y,$$

$$\overline{R}(x, y)\,y = -R_0(x, y)\,y = -x.$$

Notons q l'entier égal à $(p-1)/2$; pour tout entier l vérifiant $1 \leqq l \leqq q$, nous avons les deux formules de récurrence :

$$\overline{\mathrm{R}}^l df(x, y, x, y, \ldots, x, y, \ldots, x, y, y) = \overline{\mathrm{R}}^{l-1} df(x, y, \ldots, x, y, \ldots, x, y, x),$$
$$\overline{\mathrm{R}}^l df(x, y, x, y, \ldots, x, y, \ldots, x, y, x) = -\overline{\mathrm{R}}^{l-1} df(x, y, \ldots, x, y, \ldots, x, y, y).$$

Ces égalités restent vraies si nous remplaçons les vecteurs x et y par les vecteurs $\gamma(x)$ et $\gamma(y)$, où γ est un élément quelconque de G. Ajoutons à ceci le fait que le tenseur $\overline{\mathrm{R}}^q df$ est parallèle d'après 4.7; pour tout entier $l \in \{0, 1, \ldots, q\}$ nous obtenons

$$\overline{\mathrm{R}}^l df(\gamma(x), \gamma(y), \ldots, \gamma(x), \gamma(y), \ldots, \gamma(x), \gamma(y), \gamma(y)) = \overline{\mathrm{R}}^l df(x, y, \ldots, x, y, \ldots, x, y, y),$$

$$\overline{\mathrm{R}}^l df(\gamma(x), \gamma(y), \ldots, \gamma(x), \gamma(y), \ldots, \gamma(x), \gamma(y), \gamma(x)) = \overline{\mathrm{R}}^l df(x, y, \ldots, x, y, \ldots, x, y, x).$$

En particulier, nous avons

$$df(\gamma(x)) = df(x) \qquad \text{et} \qquad df(\gamma(y)) = df(y)$$

et la 1-forme df est invariante par l'action de G. Ceci implique que $\mathrm{D}^2 f = \mathrm{D}\, df = 0$. Le calcul du tenseur $\mathrm{S}^{2q+2} f$ (*voir* ce qui précède 4.2) donne

$$\mathrm{S}^{2q+2} f(\mathrm{Y}, \ldots, \mathrm{Y}) = a_{2q+2}(q+1)[g(\mathrm{Y}, \mathrm{Y})]^{q+1} . f,$$

pour tout champ de vecteurs Y tangent à M.

L'équation (i) implique alors que la fonction f est nulle. La remarque 4.8 achève la preuve de 4.9.

4.10. *Remarque.* — Dans l'espace euclidien V, muni du produit scalaire $(.|.)$, considérons *l'application de dualité* qui, à tout élément u de V^*, associe le vecteur $u^\#$ défini par l'égalité $u(.) = (u^\# | .)$. Pour tout tenseur de courbure Q et pour toute forme linéaire u sur V, *nous avons*

$$\mathrm{Q}(x, y) u(z) = (\mathrm{Q}(x, y) u^\# | z) \quad \text{pour tous les vecteurs } x, y, z \in \mathrm{V}.$$

Ceci se déduit immédiatement des égalités :

$$\mathrm{Q}(x, y) u(z) = -u[\mathrm{Q}(x, y) z] = -(u^\# | \mathrm{Q}(x, y) z) = (\mathrm{Q}(x, y) u^\# | z).$$

D'autre part, à toute forme multilinéaire τ de degré α et à tout endomorphisme γ de V, on associe *la forme multilinéaire* $\gamma^* \tau$ définie par l'égalité :

$$\gamma^* \tau(y_1, \ldots, y_\alpha) = \tau(\gamma(y_1), \ldots, \gamma(y_\alpha)) \quad \text{pour tous les vecteurs } y_1, \ldots, y_\alpha \in \mathrm{V}.$$

4.11. LEMME. — *Si la v.r.* (M, g) *est localement symétrique et si elle n'est pas localement isométrique à* (S^n, can), *alors l'espace des solutions de* (i), (ii) *et* (iii) *est égal à* $\mathscr{E}_p^0$.

Preuve. — D'après 4.9, il suffit de faire la démonstration lorsque le g.h.h.r. G agit irréductiblement sur $\mathbf{R}^n$. Nous nous plaçons en un point quelconque $m \in \mathrm{M}$. *Notons* N_m le sous-espace de $T_m M$ formé de tous les vecteurs x qui vérifient $\overline{R}(.,.)x=0$. La variété (M, g) étant symétrique, le tenseur R est parallèle, donc le tenseur $\overline{R}$ l'est également. Pour toute courbe c issue de m et pour tous les champs de vecteurs X, Y, Z, U parallèles le long de c, la fonction $g(\overline{R}(X, Y)Z, U)$ est constante le long de c. Si le vecteur $Z(0)$ appartient à N_m, le vecteur $Z(t)$ appartient à $N_{c(t)}$ pour tout t. L'espace N_m est donc invariant par l'action du groupe G. Ceci implique que $N_m = \{0\}$ ou $N_m = T_m M$. Si les espaces N_m et $T_m M$ sont égaux, nous avons $R - R_0 = \overline{R} = 0$ et la v. r. (M, g) est isométrique à (S^n, can). La variété (M, g) étant différente de (S^n, can), nous avons $N_m = \{0\}$. Si l'entier p est pair, le tenseur $\overline{R}\, df$ est nul d'après 4.7, D'après 4.10, ceci signifie que le vecteur gradient de f au point m (noté désormais grad f_m) est un élément de N_m. Nous en concluons que la fonction f est constante.

Si l'entier p est impair, posons $q=(p-1)/2$. D'après 4.7, le tenseur $\overline{R}^q df$ est parallèle. Considérons un élément quelconque γ de G, nous obtenons $\gamma^* \overline{R}^q df = \overline{R}^q df$. Comme le tenseur $\overline{R}$ est parallèle, nous avons

$$\overline{R}(\gamma(x), \gamma(y))\gamma(z) = \gamma[\overline{R}(x, y)z] \quad \text{pour tous les vecteurs } x,\ y,\ z \in T_m M.$$

Pour toute forme multilinéaire τ définie sur $T_m M$, nous obtenons $\gamma^* \overline{R}\,\tau = \overline{R}(\gamma^* \tau)$. Les formes multilinéaires $\overline{R}^q(\gamma^* df)$, $\gamma^* \overline{R}^q df$ et $\overline{R}^q df$, définies sur $T_m M$, sont donc égales. En utilisant le lemme 4.6, nous obtenons $\overline{R}(\gamma^* df - df) = 0$. D'après 4.10, le vecteur $(\gamma^{-1} - \text{id})(\text{grad } f_m)$ est dans ce cas un élément de N_m. Ceci donne $\gamma^{-1}(\text{grad } f_m) = \text{grad } f_m = 0$ puisque le seul vecteur invariant par l'action de G est le vecteur nul. La fonction f est constante et la remarque 4.8 achève la preuve de 4.11.

4.12. LEMME. — *Soit* (M, g) *une variété riemannienne dont le g.h.h.r.* G *agit transitivement sur* S^{n-1}. *Pour toute* 1*-forme* U *définie sur* M, *s'il existe un entier* $l \geqq 1$ *tel que le tenseur* $\overline{R}^l U$ *soit parallèle, alors le tenseur* $\overline{R} U$ *est nul.*

Preuve. — Ce lemme est vrai à l'ordre 1. En effet, notons X, Y et Z trois champs de vecteurs quelconques sur M, si la 1-forme U est non nulle en un point $m \in M$, il existe un élément γ de G et un scalaire a tels que $\gamma(Z) = a . U^{\#}$ au point m. D'après 4.10, nous obtenons

$$\overline{R}(X, Y)U(Z) = \overline{R}(\gamma(X), \gamma(Y))U(\gamma(Z)) = a . g(\overline{R}(\gamma(X), \gamma(Y))U^{\#}, U^{\#}) = 0.$$

Ce lemme est également vérifié à l'ordre 2. En effet, considérons un point quelconque $m \in M$ et un repère orthonormé $\{X_1, \ldots, X_n\}$ au voisinage de m. *Notons* W la 1-forme définie par l'égalité :

$$W(.) = \sum_{i,j} \overline{R}^2 U(X_i, X_j, X_i, X_j, .).$$

Le tenseur $\overline{R}^2 U$ étant parallèle, la 1-forme W l'est également et le vecteur $W^{\#}$ est invariant par l'action de G. Le vecteur $W^{\#}$ et la 1-forme W sont donc nuls au point m. Le lemme 4.6 permet de conclure que $\overline{R} U = 0$.

Montrons maintenant que, si le lemme 4.12 est vérifié à l'ordre l, il en est de même à l'ordre $l+2$. En effet, considérons la 1-forme W définie ci-dessus. Si le tenseur $\overline{R}^{l+2} U$ est parallèle, alors le tenseur $\overline{R}^l$ W est parallèle, ce qui implique que $\overline{R}W=0$. Si la 1-forme W est non nulle en un point $m \in M$, alors à tout vecteur x de $T_m M$, nous associons un élément γ de G et un scalaire b vérifiant $\gamma(x)=b.W^\sharp$. D'après 4.10, nous avons $\overline{R}(W^\sharp, .)=0$, ce qui donne

$$\overline{R}^{l+2}U(x, y_1, \ldots, y_{2l+4})=\overline{R}^{l+2}U(b.W^\sharp, \gamma(y_1), \ldots, \gamma(y_{2l+4}))=0$$

pour tous les vecteurs $y_1, \ldots, y_{2l+4} \in T_m M$.

Le lemme 4.6 permet de conclure que $\overline{R}\,U=0$.

Preuve de la proposition 4.5. — Cette preuve est fondée sur le résultat suivant dû à J. Simons (*cf.* [4], p. 234) :

4.13. THÉORÈME. — *Si le g. h. h. r.* G *agit irréductiblement sur* $\mathbf{R}^n$ *et si la v. r.* (M, g) *n'est pas localement symétrique, alors le groupe* G *agit transitivement sur* S^{n-1}.

Considérons maintenant une fonction f qui vérifie les équations (i), (ii) et (iii). D'après 4.13, 4.9, 4.11 et 4.8, si le groupe G n'agit pas transitivement sur S^{n-1}, le tenseur $\overline{R}S^k f$ est nul pour tout entier $k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Montrons qu'il en est de même lorsque le groupe G agit transitivement sur S^{n-1}. Dans ce cas, le tenseur $\overline{R}\,df$ est nul d'après 4.7 et 4.12; nous en déduisons que $\overline{R}(.,.)\,\mathrm{grad}\, f=0$ d'après 4.10. Si la fonction f n'est pas constante, il existe un point m tel que le vecteur grad f_m soit non nul. Pour tout vecteur x de $T_m M$, il existe un élément γ de G et un scalaire λ tels que $\gamma(x)=\lambda.\mathrm{grad}\, f_m$. D'après 4.7, pour tout entier l vérifiant $1 \leqq l \leqq p/2$, le tenseur $\overline{R}S^{p+1-2l}f$ est nul et le tenseur $\overline{R}^l S^{p-2l} f$ est parallèle. Pour tous les vecteurs $y_2, y_3, \ldots, y_p$ de $T_m M$, nous avons donc

$$\overline{R}^l S^{p-2l} f(x, y_2, \ldots, y_p)=\overline{R}^l S^{p-2l} f(\gamma(x), \gamma(y_2), \ldots, \gamma(y_p))=0.$$

Le tenseur parallèle $\overline{R}^l S^{p-2l} f$ est nul au point m, donc il est nul en tout point de M. Par le lemme 4.6, on en conclut que le tenseur $\overline{R}S^{p-2l} f$ est nul et que le tenseur $\overline{R}S^k f$ est nul pour tout entier $k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Ce résultat est également valable lorsque la fonction f est constante d'après 4.8.

Montrons maintenant par récurrence que le tenseur $D'^\alpha F$, défini sur M', est symétrique pour tout entier $\alpha \in \{1, \ldots, p+1\}$. Cette propriété est vérifiée aux ordres 1 et 2, supposons qu'elle soit vraie jusqu'à l'ordre α compris. Considérons des champs de vecteurs quelconques $Y'_0, \ldots, Y'_\alpha$ tangents à M'. Si un des vecteurs Y'_i est égal à r.e, l'identité 4.0 (★★) et l'hypothèse de récurrence permettent de conclure à l'égalité

$$D'^{\alpha+1}F(Y'_0, \ldots, Y'_\alpha)=(p-\alpha)D'^{(\alpha)}F(Y'_0, \ldots, \hat{Y}'_i, \ldots, Y'_\alpha)=D'^{(\alpha+1)}F(Y'_0, \ldots, Y'_\alpha),$$

où $D'^{(\alpha)}F$ est le symétrisé de $D'^\alpha F$. Pour achever de montrer que le tenseur $D'^{\alpha+1}F$ est symétrique, il suffit de vérifier que

$$D'^{\alpha+1}F(\tilde{Y}_0, \tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_\alpha)=D'^{\alpha+1}F(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_0, Y_2, \ldots, \tilde{Y}_\alpha)$$

pour tous les champs de vecteurs $Y_0, \ldots, Y_\alpha$ tangents à M.

D'après 4.3, ceci est une conséquence immédiate de l'égalité :

$$R'(\tilde{Y}_0, \tilde{Y}_1) D'^{\alpha-1} F(\tilde{Y}_2, \ldots, \tilde{Y}_\alpha) = r^p . \overline{R}(Y_0, Y_1) S^{\alpha-1} f(Y_2, \ldots, Y_\alpha) = 0,$$

égalité obtenue en tout point $(m, r) \in M'$ à l'aide de 1.2 et 4.2. Nous en déduisons que les tenseurs $D'^{p+1} F$ et $D'^{(p+1)} F$ sont égaux. L'équation (i) et le lemme 4.2 permettent de conclure que $D'^{p+1} F = 0$, ce qui achève la preuve de 4.5.

4.14. Corollaire. — *Soit* (M, *g*) *une v.r. sur laquelle les équations* (i), (ii) *et (iii) admettent une solution f non constante pour un certain* $p \in \mathbb{N}^*$.

— *Si* (M, *g*) *est complète, son revêtement universel est* (S^n, can).

— *Si* M *n'est pas complète et si f admet un point critique isolé* m_1, *tout ouvert étoilé autour de* m_1 (*i.e. inclus dans l'image de* $\exp_{m_1}$) *est localement isométrique à* (S^n, can).

Remarque. — Si (M, *g*) vérifie seulement l'hypothèse (H) autour d'un point *m*, alors la boule de centre *m* et de rayon $\pi/2$ de M est localement isométrique à (S^n, can).

Preuve. — Le tenseur $D'^p F$ est parallèle d'après 4.5. Considérons un point quelconque (m, r) de la variété M' et un vecteur quelconque $x' \in T_{(m, r)} M'$ de norme 1. Nous avons

$$D'^p F(\gamma'(x'), \ldots, \gamma'(x')) = D'^p F(x', \ldots, x')$$

pour tout élément γ' de G'.

Le g.h.h.r. G' de M' ne peut agir transitivement sur S^n, sinon nous aurions

$$D'^p F(x', \ldots, x') = D'^p F(e, \ldots, e) = p\,!\, f(m).$$

Ceci prouverait que la fonction *f* est constante puisque, pour toute courbe et pour tout champ de vecteurs X' parallèle le long de cette courbe, la fonction $D'^p F(X', \ldots, X')$ est constante le long de la courbe. Si la variété M' est localement symétrique, le groupe G' agit réductiblement sur $T_{(m, r)} M'$ en vertu de 3.0(*b*). D'après 4.13, le groupe G' agit réductiblement sur $\mathbf{R}^{n+1}$ et la proposition 3.1 achève la démonstration lorsque la variété (M, *g*) vérifie l'hypothèse (H) ou est complète.

Supposons maintenant que la fonction *f* ait un point critique isolé m_1. D'après 4.2 (2), un point $m \in M$ est un point critique de la fonction *f* si et seulement si nous avons, au point $(m, 1)$, $D'^p F(e, \ldots, e, \tilde{x}) = 0$ pour tout vecteur $x \in T_m M$. Notons m'_1 le point $(m_1, 1)$. Appelons Γ l'image du vecteur $e_{m'_1}$ par l'action du groupe G', c'est un sous-ensemble connexe de $T_{m'_1} M'$. Considérons un vecteur quelconque $y' \in \Gamma$. Le tenseur $D'^p F$ étant parallèle, nous avons

$$D'^p F(y', \ldots, y', x') = 0$$

pour tous les vecteurs x' orthogonaux à y'.

Il existe une géodésique *c* de la variété M issue du point m_1 et un nombre réel θ tels que

$$y' = \cos\theta . e_{m'_1} + \sin\theta . \tilde{\dot{c}}(0).$$

Lorsque le nombre θ est suffisamment petit, le point $c(\theta)$ existe. Nous avons vu dans la preuve de 3.3 que le vecteur $e_{(c(\theta),\,1)}$ s'obtient en transportant le vecteur y' parallèlement le long de la courbe β définie par l'égalité $\beta(t)=(c(t),\,1)$. Au point $\beta(\theta)$, nous obtenons

$$\mathrm{D}'^{p}\,\mathrm{F}(e,\,\ldots,\,e,\,x')=0$$

pour tous les vecteurs $x'\in \mathrm{T}_{\beta(\theta)}\mathrm{M}'$ orthogonaux au vecteur $e_{\beta(\theta)}$. Le point $c(\theta)$ est un point critique de f, le nombre θ ne peut donc être voisin de 0. Le vecteur $e_{m'_1}$ est un élément isolé de Γ, il est donc invariant par l'action de G'. On achève la preuve de 4.14 en reprenant la fin de la preuve de 3.3.

5. Le problème local

Nous nous intéressons maintenant au cas des variétés ouvertes *qui ne vérifient pas l'hypothèse* (H) (*cf.* 2.3). C'est le cas en particulier des variétés non compactes dont le diamètre est inférieur à $\pi/2$. Pour un entier $p\in\mathbf{N}$ donné, *notons* $\mathscr{E}_p$ l'espace des fonctions qui vérifient l'équation (E_p) en tout point de la variété M (cette équation est définie dans le préambule de 4.0). Pour tout entier $p\in\mathbf{N}$, montrons que $\mathscr{E}_p\subset\mathscr{E}_{p+2}$. Considérons en effet une fonction quelconque $f\in\mathscr{E}_p$ et appelons h la fonction constante égale à 1. D'après 4.8, la fonction h appartient à $\mathscr{E}_2$. Notons F et H les applications de M' dans $\mathbf{R}$ définies par les égalités $\mathrm{F}(m,\,r)=r^p.f(m)$ et $\mathrm{H}(m,\,r)=r^2.h(m)$. D'après 4.5, nous avons $\mathrm{D}'^{p+1}\,\mathrm{F}=0$ et $\mathrm{D}'^{3}\,\mathrm{H}=0$, ce qui implique que $\mathrm{D}'^{p+3}(\mathrm{F}.\mathrm{H})=0$ et que la fonction f appartient à $\mathscr{E}_{p+2}$.

5.0. Considérons l'espace euclidien V de dimension $n+1$ muni du produit scalaire $(.|.)$. *Notons* $\mathscr{R}_p$ l'espace des polynômes homogènes P de degré p sur V invariants par l'action du groupe d'holonomie K' de M' (i.e. pour tout élément $\gamma'\in\mathrm{K}'$, nous avons $\mathrm{P}\circ\gamma'=\mathrm{P}$). Choisissons un point $m'\in\mathrm{M}'$; il existe une isométrie φ de V sur $\mathrm{T}_{m'}\mathrm{M}'$. Notons Φ l'application de $\mathscr{E}_p$ dans $\mathscr{R}_p$ définie par l'égalité :

$$\Phi(f)(v)=\mathrm{D}'^{p}\,\mathrm{F}(\varphi(v),\,\ldots,\,\varphi(v))$$

pour tout vecteur $v\in\mathrm{V}$. Réciproquement, si un polynôme P appartient à $\mathscr{R}_p$, il induit une forme p-linéaire symétrique τ' sur l'espace $\mathrm{T}'_{m'}\mathrm{M}'$. La forme τ' est invariante par l'action de K' (i.e. $\gamma'^{*}\tau'=\tau'$ pour tout élément γ' de K'), nous pouvons donc la prolonger par transport parallèle en un tenseur symétrique parallèle T' défini en tout point de M'. Nous définissons la fonction f par l'égalité

$$f(m)=\frac{1}{p\,!}\mathrm{T}'_{(m,\,1)}(e,\,\ldots,\,e)\quad\text{pour tout point } m\in\mathrm{M}.$$

Vérifions que $f\in\mathscr{E}_p$. Notons $\mathrm{Y}'_0,\,\mathrm{Y}'_1,\,\ldots,\,\mathrm{Y}'_p$ des champs de vecteurs quelconques tangents à M'. Notons F la fonction définie sur M' par l'égalité $\mathrm{F}(m,\,r)=r^p.f(m)$. Remarquons que $\mathrm{D}'_{\mathrm{Y}'_0}(r.e)=\mathrm{Y}'_0$ d'après 1.0 et que $\mathrm{D}'_{\mathrm{Y}'_0}\mathrm{T}'=0$. Nous avons

$$\mathrm{D}'_{\mathrm{Y}'_0}\mathrm{F}=\frac{1}{p\,!}\mathrm{Y}'_0.\mathrm{T}'(r.e,\,\ldots,\,r.e)=\frac{1}{(p-1)\,!}\mathrm{T}'(\mathrm{Y}'_0,\,r.e,\,\ldots,\,r.e).$$

Considérons un entier quelconque $l \in \{1, \ldots, p\}$, si nous supposons que

$$D'^l F(Y'_1, \ldots, Y'_l) = \frac{1}{(p-l)!} T'(Y'_1, \ldots, Y'_l, r.e, \ldots, r.e),$$

alors nous obtenons

$$\begin{aligned} D'^{l+1} F(Y'_0, Y'_1, \ldots, Y'_l) &= \frac{1}{(p-l)!}[D'_{Y'_0} T'(Y'_1, \ldots, Y'_l, r.e, \ldots, r.e) \\ &\quad + (p-l) T'(Y'_1, \ldots, Y'_l, Y'_0, r.e, \ldots, r.e)] \\ &= \frac{1}{(p-l-1)!} T'(Y'_0, \ldots, Y'_l, r.e, \ldots, r.e). \end{aligned}$$

Ceci prouve que $D'^p F = T'$ et que f appartient à $\mathscr{E}_p$. Il est facile de vérifier que $\Phi(f) = P$. L'application Φ est donc *un isomorphisme de* $\mathscr{E}_p$ *sur* $\mathscr{R}_p$.

5.1. PROPOSITION. — *Soit* (M, g) *une v.r. telle que la dimension de* $\mathscr{E}_1$ *soit supérieure ou égale à* $n-1$, *alors les v.r.* (M, g) *et* (S^n, can) *sont localement isométriques.*

Cette proposition est due à K. Tandai (*cf.* [7]). Nous en donnons ici une nouvelle preuve.

Preuve. — L'espace $\mathscr{R}_1$ est l'ensemble des éléments de l'espace dual V^* invariants par l'action de K'. D'après ce qui précède, nous avons dim $(\mathscr{R}_1) \geqq n-1$. Considérons un point quelconque $m' \in M'$ et notons $V_0(m')$ l'espace des vecteurs de $T_{m'} M'$ invariants par l'action de K'. Par dualité, nous avons $\dim(V_0(m')) = \dim(\mathscr{R}_1) \geqq n-1$. Si le vecteur $e_{m'}$ n'appartient pas à $V_0(m')$, alors, pour tout vecteur $x' \in V_0(m')$, nous avons l'égalité $R'(e, .) = 0$ d'après 1.2 et l'égalité $R'(x', .) = 0$ d'après 3.0. Ceci implique que le tenseur de courbure R' est nul puisque l'espace $V_0(m') \oplus R.e$ est de codimension 1 ou 0 dans $T_{m'} M'$. S'il existe un ouvert U' de M' tel qu'en tout point $m' \in U'$ on ait $e_{m'} \in V_0(m')$, alors pour tout vecteur $x' \in T_{m'} M'$, le vecteur $D'_{x'}(r.e)$ appartient aussi à $V_0(m')$. D'après 4.0, nous avons $D'_{x'}(r.e) = x'$, ce qui donne $V_0(m') = T_{m'} M'$. La courbure R' est donc nulle sur une partie dense de M', elle est donc nulle partout. Les deux variétés (M, g) et (S^n, can) sont localement isométriques d'après 1.2.

5.2. CONTRE-EXEMPLE. — *Considérons* une v.r. quelconque (N, h) de dimension 2. *Notons* N' la variété $N \times]0, +\infty[$ munie de la métrique définie en 1.0. L'espace $\mathbf{R}^{n-2}$ étant muni de la métrique euclidienne, considérons la variété $N' \times \mathbf{R}^{n-2}$ munie de la métrique produit notée $\langle . | . \rangle$. *Appelons* $\mathbf{R}^{n-1}_+$ l'ensemble des points $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}) \in \mathbf{R}^{n-1}$ qui vérifient $x_0 > 0$. Pour tout point $a \in N$, pour tout élément x_0 de $]0, +\infty[$ et pour tout vecteur $x \in T_a N$, *nous noterons* $\tilde{x}$ le vecteur image de x par l'injection canonique de $T_a N$ dans $T_{(a, x_0)} N'$. Les variétés $N' \times \mathbf{R}^{n-2}$ et $N \times \mathbf{R}^{n-1}_+$ sont égales. Notons $(. | .)$ le produit scalaire habituel de $\mathbf{R}^{n-1}$. Pour tout point $a \in N$ et tout élément (x_0, ξ) de $]0, +\infty[\times \mathbf{R}^{n-2}$ (c'est-à-dire de $\mathbf{R}^{n-1}_+$), nous obtenons au point (a, x_0, ξ) :

$$\langle x' | y' \rangle = (x' | y')$$

pour tous les vecteurs x' et y' tangents à $\mathbf{R}^{n-1}_+$,

$$\langle x' | \tilde{y} \rangle = 0$$

pour tous les vecteurs x' et y tangents respectivement à $\mathbf{R}_+^{n-1}$ et à N,

$$\langle \tilde{x} \,|\, \tilde{y} \rangle = x_0^2 . h(x, y)$$

pour tous les vecteurs x et y tangents à N.

Notons C la calotte sphérique $S^{n-2} \cap \mathbf{R}_+^{n-1}$ munie de sa métrique canonique g_0. *Notons* M la sous-variété N × C de $\mathrm{N} \times \mathbf{R}_+^{n-1}$ munie de la métrique induite g. Pour tout point $b \in \mathrm{C}$, nous noterons $(b_0, \ldots, b_{n-2})$ les composantes de b dans $\mathbf{R}_+^{n-1}$. En tout point $(a, b) \in \mathrm{N} \times \mathrm{C}$ et pour tous les vecteurs x et $y \in \mathrm{T}_{(a, b)}(\mathrm{N} \times \mathrm{C})$, nous avons

$$g(x, y) = g_0(x, y)$$

si les vecteurs x et y sont tangents à C,

$$g(x, y) = 0$$

si les vecteurs x et y sont tangents respectivement à N et C,

$$g(x, y) = b_0^2 \, h(x, y)$$

si les vecteurs x et y sont tangents à N.

A partir de la v.r. M, construisons la variété M' muni de la métrique $\langle \,.\,, \,.\, \rangle$ définie en 1.0. Nous obtenons un difféomorphisme ψ de M' dans $\mathrm{N} \times \mathbf{R}_+^n$ en posant, pour tout point $(a, b, r) \in \mathrm{N} \times \mathrm{C} \times]0, +\infty[$,

$$\psi(a, b, r) = (a, r . b).$$

Remarquons que l'application $(b, r) \to r . b$ est une isométrie de $\mathrm{C} \times]0, +\infty[$ sur $\mathbf{R}_+^{n-1}$ et que $x_0^2 = r^2 . b_0^2$. La métrique $\langle \,.\,, \,.\, \rangle$ de M' se transporte par ψ sur la métrique $\langle \,.\, | \,.\, \rangle$ de $\mathrm{N} \times \mathbf{R}_+^{n-1}$ et ces deux variétés sont isométriques.

Pour tout entier $p \in \mathbf{N}$, *notons* m_p le nombre d'éléments $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbf{N}^{n-1}$ qui vérifient

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-2} + 2\alpha_{n-1} = p.$$

PROPOSITION. — *Si la courbure de la v.r.* (N, h) *est différente de* 1, *alors la v.r.* (N × C, g) *n'est pas de courbure constante, la dimension de l'espace* $\mathscr{E}_1$ *est égale à* $n-2$ *et la dimension de l'espace* $\mathscr{E}_p$ *est égale à* m_p *pour tout entier* $p \in \mathbf{N}$.

Remarques. — Ceci donne une infinité de variétés non triviales sur lesquelles l'équation (E_1) admet $(n-2)$ solutions, la version locale du théorème de d'Obata (*cf.* 2.3) est donc fausse. Plus précisément l'hypothèse $\dim(\mathscr{E}_1) \geqq n-1$ de la proposition 5.1 est la meilleure possible. De même, si on ne s'accorde aucune hypothèse sur la forme des solutions de (E_p), l'hypothèse (H) est la meilleure possible dans les propositions 2.3, 3.1, 3.3, 4.1

et 4.14. En effet nous pouvons choisir la variété N complète et dans ce cas il existe un point de $N \times C$ à partir duquel toutes les géodésiques peuvent être prolongées jusqu'à $\pi/2$ *exclu*.

Preuve. — La variété M' étant isométrique à la v.r. $N' \times \mathbf{R}^{n-2}$ munie de la métrique produit, il existe $n-2$ champs de vecteurs parallèles et linéairement indépendants sur M'. D'après 5.0, nous obtenons $\dim \mathscr{E}_1 = \dim \mathscr{R}_1 \geqq n-2$. Si la courbure sectionnelle de (N, g) est différente de 1, la courbure sectionnelle de N' est non nulle d'après 1.2. Comme la v.r. M' est isométrique à $N' \times \mathbf{R}^{n-2}$, la courbure sectionnelle de M' est tantôt nulle, tantôt non nulle. Nous en déduisons d'après 1.2 que la courbure sectionnelle de $N \times C$ est tantôt égale à 1, tantôt différente de 1. D'après 5.1, nous avons $\dim \mathscr{E}_1 < n-1$, la dimension de $\mathscr{E}_1$ est donc égale à $n-2$. D'autre part, d'après 5.1, le g.h.h.r. G' de $N' \times \mathbf{R}^{n-2}$ agit trivialement sur les vecteurs tangents à $\mathbf{R}^{n-2}$ et irréductiblement sur l'espace tangent à N'. La variété N' n'est pas localement symétrique, sinon le groupe G' agirait réductiblement sur l'espace tangent à N' d'après 3.0 (*b*). Considérons l'action du groupe d'holonomie K' sur l'espace $\mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}^{n-2} \times \mathbf{R}^3$. Les groupes G' et K' agissent trivialement sur $\mathbf{R}^{n-2}$ et transitivement sur la sphère de $\mathbf{R}^3$ d'après 4.13. Tout polynôme de $\mathbf{R}^3$ invariant par l'action de K' est constant sur la sphère S^3. L'espace $\mathscr{R}_p$ (*cf.* 5.0) est donc engendré par les polynômes de degré p du type

$$P(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_1^{\alpha_1} . x_2^{\alpha_2} . \ldots . x_{n-2}^{\alpha_{n-2}} . (x_{n-1}^2 + x_n^2 + x_{n+1}^2)^{\alpha_{n-1}}.$$

La dimension de $\mathscr{R}_p$ est égale à m_p. il en est de même pour la dimension de $\mathscr{E}_p$.

5.3. Proposition. — *Soit* (M, g) *une v.r., s'il existe un entier* $p \in \mathbf{N}$ *tel que la dimension de l'espace* $\mathscr{E}_p$ *soit strictement supérieure à* m_p, *alors les v.r.* (M, g) *et* (S^n, can) *sont localement isométriques*.

Preuve. — Il existe sur M' des distributions $V_0, V_1, \ldots, V_k$ telles qu'en tout point m' de M' l'espace $T_{m'} M'$ soit la somme orthogonale des $V_i(m')$ et telles que le g.h.h.r. G' agisse trivialement sur $V_0(m')$ et irréductiblement sur $V_i(m')$ pour tout entier $i \in \{1, \ldots, k\}$. Considérons un entier quelconque $i \in \{1, \ldots, k\}$. Le champ de vecteurs e a presque partout une composante non nulle dans la distribution V_i. En effet, si le vecteur e est orthogonal à V_i en un point m', pour toute courbe β issue de m' et telle que $\dot{\beta}(0) \in V_i$ nous avons $D'_{\dot{\beta}}(r.e) = \dot{\beta}$. Ceci signifie que $e_{\beta(t)}$ n'est plus orthogonal à V_i lorsque t est différent de 0. La dimension de V_i est nécessairement supérieure ou égale à 3, sinon la courbure R' serait nulle sur V_i d'après l'égalité $R'(., e) = 0$ de 1.2. Considérons la décomposition orthogonale $E_0, E_1, \ldots, E_k$ de $\mathbf{R}^{n+1}$ telle que G' agisse trivialement sur E_0 et irréductiblement sur $E_1, \ldots, E_k$. Si le groupe G' agit transitivement sur la sphère de E_i, tout polynôme homogène P défini sur E_i et invariant par l'action de G' est du type $P(x) = \lambda . (x \mid x)^l$, où x est un vecteur quelconque de E_i, λ une constante réelle et l un entier naturel. Dans ce cas, la dimension de $\mathscr{R}_p$ est inférieure ou égale à m_p. Il n'existe pas d'entier i tel que le groupe G' agisse transitivement sur la sphère de E_i. La version locale du théorème 4.13 (*cf.* [4], p. 221) nous permet d'affirmer que la variété M' est localement symétrique. D'après 3.0 (*b*), le vecteur e appartient à V_0 en tout point de M'. Ceci prouve que $k=0$ et que le groupe G' est trivial. D'après 3.0 et 1.2, nous avons $R = R_0$ et les deux v.r. (M, g) et (S^n, can) sont localement isométriques.

6. Le spectre des formes différentielles

Nous considérons désormais un entier quelconque $q \in \{1, \ldots, n-1\}$, la *différentielle habituelle* d et la *codifférentielle* δ sur les formes différentielles de (M, g). Sur les formes différentielles, le laplacien est défini par l'égalité $\Delta = d \circ \delta + \delta \circ d$. *Nous noterons* d', δ' et Δ' les opérateurs correspondants sur les formes différentielles de M'. *L'opérateur de courbure* ρ de (M, g) est un tenseur (2,2) défini en chaque point $m \in M$ comme l'endomorphisme symétrique de l'algèbre extérieure $\Lambda^2(T_m M)$ défini par la formule :

$$g(\rho(x \wedge y), u \wedge v) = g(R(x, y)v, u)$$

pour tous les vecteurs $x, y, u, v \in T_m M$.

Étant donné un nombre réel positif k, *la notation* $\rho \geqq k$ *signifie* que toutes les valeurs propres de l'opérateur ρ en tous les points de M sont supérieures ou égales à k. Pour tout nombre réel λ, nous notons V_λ l'espace des q-formes différentielles τ vérifiant $\Delta\tau = \lambda . \tau$. Lorsque le nombre λ est non nul, nous avons

$$V_\lambda = [V_\lambda \cap d^{-1}(0)] \oplus [V_\lambda \cap \delta^{-1}(0)].$$

Nous appellerons $\lambda_1(\Lambda^q M)$ la plus petite valeur propre du laplacien restreint aux q-formes différentielles. *Nous noterons* $\lambda_1'(\Lambda^q M)$ [resp. $\lambda_1''(\Lambda^q M)$] la plus petite valeur propre du laplacien restreint aux q-formes fermées (resp. cofermées). Nous avons

$$\lambda_1(\Lambda^q M) = \inf[\lambda_1'(\Lambda^q M), \lambda_1''(\Lambda^q M)].$$

L'opérateur $\star$ de Hodge établit une dualité entre l'espace des q-formes et celui des $(n-q)$-formes, il vérifie les égalités

$$\Delta \circ \star = \star \circ \Delta \qquad \text{et} \qquad \delta = (-1)^{nq+n+1} \star \circ d \circ \star.$$

Ceci permet de dire que

$$\lambda_1''(\Lambda^q M) = \lambda_1'(\Lambda^{n-q} M).$$

6.1. Proposition (*cf.* [10], p. 270). — *Soit* (M, g) *une v.r. compacte et* k *un nombre réel positif. L'hypothèse* $\rho \geqq k$ *implique les deux inégalités :*

$$\lambda_1'(\Lambda^q M) \geqq k . q . (n-q+1) \qquad \text{et} \qquad \lambda_1''(\Lambda^q M) \geqq k(q+1)(n-q).$$

La preuve que nous donnerons ici, après le lemme 6.2, est différente de celle de [10]. D'après les remarques précédentes, il suffit de prouver que $\lambda_1'(\Lambda^q M) \geqq q(n-q+1)$ lorsque nous avons $\rho \geqq 1$. Considérons l'opérateur de courbure ρ' de M'. D'après 1.2, nous avons $\rho' \geqq 0$. Considérons une q-forme différentielle quelconque τ et un scalaire λ tels que $d\tau = 0$ et $\Delta\tau = \lambda . \tau$. *Nous noterons* T' la q-forme différentielle de M', définie en tout point $(m, r) \in M'$ par les égalités suivantes, valables pour tous les champs de vecteurs $Y_1, \ldots, Y_q$ tangents à M :

$$T'\left(\frac{1}{r}.\tilde{Y}_1, \ldots, \frac{1}{r}.\tilde{Y}_q\right) = \tau(Y_1, \ldots, Y_q),$$

$$(n-q+1).T'\left(e, \frac{1}{r}.\tilde{Y}_2, \ldots, \frac{1}{r}.\tilde{Y}_q\right) = \delta\tau(Y_2, \ldots, Y_q).$$

6.2. LEMME. — *Pour tous les champs de vecteurs* $Y_1, \ldots, Y_q$ *tangents à* M, *nous avons :*

$$r^2.\Delta' T'(\tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_q) = r^q.\frac{n-q-1}{n-q+1}(\Delta\tau - q(n-q+1)\tau)(Y_1, \ldots, Y_q),$$

$$r^2.\Delta' T'(e, \tilde{Y}_2, \ldots, \tilde{Y}_q) = (\lambda - q(n-q+1)).T'(e, \tilde{Y}_2, \ldots, \tilde{Y}_q).$$

Preuve du lemme. — Tous les calculs qui suivent sont effectués *en un point quelconque* $(m, r) \in M'$. *Considérons* un repère orthonormé $\{X_1, \ldots, X_n\}$ de TM, défini sur un voisinage du point m et tel que nous ayons $DX_1 = \ldots = DX_n = 0$. Les vecteurs $(1/r)\tilde{X}_1, \ldots, (1/r)\tilde{X}_n$ *seront notés* $X'_1, \ldots, X'_n$. Nous obtenons ainsi un repère orthonormé $\{X'_1, \ldots, X'_n, e\}$ de TM' au voisinage du point (m, r). Pour tous les entiers i et $j \in \{1, \ldots, n\}$, nous avons

$$D'_e X'_i = 0 \qquad \text{et} \qquad D'_{X'_i} X'_j = -\frac{1}{r}.g(X_i, X_j).e.$$

Dans la suite, *lorsque nous utiliserons les indices* $i_0, i_1, i_2, \ldots, i_q$ dans une égalité, nous sous-entendrons que cette égalité est vraie pour tous les indices distincts $i_0, \ldots, i_q \in \{1, \ldots, q\}$. Rappelons que la différentielle et la codifférentielle se calculent à l'aide de la dérivée covariante, ce qui donne

$$d\tau(X_{i_0}, \ldots, X_{i_q}) = \sum_{l=0}^{q} (-1)^l D_{X_{i_l}} \tau(X_{i_0}, \ldots, \hat{X}_{i_l}, \ldots, X_{i_q}),$$

$$\delta\tau(X_{i_2}, \ldots, X_{i_q}) = -\sum_{k=1}^{n} D_{X_k} \tau(X_k, X_{i_2}, \ldots, X_{i_q}).$$

Remarquons que cette dernière sommation n'a que $(n-q+1)$ termes non nuls. La définition de T' nous donne $D'_e T' = 0$, nous en déduisons :

$$\begin{aligned} \delta' T'(X'_{i_2}, \ldots, X'_{i_q}) &= -\sum_{k=1}^{n} D'_{X'_k} T'(X'_k, X'_{i_2}, \ldots, X'_{i_q}) \\ &= -\frac{1}{r}[(n-q+1)T'(e, X'_{i_2}, \ldots, X'_{i_q}) + \sum_{k=1}^{n} X_k.\tau(X_k, X_{i_2}, \ldots, X_{i_q})] \\ &= 0 \quad \text{d'après la définition de T'}. \end{aligned}$$

Nous avons également

$$\begin{aligned} \delta' T'(e, X'_{i_3}, \ldots, X'_{i_q}) &= -\sum_{k=1}^{n} X'_k.T'(X'_k, e, X'_{i_3}, \ldots, X'_{i_q}) \\ &= \frac{-1}{r(n-q+1)}\delta \circ \delta\tau(X_{i_3}, \ldots, X_{i_q}) = 0. \end{aligned}$$

La différentielle de T′ est donnée par les égalités :

$$d'\mathrm{T}'(\mathrm{X}'_{i_0}, \ldots, \mathrm{X}'_{i_q}) = \sum_{l=0}^{q} (-1)^l \mathrm{X}'_{i_l}.\mathrm{T}'(\mathrm{X}'_{i_0}, \ldots, \hat{\mathrm{X}}'_{i_l}, \ldots, \mathrm{X}'_{i_q}) = \frac{1}{r}.d\tau(\mathrm{X}_{i_0}, \ldots, \mathrm{X}_{i_q}) = 0,$$

$$d'\mathrm{T}'(e, \mathrm{X}'_{i_1}, \ldots, \mathrm{X}'_{i_q}) = \sum_{l=1}^{q} (-1)^l \mathrm{D}'_{\mathrm{X}'_{i_l}} \mathrm{T}'(e, \mathrm{X}'_{i_1}, \ldots, \hat{\mathrm{X}}'_{i_l}, \ldots, \mathrm{X}'_{i_q})$$

$$= \sum_{l=1}^{q} \frac{(-1)^l}{r}\left[\frac{1}{n-q+1}\mathrm{X}_{i_l}.\delta\tau(\mathrm{X}_{i_1}, \ldots, \hat{\mathrm{X}}_{i_l}, \ldots, \mathrm{X}_{i_q}) - \mathrm{T}'(\mathrm{X}'_{i_l}, \mathrm{X}'_{i_1}, \ldots, \hat{\mathrm{X}}'_{i_l}, \ldots, \mathrm{X}'_{i_q})\right]$$

$$= \frac{-1}{r(n-q+1)}(\Delta\tau - q(n-q+1)\tau)(\mathrm{X}_{i_1}, \ldots, \mathrm{X}_{i_q}).$$

Nous en déduisons

$$\Delta'\mathrm{T}'(\mathrm{X}'_{i_1}, \ldots, \mathrm{X}'_{i_q}) = \left[-\sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}'_{\mathrm{X}'_k} d'\mathrm{T}'(\mathrm{X}'_k, \mathrm{X}'_{i_1}, \ldots, \mathrm{X}'_{i_q})\right] - e.d'\mathrm{T}'(e, \mathrm{X}'_{i_1}, \ldots, \mathrm{X}'_{i_q})$$

$$= -\frac{1}{r}(n-q)\,d'\mathrm{T}'(e, \mathrm{X}'_{i_1}, \ldots, \mathrm{X}'_{i_q}) + \frac{1}{r}d'\mathrm{T}'(e, \mathrm{X}'_{i_1}, \ldots, \mathrm{X}'_{i_q})$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(\frac{n-q-1}{n-q+1}\right)(\Delta\tau - q(n-q+1)\tau)(\mathrm{X}_{i_1}, \ldots, \mathrm{X}_{i_q}).$$

Nous avons d'autre part

$$\Delta'\mathrm{T}'(e, \mathrm{X}'_{i_2}, \ldots, \mathrm{X}'_{i_q}) = -\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}'_k.d'\mathrm{T}'(\mathrm{X}'_k, e, \mathrm{X}'_{i_2}, \ldots, \mathrm{X}'_{i_q})$$

$$= \frac{1}{r^2(n-q+1)}(\lambda - q(n-q+1))\,\delta\tau(\mathrm{X}_{i_2}, \ldots, \mathrm{X}_{i_q}).$$

Le lemme 6.2 se déduit immédiatement de ces deux égalités et de la définition de T′.

Fin de la preuve de 6.1. — La formule de Weizenböck (*cf.* [10], p. 262) donne

$$\langle \Delta'\mathrm{T}', \mathrm{T}' \rangle = \frac{1}{2}\Delta'(|\mathrm{T}'|^2) + |\mathrm{D}'\mathrm{T}'|^2 + \mathrm{Q}(\mathrm{T}'),$$

où Q est une forme quadratique en T′. Cette forme quadratique est positive ou nulle, puisque nous avons $\rho' \geqq 0$ (*cf.* [10], p. 264). En vertu de l'égalité $\mathrm{D}'_e|\mathrm{T}'|^2 = 0$, nous obtenons au point (m, r) :

$$\Delta'(|\mathrm{T}'|^2) = -\frac{1}{r^2}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}_{\mathrm{X}_k}\mathrm{D}_{\mathrm{X}_k}(|\mathrm{T}'|^2) = \frac{1}{r^2}\Delta\left(|\tau|^2 + \frac{|\delta\tau|^2}{(n-q+1)^2}\right).$$

L'intégrale de la fonction $\Delta'(|\mathrm{T}'|^2)$ sur $\mathrm{M} \times \{r\}$ est donc nulle. En intégrant la formule de Weizenböck sur $\mathrm{M} \times \{1\}$ nous obtenons

$$\int_{\mathrm{M}\times\{1\}} \langle \Delta'\mathrm{T}', \mathrm{T}' \rangle.v_g \geqq 0.$$

Or d'après 6.2, nous avons

$$\langle \Delta' \mathrm{T}', \mathrm{T}' \rangle = \frac{\lambda - q(n-q+1)}{n-q+1}\left[\frac{|\delta\tau|^2}{n-q+1} + (n-q-1)|\tau|^2\right].$$

Lorsque le degré q est inférieur ou égal à $n-2$, nous obtenons immédiatement $\lambda \geqq q(n-q+1)$. Dans le cas où le degré q est égal à $n-1$, considérons la 1 forme u égale à $\star\tau$. Notons $u^{\#}$ le champ de vecteurs associé à u par dualité (*cf.* 4.10). La formule de Weizenböck appliquée à u est analogue à la formule (1) de la preuve de 2.1, ce qui donne :

$$\int_{\mathrm{M}} g(\Delta u, u).v_g = \int_{\mathrm{M}} [|\mathrm{D}u|^2 + r(u^{\#}, u^{\#})].v_g > 0.$$

La forme u n'est donc pas harmonique. Il en est de même de la forme τ, ce qui signifie que $\delta\tau \neq 0$. En calculant l'intégrale de la fonction $\langle \Delta' \mathrm{T}', \mathrm{T}' \rangle$ comme ci-dessus, nous obtenons, dans ce cas aussi, $\lambda - q(n-q+1) \geqq 0$. Ceci achève la preuve de 6.1.

Dans la suite, nous noterons S_k^n la sphère de courbure constante k.

6.3. Proposition. — *Soit k un nombre réel positif et q un entier appartenant à* $\{1, \ldots, n-1\}$. *Soit* (M, g) *une v.r. compacte et simplement connexe qui vérifie* $\rho \geqq k > 0$.

(1) *Lorsque la dimension n est paire ou lorsque le degré q est impair, l'égalité*

$$\lambda_1'(\Lambda^q \mathrm{M}) = k.q(n-q+1)$$

est atteinte si et seulement si les v.r. (M, g) *et* S_k^n *sont isométriques.*

(2) *Lorsque les entiers q et n sont respectivement pair et impair, la première valeur propre* $\lambda_1'(\Lambda^q \mathrm{M})$ *est égale à* $k.q(n-q+1)$ *et sa multiplicité est au moins égale à* 2 *si et seulement si les deux v.r.* (M, g) *et* (S^n, can) *sont isométriques.*

Remarque. — Nous obtenons un énoncé analogue en remplaçant l'égalité

$$\lambda_1'(\Lambda^q \mathrm{M}) = k.q(n-q+1)$$

par l'égalité

$$\lambda_1(\Lambda^q \mathrm{M}) = \lambda_1(\Lambda^q \mathrm{S}_k^n).$$

En effet, si la deuxième égalité est réalisée, nous avons d'après 6.1 :

$$\lambda_1'(\Lambda^q \mathrm{M}) = \lambda_1'(\Lambda^q \mathrm{S}_k^n) = \lambda_1(\Lambda^q \mathrm{S}_k^n) = k.q(n-q+1) \quad \text{lorsque } q \geqq \frac{n}{2},$$

$$\lambda_1'(\Lambda^{n-q} \mathrm{M}) = \lambda_1''(\Lambda^q \mathrm{M}) = \lambda_1(\Lambda^q \mathrm{M}) = k(q+1)(n-q) \quad \text{lorsque } q \geqq \frac{n}{2}.$$

Avant de commencer la preuve, nous allons justifier l'hypothèse faite en 6.3 (2) concernant la multiplicité de la valeur propre par le contre-exemple suivant.

6.4. CONTRE-EXEMPLE. — Pour tous les entiers q et n, respectivement pair et impair et vérifiant $1 \leqq q \leqq n-1$, il existe un nombre réel k et une famille de variétés (M, g) de dimension n qui ne sont pas isométriques à S_k^n et qui vérifient pourtant

$$\rho \geqq k > 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda_1'(\Lambda^q M) = k.q(n-q+1).$$

La multiplicité de la valeur propre est alors précisément égale à 1, *Il s'agit* des sous-variétés M_r du projectif complexe obtenues en considérant un point m_0 fixé, un nombre réel $r \in]0, \pi[$ et en posant

$$M_r = \{ m/d(m_0, m) = r \}.$$

Pour les démonstrations, *voir* [10], p. 276.

Preuve de 6.3. — Il suffit de faire la preuve lorsque la variété (M, g) vérifie $\rho \geqq 1$. Considérons une q-forme τ vérifiant

$$d\tau = 0 \qquad \text{et} \qquad \Delta\tau = q(n-q+1)\tau.$$

La q-forme T' définie en 6.1 vérifie l'égalité $\Delta' T' = 0$ d'après 6.2. L'intégration de la formule de Weizenböck (*cf.* la preuve de 6.1) donne

$$\int_{M \times \{r\}} [|D'T'|^2 + Q(T')].v_g = 0.$$

Nous en déduisons que la q-forme T' est parallèle. Réciproquement, si T' est une q-forme parallèle sur M', notons τ la q-forme obtenue sur M par restriction. En reprenant les notations de 6.2, pour tous les indices $i_0, \ldots, i_q \in \{1, \ldots, n\}$, nous avons les égalités :

$$\tau(X_{i_1}, \ldots, X_{i_q}) = T'(X'_{i_1}, \ldots, X'_{i_q}),$$

$$\frac{1}{r}[\delta\tau(X_{i_2}, \ldots, X_{i_q}) - (n-q+1)T'(e, X'_{i_2}, \ldots, X'_{i_q})] = -\sum_{k=1}^{n} D'_{X'_k} T'(X'_k, X'_{i_2}, \ldots, X'_{i_q}) = 0,$$

$$d\tau(X_{i_0}, \ldots, X'_{i_q}) = r.d'T'(X'_{i_0}, \ldots, X'_{i_q}) = 0.$$

Or nous avons $D'T' = 0$, ce qui donne $\Delta' T' = 0$. Le lemme 6.2 permet de conclure que $\Delta\tau = q(n-q+1)\tau$. L'application qui, à toute q-forme T' de M', associe la q-forme τ de M obtenue par restriction est un isomorphisme de l'espace des q-formes parallèles de M' sur l'espace des q-formes fermées τ de M qui vérifient $\Delta\tau = q(n-q+1)\tau$. En particulier, ceci démontre que

$$\lambda_1'(\Lambda^q S_k^n) = k.q(n-q+1)$$

et que les q-formes propres associées sont obtenues par restriction à partir des q-formes parallèles de $\mathbf{R}^{n+1}$.

Dans un premier temps, nous étudions le cas où le groupe G' agit irréductiblement sur $\mathbf{R}^{n+1}$. Nous avons alors $\rho' \neq 0$. Or l'hypothèse $\rho \geqq 1$ implique $\rho' \geqq 0$ d'après 1.2. Par conséquent, la courbure scalaire de M' (i.e. la trace de ρ') est non nulle. Si le groupe G' agit irréductiblement sur $\mathbf{R}^{n+1}$, la v.r. M' ne peut être localement symétrique en vertu de 3.0 (*b*). Un corollaire de 4.13 (*cf.* [4], p. 230) montre alors que G' est le groupe d'holonomie d'un espace symétrique de rang 1. Le cas $G'=SO(n+1)$ est exclu, car il existe une q-forme T' de M' invariante en chaque point par l'action de G'. Le couple $(G', n+1)$ ne peut être égal à l'un des couples $(U(d), 2d)$, $(Sp(d)\times Sp(1), 4d)$, (Spin (9), 16) en vertu des hypothèses de 6.3. En effet, dans ces trois cas, l'entier n est impair et l'espace des q-formes parallèles de M' (donc invariantes en chaque point par l'action de G') est nul si le degré q est impair et de dimension inférieure ou égale à 1 si le degré q est pair. Or les hypothèses (1) et (2) impliquent que cet espace est de dimension au moins égale à 1 si q est impair et au moins égale à 2 si q est pair. Ceci permet de conclure que le groupe G' agit réductiblement sur $\mathbf{R}^{n+1}$. La proposition 3.1 achève la preuve de 6.3.

Remarque. — Nous pouvons montrer que le contre-exemple 6.4 est assez générique. Dans ce but, nous considérons une v.r. (M, g) compacte, simplement connexe, vérifiant

$$\rho \geqq 1 \qquad \text{et} \qquad \lambda'_1(\Lambda^q M)=q(n-q+1)$$

pour au moins un entier $q\in\{1, \ldots, n-1\}$ (sans hypothèse supplémentaire sur la dimension de l'espace propre associé). Nous supposons que la v.r. (M, g) est différente de (S^n, can). D'après 3.1, le groupe G' agit irréductiblement sur $\mathbf{R}^{n+1}$. La preuve de 6.3 montre que la v.r. M' possède une q-forme parallèle non nulle et que le couple $(G', n+1)$ est égal à l'un des couples suivants : $(U(d), 2d)$; $(Sp(d)\times Sp(1), 4d)$; (Spin (9), 16). Si le groupe G' est égal à Spin (9), la v.r. M' est localement isométrique au plan projectif de Cayley d'après [8]. Si le groupe G' est égal à $Sp(d)\times Sp(1)$, la v.r. M' est d'Einstein (*cf.* [6]). Pour tous les champs de vecteurs X' et Y' tangents à M', nous avons $D'_{Y'}(r.e)=Y'$ en vertu de 1.0; le lemme 1.2 permet d'écrire en tout point $(m, r)\in M'$:

$$(D'_{Y'}r')(X', r.e)=Y'.r'(X', r.e)-r'(D'_{Y'}X', r.e)-r'(X', D'_{Y'}(r.e))=-r'(X', Y').$$

Si la variété M' est d'Einstein, sa courbure de Ricci r' est nulle, donc la trace de ρ' est nulle. Ce cas est exclu puisque nous avons $\rho'\geqq 0$ et $\rho'\neq 0$. Le couple $(G', n+1)$ est donc obligatoirement égal à $(U(d), 2d)$; les seules q-formes parallèles de M' sont alors les puissances successives de la forme de Kähler. Cette situation est précisément celle du contre-exemple 6.4.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. RUH, *Curvature and Differentiable Structures on Spheres* (*Comm. Math. Helv.*, 46, fasc. 1, 1971, p. 127-136).

[2] M. BERGER, P. GAUDUCHON et E. MAZET, *Le spectre d'une variété riemannienne* (*Lecture Notes in Math.*, n° 194, Springer-Verlag, 1971).

[3] M. OBATA, *Certain Conditions for a Riemannian Manifold to be Isometric with a Sphere* (*J. Math. Soc. Japan*, vol. 14, 1962, p. 333-340).

[4] J. SIMONS, *On the Transitivity of Holonomy Systems* (*Annals of Math.*, vol. 76, 1962, p. 213-234).

[5] S. TANNO, *Some Differential Equations on Riemannian Manifolds* (*J. Math. Soc. Japan*, vol. 30, n° 3, 1978).

[6] M. BERGER, *Sur les groupes d'holonomie homogènes des variétés riemanniennes* (*C.R. Acad. Sc.*, t. 262, série A, 1966, p. 1316).

[7] K. TANDAI, *Hokkaido Math. J.*, vol. I, n° 1, 1972, p. 12-15.

[8] R. B. BROWN et A. GRAY, *Riemannian Manifolds with Holonomy Group Spin* (9) (*Differential Geometry* in honor of Kantoro Yono, Kirokuniya Book-Store Co. Ltd., Tokyo, 1972, p. 41-59).

[9] M. BERGER, *Lectures on Geodesics in Riemannian Geometry*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1965.

[10] S. GALLOT et D. MEYER, *Opérateur de courbure et laplacien des formes différentielles d'une variété riemannienne* (*J. Math. pures et appl.*, t. 54, 1975, p. 259-284).

[11] S. GALLOT, *Variétés dont le spectre ressemble à celui de la sphère* (*C.R. Acad. Sc.*, t. 28, série A, 1976, p. 647-650).

(Manuscrit reçu le 25 mai 1978,
révisé le 8 décembre 1978.)

S. GALLOT,
Laboratoire
associé au C.N.R.S. n° 212,
Université de Paris-VII,
Tour 45-55,
2, place Jussieu,
75230 Paris Cedex 05.