Henri Skoda

Application des techniques L^2 à la théorie des idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 5, nº 4 (1972), p. 545-579

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1972_4_5_4_545_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 5, 1972, p. 545 à 579.

APPLICATION DES TECHNIQUES L^2 A LA THÉORIE DES IDÉAUX D'UNE ALGÈBRE DE FONCTIONS HOLOMORPHES AVEC POIDS

PAR HENRI SKODA

INTRODUCTION. — Dans son article, L^2 *estimates and existence theorem for the* $\bar\partial$ *operator*, Hörmander démontre des théorèmes d'existence remarquablement précis pour l'opérateur $\bar\partial$ dans un ouvert pseudoconvexe Ω de $\mathbf{C}^n$. Sa méthode est de considérer l'opérateur $\bar\partial$ comme un opérateur non borné dans des espaces L^2 avec poids. Dans l'article qui suit, on montre comment la méthode d'Hörmander pour l'opérateur $\bar\partial$ peut se transposer à l'opérateur de multiplication

$$(h_1, h_2, \ldots, h_p) \mapsto \sum_{i=1}^{p} g_i\, h_i,$$

où les h_i et les g_i sont des fonctions holomorphes dans Ω. On considère cet opérateur comme un opérateur linéaire continu, opérant dans des espaces de fonctions holomorphes du type L^2 avec poids. On obtient par cette méthode des théorèmes d'existence très précis dans des espaces L^2 avec poids. Ces théorèmes permettent de retrouver des résultats antérieurs d'Hörmander, Cnop, Kelleher et Taylor sur les idéaux dans les algèbres de fonctions holomorphes avec poids et d'obtenir des résultats nouveaux dans la théorie de ces idéaux (*cf.* proposition 4, corollaire 5, remarque 4, § 4).

Dans le paragraphe 1, on ramène le problème de la surjectivité de l'opérateur de multiplication par les g_i à la démonstration d'une estimation *a priori*. Cette estimation n'utilise que les formes différentielles de degré 1 et 2.

Dans le paragraphe 2, on démontre cette estimation.

Le début du paragraphe 3 est consacré à la démonstration du théorème 1 qui est notre résultat principal; si une certaine intégrale $\int_\Omega |f|^2 |g|^{-2\alpha q-2} e^{-\psi} d\lambda$ est finie, c'est-à-dire si f est suffisamment petite là où les g_i sont petites, alors f appartient à l'idéal engendré par les g_i, il existe des h_i tels que $f = \sum_{i=1}^{p} g_i h_i$ et qui vérifient l'estimation suivante :

$$\int_\Omega |h|^2 |g|^{-2\alpha q} e^{-\psi} d\lambda < +\infty.$$

Les paragraphes 1 et 2, la démonstration du théorème 1 s'inspirent directement des méthodes d'Hörmander [4]. La principale nouveauté semble être le rôle joué par le hessien de la fonction $\mathrm{Log}\,|g|$. A la différence de [6], [2] et [7] nous n'utilisons pas le complexe de Koszul, car il semble techniquement difficile de récupérer le théorème 1 par la méthode du complexe de Koszul.

Comme les constantes de l'estimation (3.2) du théorème 1 sont indépendantes du nombre de générateurs p dès que $p > n$, il est aisé de traiter le cas d'une suite infinie de fonctions g_i, comme limite du cas fini.

Nous appliquons ensuite le théorème 1 à l'algèbre A_ψ des fonctions holomorphes f, telles qu'il existe des constantes C_1 et C_2 :

$$|f(z)| \leq C_1 \exp [C_2\, \psi(z)], \qquad \text{avec} \quad z \in \Omega,$$

où ψ est une fonction positive plurisousharmonique sur Ω. Plus généralement, à une famille Φ de fonctions poids plurisousharmoniques, on associe une algèbre de fonctions holomorphes A_Φ.

On suppose que l'algèbre A_ψ (resp. A_Φ) peut être décrite par des conditions de type L^2 avec poids, de sorte que le théorème 1 s'applique. On retrouve les résultats d'Hörmander sur les générateurs de l'algèbre A_ψ et on les étend au cas d'une « infinité dénombrable de générateurs de A_ψ ». La proposition 3 montre qu'un idéal $\mathcal{J}$ de A_ψ est séquentiellement dense dans A_ψ si et seulement si cet idéal contient une « infinité dénombrable de générateurs », c'est-à-dire une suite $(g_i)_{i\in\mathbf{N}}$, $g_i \in \mathcal{J}$ telle que toute fonction f de A_ψ soit de la forme $f = \sum_{i=1}^{\infty} g_i h_i$, $h_i \in A_\psi$. Le corollaire 4 donne une caractérisation de la racine de l'idéal $\mathcal{J}_1$ engendré par $g_1, g_2, \ldots, g_p \in A_\psi$, c'est un « Nullstellensatz global » précédemment démontré par Cnop d'une part, Kelleher et Taylor d'autre part. Suivant Kelleher et Taylor, on introduit l'idéal $\mathfrak{I}_2$ des fonctions f telles que $|f| \leqq C_1 |g| \exp (C_2 \psi)$. On a trivialement $\mathfrak{I}_1 \subset \mathfrak{I}_2$. Il existe un entier k tel que $\mathfrak{I}_2^k \subset \mathfrak{I}_1$ et on cherche le meilleur entier k possible. Le corollaire 5 donne $k = \text{Inf}\,(n + 2,\ p + 1)$, ce qui n'est pas encore complètement satisfaisant, mais améliore déjà le résultat antérieur de Kelleher et Taylor $k = \text{Inf}\,(2\,n + 1,\ 2\,p - 1)$. L'obtention du meilleur résultat possible $k = \text{Inf}\,(n + 1,\ p)$ nécessite un second théorème d'existence qui fait l'objet du paragraphe 4. Nous reprenons une idée de Kelleher et Taylor relative au cas $n = 1$.

Le paragraphe 5 donne une application à certaines équations de convolution : il est surtout destiné à donner un exemple d'une situation où il est naturel de travailler dans des espaces L^2 avec poids.

Une partie des résultats de cet article a été annoncée dans une Note aux *Comptes rendus* [15].

1. Préliminaires d'analyse fonctionnelle. — Soient H_1, H_2, H_3 trois espaces de Hilbert. On désigne par $(x, y)_i$ le produit scalaire de deux vecteurs x et y de H_i $(i = 1, 2, 3)$, on désigne par $\| x \|_i$ la norme d'un vecteur x de H_i. On considère la situation suivante :

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, "T_1"] \arrow[d, "T_2"'] & H_2 \\ H_3 & \end{tikzcd}$$

T_1 est un opérateur linéaire continu de H_1 dans H_2, son adjoint T_1^* envoie H_2 dans H_1.

T_2 est opérateur linéaire non borné, fermé, à domaine dense, de H_1 dans H_3. On désigne par Dom T_2 le domaine de l'opérateur T_2. On renvoie à Dunford-Schwarz [3] (chapitre XII) ou à Martineau [13] pour l'étude détaillée d'un tel opérateur. Rappelons seulement qu'on peut définir l'adjoint T_2^* de T_2. T_2^* est un opérateur fermé à domaine dense de H_3 dans H_1. On a $(T_2^*)^* = T_2$. L'équation $T_2\, x = y$ est équivalente à

$$(x, T_2^*\, z)_1 = (y, z)_3 \quad \text{pour tout } z \in \text{Dom}\, T_2^*.$$

En particulier, x appartient à Ker T_2 (noyau de T_2) si et seulement si

$$(x, T_2^*\, z)_1 = 0 \quad \text{pour tout } z \in \text{Dom}\, T_2^*.$$

Soit G_2 un sous-espace fermé de H_2, contenant l'image de Ker T_2 par T_1 :

$$T_1\,(\text{Ker}\, T_2) \subset G_2.$$

On a la proposition suivante :

PROPOSITION 1. — *On a* $T_1(\operatorname{Ker} T_2) = G_2$ *si et seulement s'il existe une constante* $c > 0$ *telle que*

$$\| T_1^* x_2 + T_2^* x_3 \|_1 \geq c \| x_2 \|_2 \tag{1.1}$$

pour tout $x_2 \in G_2$ *et tout* $x_3 \in \operatorname{Dom} T_2^*$.

Pour tout $x_2 \in G_2$, *il existe alors* $x_1 \in \operatorname{Ker} T_2$ *tel que*

$$T_1 x_1 = x_2 \quad et \quad \| x_1 \|_1 \leq \frac{1}{c} \| x_2 \|_2. \tag{1.2}$$

Posons $G_1 = \operatorname{Ker} T_2$. Comme G_j est un sous-espace fermé de H_j et que $T_1 G_1 \subset G_2$, on a $T_1 G_1 = G_2$, si et seulement si

$$\| T_1^* x_2 \|_{H_1/G_1^\perp} \geq c \| x_2 \|_{H_2}, \qquad x_2 \in G_2. \tag{1.3}$$

C'est un résultat standard pour l'opérateur de G_1 dans G_2 induit par T_1, si on remarque que le dual de G_j peut être identifié à G_j et que G_1 peut être identifié à $H_1/G_1^\perp$.

Comme G_1 est le noyau de l'autre opérateur T_2, l'image de T_2^* est dense dans G_1, on obtient donc la condition de la proposition 1 :

$$\| T_1^* x_2 + T_2^* x_3 \|_1 \geq \| c \| x_2 \|_2, \qquad x_2 \in G_2, \quad x_3 \in \operatorname{Dom} T_2^*.$$

On décrit maintenant la situation concrète à laquelle on appliquera la proposition 1. On reprend les notations d'Hörmander [6]. Ω désigne un ouvert de $\mathbf{C}^n$, $d\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{C}^n$. Si φ est une fonction réelle continue sur Ω, $L^2(\Omega, \varphi)$ est l'espace des fonctions de cerré intégrable sur Ω pour la mesure $e^{-\varphi}\, d\lambda$.

$L^2_{0,1}(\Omega, \varphi)$ désigne l'espace des formes v, de bidegré $(0, 1)$, à coefficients dans $L^2(\Omega, \varphi)$:

$$v = \sum_{k=1}^{n} v_k \, d\bar{z}_k,$$

$$|v|^2 = \sum_{k=1}^{n} |v_k|^2,$$

$$\| v \|_\varphi^2 = \int_\Omega |v|^2 e^{-\varphi} \, d\lambda.$$

On aura également besoin de l'espace $L^2_{0,2}(\Omega, \varphi)$ des formes de bidegré $(0, 2)$, à coefficients dans $L^2(\Omega, \varphi)$:

$$v = \sum_{1 \leq k < l \leq n} v_{kl} \, d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}_l,$$

$$\| v \|_\varphi^2 = \int_\Omega |v|^2 e^{-\varphi} \, d\lambda = \int_\Omega \sum_{1 \leq k < l \leq n} |v_{kl}|^2 e^{-\varphi} \, d\lambda.$$

On considère l'opérateur $\bar{\partial}$ comme un opérateur non borné T :

$$T : \quad L^2(\Omega, \varphi_1) \to L^2_{0,1}(\Omega, \varphi_1),$$
$$f \mapsto \bar{\partial} f,$$

$f \in \operatorname{Dom} T$ si et seulement si $\bar{\partial} f$ calculé au sens des distributions appartient à $L^2_{0,1}(\Omega, \varphi_1)$. On considère de même l'opérateur $\bar{\partial}$ opérant sur les formes de bidegré (0, 1), on désigne par S l'opérateur non borné associé :

$$S : \quad L^2_{0,1}(\Omega, \varphi_1) \to L^2_{0,2}(\Omega, \varphi_1),$$

$v \in \operatorname{Dom} S$ si et seulement si $\bar{\partial} v$ calculé au sens des distributions appartient à $L^2_{0,2}(\Omega, \varphi_1)$.

On prend pour H_1 la puissance $p^{\text{ième}}$ de $L^2(\Omega, \varphi_1)$, un élément h de H_1 est donc un système de p fonctions de $L^2(\Omega, \varphi_1)$:

$$h = (h_1, h_2, \ldots, h_p), \qquad \text{avec} \quad h_i \in L^2(\Omega, \varphi_1).$$

On prend pour H_2 l'espace $L^2(\Omega, \varphi_2)$, φ_1 et φ_2 seront précisées plus tard.

Si $g_1, g_2, \ldots, g_p$ sont p fonctions holomorphes dans Ω, on leur associe l'opérateur T_1 :

$$T_1 : \quad [L^2(\Omega\ \varphi_1)]^p \to L^2(\Omega, \varphi_2),$$
$$(h_1, h_2, \ldots, h_p) \mapsto \sum_{i=1}^{p} g_i h_i.$$

Pour que T_1 soit continu, on va supposer Ω borné et les fonctions φ_1, φ_2 et g_i définies dans un voisinage de $\bar{\Omega}$. On prend pour H_3 l'espace $[L^2_{0,1}(\Omega, \varphi_1)]^p$, un élément v de H est un système de p formes dans $L^2_{0,1}(\Omega, \varphi_1)$:

$$v = (v_1, v_2, \ldots, v_p), \qquad \text{avec} \quad v_i \in L^2_{0,1}(\Omega, \varphi_1),$$
$$v_i = \sum_{k=1}^{n} v_{ik}\, d\bar{z}_k.$$

On prend pour T_2 la puissance $p^{\text{ième}}$ de T :

$$T_2 : \quad [L^2(\Omega, \varphi_1)]^p \to [L^2_{0,1}(\Omega, \varphi_1)]^p,$$
$$h = (h_1, h_2, \ldots, h_p) \mapsto (\bar{\partial} h_1, \bar{\partial} h_2, \ldots, \bar{\partial} h_p),$$

où $h \in \operatorname{Dom} T_2$ si et seulement $h_i \in \operatorname{Dom} T$ pour $i = 1, 2, \ldots, p$.

Ker T_2 n'est autre que le sous-espace des fonctions holomorphes dans $[L^2(\Omega, \varphi_1)]^p$ et T_1 envoie Ker T_2 dans le sous-espace G_2 des fonctions holomorphes de $L^2(\Omega, \varphi_2)$.

Pour que toute fonction holomorphe f dans $L^2(\Omega, \varphi_2)$ puisse s'écrire :

$$f = \sum_{i=1}^{p} g_i h_i,$$

où les h_i sont holomorphes et dans $L^2(\Omega, \varphi_1)$, il suffit de savoir démontrer l'estimation de la proposition 1.

2. Estimations L^2. — Afin de pouvoir utiliser les estimations d'Hörmander [6], on suppose l'ouvert Ω pseudoconvexe, borné, à frontière de classe C^∞. On suppose φ_1 et φ_2 définies et de classe C^2 dans un voisinage de $\overline{\Omega}$. On pose $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Pour $h = (h_1, h_2, \ldots, h_p)$ on pose

$$|h|^2 = |h_1|^2 + |h_2|^2 + \ldots + |h_p|^2.$$

On fait l'hypothèse $|g| > 0$ dans un voisinage de $\overline{\Omega}$, c'est-à-dire que les g_i n'ont pas de zéros communs dans un voisinage de $\overline{\Omega}$. On calcule $T_1^* u$ pour $u \in L^2(\Omega, \varphi_2)$:

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{p} g_i h_i \bar{u}\, e^{-\varphi_2}\, d\lambda = \int_\Omega \sum_{i=1}^{p} h_i \overline{(\bar{g}_i u e^{-\varphi})}\, e^{-\varphi_1}\, d\lambda, \qquad \text{avec} \quad h_i \in L^2(\Omega, \varphi_1),$$

c'est-à-dire

$$(T_1 h, u)_{\varphi_2} = (h, T_1^* u)_{\varphi_1};$$

$$T_1^* u = (\bar{g}_1 u e^{-\varphi}, \bar{g}_2 u e^{-\varphi}, \ldots, \bar{g}_p u e^{-\varphi}). \tag{2.1}$$

Soit $v_i \in \operatorname{Dom} T^*$: $v = (v_1, v_2, \ldots, v_p)$, on a

$$T_2^* v = (T^* v_1, T^* v_2, \ldots, T^* v_p).$$

Et l'inégalité (1.1) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \| T_1^* u + T_2^* v \|_1^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \| \bar{g}_i u e^{-\varphi} + T^* v_i \|_{\varphi_1}^2 \geq C^2 \| u \|_{\varphi_2}^2, \\ \qquad \text{avec} \quad u \in G_2 \quad \text{et} \quad v_i \in \operatorname{Dom} T^*. \end{array} \right. \tag{2.2}$$

On a

$$\| T_1^* u + T_2^* v \|_1^2 = \| T_1^* u \|_1^2 + 2 \operatorname{Re} (T_1^* u, T_2^* v)_1 + \| T_2^* v \|_1^2. \tag{2.3}$$

Évaluons séparément chacun des trois termes :

$$\| T_1^* u \|_1^2 = \sum_{i=1}^{p} \int_\Omega |\bar{g}_i u e^{-\varphi}|^2 e^{-\varphi_1}\, d\lambda = \int_\Omega |g|^2 |u|^2 e^{-2\varphi - \varphi_1}\, d\lambda, \tag{2.4}$$

$$2 \operatorname{Re} (T_1^* u, T_2^* v)_1 = 2 \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{p} (\bar{g}_i u e^{-\varphi}, T^* v_i)_{\varphi_1}. \tag{2.5}$$

Comme u est holomorphe, on a

$$\mathrm{T}(\bar{g}_i\, u\, e^{-\varphi}) = \bar{\partial}(\bar{g}_i\, u\, e^{-\varphi}) = u\,\bar{\partial}(\bar{g}_i\, e^{-\varphi});$$

donc $\bar{g}_i\, u e^{-\varphi}$ appartient à Dom T et on peut transposer dans (2.5) :

$$(2.6)\qquad 2\,\mathrm{Re}\,(\mathrm{T}_1^*\, u, \mathrm{T}_2^*\, v)_1 = 2\,\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{p} \left(u\,\bar{\partial}(\bar{g}_i\, e^{-\varphi}), v_i\right)_{\varphi_1}$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}\int_\Omega u\,\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}(\bar{g}_i\, e^{-\varphi})\,\bar{v}_{ik}\, e^{-\varphi_1}\, d\lambda$$

$$(2.7)\qquad = 2\,\mathrm{Re}\int_\Omega u\,\overline{\left[\sum_{i=1}^{p}\sum_{k}^{n}\frac{\partial}{\partial z_k}(g_i\, e^{-\varphi})\, v_{ik}\right]}\, e^{-\varphi_1}\, d\lambda.$$

Utilisons l'inégalité $2\,ab \leqq \frac{1}{\alpha}\,a^2 + \alpha\, b^2$ où α est un nombre $\geqq 1$, on obtient

$$(2.8)\qquad 2\,\mathrm{Re}\,(\mathrm{T}_1^*\, u, \mathrm{T}_2^*\, v)_1 \geqq -\frac{1}{\alpha}\int_\Omega |\,g\,|^2\,|\,u\,|^2\, e^{-2\varphi-\varphi_1}\, d\lambda$$

$$-\,\alpha\int_\Omega |\,g\,|^{-2}\left|\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} e^{\varphi}\,\frac{\partial}{\partial z_k}(g_i\, e^{-\varphi})\, v_{ik}\right|^2 e^{-\varphi_1}\, d\lambda.$$

Évaluons maintenant $\|\,\mathrm{T}_2^*\, v\,\|_1^2$ en utilisant l'inégalité fondamentale d'Hörmander ([6], p. 104, th. 2.1.4 et p. 100, prop. 2.1.1) :

$$(2.9)\qquad \|\,\mathrm{T}^*\, v_i\,\|_{\varphi_1}^2 + \|\,\mathrm{S}\, v_i\,\|_{\varphi_1}^2 \geqq \int_\Omega \sum_{k,l}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_k\, \partial \bar{z}_l}\, v_{ik}\,\bar{v}_{il}\, e^{-\varphi_1}\, d\lambda, \qquad v_i \in \mathrm{Dom}\,\mathrm{T}^* \cap \mathrm{Dom}\,\mathrm{S}.$$

On obtient

$$(2.10)\qquad \left\{\begin{array}{l} \|\,\mathrm{T}_2^*\, v\,\|_1^2 + \displaystyle\sum_{i=1}^{p}\|\,\mathrm{S}\, v_i\,\|_{\varphi_1}^2 \geqq \int_\Omega \sum_{i,k,l}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_k\, \partial \bar{z}_l}\, v_{ik}\,\bar{v}_{il}\, e^{-\varphi_1}\, d\lambda, \\ \qquad\text{avec}\quad 1 \leqq i \leqq p, \qquad 1 \leqq k, l \leqq n. \end{array}\right.$$

Combinant (2.3), (2.4), (2.9) et (2.10), il vient

$$(2.11)\qquad \left\{\begin{array}{l} \|\,\mathrm{T}_1^*\, u + \mathrm{T}_2^*\, v\,\|_1^2 + \displaystyle\sum_{i=1}^{p}\|\,\mathrm{S}\, v_i\,\|_{\varphi_1}^2 \\ \quad \geqq \left(1 - \dfrac{1}{\alpha}\right)\displaystyle\int_\Omega |\,g\,|^2\,|\,u\,|^2\, e^{-2\varphi-\varphi_1}\, d\lambda \\ \quad + \displaystyle\int_\Omega\left[\sum_{i,k,l}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_k\, \partial \bar{z}_l}\, v_{ik}\,\bar{v}_{il} - \alpha\,|\,g\,|^{-2}\left|\sum_{i,k} e^{\varphi}\,\frac{\partial}{\partial z_k}(g_i\, e^{-\varphi})\, v_{ik}\right|^2\right] e^{-\varphi_1}\, d\lambda, \\ \qquad\text{avec}\quad u \in \mathrm{G}_2, \quad v_i \in \mathrm{Dom}\,\mathrm{T}^* \cap \mathrm{Dom}\,\mathrm{S}, \qquad \alpha \geqq 1. \end{array}\right.$$

Choisissons

$$\varphi = \operatorname{Log} | g |^2 = \operatorname{Log} (| g_1 |^2 + | g_2 |^2 + \ldots + | g_p |^2),$$
$$\varphi_1 = \psi + \beta \operatorname{Log} | g |^2,$$

où ψ est de classe C^2 et plurisousharmonique, et où β est une constante > 0 à déterminer de façon qu'on ait

$$\beta \sum_{i,k,l} \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_l} (\operatorname{Log} | g |^2)\, v_{ik}\, \bar{v}_{il} \geqq \alpha\, | g |^{-2} \left| \sum_{i,k} e^{\varphi} \frac{\partial}{\partial z_k} (g_i\, e^{-\varphi})\, v_{ik} \right|^2. \tag{2.12}$$

Dans tous les calculs qui vont suivre, seuls les indices k et l varient de 1 à n, tous les autres indices varient de 1 à p. Un calcul facile montre qu'on a

$$\sum_{k,l} \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_l} (\operatorname{Log} | g |^2)\, v_{ik}\, \bar{v}_{il} = \frac{1}{| g |^2} \sum_j \left| \sum_k \frac{\partial g_j}{\partial z_k} v_{ik} \right|^2 - \frac{1}{| g |^4} \left| \sum_{j,k} \bar{g}_j \frac{\partial g_j}{\partial z_k} v_{ik} \right|^2,$$

$$\sum_{k,l} \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_l} (\operatorname{Log} | g |^2)\, v_{ik}\, v_{il} = | g |^{-4} \left[\sum_{j,m} | g_m |^2 \left| \sum_k \frac{\partial g_j}{\partial z_k} v_{ik} \right|^2 - \left| \sum_{j,k} \bar{g}_j \frac{\partial g_j}{\partial z_k} v_{ik} \right|^2 \right].$$

Appliquons l'identité de Lagrange :

$$\left| \sum_j a_j \bar{b}_j \right|^2 + \sum_{m<j} | a_m\, b_j - a_j\, b_m |^2 = \sum_{j,m} | a_m |^2\, | b_j |^2.$$

Il vient

$$\sum_{k,l} \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_l} (\operatorname{Log} | g |^2)\, v_{ik}\, \bar{v}_{il} = | g |^{-4} \sum_{m<j} \left| \sum_k \left(g_m \frac{\partial g_j}{\partial z_k} - g_j \frac{\partial g_m}{\partial z_k} \right) v_{ik} \right|^2. \tag{2.13}$$

D'autre part, on a

$$e^{\varphi} \frac{\partial}{\partial z_k} (g_i\, e^{-\varphi}) = \frac{\partial g_i}{\partial z_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial z_k} g_i = \frac{\partial g_i}{\partial z_k} - g_i\, | g |^{-2} \left(\sum_j \bar{g}_j \frac{\partial g_j}{\partial z_k} \right)$$
$$= | g |^{-2} \sum_j \bar{g}_j \left(g_j \frac{\partial g_i}{\partial z_k} - g_i \frac{\partial g_j}{\partial z_k} \right)$$

$$\left| \sum_{i,k} e^{\varphi} \frac{\partial}{\partial z_k} (g_i\, e^{-\varphi})\, v_{ik} \right|^2 = | g |^{-4} \left| \sum_{i,j,k} \bar{g}_j \left(g_j \frac{\partial g_i}{\partial z_k} - g_i \frac{\partial g_j}{\partial z_k} \right) v_{ik} \right|^2. \tag{2.14}$$

Lemme 1. — *Soit* $q = \operatorname{Inf}(n, p - 1)$, *on a l'inégalité*

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \sum_{i,j,k} \bar{a}_j\, (a_j\, b_{ik} - a_i\, b_{jk})\, c_{ik} \right|^2 \leqq q\, | a |^2 \sum_{i,m<j} \left| \sum_k (a_m\, b_{jk} - a_j\, b_{mk})\, c_{ik} \right|^2 ; \\ a_j,\ b_{ik},\ c_{ik} \in \mathbf{C}, \qquad 1 \leqq i, j \leqq p, \qquad 1 \leqq k \leqq n, \qquad | a |^2 = \sum_j | a_j |^2. \end{array} \right. \tag{2.15}$$

Supposons le lemme démontré et appliquons l'inégalité (2.15) avec

$$a_j = g_j, \qquad b_{ik} = \frac{\partial g_i}{\partial z_k}, \qquad c_{ik} = v_{ik},$$

tenant compte de (2.14) et de (2.13), on voit qu'on peut prendre $\beta = \alpha q$ dans l'inégalité (2.12) et d'après (2.11), on obtient la proposition suivante :

Proposition 2. — *On a l'inégalité suivante :*

$$(2.16)\quad \begin{cases} \| T_1^* u + T_2^* v \|_1^2 + \sum_{i=1}^{p} \| S v_i \|_{\varphi_1}^2 \\ \geqq \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \int_\Omega | u |^2 e^{-\varphi_2} d\lambda + \int_\Omega \sum_{i,k,l} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_k \partial \bar z_l} v_{ik} \bar v_{il} e^{-\varphi_1} d\lambda; \\ \alpha \geqq 1, \qquad q = \operatorname{Inf}(n, p-1), \qquad \varphi_1 = \psi + \alpha q \operatorname{Log} | g |^2, \\ \varphi_2 = \psi + (\alpha q + 1) \operatorname{Log} | g |^2, \qquad v_i \in \operatorname{Dom} T^* \cap \operatorname{Dom} S, \qquad u \in F_2. \end{cases}$$

Démontrons maintenant le lemme 1. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz, à deux reprises :

$$\left| \sum_{i,j,k} \bar a_j (a_j b_{ik} - a_i b_{jk}) c_{ik} \right|^2 \leqq | a |^2 \sum_j \left| \sum_{i,k} (a_j b_{ik} - a_i b_{jk}) c_{ik} \right|^2$$

$$\leqq (p-1) | a |^2 \sum_{j,i} \left| \sum_k (a_j b_{ik} - a_i b_{jk}) c_{ik} \right|^2$$

(comme le terme correspondant à $i = j$ est nul, il n'y a que $p - 1$ termes dans la sommation sur i). L'inégalité (2.15) en résulte trivialement avec $q = p - 1$.

L'inégalité (2.15) avec $q = n$ est moins aisée à démontrer.

On considère la forme hermitienne positive sur $\mathbf{C}^p$, qui, aux vecteurs $X = (x_j)$ et $Y = (y_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ associe

$$H(X, Y) = \sum_{m<j} (a_m x_j - a_j x_m) \overline{(a_m y_j - a_j y_m)}.$$

On désigne par B_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ le vecteur de $\mathbf{C}^p$ de composantes $b_{1k}, b_{2k}, \ldots, b_{pk}$.

On va montrer qu'on peut toujours se ramener au cas où les B_k sont deux à deux orthogonaux pour la forme H. Considérons la restriction de H au sous-espace V de $\mathbf{C}^p$ engendré par les B_k. Il existe une base de V orthogonale pour H. Rajoutant éventuellement à cette base des vecteurs nuls, il existe donc n vecteurs $B'_l \in V$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$ et des nombres $\alpha_{kl} \in \mathbf{C}$ tels que

$$B_k = \sum_l \alpha_{kl} B'_l.$$

On a donc

$$b_{jk} = \sum_l \alpha_{kl}\, b'_{jl}, \qquad \text{où} \quad j = 1, 2, \ldots, p,$$

$$\sum_k b_{jk}\, c_{ik} = \sum_l b'_{jl} \Bigl(\sum_k \alpha_{kl}\, c_{ik} \Bigr).$$

Posons

$$c'_{il} = \sum_k \alpha_{kl}\, c_{ik}.$$

Il vient

$$\sum_k b_{jk}\, c_{ik} = \sum_l b'_{jl}\, c'_{il}.$$

L'inégalité cherchée s'écrit

$$\Bigl| \sum_{i,j,l} \bar{a}_j\, (a_j\, b'_{il} - a_i\, b'_{jl})\, c'_{il} \Bigr|^2 \leqq n\, |\, a\, |^2 \sum_{i,m<j} \Bigl| \sum_l (a_m\, b'_{jl} - a_j\, b'_{ml})\, c'_{il} \Bigr|^2.$$

On peut donc supposer les B_k orthogonaux pour H. On a alors

$$\sum_{m<j} \Bigl| \sum_k (a_m\, b_{jk} - a_j\, b_{mk})\, c_{ik} \Bigr|^2 = \sum_{k,l} H\,(B_k, B_l)\, c_{ik}\, \bar{c}_{il} \tag{2.17}$$
$$= \sum_k H\,(B_k, B_k)\, |\, c_{ik}\, |^2,$$

$$\sum_{m<j} \Bigl| \sum_k (a_m\, b_{jk} - a_j\, b_{mk})\, c_{ik} \Bigr|^2 = \sum_{k,m<j} |\, a_m\, b_{jk} - a_j\, b_{mk}\, |^2\, |\, c_{ik}\, |^2. \tag{2.18}$$

D'autre part, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\Bigl| \sum_{i,j,k} \bar{a}_j\, (a_j\, b_{ik} - a_i\, b_{jk})\, c_{ik} \Bigr|^2 \leqq n \sum_k \Bigl| \sum_{i,j} \bar{a}_j\, (a_j\, b_{ik} - a_i\, b_{jk})\, c_{ik} \Bigr|^2. \tag{2.19}$$

D'après (2.19) et (2.18), il suffit de démontrer l'inégalité

$$\Bigl| \sum_{i,j} \bar{a}_j\, (a_j\, b_{ik} - a_i\, b_{jk})\, c_{ik} \Bigr|^2 \leqq |\, a\, |^2 \sum_{i,m<j} |\, a_m\, b_{jk} - a_j\, b_{mk}\, |^2\, |\, c_{ik}\, |^2. \tag{2.20}$$

Posons

$$A = \Bigl| \sum_{i,j} \bar{a}_j\, (a_j\, b_{ik} - a_i\, b_{jk})\, c_{ik} \Bigr|^2.$$

Permuttant les rôles de i et j, on obtient

$$A = \Bigl| \frac{1}{2} \sum_{i,j} (a_j\, b_{ik} - a_i\, b_{jk})\, (\bar{a}_j\, c_{ik} - \bar{a}_i\, c_{jk}) \Bigr|^2,$$

$$A = \Bigl| \sum_{i<j} (a_j\, b_{ik} - a_i\, b_{jk})\, (^{-}{}_j\, c_{ik} - \bar{a}_i\, c_{jk}) \Bigr|^2.$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$A \leqq \left(\sum_{i<j} | a_j b_{ik} - a_i b_{jk} |^2\right)\left(\sum_{i<j} | (\bar{a}_j c_{ik} - \bar{a}_i c_{jk} |^2\right).$$

Utilisant l'identité de Lagrange :

$$\sum_{i<j} \left| \bar{a}_j c_{ik} - \bar{a}_i c_{jk} \right|^2 = | a |^2 \left(\sum_i | c_{ik} |^2\right) - \left| \sum_i a_i c_{ik} \right|^2.$$

On obtient

$$A \leqq \left(\sum_{i<j} | a_j b_{ik} - a_i b_{jk} |^2\right) | a |^2 \left(\sum_i | c_{ik} |^2\right),$$

ce qui n'est autre que l'inégalité (2.20). Le lemme 1 est donc démontré, et nous disposons maintenant des moyens techniques pour démontrer des théorèmes d'existence.

3. Le premier théorème d'existence. — Rappelons que si

$$g = (g_1, g_2, \ldots, g_p)$$

désigne un système de p fonctions holomorphes sur Ω, on pose

$$| g | = (| g_1 |^2 + | g_2 |^2 + \ldots + | g_p |^2)^{1/2}.$$

On envisage également le cas d'une suite $g = (g_i)_{i \in \mathbf{N}}$ de fonctions holomorphes telles que la série de fonctions $\sum_{i=1}^{\infty} | g_i |^2$ converge uniformément sur tout compact de Ω, on pose alors

$$| g | = \left(\sum_{i=1}^{\infty} | g_i |^2\right)^{1/2}.$$

Théorème 1. — *Soit Ω un ouvert pseudoconvexe de $\mathbf{C}^n$, ψ une fonction plurisousharmonique dans Ω. Soit $g_1, g_2, \ldots, g_p$ [resp. $(g_i)_{i \in \mathbf{N}}$] un système de p fonctions holomorphes dans Ω (resp. une suite de fonctions holomorphes).*

Soit $\alpha > 1$ et q l'entier Inf $(n, p-1)$ (*resp.* $q = n$).

Alors, pour toute fonction f holomorphe dans Ω et telle que

$$\int_{\Omega} | f |^2 | g |^{-2\alpha q - 2} e^{-\psi} \, d\lambda < +\infty,$$

il existe p fonctions h_i holomorphes dans Ω [resp. une suite $(h_i)_{i\in\mathbf{N}}$] telles que

$$f = \sum_{i=1}^{p} g_i h_i \qquad \left(\textit{resp.}\ f = \sum_{i=1}^{\infty} g_i h_i\right), \tag{3.1}$$

$$\int_\Omega |h|^2 |g|^{-2\alpha q} e^{-\psi} d\lambda \leqq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_\Omega |f|^2 |g|^{-2\alpha q - 2} e^{-\psi} d\lambda. \tag{3.2}$$

La série $\sum_{i=1}^{\infty} g_i h_i$ converge uniformément sur tout compact de Ω.

On commence par démontrer le théorème avec les restrictions très fortes faites pour démontrer la proposition 2.1 : Ω borné, pseudoconvexe, à frontière de classe C^∞, la fonction ψ de classe C^2 et définie dans un voisinage de $\overline{\Omega}$, les fonctions g_i sont en nombre fini, elles sont définies dans un voisinage de $\overline{\Omega}$, on a $|g| > 0$ sur $\overline{\Omega}$. En utilisant ensuite les procédés exhaustifs d'Hörmander, il sera facile de lever toutes ces restrictions.

D'après la proposition 2, on a l'inégalité

$$\| T_1^* u + T_2^* v \|_1^2 + \sum_{i=1}^{p} \| S v_i \|_{\varphi_1}^2 \geqq \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \int_\Omega |u|^2 e^{-\varphi_2} d\lambda.$$

Soit encore d'après (2.2) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \| \bar{g}_i u e^{-\varphi} + T^* v_i \|_{\varphi_1}^2 + \sum_{i=1}^{p} \| S v_i \|_{\varphi_1}^2 \geqq \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \int_\Omega |u|^2 e^{-\varphi_2} d\lambda\ ; \\ \qquad\qquad u \in G_2 \quad \text{et} \quad v_i \in \operatorname{Dom} T^* \cap \operatorname{Dom} S. \end{array} \right. \tag{3.3}$$

Comme Ker S est fermé, il existe $v_i'' \in \operatorname{Ker} S$ et $v_i' \in (\operatorname{Ker} S)^\perp$ tels que

$$v_i = v_i' + v_i''.$$

Comme $ST = 0$, on a $\operatorname{Im} T \subset \operatorname{Ker} S$, v_i'' est donc orthogonal à $\operatorname{Im} \mathbf{T}$, il en résulte donc que $T^* v_i'' = 0$, on a donc

$$T^* v_i = T^* v_i' \qquad \text{et} \qquad S v_i' = 0.$$

Appliquons l'inégalité (3.3) aux v_i', il vient

$$\sum_{i=1}^{p} \| \bar{g}_i u e^{-\varphi} + T^* v_i \|_{\varphi_1}^2 = \sum_{i=1}^{p} \| \bar{g}_i u e^{-\varphi} + T^* v_i' \| \geqq \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \int_\Omega |u|^2 e^{-\varphi_2} d\lambda. \tag{3.4}$$

Soit encore

$$\left\{ \begin{array}{l} \| T_1^* u + T_2^* v \|_{\varphi_1}^2 \geqq \left(1 - \dfrac{1}{\alpha}\right) \displaystyle\int_\Omega |u|^2 e^{-\varphi_2} d\lambda, \\ \text{avec} \quad u \in G_2 \quad \text{et} \quad v_i \in \operatorname{Dom} T^* \cap \operatorname{Dom} S. \end{array} \right. \tag{3.5}$$

$\mathrm{Dom}\, T^* \cap \mathrm{Dom}\, S$ contient en particulier l'espace $\mathcal{D}^1_{0,1}(\Omega)$ des formes de classe C^1, de bidegré (0, 1), à support compact dans Ω. Démontrons que $T^*(\mathcal{D}^1_{0,1}(\Omega))$ est dense dans $\mathrm{Im}\, T^*$, en utilisant le théorème de Hahn-Banach. Si $f \in L^2(\Omega, \varphi_1)$ est orthogonal à $T^*(\mathcal{D}^1_{0,1}(\Omega))$, cela entraîne $\bar\partial f = 0$ d'après la définition même de la dérivation au sens des distributions, on a donc

$$T f = 0,$$
$$(T f, v) = (f, T^* v) = 0, \qquad \text{pour} \quad v \in \mathrm{Dom}\, T^*,$$

f est orthogonal à $\mathrm{Im}\, T^*$.

L'inégalité (3.5) est donc vraie pour toute $v \in \mathrm{Dom}\, T^*_2$, la proposition 1 entraîne alors le théorème 1.

Commençons par éliminer l'hypothèse de finitude sur le nombre des g_i; on suppose qu'on a une suite $(g_i)_{i \in \mathbf{N}}$ de fonctions holomorphes, toutes définies dans un même voisinage de Ω. Comme $|g| > 0$ sur $\overline{\Omega}$, on a $\sum_{i=1}^{p} |g_i|^2 > 0$ sur $\overline{\Omega}$, pour p assez grand. Appliquons le théorème 1 à $(g_1, g_2, \ldots, g_p)$, il existe une suite $(h_{i,p})_{i \in \mathbf{N}})$ de fonctions telles que

$$h_{i,p} = 0 \qquad \text{pour} \quad i > p;$$

$$f = \sum_{i=1}^{p} g_i\, h_{i,p}, \tag{3.6}$$

$$\int_\Omega \sum_i |h_{i,p}|^2 \left(\sum_{i=1}^{p} |g_i|^2 \right)^{-\alpha q} e^{-\psi}\, d\lambda \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_\Omega |f|^2 \left(\sum_{i=1}^{p} |g_i|^2 \right)^{-\alpha q - 1} e^{-\psi}\, d\lambda. \tag{3.7}$$

Soit encore

$$\int_\Omega \sum_i |h_{i,p}|^2\, |g|^{-2\alpha q}\, e^{-\psi}\, d\lambda \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_\Omega |f|^2 \left(\sum_{i=1}^{p} |g_i|^2 \right)^{-\alpha q - 1} e^{-\psi}\, d\lambda. \tag{3.8}$$

D'après le théorème de Lebesgue sur les suites monotones, l'intégrale de droite converge vers $\frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_\Omega |f|^2\, |g|^{-2\alpha q - 2}\, e^{-\psi}\, d\lambda$ quand $p \to +\infty$. L'intégrale de gauche est donc bornée par une constante indépendante de p; il en résulte aisément, en utilisant les propriétés de moyenne de la fonction plurisousharmonique $\sum_i |h_{i,p}|^2$, que $\sum_{i=1}^{\infty} |h_{i,p}|^2$ est bornée sur tout compact indépendamment de p (*cf.* Lelong [11], théorème 3′, p. 22).

Par le procédé de suite diagonale, on peut donc trouver une suite extraite p_m, telle que pour tout i, h_{i,p_m} converge uniformément sur tout compact de Ω vers une limite h_i quand $m \to +\infty$.

Pour tout entier r et tout compact K de Ω, on a

$$(3.9) \qquad \sum_{i=1}^{r} \int_{K} |h_{i,p_m}|^2 |g|^{-2\alpha q} e^{-\psi} d\lambda \leq \frac{\alpha}{\alpha-1} \int_{\Omega} |f|^2 \left(\sum_{i=1}^{p_m} |g_i|^2\right)^{-\alpha q - 1} e^{-\psi} d\lambda.$$

Faisant tendre m vers l'infini, pour r et K fixé, on en déduit :

$$(3.10) \qquad \sum_{i=1}^{r} \int_{K} |h_i|^2 |g|^{-2\alpha q} e^{-\psi} d\lambda \leq \frac{\alpha}{\alpha-1} \int_{\Omega} |f|^2 |g|^{-2\alpha q - 2} e^{-\psi} d\lambda.$$

Cette inégalité est vraie pour tout r et tout $K \subset \Omega$, on a

$$(3.11) \qquad \int_{\Omega} |h|^2 |g|^{-2\alpha q} e^{-\psi} d\lambda \leq \frac{\alpha}{\alpha-1} \int_{\Omega} |f|^2 |g|^{-2\alpha q - 2} e^{-\psi} d\lambda.$$

Remarquons que, d'après le théorème de Lebesgue, on a

$$(3.12) \qquad \lim_{r \to \infty} \int_{\Omega} \left(\sum_{i=r+1}^{\infty} |h_i|^2 \right) |g|^{-2\alpha q} e^{-\psi} d\lambda = 0.$$

Il résulte aussitôt de (3.12) et des propriétés de moyenne des fonctions plurisousharmoniques que la série $\sum_{i=1}^{\infty} |h_i|^2$ converge uniformément sur tout compact de Ω. Il reste à montrer que $f = \sum_{i=1}^{\infty} g_i h_i$ dans Ω; pour cela, il suffit de démontrer que la série $\sum_{i=1}^{\infty} g_i h_{i,p}$ converge uniformément sur tout compact de Ω et uniformément en p; or, on a

$$\left| \sum_{r+1}^{+\infty} g_i h_{i,p} \right| \leq \left(\sum_{r+1}^{\infty} |g_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{r+1}^{+\infty} |h_{i,p}|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{r+1}^{\infty} |g_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |h_{i,p}|^2 \right)^{1/2}$$

et d'après (3.8), $\sum_{i=1}^{\infty} |h_{i,p}|^2$ est borné sur tout compact par une constante indépendante de p et, par hypothèse, la série $\sum_{i=1}^{\infty} |g_i|^2$ converge uniformément sur tout compact. Ceci achève de lever l'hypothèse de finitude sur les g_i.

Supposons maintenant que la fonction ψ est définie dans un voisinage de $\overline{\Omega}$ mais n'est plus nécessairement de classe C^2. D'après Hörmander ([5], p. 93, théorème 4.4.2) on peut trouver une suite décroissante ψ_n de fonctions plurisousharmoniques de classe C^∞ telle que $\psi = \lim_{n \to +\infty} \psi_n$. Pour tout n, on peut trouver des fonctions $h_{i,n}$ telles que

$$f = \sum_i g_i h_{i,n}$$

et

$$\int_\Omega \sum_i |h_{i,n}|^2 |g|^{-2\alpha q} e^{-\psi_n} d\lambda \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_\Omega |f|^2 |g|^{-2\alpha q - 2} e^{-\psi_n} d\lambda$$
$$\leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_\Omega |f|^2 |g|^{-2\alpha q - 2} e^{-\psi} d\lambda.$$

Comme la suite ψ_n est décroissante, cette inégalité montre que la suite $n \mapsto h_{in}$ reste bornée sur tout compact, on peut donc extraire une sous-suite n_k telle que pour tout i, h_{in_k} converge uniformément sur tout compact quand $k \to +\infty$, vers une fonction h_i.

Répétant des arguments semblables à ceux de (3.10), on en déduit aisément :

$$f = \sum_i g_i h_i$$

et

$$\int_\Omega \sum_i |h_i|^2 |g|^{-2\alpha q} e^{-\psi} d\lambda \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_\Omega |f|^2 |g|^{-2\alpha q - 2} e^{-\psi} d\lambda.$$

Supposons maintenant l'ouvert Ω pseudoconvexe quelconque, il existe une suite d'ouverts Ω_n telle que

$$\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1} \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega,$$

Ω_n est borné, pseudo-convexe, à frontière de classe C^∞. Pour tout n, il existe des $h_{i,n}$ holomorphes sur Ω_n telles que

$$f = \sum_i g_i h_{i,n} \quad \text{sur } \Omega_n$$

et

$$\int_{\Omega_n} \sum_i |h_{i,n}|^2 |g|^{-2\alpha q} e^{-\psi} d\lambda \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_{\Omega_n} |f|^2 |g|^{-2\alpha q - 2} e^{-\psi} d\lambda$$
$$\leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_\Omega |f|^2 |g|^{-2\alpha q - 2} e^{-\psi} d\lambda.$$

Pour $n > p$, la suite $n \mapsto h_{i,n}$ reste bornée sur tout compact de Ω_p, on extrait une sous-suite n_k telle que h_{i,n_k} converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction limite h_i. Nous laissons les détails au soin du lecteur.

Éliminons enfin l'hypothèse $|g| > 0$ sur Ω. Considérons l'hypersurface $X_1 : g_1(z) = 0$, et appliquons le théorème à l'ouvert pseudoconvexe $\Omega_1 = \Omega \setminus X_1$. Il existe donc des fonctions h_i holomorphes dans Ω_1 telles que

$$f = \sum_i g_i h_i$$

et

$$\int_{\Omega_1} |f|^2 |g|^{-2\alpha q} e^{-\psi} d\lambda \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_{\Omega_1} |f|^2 |g|^{-2\alpha q - 2} e^{-\psi} d\lambda.$$

Comme ψ et $|g|$ sont bornées supérieurement sur tout compact de Ω, et que X_1 est de mesure nulle, les fonctions h_i sont de carré intégrable sur tout compact de Ω, il en résulte que les fonctions h_i se prolongent en des fonctions holomorphes dans Ω, en vertu du lemme suivant :

Lemme 2. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}^n$, X une hypersurface de Ω et f une fonction holomorphe dans $\Omega \setminus X$ telle que pout tout compact K de Ω $\int_K |f|^2 d\lambda < +\infty$. Alors f se prolonge en une fonction holomorphe dans Ω.*

Il suffit de démontrer le lemme, au voisinage d'un point régulier z_0 de X. Par un isomorphisme analytique local, on se ramène au cas où $z_0 = 0$ et où X est défini par l'équation

$$z_n = 0.$$

Écrivons le développement de Laurent de f :

$$f(z', z_n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(z') z_n^k,$$

avec

$$z' = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) \qquad \text{et} \qquad z = (z', z_n).$$

Il existe $r > 0$ tel que

$$\int_{\substack{|z'| < r \\ |z_n| < r}} |f(z', z_n)|^2 d\lambda(z) < +\infty.$$

D'après le théorème de Fubini, pour presque tout z' tel que $|z'| < r$, on a

$$(3.13) \qquad \int_{|z_n| < r} |f(z', z_n)|^2 d\lambda(z_n) < +\infty.$$

Or, un calcul élémentaire montre que

$$\int_{\varepsilon < |z_n| < r} |f(z', z_n)|^2 d\lambda(z_n) = 2\pi |a_{-1}(z')|^2 \operatorname{Log} \frac{r}{\varepsilon} + \pi \sum_{k \neq -1} |a_k(z')|^2 \frac{r^{2k+2} - \varepsilon^{2k+2}}{k+1}.$$

Tenant compte de (3.13), on en déduit $a_k(z') = 0$ pour $k < 0$. f est donc holomorphe au voisinage de 0. La démonstration du lemme 2 et par suite celle du théorème 1, est terminée.

Remarque 1. — En prenant $g_i(z) = z_i$ ($i = 1, 2, \ldots, p$; $p \leqq n$), on voit qu'on ne peut améliorer beaucoup la constante αq, sinon la fonction $|g|^{-2\alpha q-2}$ serait localement sommable et toute fonction holomorphe f appartiendrait localement à l'idéal engendré par les z_i, ce qui est absurde. La seule amélioration serait $\alpha = 1$. On examinera le cas $\alpha = 1$ dans le paragraphe 4.

On donne maintenant toute série d'applications du théorème.

Dans tous les corollaires qui suivent, on suppose l'ouvert Ω pseudoconvexe, les fonctions ψ plurisousharmoniques et on suppose éventuellement qu'on a choisi $\alpha > 1$. Lorsqu'on ne précise pas, la sommation sur i peut être indifféremment finie ou infinie.

Corollaire 1. — *S'il existe des constantes* C_1 *et* C_2 *telles que*

$$\exp(-C_1\psi) \leqq |g| \leqq \exp(C_2\psi),$$

alors pour toute fonction holomorphe telle que

$$\int_\Omega |f|^2 \exp(-C_3\psi)\, d\lambda < +\infty, \qquad C_3 + C_1(2\alpha q + 2) \geqq 0,$$

il existe des fonctions h_i *holomorphes telles que*

$$f = \sum_i g_i h_i$$

et

$$\int_\Omega |h|^2 \exp(-C_4\psi)\, d\lambda \leqq \frac{\alpha}{\alpha-1}\int_\Omega |f|^2 \exp(-C_3\psi)\, d\lambda,$$

avec

$$C_4 = C_3 + 2C_1 + 2\alpha q(C_1 + C_2).$$

Dans le paragraphe 5, nous donnerons un exemple où nous aurons besoin précisément de théorèmes d'existence dans des espaces $L^2(\Omega, \psi)$.

En particulier, lorsque ψ est constante, on obtient le résultat suivant :

Corollaire 2. — *S'il existe* c *et* M *telles que* $M \geqq |g| \geqq c > 0$, *alors, pour toute fonction holomorphe* f *dans* $L^2(\Omega)$, *il existe des fonctions holomorphes* h_i *telles que*

$$f = \sum_i g_i h_i \qquad et \qquad \int_\Omega |h|^2\, d\lambda < +\infty.$$

Le « Corona Problem » (*cf.* [1] et [14]) consiste à chercher, lorsque f est bornée et lorsque les hypothèses du corollaire 2 sont vérifiées, des fonctions h_i bornées telles que

$$f = \sum_{i=1}^{p} g_i h_i.$$

Si Ω est borné, le corollaire 2 montre qu'à défaut de fonctions bornées, on peut trouver des fonctions h_i dans $L^2(\Omega)$ solution du problème.

Nous allons maintenant appliquer le théorème 1 à certaines algèbres de fonctions holomorphes. Soit ψ une fonction plurisousharmonique positive sur Ω. Considérons avec Hörmander [6], l'algèbre A_ψ des fonctions holomorphes f telles qu'il existe des constantes A et B :

$$|f(z)| \leq A \exp[B\,\psi(z)] \qquad \text{pour} \quad z \in \Omega.$$

Supposons, comme dans [6], qu'il existe des constantes K_1, K_2, K_3, K_4 telles que

$$z \in \Omega, \qquad \zeta \in \mathbf{C}^n, \qquad |z - \zeta| \leq \exp[-K_1\,\psi(z) - K_2],$$

entraîne

$$\zeta \in \Omega \qquad \text{et} \qquad \psi(\zeta) \leq K_3\,\psi(z) + K_4.$$

Supposons de plus que A_ψ contient les polynômes. D'après Hörmander ([6], lemme 3), f appartient à A_ψ si et seulement s'il existe $C \geq 0$ telle que

$$\int_\Omega |f|^2 \exp(-C\,\psi)\,d\lambda < +\infty.$$

Ceci nous amène à considérer plus généralement un ensemble Φ de fonctions plurisousharmoniques, ayant la propriété de stabilité suivante : si φ_1 et $\varphi_2 \in \Phi$, $\operatorname{Sup}(\varphi_1, \varphi_2)$ et $\varphi_1 + \varphi_2 \in \Phi$. On associe à Φ l'algèbre A_Φ des fonctions holomorphes f pour lesquelles il existe $\varphi \in \Phi$ et une constante $C \geq 0$:

$$|f(z)| \leq C \exp[\varphi(z)], \qquad z \in \Omega.$$

On supposera seulement que A_Φ contient les polynômes et que A_Φ possède la propriété suivante :

$$f \in A_\Phi \text{ si et seulement si il existe } \varphi \in \Phi, \quad \int_\Omega |f|^2 e^{-\varphi}\,d\lambda < +\infty.$$

Autrement dit, on peut décrire A_Φ par des inégalités L^2.

En particulier, si on prend pour Φ l'ensemble des fonctions $C\psi$ avec $C > 0$, on obtient l'algèbre A_ψ.

Kelleher et Taylor ([7], définition 2.10) donnent des exemples d'algèbres qui sont du type A_Φ, mais qui ne sont pas du type A_ψ. On obtient alors, comme conséquence immédiate du théorème 1 et du corollaire 1, le résultat suivant d'Hörmander [6], avec une condition (iii) plus faible sur les g_i.

Corollaire 3 (Hörmander). — *Pour des fonctions g_i dans A_Φ, les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) $(g_1, g_2, \ldots, g_p)$ *est un système de générateurs de l'anneau* A_Φ;

(ii) *il existe une constante* A *et une fonction* $\varphi \in \Phi$: $|g| \geqq A \exp(-\varphi)$;

(iii) *il existe* $\alpha > 1$ *et une fonction* $\varphi \in \Phi$ *tels que*

$$\int_\Omega |g|^{-2\alpha q-2} \exp(-\varphi)\, d\lambda < +\infty.$$

Hörmander (*cf.* [6]) démontre l'équivalence de (i) et de (ii). Le fait que (i) entraîne (ii) est élémentaire, comme $1 \in A_\Phi$; il existe des $h_i \in A_\Phi$ tels que

$$1 = \sum_{i=1}^{p} g_i h_i.$$

Il en résulte $1 \leqq |g|.|h| \leqq C|g| \exp(\varphi)$ pour une certaine constante C et une certaine fonction $\varphi \in \Phi$.

Remarque 2. — D'après le théorème 1, si on a une suite $(g_i)_{i\in\mathbf{N}}$ telle que

$$A \exp(\varphi_1) \geqq |g| \geqq A' \exp(-\varphi_2), \qquad \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi,$$

il existe une suite $(h_i)_{i\in\mathbf{N}}$ telle que

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} g_i h_i \qquad \text{et} \qquad |h| \leqq A'' \exp(\varphi_3), \qquad \text{où} \quad \varphi_3 \in \Phi.$$

Autrement dit, le résultat d'Hörmander s'étend au cas d'une « infinité de générateurs ».

Nous décrivons maintenant une situation dans laquelle une telle suite $(g_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de fonctions apparaît naturellement. On munit l'algèbre A_ψ de sa topologie naturelle de limite inductive. On suppose de plus que pour tout i, l'ensemble $\Omega_i = \{z \in \Omega \mid \psi(z) < i\}$ est relativement compact dans Ω.

Soit $\mathcal{J}$ un idéal de A_ψ séquentiellement dense dans A_ψ, il existe donc une suite f_k de fonctions de $\mathcal{J}$, telle que f_k converge vers 1 uniformément sur tout compact quand $k \to +\infty$ et telle que

$$|f_k(z)| \leqq C_1 \exp(C_2\, \psi(z)) \quad \text{pour} \quad z \in \Omega,$$

C_1 et C_2 étant indépendantes de $k \in \mathbf{N}$.

Comme f_k converge vers 1 uniformément sur tout compact, il existe une fonction f_{k_i} telle que

$$\frac{3}{2} \geqq |f_{k_i}(z)|^2 \geqq \frac{1}{2} \qquad \text{pour} \quad z \in \Omega_i.$$

Posons

$$g^i = e^{-i} f_{k_i}.$$

On a

$$|g|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |g_i|^2 \leqq \left(\sum_{i=1}^{\infty} e^{-2i} \right) C_1^2 \exp [2 C_2 \psi(z)].$$

D'autre part, pour tout $z \in \Omega$, il existe $i \in \mathbf{N}$ tel que

$$i - 1 \leqq \psi(z) < i.$$

On a

$$|g|^2 \geqq |g_i|^2 = e^{-2i} |f_{k_i}(z)|^2 \geqq \frac{1}{2} e^{-2i} \geqq \frac{e^{-2}}{2} e^{-2\psi(z)}.$$

Il existe donc des constantes A, B, A′, B′ telles que

$$A \exp(+B\psi) \geqq |g| \geqq A' \exp(-B'\psi).$$

Réciproquement, si on peut trouver $g_i \in \mathcal{I}$ vérifiant l'inégalité qui précède, il résulte aussitôt de la remarque 2 que l'idéal engendré par les g_i (et par conséquent $\mathcal{I}$) est séquentiellement dense dans A_ψ. On a donc la proposition suivante :

PROPOSITION 3. — *Soit* ψ *une fonction plurisousharmonique positive telle que pour tout* $c > 0$, $\Omega_c = (z \in \Omega \mid \psi(z) < c)$ *soit relativement compact dans* Ω. *Un idéal* $\mathcal{I}$ *de l'algèbre* A_ψ *est séquentiellement dense dans* A_ψ *si et seulement s'il existe une suite* $(g_i)_{i \in \mathbf{N}}$ *de fonctions de* $\mathcal{I}$ *et des constantes* A, B, A′, B′, *telles que*

$$A \exp(B\psi) \geqq \sum_{i=1}^{\infty} |g_i|^2 \geqq A' \exp(-B'\psi).$$

Ce critère semble assez théorique. Kelleher et Taylor (*cf.* [8]) donnent un critère plus pratique pour que $\mathcal{I}$ soit séquentiellement dense dans A_ψ. Ils ramènent le problème à la construction de certaines fonctions plurisousharmoniques et donnent des conditions suffisantes pour qu'un idéal libre soit séquentiellement dense.

Nous donnons un exemple concret où s'applique la proposition 3.

Soit p un multiindice $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbf{N}^n$. On définit $f_p(z)$ comme un coefficient de Fourier :

$$f_p(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi}}_{n \text{ fois}} \exp(-i\langle z, t\rangle) \exp(-i\langle p, t\rangle)\, dt,$$

$$\text{pour } z \in \mathbf{C}^n \quad \text{et} \quad t \in \mathbf{R}^n.$$

Un calcul immédiat montre que

$$f_p(z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1 - \exp(-2i\pi z_j)}{2i\pi(z_j + p_j)}.$$

D'autre part, utilisant la formule de Parseval, on a

$$\sum_{p \in \mathbf{N}^n} |f_p(z)|^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \exp(2 \operatorname{Im}\langle z, t\rangle)\, dt,$$

$$\sum_{p \in \mathbf{N}^n} |f_p(z)|^2 = \frac{1}{(4\pi)^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{\exp(4\pi \operatorname{Im} z_j) - 1}{\operatorname{Im} z_j}.$$

Lorsqu'on utilise la proposition 3, il en résulte que l'idéal engendré par les f_p est séquentiellement dense dans l'algèbre A_ψ, avec

$$\psi = |\operatorname{Im} z| + \operatorname{Log}(1 + |z|).$$

Remarquons qu'il y a toujours des zéros communs à des fonctions f_p en nombre fini.

On examine maintenant le cas où les fonctions $g_1, g_2, \ldots, g_p \in A_\Phi$ ont des zéros communs. On désigne par X l'ensemble des zéros communs aux g_i. On appelle $\mathcal{J}_1$ l'idéal de A_Φ engendré par $g_1, g_2, \ldots, g_p$. Si f appartient à la racine de $\mathcal{J}_1$, il existe un entier k et des $h_i \in A_\Phi$ tels que

$$f^k = \sum_{i=1}^{p} g_i h_i. \tag{3.14}$$

Il en résulte :

$$|f|^k \leqq |g| . |h| \leqq A\, |g| \exp(\varphi), \qquad \text{avec} \quad \varphi \in \Phi. \tag{3.15}$$

Inversement, supposons qu'il existe $k \in \mathbf{N}$, $A > 0$, $\varphi \in \Phi$ tels que

$$|f|^k \leqq A\, |g| \exp(\varphi); \tag{3.16}$$

alors, appliquons le théorème 1 à la fonction $f^{k(q+2)}$, en choisissant α de sorte que $1 < \alpha \leqq 1 + \frac{1}{q}$ et en choisissant convenablement $\psi \in \Phi$; on voit que $f^{k(q+2)} \in \mathcal{J}_1$.

On a donc le résultat suivant dû à Cnop [2], Kelleher et Taylor [7] :

Corollaire 4 (« Nullstellensatz global »). — *Pour qu'une fonction f de l'algèbre A_Φ appartienne à la racine de l'idéal engendré par $g_1, g_2, \dots, g_p$, il faut et il suffit qu'il existe $k \in \mathbf{N}$, $A > 0$, $\varphi \in \Phi$ tels que*

$$|f|^k \leq A |g| \exp(\varphi).$$

Remarque 3. — Si f s'annule sur X, l'application de la formule de Taylor montre que pour tout compact K de Ω, il existe une constante c telle que

$$|f(z)| \leq c_1 d(z, X) \qquad \text{pour} \quad z \in K$$

[$d(z, X)$ désignant la distance de z à X]. D'après l'inégalité de Lojasiewicz (*cf.* Malgrange [12]), il existe une constante c_2 et un entier k tels que

$$|g(z)| \geq c_2 d^k(z, X).$$

On a donc

$$|f(z)|^k \leq c_1^k c_2^{-1} |g(z)|.$$

D'après le corollaire 3, f est localement dans la racine de l'idéal engendré par les g_i. Le corollaire 3, joint à l'inégalité de Lojasiewicz entraîne donc le Nullstellensatz classique.

Soit $\mathcal{J}_2$ l'ensemble des fonctions $f \in A_\Phi$ telles qu'il existe $A > 0$ et $\varphi \in \Phi$:

$$|f(z)| \leq A |g(z)| \exp[\varphi(z)], \qquad \text{pour} \quad z \in \Omega.$$

$\mathcal{J}_2$ est manifestement un idéal de A_Φ, et d'après (3.14) et (3.15), on a

$$\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}_2.$$

En général $\mathcal{J}_1 \neq \mathcal{J}_2$ (pour un contre-exemple, *voir* Kelleher et Taylor [7]), mais, d'après le théorème 1, $f^{q+2} \in \mathcal{J}_1$. On a donc le résultat :

Corollaire 5. — *On a* $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}_2$ *et* $\mathcal{J}_2^{q+2} \subset \mathcal{J}_1$, *avec* $q = \operatorname{Inf}(n, p-1)$.

Kelleher et Taylor dans [7] ont démontré que $\mathcal{J}_2^k \subset \mathcal{J}_1$ avec $k = \operatorname{Inf}(2n+1, 2p-1)$, nous obtenons ici $k = \operatorname{Inf}(n+2, p+1)$. Il est facile de se persuader que la meilleure valeur possible pour k est $k = \operatorname{Inf}(n+1, p)$, ou encore que $\mathcal{J}_2^{q+1} \subset \mathcal{J}_1$ (en général). C'est la constante $\alpha > 1$ du théorème 1 qui nous limite à $\mathcal{J}_2^{q+2} \subset \mathcal{J}_1$, nous avons donc été amené à chercher un autre théorème d'existence qui fera l'objet du paragraphe 4 et qui correspond à $\alpha = 1$.

Remarque 4. — D'après le théorème 1, on a une condition suffisante pour que $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2$, il suffit qu'il existe $\alpha > 1$ et $\varphi \in \Phi$ tels que

$$\int_\Omega |g|^{-2\alpha q} e^{-\varphi} d\lambda < +\infty.$$

C'est une condition très forte, elle n'est jamais vérifiée lorsque $n = 1$ et $X \neq \emptyset$; elle est localement vérifiée si la matrice $\frac{\partial g_i}{\partial z_j}$ est de rang p, auquel cas X est une sous-variété de Ω.

Remarque 5. — Nous avons travaillé avec une algèbre A_Φ du type limite inductive. On pourrait également travailler avec une algèbre A_Φ du type limite projective. On suppose alors que pour toute $\varphi \in \Phi$, $\frac{1}{2}\varphi \in \Phi$, $\varphi \geqq 0$. On définit A_Φ comme l'ensemble des fonctions holomorphes f, telles que pour toute $\varphi \in \Phi$, il existe $c > 0$: $|f(z)| \leqq C \exp[\varphi(z)]$, pour $z \in \Omega$. On suppose que A_Φ contient les polynômes et que $f \in A_\Phi$ si et seulement si pour toute $\varphi \in \Phi$, on a

$$\int_\Omega |f|^2 e^{-\varphi} d\lambda < +\infty.$$

On a alors un énoncé analogue au corollaire 4, en remplaçant la condition sur f par la condition suivante : il existe un entier k et une fonction plurisousharmonique V tels que $|f|^k |g|^{-1} \leqq e^V$ et tels que pour toute $\varphi \in \Phi$, il existe C : $e^V \leqq C \exp(\varphi)$. Bien sûr, la fonction V dépend de k et de f. On a des énoncés analogues aux corollaires 3 et 5.

4. Le second théorème d'existence. — Suivant une idée de Kelleher et Taylor [7], on se propose de démontrer un théorème d'existence correspondant à $\alpha = 1$ dans la proposition 2. Ce théorème nous permettra d'en déduire $\mathcal{J}_2^{q+1} \subset \mathcal{J}_1$ moyennant des restrictions supplémentaires assez faibles sur A_Φ. Pour $\alpha = 1$, la proposition 2 nous fournit l'inégalité suivante :

$$(4.1) \qquad \| T_1^* v + T_2^* v \|_1^2 + \sum_{i=1}^{p} \| S v_i \|_{\varphi_1}^2 \geqq \int_\Omega \sum_{i,k,l,} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_k \partial \bar{z}_l} v_{ik} \bar{v}_{il} e^{-\varphi_1} d\lambda,$$

avec

$$u \in G_2, \quad v_i \in \operatorname{Dom} T^* \cap \operatorname{Dom} S;$$

avec

$$q = \operatorname{Inf}(n, p-1), \qquad \varphi_1 = \psi + q \operatorname{Log} |g|^2, \qquad \varphi_2 = \psi + (q+1) \operatorname{Log} |g|^2.$$

Comme Hörmander (*cf.* [5], théorème 4.4.2), remplaçons ψ par $\psi + 2 \operatorname{Log}(1 + |z|^2)$ et supposons ψ plurisousharmonique, il vient

$$(4.2) \qquad \| T_1^* u + T_2^* v \|_1^2 + \sum_{i=1}^{p} \| S v_i \|_{\varphi_1}^2 \geqq 2 \int_\Omega \sum_i \frac{|v_i|^2}{(1 + |z|^2)^2} e^{-\varphi_1} d\lambda,$$

avec

$$\varphi_1 = \psi + q \operatorname{Log} |g|^2 + 2 \operatorname{Log}(1 + |z|^2), \qquad \varphi_2 = \varphi_1 + \log |g|^2,$$

avec

$$u \in F_2, \quad v_i \in \operatorname{Dom} T^* \cap \operatorname{Dom} S.$$

On va en déduire un théorème d'existence pour un système de formes différentielles de bidegré (0, 1).

Soit $w = (w_1, w_2, \ldots, w_p)$ un système de p formes différentielles w_i de bidegré (0, 1) :

$$w_i = \sum_{k=1}^{n} w_{ik}\, d\bar{z}_k,$$

$$|w|^2 = \sum_{i=1}^{p} |w_i|^2 = \sum_{i,k} |w_{ik}|^2.$$

On suppose qu'on a

$$\int_\Omega |w|^2 (1 + |z|^2)^2 e^{-\varphi_1} d\lambda < +\infty$$

et

$$\bar\partial w_i = S\, w_i = 0 \qquad \text{(au sens des distributions).}$$

On a alors

$$(w, v)_{\varphi_1} = \sum_{i=1}^{p} (w_i, v_i)_{\varphi_1} = \sum_{i,k} \int_\Omega w_{ik}\, \bar v_{ik}\, e^{-\varphi_1},$$

$$(4.3) \qquad |(w, v)_{\varphi_1}|^2 \leq \left(\int_\Omega |w|^2 (1 + |z|^2)^2 e^{-\varphi_1} d\lambda\right)\left(\int_\Omega |v|^2 (1 + |z|^2)^{-2} e^{-\varphi_1} d\lambda\right).$$

D'après (4.2), il vient

$$(4.4) \qquad \begin{cases} |(w, v)_{\varphi_1}|^2 \leq \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\int_\Omega |w|^2 (1 + |z|^2)^2 e^{-\varphi_1} d\lambda\right)\left(\|T_1^* u + T_2^* v\|_1^2 + \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \|S v_i\|_{\varphi_1}^2\right), \\ \qquad \text{avec} \quad u \in G_2, \quad v_i \in \operatorname{Dom} T^* \cap \operatorname{Dom} S. \end{cases}$$

En particulier, lorsque $v_i \in \operatorname{Dom} T^* \cap \operatorname{Ker} S$, on obtient

$$(4.5) \qquad |(w, v)_{\varphi_1}| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_\Omega |w|^2 (1 + |z|^2)^2 e^{-\varphi_1} d\lambda\right)^{1/2} \|T_1^* u + T_2^* v\|_1.$$

Si $v_i \in \operatorname{Dom} T^*$, on décompose v_i sous la forme $v_i = v_i' + v_i''$ avec $v_i' \in \operatorname{Ker} S$ et v_i'' orthogonal à Ker S, on a alors $T^* v_i'' = 0$ et $(w, v_i'')_{\varphi_1} = 0$; il en résulte que l'inégalité (4.5) est vraie pour toute $v_i \in \operatorname{Dom} T^*$.

L'application du théorème de Hahn-Banach, montre qu'il existe un système de p fonctions $h = (h_1, h_2, \ldots, h_p) \in [L^2(\Omega, \varphi_1)]^p$ tel que

$$(4.6) \qquad (w, v)_{\varphi_1} = (h, T_1^* u + T_2^* v)_1, \qquad \text{avec} \quad u \in G_2 \quad \text{et} \quad v \in \operatorname{Dom} T_2^*;$$

$$(4.7) \qquad \int_\Omega |h|^2 e^{-\varphi_1} d\lambda \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |w|^2 (1 + |z|^2)^2 e^{-\varphi_1} d\lambda.$$

(4.6) est équivalente aux conditions :

$$T_2\, h = w;$$

$$(T_1\, h, u)_2 = 0, \qquad \text{avec} \quad u \in G_2.$$

Soit encore

$$\bar\partial h_i = w_i$$

et

$$\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{p} g_i\, h_i\right) \bar u\, e^{-\varphi_2}\, d\lambda = 0 \quad \text{pour tout } u \text{ holomorphe } \in L^2(\Omega, \varphi_2).$$

On a donc la proposition suivante pour laquelle on fait les mêmes hypothèses de régularité que pour la proposition 2.

PROPOSITION 4. — *Soit* $w = (w_1, w_2, \ldots, w_p)$ *un système de* p *formes différentielles de bidegré* (0, 1) *telles que*

$$\bar\partial w_i = 0 \qquad \textit{et} \qquad \int_\Omega |w|^2\, |g|^{-2q}\, e^{-\psi}\, d\lambda < +\infty, \qquad q = \operatorname{Inf}(n, p-1).$$

Il existe p *fonctions* h_i *telles que*

(*a*) $$\bar\partial h_i = w_i;$$

(*b*) $$\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{p} g_i\, h_i\right) \bar u\, e^{-\varphi_2}\, d\lambda = 0 \quad \textit{pour toute fonction holomorphe } u \in L^2(\Omega, \varphi_2),$$

avec

$$\varphi_2 = \psi + (q+1)\operatorname{Log}|g|^2 + 2\operatorname{Log}(1 + |z|^2);$$

(*c*) $$\int_\Omega |h|^2\, |g|^{-2q}\, (1 + |z|^2)^{-2}\, e^{-\psi}\, d\lambda \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |w|^2\, |g|^{-2q}\, e^{-\psi}\, d\lambda.$$

Soit f une fonction holomorphe; cherchons des fonctions holomorphes h_i telles que

$$f = \sum_{i=1}^{p} g_i\, h_i.$$

On a

$$f = \sum_{i=1}^{p} g_i\, h'_i, \qquad \text{avec} \quad h'_i = f\frac{g_i}{|g|^2}. \tag{4.7}$$

Posons

$$w_i = \bar\partial h'_i.$$

Un calcul immédiat donne

$$w_i = f\,|g|^{-4} \sum_{j,k} g_j \overline{\left(g_j \frac{\partial g_i}{\partial z_k} - g_i \frac{\partial g_j}{\partial z_k}\right)}\, d\bar z_k. \tag{4.8}$$

On cherche à appliquer la proposition 4 aux w_i, on a

$$(4.9)\qquad \int_\Omega |w|^2 |g|^{-2q} e^{-\psi} d\lambda \leqq \int_\Omega |f|^2 |g|^{-2q-2} \sum_{i,j,k} |g|^{-4} \left| g_j \frac{\partial g_i}{\partial z_k} - g_i \frac{\partial g_j}{\partial z_k} \right|^2 e^{-\psi} d\lambda$$

(on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

Un calcul facile montre que

$$(4.10)\qquad \frac{1}{4} \Delta (\mathrm{Log} |g|^2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar z_k} (\mathrm{Log} |g|^2) = \frac{1}{2} |g|^{-4} \sum_{i,j,k} \left| g_j \frac{\partial g_i}{\partial z_k} - g_i \frac{\partial g_j}{\partial z_k} \right|^2.$$

De (4.9) et (4.10), on déduit :

$$(4.11)\qquad \int_\Omega |w|^2 |g|^{-2q} e^{-\psi} d\lambda \leqq \frac{1}{2} \int_\Omega |f|^2 |g|^{-2q-2} \Delta (\mathrm{Log} |g|^2) e^{-\psi} d\lambda.$$

D'après la proposition 4, il existe des fonctions h_i'' telles que

$$(4.12)\qquad \bar\partial h_i'' = w_i,$$

$$(4.13)\qquad \int_\Omega \left(\sum_i g_i h_i'' \right) \bar u \, e^{-\varphi_2} d\lambda = 0, \qquad \text{avec} \quad u \in G^2,$$

$$(4.14)\qquad \int_\Omega |h''|^2 |g|^{-2q} (1 + |z|^2)^{-2} e^{-\psi} d\lambda \leqq \int_\Omega |w|^2 |g|^{-2q} e^{-\psi} d\lambda.$$

Posons

$$h = h' - h'', \qquad h_i = h_i' - h_i''.$$

D'après (4.12), on a

$$\bar\partial h_i = \bar\partial h_i' - \bar\partial h_i'' = w_i - \bar\partial h_i'' = 0.$$

Les fonctions h_i sont holomorphes.

(4.13) s'écrit encore

$$(\mathrm{T}_1 h'', u)_2 = 0, \qquad \text{avec} \quad u \in G_2.$$

Utilisant (4.7) et (4.13), on a

$$(\mathrm{T}_1 h, u)_2 = (\mathrm{T}_1 h' - \mathrm{T}_1 h'', u)_2 = (\mathrm{T}_1 h', u)_2 = (f, u)_2.$$

Soit

$$(\mathrm{T}_1 h - f, u)_2 = 0 \quad \text{pour tout } u \in G_2.$$

Comme h et f sont holomorphes, $\mathrm{T}_1 h - f$ est holomorphe et on peut prendre $u = \mathrm{T}_1 h - f$, il en résulte :

$$\mathrm{T}_1 h = \sum_{i=1}^{p} g_i h_i = f.$$

Il ne reste plus qu'à estimer h; utilisant (4.7), (4.14) et (4.11), il vient

$$\int_\Omega |h' - h''|^2 |g|^{-2q} (1+|z|^2)^{-2} e^{-\psi} d\lambda \leq 2\int_\Omega |f|^2 |g|^{-2q-2} (1+|z|^2)^{-2} e^{-\psi} d\lambda$$
$$+ \frac{1}{2}\int_\Omega |f|^2 |g|^{-2q-2} \Delta(\operatorname{Log}|g|^2) e^{-\psi} d\lambda.$$

Soit encore

$$(4.15)\quad \int_\Omega |h|^2 |g|^{-2q} (1+|z|^2)^{-2} e^{-\psi} d\lambda \leq 2\int_\Omega |f|^2 |g|^{-2q-2} (1+\Delta \operatorname{Log}|g|) e^{-\psi} d\lambda.$$

On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit Ω un ouvert pseudoconvexe de $\mathbf{C}^n$, ψ une fonction plurisousharmonique dans Ω. Soit $g_1, g_2, \ldots, g_p$ [resp. $(g_i)_{i\in\mathbf{N}}$) un système de p fonctions holomorphes dans Ω (resp. une suite de fonctions holomorphes). On pose $q = \operatorname{Inf}(n, p-1)$ (resp. $q = n$). Soit X l'ensemble des zéros communs aux fonctions g_i. Pour toute fonction f holomorphe dans Ω, telle que*

$$\int_{\Omega\setminus X} |f|^2 |g|^{-2q-2} (1+\Delta \operatorname{Log}|g|) e^{-\psi} d\lambda < +\infty,$$

il existe p fonctions h_i holomorphes dans Ω [resp. une suite $(h_i)_{i\in\mathbf{N}}$] telles que

$$f = \sum_{i=1}^{p} g_i h_i \qquad \left(\text{resp. } f = \sum_{i=1}^{\infty} g_i h_i\right)$$

et

$$\int_\Omega |h|^2 |g|^{-2q} (1+|z|^2)^{-2} e^{-\psi} d\lambda \leq 2\int_{\Omega\setminus X} |f|^2 |g|^{-2q-2} (1+\Delta \operatorname{Log}|g|) e^{-\psi} d\lambda.$$

En fait, le théorème 2 n'est démontré qu'avec les hypothèses de régularité très fortes de la proposition 2 (Ω régulier borné, ψ de classe C^2, $|g| > 0$, etc.), mais il est facile, en procédant comme pour le théorème 1, de supprimer toutes ces restrictions.

Remarque 6. — En utilisant, au lieu de $2 \operatorname{Log}(1+|z|^2)$, la fonction

$$(1+\alpha)\operatorname{Log}(1+|z|^2) - \operatorname{Log}[2+\operatorname{Log}(1+|z|^2)] \qquad (\alpha > 0),$$

on peut substituer le poids $(1+|z|^2)^{-1-\alpha}$ au poids $(1+|z|^2)^{-2}$ et une constante $C(\alpha)$ ne dépendant que de α, à la constante 2.

Remarque 7. — Si la fonction ψ est strictement plurisousharmonique, de classe C^2, et si c désigne une fonction continue sur Ω, strictement positive, telle que

$$\sum_{i,k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \lambda_j \bar{\lambda}_k \geq c|\lambda|^2 \quad \text{pour tout } \lambda_j \in \mathbf{C},$$

on peut remplacer l'estimation du théorème par la suivante :

$$\int_\Omega |h|^2 |g|^{-2q} e^{-\psi} d\lambda \leq 2 \int_\Omega |f|^2 |g|^{-2q-2} \left(1 + \frac{1}{c} \Delta \operatorname{Log} |g|\right) e^{-\psi} d\lambda.$$

Il suffit de raisonner comme Hörmander ([5], théorème 4.4.1) et de faire les modifications qui s'imposent dans la proposition 4.

L'énoncé suivant résulte trivialement du théorème 2.

Corollaire 6. — *Soit* φ *et* $\psi \geq 0$ *des fonctions plurisousharmoniques sur* Ω *telles que*

$$|f| \leq C |g|^{q+1} e^{\varphi} \qquad et \qquad \int_{\Omega \setminus X} \Delta (\operatorname{Log} |g|) e^{-\psi} d\lambda < +\infty,$$

il existe des h_i *tels que*

$$f = \sum_i g_i h_i \qquad et \qquad \int_\Omega |h|^2 |g|^{-2q} e^{-2\varphi-\psi} (1 + |z|^2)^{-n-3} d\lambda < +\infty.$$

Reprenons les notations du corollaire 5. Le corollaire 6 entraîne aussitôt le résultat suivant :

Corollaire 7. — *S'il existe* $\varphi \in \Phi$ *telle que*

$$\int_{\Omega \setminus X} \Delta (\operatorname{Log} |g|) e^{-\varphi} d\lambda < +\infty,$$

on a

$$\mathcal{J}_2^{q+1} \subset \mathcal{J}_1.$$

Lorsque $n = 1$, on obtient le résultat de Kelleher et Taylor [7], $\mathcal{J}_2^2 \subset \mathcal{J}_1$. Ce sont Kelleher et Taylor qui eurent l'idée d'introduire une condition portant sur le laplacien de $\operatorname{Log} |g|$ (*cf.* [7], congenial ring).

Comme on va le voir tout de suite, cette condition est peu restrictive. Comme $\operatorname{Log} |g|$ est sousharmonique, il s'agit en fait d'estimer les « masses » d'une fonction sousharmonique, ce qui relève de méthodes classiques en théorie de potentiel, et dans l'étude quantitative des zéros d'une fonction holomorphe.

Désignons par V la fonction sousharmonique $\operatorname{Log}|g|$ par $\lambda(V, 0, r)$ la moyenne de V sur la sphère de rayon r, par σ la mesure positive $\Delta \operatorname{Log} |g|$. Posons

$$\sigma(r) = \int_{|z|<r} d\sigma(z) \qquad \text{et} \qquad \nu(r) = \frac{\sigma(r)}{r^{2n-2}},$$

enfin

$$M(r) = \operatorname*{Sup}_{|z|=r} |g(z)|.$$

Le théorème de Gauss (*cf.* Lelong [9], p. 382, ou [10], proposition 7.4.2) donne la relation

$$(4.16)\qquad \int_{r_0}^{r} \frac{\nu(t)}{t}\,dt = c_n\,\lambda(\mathrm{V}, 0, r) - c_n\,\lambda(\mathrm{V}, 0, r_0), \qquad r > r_0 > 0,$$

où c_n est une constante ne dépendant que de n.

Comme V est plurisousharmonique $\nu(t)$ est une fonction croissante de t (*cf.* Lelong [10]), on a donc

$$(4.17)\qquad \nu(r) \leq \int_{r}^{er} \frac{\nu(t)}{t}\,dt \leq \int_{r_0}^{er} \frac{\nu(t)}{t}\,dt = c_n\,\lambda(\mathrm{V}, 0, er) - c_n\,\lambda(\mathrm{V}, 0, r_0),$$

$$(4.18)\qquad \nu(r) = \frac{\sigma(r)}{r^{2n-2}} \leq c_n \operatorname{Log} \mathrm{M}(er) - c_n\,\lambda(\mathrm{V}, 0, r_0) \qquad \text{pour} \quad r > r_0 > 0.$$

Supposons les fonctions g_i d'ordre au plus ρ, pour tout $\varepsilon > 0$; il existe donc d'après (4.18) une constante $\mathrm{C}(\varepsilon)$ telle que

$$(4.19)\qquad \frac{\sigma(r)}{r^{2n-2}} \leq \mathrm{C}(\varepsilon)\, r^{\rho+\varepsilon}, \qquad r > r_0.$$

Il en résulte que pour tout $\varepsilon > 0$, l'intégrale suivante converge :

$$(4.20)\qquad \int_{r_0}^{+\infty} r^{-2n+1-\rho-\varepsilon}\,\sigma(r)\,dr < +\infty.$$

Intégrons par parties, il vient

$$(4.21)\qquad \int_{r_0}^{+\infty} r^{-2n+2-\rho-\varepsilon}\,d\sigma(r) < +\infty.$$

Soit encore

$$(4.22)\qquad \int_{|z|>r_0} |z|^{-2n+2-\rho-\varepsilon}\,d\sigma(z) < +\infty.$$

On a donc l'énoncé suivant :

LEMME 3. — *Si* $|g|$ *est d'ordre au plus* ρ, *pour tout* $\varepsilon > 0$, *on a*

$$\int_{\mathbf{C}^n \setminus \mathrm{X}} \Delta(\operatorname{Log}|g(z)|)\,(1 + |z|)^{-2n+2-\rho-\varepsilon}\,d\lambda(z) < +\infty.$$

Comme l'algèbre A_Φ contient les polynômes, le lemme 3 entraîne le corollaire suivant :

COROLLAIRE 8. — *Si* $\Omega = \mathbf{C}^n$ *et si* $|g|$ *est d'ordre fini, on a*

$$\mathcal{I}_2^{q+1} \subset \mathcal{I}_1.$$

Autrement dit, la condition sur $\Delta \operatorname{Log} |g|$ est toujours vérifiée quand on travaille dans $\mathbf{C}^n$ avec des algèbres de fonctions entières d'ordre fini, du type A_Φ.

L'inégalité (4.18) permet de traiter éventuellement le cas d'algèbre A_Φ de fonctions entières d'ordre infini.

Envisageons maintenant le cas d'un ouvert Ω borné, à frontière de classe C^2. Soit z_0 un point de Ω tel que $V(z_0) > -\infty$, soit $G(z, z_0)$ la fonction de Green de l'ouvert Ω pour le laplacien, avec pôle au point z_0. On désigne par $d(z)$ la distance au bord. Comme Ω est régulier, il existe des constantes η, C_1, $C_2 > 0$ telles que pour $d(z) < \eta$, on ait

$$C_1\, d(z) \geqq G(z_0, z) \geqq C_2\, d(z). \tag{4.23}$$

Nous dirons que la fonction $|g|$ est d'ordre inférieur ou égal à ρ, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C(\varepsilon)$ telle que

$$V(z) = \operatorname{Log} |g(z)| \leqq C(\varepsilon)\, d(z)^{-\rho-\varepsilon}. \tag{4.24}$$

Pour $0 < t < \eta$, appliquons la formule de Green à la fonction sousharmonique V dans l'ouvert $\Omega_t = \{z \mid G(z, z_0) \geqq t\}$, on obtient

$$\int_{\Omega_t} [G(z, z_0) - t]\, d\sigma(z) + V(z_0) = \frac{1}{s_n} \int_{\partial\Omega_t} \frac{\partial}{\partial_n} G(z, z_0)\, V(z)\, dz,$$

s_n désignant l'aire de la sphère unité, $\dfrac{\partial}{\partial n}$ la dérivée normale. Comme la dérivée normale est $\geqq 0$ et qu'on a $\dfrac{1}{s_n} \displaystyle\int_{\partial\Omega_t} \frac{\partial}{\partial n} G(z, z_0)\, dz = 1$. On en déduit :

$$\int_{\Omega_t} [G(z, z_0) - t]\, d\sigma(z) \leqq -V(z_0) + \sup_{z \in \partial\Omega_t} V(z). \tag{4.25}$$

Tenant compte de (4.23) et (4.24), il existe une constante $C(\varepsilon, z_0)$ telle que

$$\int_{\Omega_t} [G(z, z_0) - t]\, d\sigma(z) \leqq C(\varepsilon, z_0)\, t^{-\rho-\varepsilon}. \tag{4.26}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc

$$\int_0^{\eta} \left[\int_{\Omega_t} [G(z, z_0) - t]\, d\sigma(z) \right] t^{\rho-1+\varepsilon}\, dt < +\infty. \tag{4.27}$$

On minore (4.27) en sommant seulement sur $\Omega_t - \Omega_\eta$, il vient

$$\iint_{0 < t < G(z, z_0) < \eta} [G(z, z_0) - t]\, t^{\rho-1+\varepsilon}\, d\sigma(z)\, dt < +\infty.$$

Intégrant en t, on obtient

$$\int_{G(z, z_0) < \eta} [G(z, z_0)]^{\rho+1+\varepsilon} \, d\sigma(z) < +\infty.$$

Soit encore d'après (4.23) :

$$\int_\Omega d(z)^{\rho+1+\varepsilon} \, d\sigma(z) < +\infty. \tag{4.28}$$

On a donc le résultat suivant :

Lemme 4. — *Si Ω est borné, à frontière de classe C^2, si $|g|$ est d'ordre $\leq \rho$, pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$\int_{\Omega \setminus X} \Delta(\operatorname{Log}|g(z)|) \, d(z)^{\rho+1+\varepsilon} \, d\lambda(z) < +\infty.$$

Il en résulte que le corollaire 7 s'applique par exemple à l'algèbre A_ψ avec $\psi = -\operatorname{Log} d(z)$, et à un ouvert Ω régulier et borné, tel que la boule euclidienne de $\mathbf{C}^n$.

Le résultat $\mathcal{I}_1^{q+1} \subset \mathcal{I}_1$ ne peut être amélioré comme le montrent les contre-exemples qui suivent.

Prenons pour g_i les fonctions $g_i(z) = z_i^p$ ($i = 1, 2, \ldots, p$; $p \leq n$) et $f(z) = z_1 z_2 \ldots z_p$. On a

$$|f(z)| = |z_1 z_2 \ldots z_p| \leq \operatorname{Sup}_i |z_i|^p \leq |z_1|^p + |z_2|^p + \ldots + |z_p|^p,$$

f appartient donc à l'idéal $\mathcal{I}_2$. Si f^{p-1} appartenait à $\mathcal{I}_1$, il existerait des fonctions h_i telles que

$$(z_1 z_2 \ldots z_p)^{p-1} = \sum_{i=1}^{p} h_i(z) z_i^p,$$

or cette égalité est déjà impossible dans l'anneau des séries formelles.

Pour $p = n + 1$, on combine le contre-exemple précédent et celui de Kelleher et Taylor [7] relatif à $n = 1$. On considère deux fonctions f_1, f_2 entières de type exponentiel, ne dépendant que de z_1, sans zéros communs et qui n'engendrent pas l'anneau des fonctions entières de type exponentiel. On se place dans l'algèbre des fonctions entières de type exponentiel. On choisit

$$g_1 = f_1^{n+1}, \qquad g_2 = f_2^{n+1},$$
$$g_i(z) = z_{i-1}^{n+1} \qquad (i = 3, \ldots, n+1).$$

On prend pour f la fonction $f_1(z_1) f_2(z_1) z_2 \ldots z_n$, f appartient à $\mathcal{I}_2$. Supposons qu'il existe des h_i de type exponentiel telles que

$$(f_1 f_2 z_2 \ldots z_n)^n = h_1 f_1^{n+1} + h_2 f_2^{n+1} + h_3 z_2^{n+1} + \ldots + h_{n+1} z_n^{n+1}. \tag{4.29}$$

Multiplions (4.29) par la forme différentielle

$$\omega(z) = (z_2 \ldots z_n)^{-n-1} dz_2 \wedge \ldots \wedge dz_n$$

et intégrons sur le produit des cercles γ défini par $|z_i| = 1$ $(i = 2, \ldots, n)$. On obtient

$$(f_1 f_2)^n = h'_1 f_1^{n+1} + h'_2 f_2^{n+1}, \tag{4.30}$$

avec

$$h'_j(z_1) = (2\pi\sqrt{-1})^{-n+1} \int_\gamma h_j(z_1, z_2, \ldots, z_n)\, \omega(z) \qquad (j = 1, 2).$$

h'_1 et h'_2 sont de type exponentiel. Comme f_1 et f_2 n'ont pas de zéros communs, il résulte de (4.30) que f_1^n divise h'_2 et f_2^n divise h'_1, on a donc

$$h'_2 = f_1^n h''_2 \qquad \text{et} \qquad h'_1 = f_2^n h''_1,$$

h''_1 et h''_2 étant encore de type exponentiel. On a

$$1 = h'''_1 f_1 + h''_2 f_2. \tag{4.31}$$

Ce qui est contraire à l'hypothèse que f_1 et f_2 n'engendrent pas l'anneau des fonctions entières de type exponentiel.

5. Application aux équations de convolutions. — Soient $T_j \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ des distributions à support compact dans $\mathbf{R}^n$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$. On cherche une condition nécessaire et suffisante pour que les T_j engendrent l'anneau de convolution $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$, autrement dit pour que, quel que soit $Y \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$, il existe des $X_j \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ tels que

$$\sum_{j=1}^{p} T_j \star X_j = Y. \tag{5.1}$$

Utilisant la transformation de Fourier-Laplace, (5.1) est équivalente à

$$\sum_{j=1}^{p} \hat{T}_j \hat{X}_j = \hat{Y}. \tag{5.2}$$

D'après le théorème de Paley-Wiener, l'algèbre $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ est transformée en l'algèbre A_ψ avec

$$\psi = \operatorname{Log}(1 + |z|) + |\operatorname{Im} z|.$$

Les T_j engendrent $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ si et seulement si les $\hat{T}_j$ engendrent A_ψ. D'après le corollaire 3, la condition cherchée est donc l'existence de constantes C, N et A telles que

$$\sum_{j=1}^{p} |\hat{S}_j| \geq C(1 + |z|)^{-N} \exp(-A|\operatorname{Im} z|). \tag{5.3}$$

Supposons la condition (5.3) réalisée. On va montrer que le corollaire 1 permet de préciser le support et la régularité des distributions X_j solutions de (5.1).

On a besoin d'une variante du théorème de Paley-Wiener, qui montre que la transformée de Fourier-Laplace d'une distribution à support compact, et dans $H^{-s}(\mathbf{R}^n)$, est dans un espace $L^2(\Omega, \varphi)$ bien précis. Le résultat suivant est bien connu :

LEMME 5. — *Une fonction entière f est la transformée de Fourier-Laplace d'une distribution dans $H^{-s}(\mathbf{R}^n)$, $s \geqq 0$ et à support dans la boule de rayon A, si et seulement si pour tout $A' > A$ on a*

$$\int_{\mathbf{C}^n} |f(z)|^2 \exp(-2A' |\operatorname{Im} z|)(1+|z|^2)^{-s} d\lambda(z) < +\infty. \tag{5.4}$$

Le lemme 5 est, en fait valable pour $s < 0$, mais seul le cas $s \geqq 0$ est intéressant en vue de l'application du théorème 1, car il nous faut des fonctions poids plurisousharmoniques.

THÉORÈME 3. — *Soit $T_j \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ des distributions à support compact telles qu'il existe des constantes C_1, C_2, A_1, A_2, s_1, $s_2 \geqq 0$ telles que*

$$C_1 \exp(A_1 |\operatorname{Im} z|)(1+|z|)^{s_1} \geqq \sum_{j=1}^{p} |\hat{T}_j(z)| \geqq C_2 \exp(-A_2 |\operatorname{Im} z|)(1+|z|)^{-s_2}.$$

Pour toute distribution $Y \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ à support dans la boule de rayon A et dans $H^{-s}(\mathbf{R}^n)$, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\alpha > 1$, il existe des distributions $X_j \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ telles que

$$\sum_{j=1}^{p} T_j \star X_j = Y \qquad et \qquad X_j \in H^{-s'}(\mathbf{R}^n), \qquad s' = s + s_2 + \alpha q (s_1 + s_2);$$

le support des X_j est contenu dans la boule de rayon A' avec

$$A' = A + A_2 + \alpha q (A_1 + A_2) + \varepsilon, \qquad avec \quad q = \operatorname{Inf}(n, p-1).$$

En particulier, si $s_1 = s_2 = 0$, on peut trouver des $X_j \in H^{-s}$.

D'après la proposition 5, on a

$$\int_{\mathbf{C}^n} |\hat{Y}(z)|^2 \exp[-2(A+\varepsilon)|\operatorname{Im} z|](1+|z|^2)^{-s} d\lambda(z) < +\infty.$$

On applique le théorème 1, avec $g_j = \hat{T}_j$, $f = \hat{Y}$,

$$\psi = 2[(\alpha q + 1)A_2 + A + \varepsilon] |\operatorname{Im} z| + [(\alpha q + 1)s_2 + s] \operatorname{Log}(1+|z|^2).$$

On obtient des h_j tels que

$$\sum_{j=1}^{p} g_j h_j = f \qquad \text{et} \qquad \int_\Omega | h_j |^2 | g |^{-2\alpha q} e^{-\psi} d\lambda < +\infty.$$

Soit encore

$$\int_\Omega | h_j |^2 e^{-\psi'} d\lambda < +\infty, \tag{5.5}$$

avec

$$\psi' = 2 [(\alpha q + 1) A_2 + A + \varepsilon + \alpha q A_1] | \operatorname{Im} z | + [(\alpha q + 1) s_2 + s + \alpha q s_1] \operatorname{Log} (1 + | z |^2).$$

Appliquant à nouveau la proposition 5, il existe des $X_j \in \mathcal{E}' (\mathbf{R}^n)$ tels que

$$h_j = \hat{X}_j.$$

Les propriétés des X_j résultent alors de (5.5).

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Carleson, *The Corona Theorem* (*Proceedings of the* 15*th Scandinavian Congress*, Oslo, 1968); *Lectures Notes in Mathematics*, 118, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1970, p. 121-132.

[2] I. Cnop, *A theorem concerning holomorphic functions with bounded growth* (*Thesis*), Department voor Wiskunde, Vrije Universiteit Brussel, Faculteit der Wetenschoppen 1050, Brussel.

[3] Dunford-Schwartz, *Linear Operators*, Part II, Interscience Publisher, New York.

[4] L. Hörmander, L^2 *estimates and existence theorems for the* $\bar{\partial}$ *operator* (*Acta Math.*, vol. 113, 1965, p. 89-152).

[5] L. Hörmander, *An Introduction to complex analysis in several variables*, Van Nostrand Company, New York, 1966.

[6] L. Hörmander, *Generators for some rings of analytic functions* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 73, 1967, p. 943).

[7] J. J. Kelleher and B. A. Taylor, *Finitely generated ideals in rings of analytic functions* (*Math. Ann.*, vol. 193, 1971, p. 225-237).

[8] J. J. Kelleher and B. A. Taylor, *Closed Ideals in locally convex algebras of analytic functions* (to appear in *J. für die Reine and Angew. Math.*).

[9] P. Lelong, *Fonctions entières* (*n variables*) *et fonctions plurisousharmoniques d'ordre fini dans* $\mathbf{C}^n$ (*J. Anal. Math. Jérusalem*, vol. 12, 1964, p. 365-407).

[10] P. Lelong, *Fonctionnelles analytiques et fonctions entières* (*n variables*), Les Presses de l'Université de Montréal, 1968.

[11] P. Lelong, *Fonctions plurisousharmoniques et Formes différentielles positives*, Gordon Breach, Paris-Londres-New York, 1968.

[12] B. MALGRANGE, Séminaire Schwartz, 4e année 1959-1960 : *Unicité du Problème de Cauchy, Division des distributions*, exposé 22.

[13] A. MARTINEAU, *Fonctions holomorphes et distributions* (*Séminaire d'Analyse fonctionnelle*, 1966-1967, nº 19, Université de Montpellier, Faculté des Sciences, Secrétariat de Mathématiques).

[14] J. P. ROSAY, *Une équivalence au « Corona Problem » dans* $\mathbf{C}^n$ *et un problème d'idéal dans* $H^\infty(D)$ (*J. Funct. Anal.*, vol. 7, nº 1, février 1971, p. 71-84).

[15] H. SKODA, *Système fini ou infini de générateurs dans un espace de fonctions holomorphes avec poids* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 273, série A, 1971, p. 389-392).

Henri SKODA,
Département de Mathématiques,
Parc Valrose,
06100-Nice.

(Manuscrit reçu le 18 avril 1972.)