

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

CH. PISOT

Familles compactes de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 81, n° 2 (1964), p. 165-188

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1964_3_81_2_165_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FAMILLES COMPACTES DE FRACTIONS RATIONNELLES ET ENSEMBLES FERMÉS DE NOMBRES ALGÈBRIQUES

PAR M. CH. PISOT.



INTRODUCTION.

Soit S l'ensemble des entiers algébriques réels θ , vérifiant $\theta > 1$, dont tous les conjugués autres que θ sont dans le cercle $|z| < 1$. Ces nombres algébriques jouissent de propriétés remarquables.

Ils sont étroitement liés aux approximations rationnelles des nombres algébriques. Ils sont caractérisés par le fait qu'il existe des nombres λ tels que, si l'on pose $\lambda \theta^n = u_n + \varepsilon_n$, où u_n est entier rationnel, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^2$ est convergente. Cette dernière propriété montre une relation avec la répartition modulo 1 encore si mal connue des fonctions exponentielles [10].

Les nombres de S sont aussi liés à certains ensembles d'unicité dans la théorie des séries trigonométriques. Soit un ensemble du type de Cantor, mais obtenu en partageant les intervalles dans les rapports ξ , $1-2\xi$, ξ , avec $0 < \xi < \frac{1}{2}$ et en enlevant l'intervalle médian (l'ensemble de Cantor est obtenu pour $\xi = \frac{1}{3}$). Une condition nécessaire et suffisante pour que cet ensemble soit un ensemble d'unicité est que $\frac{1}{\xi} \in S$ [14], [16].

Enfin R. Salem a démontré la propriété remarquable suivante de l'ensemble S , à savoir que :

S est un ensemble fermé [15].

C'est ce dernier théorème que nous allons prendre comme point de départ de ce travail et montrer, en utilisant à la fois l'analyse dans le domaine des nombres complexes \mathbf{C} et dans celui des extensions p -adiques du corps des rationnels \mathbf{Q} , qu'il existe d'autres ensembles fermés de nombres algébriques analogues à S . Ces résultats ont été annoncés dans une Note aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* [11].

Pour les théorèmes d'analyse p -adique utilisés nous renvoyons, en général, à un article de B. Dwork [4] où sont exposés un certain nombre de résultats obtenus par divers auteurs.

La fermeture de l'ensemble S peut s'obtenir à partir du théorème suivant :

Soit $Q(z)$ le polynôme à coefficients entiers rationnels, irréductible, ayant $\frac{1}{0}$ pour zéro et tel que $Q(0) = 1$. Soit $A(z)$ un autre polynôme à coefficients entiers rationnels vérifiant

$$|A(z)| \leq |Q(z)| \quad \text{sur } |z| = 1 \quad \text{et} \quad A\left(\frac{1}{0}\right) \neq 0.$$

Alors la famille des fractions rationnelles $f(z) = \frac{A(z)}{Q(z)}$ pour lesquelles θ est borné supérieurement est un ensemble compact pour la convergence uniforme dans un certain compact situé dans $|z| < 1$ [5].

C'est ce dernier théorème que nous nous proposons de généraliser dans le chapitre I.

CHAPITRE I.

1. Le résultat de base de cette étude est le suivant :

LEMME 1 (Kronecker [9]). — La condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ représente le développement de Taylor d'une fraction rationnelle, c'est que les déterminants

$$d_n = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n & u_{n+1} & \dots & u_{2n} \end{vmatrix}$$

soient tous nuls pour n assez grand.

Nous ne démontrons pas ici ce résultat classique.

Nous allons maintenant établir une majoration de $|d_n|$.

LEMME 2. — Soit $\varphi(z)$ une fonction méromorphe dans $|z| < 1$, ayant dans $|z| < 1$ au plus k pôles ($k \geq 0$), mais $z = 0$ n'étant pas un pôle, et supposons que $|\varphi(z)|$ soit bornée supérieurement au voisinage de $|z| = 1$. La fonction $\varphi(z)$ possède alors un développement de Taylor autour de $z = 0$, soit $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$, et l'on a la majoration suivante :

Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C(\varepsilon)$, indépendante de n , telle que

$$|d_n| \leq C(\varepsilon) \varepsilon^n.$$

Démonstration. — Soit $g(z) = 1 + \gamma_1 z + \dots + \gamma_k z^k$ le polynôme qui a pour zéros les pôles de $\varphi(z)$, alors

$$\varphi(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n z^n, \quad u'_n = u_n + \gamma_1 u_{n-1} + \dots + \gamma_k u_{n-k}$$

de même que

$$\varphi(z)g^2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u''_n z^n, \quad u''_n = u'_n + \gamma_1 u'_{n-1} + \dots + \gamma_k u'_{n-k}$$

sont holomorphes et bornés dans $|z| < 1$.

Par suite, les séries $\sum_{n=0}^{\infty} |u'_n|^2$ et $\sum_{n=0}^{\infty} |u''_n|^2$ sont convergentes. Or, on a

$$d_n = \begin{vmatrix} u_0 & \dots & u_{k-1} & u'_k & \dots & u'_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n & \dots & u_{n+k-1} & u'_{n+k} & \dots & u''_{2n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_0 & \dots & u_{k-1} & u'_k & \dots & u'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{k-1} & \dots & u_{2k-2} & u'_{2k-1} & \dots & u'_{n+k-1} \\ u'_k & \dots & u'_{2k-1} & u''_{2k} & \dots & u''_{n+k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u'_n & \dots & u'_{n+k-1} & u''_{n+k} & \dots & u''_{2n} \end{vmatrix}.$$

La majoration de Hadamard [7] d'un déterminant donne

$$|d_n| \leq \prod_{i=0}^n |s_i|,$$

où l'on a posé

$$s_j^2 = |u_j|^2 + \dots + |u_{j+k-1}|^2 + |u'_{j+k}|^2 + |u'_{j+k+1}|^2 + \dots \quad \text{si } j = 0, \dots, k-1$$

et

$$s_j^2 = |u'_j|^2 + \dots + |u'_{j+k-1}|^2 + |u''_{j+k}|^2 + |u''_{j+k+1}|^2 + \dots \quad \text{si } j \geq k.$$

La convergence des séries de terme général $|u'_n|^2$ et $|u''_n|^2$ montre que $\lim_{j \rightarrow \infty} s_j = 0$. Étant donné $\varepsilon > 0$, on peut donc trouver $h = h(\varepsilon)$ tel que $|s_j| \leq \varepsilon$ pour tout $j > h$. En posant

$$G(\varepsilon) = \varepsilon^{-h} \prod_{j=0}^h |s_j|,$$

on obtient

$$|d_n| \leq G(\varepsilon) \varepsilon^n,$$

et le lemme 2 est démontré.

LEMME 3. — Supposons que $\varphi(z)$ est une fraction rationnelle $\frac{A(z)}{Q(z)}$, où A et Q sont des polynômes à coefficients entiers rationnels. Nous poserons $Q(0) = q \neq 0$.

Les nombres $q^{n+1} u_n$ sont alors des entiers rationnels pour tout n .

En effet, $q \varphi(qz) = q \frac{A(qz)}{Q(qz)}$ est une fraction rationnelle à coefficients entiers, telle que le terme constant du dénominateur soit égal à 1 (après simplification par q); le développement de Taylor a donc tous ses coefficients entiers rationnels.

RÉCIPROQUE. — Supposons que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ soit le développement de Taylor d'une fraction rationnelle $\frac{B(z)}{C(z)}$, où

$$B(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots, \quad C(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

et supposons qu'il existe un entier rationnel $q \neq 0$ tel que $q^{n+1} u_n$ soit entier rationnel pour tout n .

Dans ces conditions, le développement en série de Taylor de la fraction rationnelle $q \frac{B(qz)}{C(qz)}$ a tous ses coefficients entiers rationnels. D'après un théorème de Fatou [6], la fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes à coefficients entiers rationnels, le terme constant du dénominateur valant 1. Par suite :

Si l'on choisit $c_0 = q$, les nombres $q^j c_{j+1}$ et $q^j b_j$ pour $j \geq 0$ sont entiers rationnels.

Soit maintenant p un nombre premier, nous désignons par $|\cdot|_p$ la valeur absolue p -adique définie par $|p|_p = p^{-1}$ et $|p'|_p = 1$ si p' est un nombre premier distinct de p . Nous notons \mathbf{Q}_p la complétion du corps \mathbf{Q} des rationnels par la valeur absolue p -adique, $\mathbf{\Omega}_p$ la clôture algébrique de \mathbf{Q}_p . Nous distinguerons soigneusement les symboles $|\cdot|_p$ valeur

absolue ordinaire (module) dans le corps \mathbf{C} des nombres complexes et $|\cdot|_p$, valeur absolue p -adique dans $\mathbf{\Omega}_p$.

LEMME 4. — Soit $\frac{A(z)}{Q(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ une fraction rationnelle où A et Q sont à coefficients entiers rationnels et où $Q(0) = q \neq 0$. Pour tout nombre premier p , on a alors la majoration suivante :

$$|d_n|_p \leq |q|_p^{-(3n+1)}.$$

COROLLAIRE. — Comme d_n est un nombre rationnel dont le dénominateur est une puissance de q , en appliquant le lemme 4 à tous les nombres premiers p qui divisent q , on voit que :

Le nombre $q^{3n+1} d_n$ est un entier rationnel pour tout n .

Ce résultat n'a d'ailleurs de l'intérêt que pour les petites valeurs de n , car pour les valeurs assez grandes de n , le critère de Kronecker (lemme 1) montre que $d_n = 0$.

Démonstration. — Plaçons-nous dans $\mathbf{\Omega}_p$ et décomposons $Q(z)$ en ses facteurs linéaires. On a

$$Q(z) = q \prod_{j=1}^s (1 - \alpha_j z)$$

et nous supposons les $|\alpha_j|_p$ rangés par ordre décroissant

$$|\alpha_1|_p \geq |\alpha_2|_p \geq \dots \geq |\alpha_m|_p > 1 \geq |\alpha_{m+1}|_p \geq \dots \geq |\alpha_s|_p.$$

Le nombre m vérifie $0 \leq m \leq s$, le cas $m = 0$ voulant dire que $|\alpha_j|_p \leq 1$ pour tout $j = 1, \dots, s$.

Posons

$$Q_h(z) = q \prod_{j=h+1}^s (1 - \alpha_j z)$$

et

$$\frac{A(z)}{Q_h(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{h,n} z^n.$$

On a alors $u_{0,n} = u_n$ et

$$u_{h,n} = u_n + \beta_{h,1} u_{n-1} + \dots + \beta_{h,h} u_{n-h},$$

où

$$1 + \beta_{h,1} z + \dots + \beta_{h,h} z^h = \prod_{j=1}^h (1 - \alpha_j z).$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,h} z^n$ converge pour $|z|_p < |\alpha_{h+1}|_p^{-1}$. D'autre part, pour $|z|_p = \varphi < |\alpha_{h+1}|_p^{-1}$, on a

$$|Q_h(z)|_p = |q|_p,$$

car

$$|\alpha_j z|_p < \left| \frac{\alpha_j}{\alpha_{h+1}} \right|_p \leq 1 \quad \text{pour } j \geq h+1.$$

Pour $h < m$, on a $\varphi < 1$; pour $h = m$, nous nous restreignons aux valeurs de $\varphi \leq 1$; alors pour $|z|_p = \varphi$, on a $|A(z)|_p \leq 1$.

Ainsi on a

$$\left| \frac{A(z)}{Q(z)} \right|_p \leq |q|_p^{-1} \quad \text{pour } |z|_p = \varphi.$$

Les inégalités de Cauchy [4] dans Ω_p montrent qu'on a

$$|u_{h,n}|_p \leq |q|_p^{-1} \varphi^{-n}.$$

Faisant tendre φ vers $|\alpha_{h+1}|_p^{-1}$ si $h < m$, vers 1 si $h = m$, on obtient

$$\begin{aligned} |u_{h,n}|_p &\leq |q|_p^{-1} |\alpha_{h+1}|_p^n & \text{si } h < m, \\ |u_{h,n}|_p &\leq |q|_p^{-1} & \text{si } h = m. \end{aligned}$$

Si $n \geq m$, on a

$$d_n = \begin{vmatrix} u_{0,0} & u_{1,1} & \dots & u_{m,m} & u_{m,m+1} & \dots & u_{m,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{0,n} & u_{1,n+1} & \dots & u_{m,n+m} & u_{m,n+m+1} & \dots & u_{m,2n} \end{vmatrix}$$

Les inégalités trouvées donnent

$$|d_n|_p \leq |q|_p^{-n+1} |\alpha_1|_p^n |\alpha_2|_p^{n+1} \dots |\alpha_m|_p^{n+m-1}$$

Si $n < m$, on obtient de manière analogue

$$|d_n|_p \leq |q|_p^{-(n+1)} |\alpha_1|_p^n |\alpha_2|_p^{n+1} \dots |\alpha_{n+1}|_p^{2n}.$$

La considération du polygone de Newton [4] du polynome

$$Q(z) = \sum_{j=0}^s q_j z^j,$$

où $q_0 = q$, montre que m est le plus petit indice tel que

$$|q_m|_p = \text{Max}_{0 \leq j \leq s} |q_j|_p$$

et que

$$|\alpha_1 \dots \alpha_m|_p = |q_m q_0^{-1}|_p \leq |q|_p^{-1}.$$

On a donc, dans tous les cas,

$$|d_n|_p \leq |q|_p^{-(3n+1)}$$

et le lemme 4 est démontré.

Remarque. — F. Dress [3] vient de préciser, en se servant d'identités déduites par É. Borel [1], qui ne font pas intervenir le p -adique, que $q^{2n+1}d_n$ est toujours un entier rationnel.

2. DÉFINITION. — Nous désignons par $\mathcal{F} = \mathcal{F}(q, k, \delta)$ l'ensemble des fractions rationnelles $\varphi(z) = \frac{A(z)}{Q(z)}$ telles que A et Q soient des polynômes à coefficients entiers rationnels. Nous supposons de plus que $Q(0) = q \neq 0$ est fixe et que $Q(z)$ a, dans $|z| \leq 1$, au plus k zéros, $k \geq 0$, tous dans une couronne fixe $0 < \delta \leq |z| < 1$. Enfin, nous supposons que

$$|\varphi(z)| \leq 1 \quad \text{pour } |z| = 1.$$

On a alors la proposition suivante :

THÉORÈME 1. — L'ensemble \mathcal{F} est compact pour la convergence uniforme dans tout disque $|z| \leq r$, $r < \delta$ dans \mathbf{C} et dans tout disque $|z|_p \leq r_p$, $r_p < |q|_p$ dans \mathbf{Q}_p .

Démonstration. — Soient θ_j ($j = 1, \dots, k$) des nombres vérifiant $1 < |\theta_j| < \frac{1}{\delta}$ et tels que dans \mathbf{C}

$$\frac{1}{Q(z)} \prod_{j=1}^k (1 - \theta_j z)$$

soit holomorphe dans $|z| \leq 1$. [Les pôles de $\varphi(z)$ sont donc de la forme $\frac{1}{\theta_j}$.] Si $k = 0$, ces nombres θ_j n'existent pas. Posons

$$\psi(z) = \prod_{j=1}^k \frac{1 - \theta_j z}{\theta_j - z} \quad \text{si } k \geq 1 \quad \text{et} \quad \psi(z) = 1 \quad \text{si } k = 0;$$

alors $\psi(z)$ est holomorphe dans $|z| \leq 1$ et l'on a

$$|\psi(z)| = 1 \quad \text{pour } |z| = 1.$$

La fonction $\psi(z)\varphi(z)$ est aussi holomorphe dans $|z| \leq 1$ et l'on a

$$|\psi(z)\varphi(z)| \leq 1 \quad \text{pour } |z| = 1.$$

Les fonctions $\psi(z)$ et $\psi(z)\varphi(z)$ constituent donc dans $|z| < 1$ une famille normale au sens de M. Montel, c'est-à-dire, de tout sous-ensemble infini de telles fonctions, on peut extraire des suites partielles convergent

uniformément dans tout compact situé dans $|z| < 1$. On peut d'ailleurs choisir ces suites partielles de manière qu'elles convergent simultanément. Comme la couronne $1 \leq |z| \leq \frac{1}{\delta}$ est un ensemble compact, on peut choisir ces suites partielles de manière que, si $k \geq 1$, les nombres θ_j tendent vers des limites θ_j^* situés dans la couronne. Les fonctions $\psi(z)$ tendent alors vers la fonction

$$\Psi(z) = \prod_j \frac{1 - \theta_j^* z}{\theta_j^* - z}$$

où j parcourt les indices pour lesquels $|\theta_j^*| > 1$. Si $k = 0$, on a $\Psi(z) = 1$.

Nous désignons la fonction limite de $\psi(z)$ par $\Phi(z)$; cette dernière fonction est alors holomorphe dans $|z| < 1$ et vérifie

$$|\Psi(z)\Phi(z)| \leq 1 \quad \text{pour } |z| < 1.$$

Comme $|\theta_j| \leq \frac{1}{\delta}$, on a $|\theta_j^*| \leq \frac{1}{\delta}$ et $\Psi(z)$ est holomorphe et ne s'annule pas pour $|z| < \delta$; par suite, $\Phi(z)$ est holomorphe dans $|z| < \delta$ et est limite uniforme de $\psi(z)$ dans tout compact intérieur à $|z| < \delta$. La fonction $\Phi(z)$ admet donc un développement en série de Taylor, soit $\sum_{n=0}^{\infty} U_n z^n$, convergeant pour $|z| < \delta$ et U_n est limite des u_n de même indice n . Mais $q^{n+1} u_n$ est un entier rationnel; il en sera donc de même de $q^{n+1} U_n$ et u_n finit par être égal à U_n . De plus, comme $\Psi(z)\Phi(z)$ est holomorphe dans $|z| < 1$, la fonction $\Phi(z)$ est méromorphe dans $|z| < 1$ et ses seuls pôles possibles sont les nombres $\frac{1}{\theta_j^*}$ avec $|\theta_j^*| > 1$; il y en a donc k au plus; aucun de ces pôles n'est en $z = 0$. Enfin, $|\Psi(z)| = 1$ pour $|z| = 1$ et est continu au voisinage de $|z| = 1$, donc $\Phi(z)$ est borné au voisinage de $|z| = 1$.

Posant alors

$$D_n = \begin{vmatrix} U_0 & U_1 & \dots & U_n \\ U_1 & U_2 & \dots & U_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n & U_{n+1} & \dots & U_{2n} \end{vmatrix},$$

le lemme 2 montre que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C(\varepsilon)$ indépendant de n , tel que $|D_n| \leq C(\varepsilon) \varepsilon^n$.

D'autre part, comme u_n finit par devenir égal à U_n , D_n est égal à d_n à partir d'un certain rang; le corollaire du lemme 4 montre alors que $q^{3n+1} D_n$ est un entier rationnel. Or

$$|q^{3n+1} D_n| \leq C(\varepsilon) q(\varepsilon q^3)^n.$$

En choisissant $\varepsilon < q^{-3}$, on voit que pour n assez grand, on a

$$|q^{3n+1}D_n| < 1, \quad \text{donc } D_n = 0$$

et le lemme 1 montre que $\Phi(z)$ est une fraction rationnelle que nous écrivons

$$\Phi(z) = \frac{A^*(z)}{Q^*(z)},$$

avec

$$A^*(z) = a_0^* + a_1^*z + a_2^*z^2 + \dots, \quad Q^*(z) = q + q_1^*z + q_2^*z^2 + \dots$$

les coefficients a_j^* et q_j^* étant des nombres rationnels, A^* et Q^* étant premiers entre eux. En faisant tendre z vers un point de $|z| = 1$, on voit que

$$|\Phi(z)| = \left| \frac{A^*(z)}{Q^*(z)} \right| \leq 1 \quad \text{pour } |z| = 1.$$

Nous nous proposons maintenant de montrer que les coefficients des polynomes Q^* et A^* sont des entiers rationnels. Pour cela, nous allons étudier le polygone de Newton [4] des polynomes Q et du polynome Q^* dans Ω_p .

Rappelons que

$$Q(z) = \sum_{j=0}^s q_j z^j, \quad \text{avec } q_0 = q.$$

Posons $|q|_p = p^{-t}$, alors $t \geq 0$ est un entier rationnel. Le polygone de Newton de $Q(z)$ montre que, dans Ω_p , tous les zéros de $Q(z)$ sont dans $|z|_p \geq p^{-t}$. Désignons par $j(h)$ le plus petit indice j (lorsqu'il existe) tel que $|q_j|_p = p^{-h}$, où $0 \leq h \leq t$. Soit h_0 le plus petit indice h tel que, pour tous les polynomes Q de la suite considérée, $\limsup j(h)$ soit fini; on a alors $0 \leq h_0 \leq t$ et nous poserons $m_0 = \limsup j(h_0)$. On a $m_0 \geq 0$. On peut alors extraire de la suite des $\varphi(z)$ une suite partielle telle que pour les polynomes $Q(z)$ correspondants on ait

$$j(h_0) = m_0 \quad \text{et} \quad \lim j(h) = +\infty$$

pour tout $h < h_0$ (s'il y en a), de plus que le polygone de Newton de $Q(z)$ soit fixe pour $0 \leq j \leq m_0$ et que le point (m_0, h_0) soit un sommet de ce polygone.

Dans Ω_p , les polynomes $Q(z)$ ont alors dans $|z|_p < 1$, m_0 zéros, dans la couronne

$$|q|_p \leq |z|_p \leq \gamma < 1,$$

où $\log \gamma$ est la pente (négative) du côté du polygone de Newton aboutissant à gauche au sommet (m_0, h_0) . Ces zéros appartiennent à des extensions de \mathbf{Q}_p de degré m_0 au plus, donc ils sont tous dans une même extension

de degré fini de \mathbf{Q}_p [8]; leurs valeurs absolues p -adiques données par les pentes du polygone de Newton sont fixes. Par suite, ces zéros appartiennent à un ensemble compact et l'on peut trouver une suite partielle telle que ces zéros aient des limites p -adiques.

Soit

$$\beta(z) = (1 - \alpha_1 z) \dots (1 - \alpha_{m_0} z) = 1 + \beta_1 z + \dots + \beta_{m_0} z^{m_0}$$

le polynome ayant pour zéros les m_0 zéros de $Q(z)$ situés dans $|z|_p \leq \gamma$; on a donc

$$p^{-t} \leq |\alpha_j|_p^{-1} \leq \gamma \quad \text{pour } j = 1, \dots, m_0.$$

Désignons par α_j^* la limite p -adique de α_j et posons

$$\beta^*(z) = (1 - \alpha_1^* z) \dots (1 - \alpha_{m_0}^* z) = 1 + \beta_1^* z + \dots + \beta_{m_0}^* z^{m_0}.$$

On a alors aussi

$$\lim |\beta_j - \beta_j^*|_p = 0 \quad \text{pour } j = 1, \dots, m_0.$$

Posons

$$\beta(z) \frac{A(z)}{Q(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n,$$

alors

$$v_n = u_n + \beta_1 u_{n-1} + \dots + \beta_{m_0} u_{n-m_0}.$$

Or on a $u_n = U_n$ à partir d'un certain rang, donc pour tout n fixe, v_n tend au sens p -adique vers

$$V_n = U_n + \beta_1^* U_{n-1} + \dots + \beta_{m_0}^* U_{n-m_0}$$

et l'on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n z^n = \beta^*(z) \frac{A^*(z)}{Q^*(z)}.$$

Montrons alors que pour $|z|_p = \rho' < 1$, les fonctions $\beta(z) \frac{A(z)}{Q(z)}$ sont uniformément bornées au sens p -adique dans \mathbf{Q}_p . Il en résultera qu'elles tendent uniformément vers $\beta^*(z) \frac{A^*(z)}{Q^*(z)}$ dans tout disque $|z|_p \leq \rho < \rho'$ et la fonction limite est bornée par la même borne [4].

On a

$$\frac{\beta(z)}{Q(z)} = \frac{1}{q \prod_{j > m_0} (1 - \alpha_j z)}.$$

Donnons-nous $\rho' < 1$; on a

$$|\alpha_j|_p^{-1} > \rho' \quad \text{pour tout } j > m_0$$

dès que le rang est assez grand. Par suite,

$$\left| \frac{\beta(z)}{Q(z)} \right|_p = p^t \quad \text{pour tout } z \in \Omega_p \text{ vérifiant } |z|_p = \rho'.$$

D'autre part, pour $|z|_p = \rho'$, on a

$$|A(z)|_p \leq 1.$$

On a donc

$$\left| \beta(z) \frac{A(z)}{Q(z)} \right|_p \leq p^t \quad \text{pour } |z|_p = \rho' < 1$$

et $\beta(z) \frac{A(z)}{Q(z)}$ est holomorphe dans $|z|_p \leq \rho'$ à partir d'un certain rang dans la suite partielle. Il en résulte que, dans $|z|_p \leq \rho < \rho'$, la fonction limite

$$\beta^*(z) \frac{A^*(z)}{Q^*(z)}$$

est holomorphe et l'on a

$$\left| \beta^*(z) \frac{A^*(z)}{Q^*(z)} \right|_p \leq p^t \quad \text{pour } |z|_p \leq \rho.$$

Comme ρ et ρ' sont aussi voisins qu'on veut de 1, on voit que les seuls zéros possibles de $Q^*(z)$ dans $|z|_p < 1$ sont les zéros de $\beta^*(z)$. Par suite, les côtés à pente négative du polygone de Newton de $Q^*(z)$ (s'il y en a) coïncident ou sont au-dessus de ceux du polygone de Newton des $Q(z)$ pour $j \leq m_0$ (partie fixe des polygones). Le polygone de Newton est donc, en particulier, tout entier au-dessus de l'axe des j , c'est-à-dire on a

$$|q_j^*|_p \leq 1 \quad \text{pour tout } j.$$

On peut d'ailleurs préciser. Désignons par J l'ensemble (pouvant être vide) des indices $j \leq m_0$ tels que $\frac{1}{\alpha_j^*}$ soit effectivement zéro de $Q^*(z)$. Le dernier sommet du polygone de Newton de $Q^*(z)$ auquel aboutit un côté de pente négative est alors le point (m_1, h_1) , où m_1 est le nombre d'éléments de J et $|q_{m_1}^*|_p = p^{-h_1}$. On a donc $h_0 \leq h_1$, et

$$|q_j^*|_p \leq p^{-h_1} \quad \text{pour tout } j.$$

De plus,

$$\prod_{j=1}^{m_0} |\alpha_j^*|_p = p^{t-h_0},$$

$$\prod_{j \in J} |\alpha_j^*|_p = p^{t-h_1}.$$

Soit maintenant ρ un nombre vérifiant $\gamma < \rho < 1$. Pour tout z avec $|z|_p = \rho$, on a alors

$$|\beta^*(z)|_p = \rho^{m_0} \prod_{j=1}^{m_0} |\alpha_j^*|_p = \rho^{m_0} p^{\ell-h_0},$$

$$|Q^*(z)|_p = \rho^{m_1} p^{-\ell} \prod_{j \in J} |\alpha_j^*|_p = \rho^{m_1} p^{-h_1}.$$

Par conséquent, pour $|z|_p = \rho$, on a

$$|A^*(z)|_p \leq p^\ell \left| \frac{Q^*(z)}{\beta^*(z)} \right|_p = \rho^{m_1 - m_0} p^{h_0 - h_1}.$$

Les inégalités de Cauchy [4] dans Ω_p donnent alors

$$|\alpha_j^*|_p \leq \rho^{m_1 - m_0 - j} p^{h_0 - h_1}.$$

En faisant tendre ρ vers 1, j étant fixé, il vient

$$|\alpha_j^*|_p \leq p^{h_0 - h_1} \quad \text{pour tout } j.$$

En particulier, comme $h_0 \leq h_1$, on a

$$|\alpha_j^*|_p \leq 1 \quad \text{pour tout } j.$$

Mais on a

$$\frac{A^*(z)}{Q^*(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n z^n$$

et $q^{n+1} U_n$ est entier rationnel. La réciproque du lemme 3 montre que q_j^* est un nombre rationnel dont le dénominateur est q^{j-1} et a_j^* est un nombre rationnel dont le dénominateur est q^j . En répétant les considérations précédentes pour tous les nombres premiers distincts p qui divisent q , donc pour un nombre fini de nombres premiers, on voit que les conditions

$$|q_j^*|_p \leq 1, \quad |a_j^*|_p \leq 1$$

pour tout p divisant q entraînent que q_j^* et a_j^* sont des entiers rationnels. Par suite,

$$\frac{A^*(z)}{Q^*(z)} \in \mathcal{F}$$

et le théorème 1 est démontré.

Nous voyons de plus que si, pour certains p , on a $h_1 > 0$, alors $Q^*(z)$ n'est pas primitif et l'on peut diviser tous ses coefficients par un même entier \tilde{q} , diviseur de q , défini par $|\tilde{q}|_p = p^{-h_1}$ pour tout p divisant q . On peut écrire

$$Q^*(z) = \tilde{q} \tilde{Q}(z),$$

où $\tilde{Q}(z)$ est un polynome primitif.

On a, de même,

$$A^*(z) = \tilde{q}' \tilde{A}(z),$$

où $\tilde{A}(z)$ est un polynôme à coefficients entiers rationnels (pas nécessairement primitif) et où \tilde{q}' est défini par $|\tilde{q}'|_p = p^{h_0 - h_1}$ pour tout p divisant q ; par suite, \tilde{q}' divise \tilde{q} et l'on a

$$\left| \frac{\tilde{q}}{\tilde{q}'} \right|_p = p^{-h_0}.$$

En particulier, $\tilde{q}' = \tilde{q}$ si $h_0 = 0$ pour tout p divisant q . Posant $q'' = \frac{q}{\tilde{q}}$, on a, par suite,

$$\left| \frac{\tilde{A}(z)}{q'' \tilde{Q}(z)} \right| = \left| \frac{A^*(z)}{Q^*(z)} \right| \leq 1 \quad \text{sur } |z| = 1.$$

Ainsi $\frac{\tilde{A}(z)}{q'' \tilde{Q}(z)}$ appartient à une famille $\mathcal{F}(q', k, \delta)$, où

$$q' = \frac{q}{q''} = \tilde{q}' \frac{q}{\tilde{q}}$$

est un diviseur de q .

3. COMPLÉMENTS. — Une famille \mathcal{F} telle que nous venons de la définir contient des constantes et, si $|q| \geq 2$, des polynômes. Si nous voulons avoir une famille dont toutes les fonctions soient de véritables fractions rationnelles, à l'exclusion des polynômes, nous sommes amenés à introduire des conditions supplémentaires.

LEMME 5. — Soient $\chi(z)$ et $\omega(z)$ deux fonctions holomorphes dans $|z| \leq 1$ et vérifiant

$$|\chi(z)| \leq |\omega(z)| \quad \text{pour } |z| = 1.$$

Supposons que

$$\chi(z) - \omega(z) = \gamma_n z^n + \gamma_{n+1} z^{n+1} + \dots$$

et que $\omega(z)$ a k zéros dans $|z| < 1$. Alors :

si $\gamma_n \neq 0$, on a $n \leq k$, et si $n > k$, on a $\chi(z) = \omega(z)$.

En effet, considérons la fonction

$$\omega_\lambda(z) = \chi(z) - \lambda \omega(z),$$

où λ est un nombre réel avec $\lambda > 1$. Comme

$$|\lambda \omega(z)| > |\chi(z)| \quad \text{sur } |z| = 1,$$

les fonctions $\omega_\lambda(z)$ et $\omega(z)$ ont, d'après le théorème de Rouché, le même nombre de zéros dans $|z| \leq 1$, c'est-à-dire k . Faisant tendre λ vers 1, la continuité des racines montre que $\omega_1(z)$ a, dans $|z| < 1$, au plus k zéros.

Si $\gamma_n \neq 0$, il y a déjà n zéros en $z = 0$, donc $n \leq k$. Si $n > k$, il y a contradiction si $\omega_1(z)$ n'est pas identiquement nul.

LEMME 6. — Soit $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ une fonction méromorphe dans $|z| \leq 1$ et $|\varphi(z)| \leq 1$ pour $|z| = 1$. Supposons, de plus, $|u_0| \geq 1$.

Si $u_j \neq 0$ pour au moins un indice $j \geq 1$, alors $\varphi(z)$ a au moins un pôle dans $|z| < 1$.

Réciproquement, si $\varphi(z)$ a $k \geq 1$ pôles dans $|z| < 1$, alors on a $u_j \neq 0$ pour au moins un indice j vérifiant $1 \leq j \leq k$.

Comme $\varphi(z)$ est borné sur $|z| = 1$, $\varphi(z)$ a un nombre fini, soit k pôles dans $|z| < 1$.

Soit

$$g(z) = 1 + \gamma_1 z + \dots + \gamma_k z^k$$

le polynôme qui a pour zéros les pôles de $\varphi(z)$. Alors

$$\varphi(z) g(z) = \chi(z)$$

est holomorphe dans $|z| \leq 1$ et l'on a

$$|\chi(z)| \leq |g(z)| \quad \text{pour } |z| = 1;$$

de plus, $g(z)$ et $\chi(z)$ n'ont pas de zéro commun.

Supposons que $n \geq 1$ soit le plus petit indice tel que $u_n \neq 0$. On a

$$(u_0 + u_n z^n + \dots) g(z) = \chi(z),$$

donc

$$\chi(z) - u_0 g(z) = u_n z^n + \dots$$

Le lemme 5 montre alors que $n \leq k$, ce qui montre la réciproque du lemme 6.

La proposition directe est évidente, car si $\varphi(z)$ n'avait pas de pôle dans $|z| < 1$, elle serait holomorphe et le lemme 5 appliqué avec $\varphi(z)$ à la place de $\chi(z)$ et u_0 à la place de $\omega(z)$ montre que $\varphi(z) = u_0$, donc on ne pourrait avoir $u_j \neq 0$ pour un $j \geq 1$.

COROLLAIRE. — Soit $|u_0| \geq 1$; si $u_1 \neq 0$, $\varphi(z)$ a au moins un pôle dans $|z| < 1$; si $\varphi(z)$ a exactement un pôle dans $|z| < 1$, alors $u_1 \neq 0$.

LEMME 7. — Examinons maintenant le cas de pôles dans Ω_p . Montrons la proposition suivante :

Si le polygone de Newton du polynôme $\frac{q}{a_0} A(z)$ est strictement au-dessus de l'horizontale d'ordonnée h_0 , alors $\frac{A^*(z)}{Q^*(z)}$ a au moins un pôle dans $|z|_p < 1$.

Démonstration. — Comme les polygones de Newton de $\frac{q}{a_0} A(z)$ et de $Q(z)$ ont le sommet de départ $j = 0$ en commun, les conditions du lemme 7 ne peuvent être vérifiées que si $m_0 \geq 1$. Soit alors ρ un nombre vérifiant $p^{-\frac{1}{2m_0}} < \rho < 1$. Comme on a $|\alpha_{m_0}|_p \geq p^{\frac{1}{m_0}}$, on a donc $\rho > |\alpha_{m_0}^{-1}|_p$; d'autre part, on a

$$|\alpha_j^{-1}|_p > \rho \quad \text{pour tous les } j \geq m_0 + 1$$

à partir d'un certain rang dans la suite. On en déduit que pour $z \in \Omega_p$ avec $|z|_p = \rho$, on a

$$|Q(z)|_p = p^{-h_0 \rho^{m_0}} > p^{-h_0 - \frac{1}{2}}.$$

D'autre part, les hypothèses du lemme 7 expriment que

$$\left| \frac{q}{a_0} a_j \right|_p \leq p^{-h_0 - 1} \quad \text{pour tout } j \geq 0,$$

donc

$$\left| \frac{q}{a_0} A(z) \right|_p \leq p^{-h_0 - 1} \quad \text{pour } |z|_p = \rho.$$

On a donc

$$\left| \frac{q}{a_0} \frac{A(z)}{Q(z)} \right|_p < p^{-\frac{1}{2}} \quad \text{pour } z \in \Omega_p, \quad \text{avec } |z|_p = \rho,$$

D'autre part, pour $|z|_p = \rho$, on a

$$|\beta(z)|_p = \rho^{m_0} \prod_{j=1}^{m_0} |\alpha_j|_p.$$

Or $\frac{q}{a_0} \frac{A(z)}{Q(z)} \beta(z)$ tend vers

$$\frac{q}{a_0^*} \frac{A^*(z)}{Q^*(z)} \beta^*(z) \quad \text{dans } |z|_p \leq \rho',$$

où $\rho < \rho' < 1$. Comme u_0 finit par être égal à U_0 , on a $a_0^* = a_0$ à partir d'un certain rang. Enfin, pour $|z|_p = \rho$, on a

$$|\beta^*(z)|_p = \rho^{m_0} \prod_{j=1}^{m_0} |\alpha_j^*|_p = |\beta(z)|_p,$$

à partir d'un certain rang.

On a, par conséquent,

$$\left| \frac{q}{a_0} \frac{A^*(z)}{Q^*(z)} \right|_p \leq p^{-\frac{1}{2}} \quad \text{pour } |z|_p = \rho.$$

Si alors $\frac{A^*(z)}{Q^*(z)}$ n'avait pas de pôle dans $|z|_p \leq \rho$, elle serait holomorphe et les inégalités de Cauchy donneraient

$$\left| \frac{q}{a_0} \frac{A^*(0)}{Q^*(0)} \right|_p \leq p^{-\frac{1}{2}} < 1,$$

ce qui est en contradiction avec $\frac{q}{a_0} \frac{A^*(0)}{Q^*(0)} = 1$.

Les conditions du lemme 7 s'expriment par les inégalités

$$|q|_p |a_j|_p \leq |a_0|_p p^{-h_0-1} \quad \text{pour } j \geq 1.$$

On en déduit le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1. — *Si pour toutes les fractions de la suite on a $|a_0|_p > |\alpha_1|_p^{-1}$, alors la fraction limite a au moins un pôle dans $|z|_p < 1$. Cette condition est satisfaite en particulier si l'on a $|a_0|_p > p^{h_0-t}$.*

En effet, on a

$$|\alpha_1|_p \leq |q|_p^{-1} p^{-h_0};$$

la condition du lemme donne

$$|a_0|_p p^{-h_0} > |\alpha_1|_p^{-1} p^{-h_0} \geq |q|_p.$$

Comme $|a_j|_p \leq 1$, les conditions

$$|q|_p |a_j|_p < |a_0|_p p^{-h_0},$$

sont donc vérifiées.

COROLLAIRE 2. — *Si pour toutes les fonctions de la famille, le polygone de Newton de $Q(z)$ entre $j=0$ et $j=m_0$, est formé d'un seul segment joignant le point $(0, t)$, où $|q|_p = p^{-t}$, au point (m_0, h_0) et que $t - h_0$ soit premier à m_0 ; si, d'autre part, $|a_0|_p > p^{-\frac{t-h_0}{m_0}}$, alors il en est de même de $Q^*(z)$, et*

$$|A^*(0)|_p > p^{-\frac{t-h_0}{m_0}}.$$

En effet, d'après le corollaire 1, $Q^*(z)$ a, dans Ω_p , au moins un zéro dans $|z|_p < 1$ et si $\frac{1}{\alpha_1^*}$ est ce zéro, α_1^* est limite de α_1 , donc

$$|\alpha_1^*|_p = |\alpha_1|_p = p^{-\frac{t-h_0}{m_0}}.$$

Mais $Q^*(z)$ étant à coefficients entiers rationnels, les sommets de son polygone de Newton sont des points à coordonnées entières; le premier sommet possible après le point $(0, t)$ est donc le point (m_0, h_0) , donc $Q^*(z)$

a exactement m_0 zéros dans $|z|_p < 1$; ils ont tous la même valeur absolue p -adique $p^{-\frac{l-h_0}{m_0}}$. Enfin, a_0^* étant limite de a_0 , on a aussi

$$|a_0^*|_p > p^{-\frac{l-h_0}{m_0}}.$$

CHAPITRE II.

Nous donnons ici quelques applications du théorème 1.

1. DÉFINITION. — Nous appelons S_q , où q est un entier rationnel, l'ensemble suivant de nombres algébriques réels : $\theta \in S_q$ si $\frac{1}{\theta}$ est zéro d'un polynôme $Q(z)$ à coefficients entiers rationnels tel que $Q(0) = q$, que $\frac{1}{\theta}$ est le seul zéro de $Q(z)$ situé dans $|z| \leq 1$ et enfin qu'il existe un polynôme $A(z)$, à coefficients entiers rationnels, vérifiant

$$A\left(\frac{1}{\theta}\right) \neq 0, \quad |A(0)| > |q| \quad \text{et} \quad |A(z)| \leq |Q(z)| \quad \text{pour} \quad |z| = 1.$$

L'ensemble S_q n'est pas vide. En effet, appartient à S_q tout nombre algébrique $\theta > 1$ de degré $s \geq 3$ défini comme suit : ses conjugués autres que θ sont dans $|z| < 1$ et la norme $N(\theta)$ vérifie $|N(\theta)| \geq 1$; soit $P(z)$ le polynôme irréductible primitif dont θ est zéro et posons $Q(z) = z^s P\left(\frac{1}{z}\right)$, on suppose que $Q(0) = q$.

$P(z)$ ayant θ pour seul zéro dans $|z| \geq 1$, $Q(z)$ a $\frac{1}{\theta}$ pour seul zéro dans $|z| \leq 1$. Comme $s \geq 3$, $P(z)$ a $s - 1 \geq 2$ zéros dans $|z| < 1$ et puisque P est irréductible, P et Q sont premiers entre eux, donc $P\left(\frac{1}{\theta}\right) \neq 0$. Enfin,

$$|N(\theta)| = \left| \frac{P(0)}{Q(0)} \right| \geq 1, \quad \text{donc} \quad |P(0)| \geq |q|.$$

Par suite, on peut prendre $A(z) = P(z)$ et $\theta \in S_q$.

Remarquons encore que la définition de S_q n'implique pas que $Q(z)$ soit irréductible, ni que $Q(z)$ soit primitif. On peut donc multiplier Q et A par un même entier, ce qui montre que $S_{q'} \subset S_q$ si q' est un diviseur de q . En particulier, S_1 est identique à l'ensemble S dont nous avons parlé au début; en effet, si $\theta \in S_1$, θ est un entier algébrique, donc $|N(\theta)| \geq 1$; si son degré $s \geq 3$, on peut prendre pour $A(z)$ le polynôme irréductible primitif dont θ est zéro; si $s = 1$ ou $s = 2$, on montre aisément qu'on peut prendre $A(z) = 1$. Ce que nous venons de dire montre que S_1 est un sous-ensemble de tout S_q .

Le théorème 1 nous permet de monter le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *L'ensemble S_q est fermé.*

Ce théorème 2 généralise donc le théorème déjà cité de M. R. Salem [15] relatif à l'ensemble $S_1 = S$.

Montrons d'abord le lemme suivant :

LEMME 8. — *Pour tout θ de S_q , on a*

$$|\theta| > 1 + \frac{1}{4|q|}.$$

On peut supposer $\theta > 1$, car si $\theta \in S_q$, alors aussi $-\theta \in S_q$. Considérons la fonction

$$f(z) = \frac{1 - \theta z}{\theta - z} \frac{\Lambda(z)}{Q(z)},$$

elle est holomorphe et bornée par 1 dans $|z| \leq 1$. On a donc

$$|f(0)| = \frac{1}{\theta} \left| \frac{\Lambda(0)}{q} \right| \leq 1.$$

Pour les nombres θ vérifiant $\theta < 1 + \frac{1}{|q|}$, on a donc

$$1 \leq \left| \frac{\Lambda(0)}{q} \right| < 1 + \frac{1}{|q|}, \quad \text{donc} \quad \frac{\Lambda(0)}{q} = \pm 1.$$

Choisissons le signe de $\Lambda(z)$ de sorte que $\frac{\Lambda(0)}{q} = 1$ et posons

$$\frac{\Lambda(z)}{Q(z)} = \frac{q + a_1 z + \dots}{q + q_1 z + \dots} = 1 + u_1 z + \dots$$

On en déduit $qu_1 + q_1 = a_1$, donc qu_1 est entier rationnel. Le corollaire du lemme 6 montre que

$$u_1 \neq 0, \quad \text{donc} \quad |u_1| \geq \frac{1}{|q|}.$$

Or on a

$$f(z) = \frac{1}{\theta} + \left(\frac{u_1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} - 1 \right) z + \dots$$

Le lemme de Schwarz, appliqué à $f(z)$, donne

$$\left| \frac{f(z) - f(0)}{z(1 - f(0)f(z))} \right| \leq 1 \quad \text{dans} \quad |z| \leq 1.$$

Pour $z = 0$, on obtient

$$\left| \frac{\frac{u_1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} - 1}{1 - \frac{1}{\theta^2}} \right| \leq 1,$$

c'est-à-dire

$$-(\theta^2 - 1) \leq u_1 \theta - (\theta^2 - 1) \leq \theta^2 - 1.$$

Par suite,

$$u_1 > 0 \quad \text{et} \quad 2\theta^2 - u_1 \theta - 2 \geq 0,$$

d'où

$$\theta \geq \frac{u_1 + \sqrt{u_1^2 + 16}}{4}.$$

La plus petite valeur de cette dernière expression est obtenue pour

$$u_1 = \frac{1}{|q|}. \text{ Or}$$

$$\sqrt{16 + \frac{1}{|q|^2}} > 4$$

d'où le lemme 8.

Ce lemme 8 montre, en particulier, que ± 1 ne sont pas des points limites de S_q .

Remarque. — La méthode qui nous a permis de déterminer les quatre plus petits nombres de S_1 [5] s'applique également ici. Sans diminuer la généralité, on peut supposer $q \geq 1$. On démontre alors que si $\theta < \hat{\theta}$, où $\hat{\theta}$ est le zéro > 1 de

$$\hat{P}(z) = qz^3 + (q-2)z^2 - (q-1)z - q,$$

on a

$$u_0 = 1, \quad u_1 = \frac{1}{q}, \quad u_2 = \frac{1}{q^2}.$$

Les seules fractions rationnelles $\frac{A(z)}{Q(z)}$ ayant ces coefficients sont, ou bien $\frac{q - qz^2}{q - z - qz^2}$, ou bien

$$\frac{q - qz^2 \pm (q + z - qz^2)z^n}{q - z - qz^2 \pm (q - qz^2)z^n} \quad \text{pour } n \geq 1,$$

Désignons par θ_∞ le zéro > 1 de $qz^2 - z - q$ et par θ_n le zéro > 1 de

$$(qz^2 - z - q)z^n + q(z^2 - 1).$$

On voit alors facilement qu'on a

$$\theta_n < \theta_{n+1} < \theta_\infty \quad \text{et} \quad \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \hat{\theta} < \theta_\infty.$$

Par suite, comme aussi $\hat{\theta} \in S_q$ on a :

Les quatre plus petits éléments de S_q sont, dans l'ordre :

$$\theta_1, \text{ zéro } > 1 \text{ de } qz^3 + (q-1)z^2 - qz - q;$$

$$\theta_2, \text{ zéro } > 1 \text{ de } qz^4 - z^3 - q;$$

$$\theta_3, \text{ zéro } > 1 \text{ de } qz^5 - z^4 - qz^3 + qz^2 - q;$$

$\hat{\theta}$, zéro > 1 de $qz^3 + (q-2)z^2 - (q-1)z - q$.

θ_z est point limite de S_q ; il est probable que les méthodes de [5] permettent de montrer que c'est le plus petit.

Démonstration du théorème 2. — Soit une suite de nombres $\theta \in S_q$ tendant vers un point limite θ' . Alors $|\theta'| > 1$, d'après le lemme 8; d'autre part, il existe $\delta > 0$, tel que tous les nombres θ de la suite vérifient $|\theta| \leq \frac{1}{\delta}$.

La famille des fractions rationnelles $\frac{A(z)}{Q(z)}$ est donc une famille compacte \mathcal{F} ; on peut en extraire une suite partielle tendant vers une fraction limite

$$\frac{A^*(z)}{Q^*(z)} = U_0 + U_1 z + \dots$$

On a $U_0 = \lim u_0$, et comme $|u_0| = \left| \frac{A(0)}{Q(0)} \right| \geq 1$, on a

$$|U_0| \geq 1, \quad \text{donc } |A^*(0)| \geq |q|.$$

D'autre part, $\frac{1}{\theta'}$ est le seul pôle possible de $\frac{A^*(z)}{Q^*(z)}$ dans $|z| \leq 1$.

Comme $\frac{A(z)}{Q(z)}$ a exactement un pôle dans $|z| \leq 1$, le corollaire du lemme 6 montre que $u_1 \neq 0$, donc $|u_1| \geq \frac{1}{q^2}$. Par suite, aussi $U_1 = \lim u_1 \neq 0$, donc ce même corollaire montre que $\frac{A^*(z)}{Q^*(z)}$ a effectivement au moins un pôle dans $|z| \leq 1$, donc $\frac{1}{\theta'}$ est un pôle, c'est-à-dire $\frac{1}{\theta'}$ est zéro de $Q^*(z)$; par suite, $\theta' \in S_q$ et $A^*\left(\frac{1}{\theta'}\right) \neq 0$; le théorème 2 est démontré.

Sous-ensembles de S_q . — En utilisant l'analyse p -adique, on peut montrer qu'il y a aussi des sous-ensembles de S_q qui sont eux-mêmes fermés.

DÉFINITION. — Supposons que $q = p_1^{t_1} \dots p_r^{t_r}$, où t_i est entier rationnel avec $t_i \geq 1$, soit la décomposition de q en facteurs premiers distincts.

Nous dirons qu'un nombre $\theta \in S_q$ appartient à $S_q(m_1, \dots, m_r)$ s'il existe un polynôme

$$Q(z) = q + q_1 z + q_2 z^2 + \dots$$

à coefficients entiers rationnels tel que $\frac{1}{\theta}$ soit le seul zéro de $Q(z)$ dans $|z| \leq 1$, vérifiant de plus la condition suivante : pour chaque $i = 1, \dots, r$ il existe un indice $m_i \geq 1$ fixe, premier à t_i , tel que q_{m_i} ne soit pas divisible par p_i et que, s'il y a des indices j avec $1 \leq j \leq m_i - 1$, q_j soit divisible par une puissance de p_i strictement supérieure à $t_i \left(1 - \frac{j}{m_i}\right)$. D'autre part, nous

supposons qu'il existe un polynôme $A(z)$, à coefficients entiers rationnels, vérifiant

$$A\left(\frac{1}{\theta}\right) \neq 0, \quad |A(0)| > |q|, \quad |A(z)| \leq |Q(z)| \quad \text{pour } |z| = 1,$$

enfin

$$|A(0)|_{p_i} > p_i^{-\frac{t_i}{m_i}} \quad \text{pour } i = 1, \dots, r.$$

Nous remarquons que les conditions imposées aux coefficients de $Q(z)$ entraînent d'abord que $Q(z)$ est primitif; d'autre part, pour chaque nombre premier, le polygone de Newton de $Q(z)$ a un seul côté de pente négative, c'est celui qui joint le point $(0, t_i)$ au point $(m_i, 0)$ et ce côté ne contient aucun point à coordonnées entières.

On a alors :

THÉORÈME 3. — *L'ensemble $S_q(m_1, \dots, m_r)$ est un sous-ensemble fermé de S_q .*

Soit, en effet, une suite de nombres θ de $S_q(m_1, \dots, m_r)$ tendant vers un nombre θ' . Comme $\theta \in S_q$, nous savons déjà par le théorème 2, que $\theta' \in S_q$. Nous pouvons extraire de la suite des fractions rationnelles $\frac{A(z)}{Q(z)}$ ayant pour pôles les nombres de la suite θ une suite partielle qui converge vers une fraction rationnelle $\frac{A^*(z)}{Q^*(z)}$ ayant θ' pour pôle effectif dans $|z| < 1$.

Le corollaire 2 du lemme 7 nous apprend que les coefficients de $Q^*(z)$ vérifient les conditions imposées à ceux de $Q(z)$ et $A^*(z)$ celles imposées aux $A(z)$. Ainsi $\theta' \in S_q(m_1, \dots, m_r)$ et le théorème 3 est démontré.

CAS PARTICULIERS. — Si tous les m_i valent 1, la définition de $S_q(1, \dots, 1)$ est particulièrement simple. En effet, il suffit que q_i soit premier à q et que $|A(0)|_p > |q|_p$ pour tout nombre premier divisant q [13].

Si tous les t_i valent 1, alors m_1, \dots, m_r peuvent être pris arbitrairement et les conditions deviennent $|q_j|_{p_i} < 1$ si $j < m_i$, et $A(0)$ premier à q .

3. On peut encore donner d'autres applications du théorème 1. Pour cela nous allons considérer le cas où les fractions rationnelles n'ont aucun pôle dans $|z| \geq 1$, c'est-à-dire une famille $\mathcal{F}(q, 0, \delta)$. Le théorème 1 s'énonce alors :

L'ensemble des fractions rationnelles $\frac{A(z)}{Q(z)}$, holomorphes dans $|z| \leq 1$, où A et Q sont des polynômes à coefficients entiers rationnels, vérifiant $|A(z)| \leq |Q(z)|$ sur $|z| = 1$ et $Q(0) = q$ fixe, est une famille compacte dans \mathbf{C} pour la convergence uniforme dans tout compact situé dans $|z| < 1$, [12].

On peut remarquer que les hypothèses entraînent que

$$|A(o)| \leq |q|, \quad \text{car} \quad \left| \frac{A(z)}{Q(z)} \right| \leq 1 \quad \text{pour} \quad |z| = 1$$

et $\frac{A(z)}{Q(z)}$ est holomorphe dans $|z| \leq 1$. Donc, sauf si $|A(o)| = |q|$, il existe au moins un diviseur premier p de q tel que $|A(o)|_p > |q|_p$. Par suite, si $h_0 = o$, on peut appliquer le corollaire 1 du lemme 7 et l'on en déduit :

Si, de plus, $h_0 = o$, la famille $\mathcal{F}(q, o, \delta)$ ne contient que de véritables fractions rationnelles, sauf peut-être les constantes ± 1 .

Comme application, nous allons obtenir un résultat énoncé par M. Cl. Chabauty [2].

DÉFINITION. — *Un nombre $\theta \in \mathbf{Q}_p$ est dit « p -intégrable » s'il est algébrique sur le corps des rationnels et vérifie une équation*

$$P(z) = p^t z^s + q_1 z^{s-1} + \dots + q_s = 0,$$

où $t \geq 1$, q_j entier rationnel et q_1 non divisible par p .

On appelle \mathfrak{C} l'ensemble suivant de nombres de \mathbf{Q}_p : $\theta \in \mathfrak{C}$ si $|\theta|_p > 1$ et si θ est p -intégrable, le polynôme $P(z)$ ayant tous ses zéros complexes dans $|z| < 1$.

Alors, on a :

THÉORÈME 4 (Chabauty) [2]. — *L'ensemble \mathfrak{C} est un ensemble fermé dans \mathbf{Q}_p pour la topologie de \mathbf{Q}_p .*

En effet, posons $Q(z) = z^s P\left(\frac{1}{z}\right)$, alors tous les zéros de $Q(z)$ sont dans $|z| > 1$. La fraction rationnelle $\frac{P(z)}{Q(z)}$ est donc holomorphe dans $|z| \leq 1$. D'autre part, les zéros de $P(z)$ étant tous dans $|z| < 1$, on a $|q_s| < p^t$, donc on a

$$|P(o)|_p = |q_s|_p > |p^t|_p.$$

Enfin, comme q_1 n'est pas divisible par p , on a

$$h_0 = o \quad \text{et} \quad |\theta|_p = p^t.$$

Soit alors une suite de nombres θ tendant dans \mathbf{Q}_p vers un nombre θ' , alors, comme $|\theta|_p \geq p$, on a $|\theta'|_p = p^{t'}$, où t' est un entier ≥ 1 . Nous pouvons alors extraire de la suite des θ une suite partielle telle que $|\theta|_p = p^{t'}$ pour tous les nombres de la suite partielle. Posons $q = p^{t'}$ et associons à cette suite partielle la suite des fractions rationnelles $\frac{P(z)}{Q(z)}$ cette suite constitue une famille compacte dans $|z| < 1$.

Soit $\frac{A^*(z)}{Q^*(z)}$ une fonction limite; on aura

$$\left| \frac{A^*(0)}{Q^*(0)} \right| = \lim \left| \frac{P(0)}{Q(0)} \right| \leq \frac{|q|-1}{|q|} < 1,$$

donc $\frac{A(z)}{Q(z)}$ ne peut pas se réduire à la constante $+1$ ou -1 .

De plus, $|q_1|_p = 1$, donc $h_0 = 0$ et $|P(0)|_p > |q|_p$, donc $\frac{A^*(z)}{Q^*(z)}$ est une véritable fraction rationnelle et $Q^*(z)$ vérifie les mêmes propriétés que $Q(z)$. Le polygone de Newton montre que $Q(z)$ et $Q^*(z)$ ont, dans $|z|_p < 1$, un seul zéro, à savoir $\frac{1}{\theta}$ et $\frac{1}{\theta'}$. Donc $\frac{1}{\theta'}$ est zéro de $Q^*(z)$ et tous les zéros complexes de $Q^*(z)$ sont dans $|z| > 1$. Par suite, $\theta' \in \mathbb{C}$ et le théorème 4 est démontré.

Remarque. — D'après une idée de Mme M. Grandet, on peut observer que la fraction limite $\frac{A^*(z)}{Q^*(z)}$ ne peut être de la forme $\frac{P^*(z)}{Q^*(z)}$, où P^* serait le polynôme réciproque de Q^* . En effet, supposons le contraire; comme $\frac{A(z)}{Q(z)}$ tend vers $\frac{P^*(z)}{Q^*(z)}$ dans $|z| < 1$, les coefficients du développement en série de Taylor de $\frac{A(z)}{Q(z)}$ tendent vers ceux de $\frac{P^*(z)}{Q^*(z)}$. Or, d'après le lemme 3, $q^{n+1} u_n$ est entier, donc les coefficients sont égaux à partir d'un certain rang. On a donc

$$\frac{A(z)}{Q(z)} - \frac{P^*(z)}{Q^*(z)} = (u_n - U_n) z^n + \dots,$$

avec n augmentant indéfiniment, donc

$$A(z) Q^*(z) - Q(z) P^*(z) = \gamma_n z^n + \gamma_{n+1} z^{n+1} + \dots$$

et sur $|z| = 1$, on a

$$|A(z) Q^*(z)| \leq |Q(z) P^*(z)|.$$

Mais le nombre de zéros dans $|z| < 1$ de $Q(z) P^*(z)$ est fixe, égal au degré s^* de P^* . Le lemme 5 donne alors, pour $n > s^*$ l'égalité

$$\frac{A(z)}{Q(z)} = \frac{P^*(z)}{Q^*(z)}$$

et les nombres θ restent fixes à partir d'un certain rang. $\frac{P^*}{Q^*}$ n'est donc pas une véritable fraction limite.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] É. BOREL, *Leçons sur les fonctions méromorphes*, Gauthier-Villars, Paris, 1903, 122 pages (voir p. 38-43).
- [2] Cl. CHABAUTY, *Sur la répartition modulo 1 de certaines suites p-adiques* (C. R. Acad. Sc., t. 231, 1950, p. 465-466).

- [3] F. DRESS, *Déterminants de Hankel du quotient de deux séries entières à coefficients entiers* (C. R. Acad. Sc., t. 256, 1963, p. 4338-4340).
 - [4] B. DWORK, *On the zeta-function of a hypersurface*, Presses Universitaires de France, Paris, 1962 (Institut des Hautes Études Scientifiques, *Publications mathématiques*, n° 12, p. 5-68).
 - [5] J. DUFRESNOY et C. PISOT, *Étude de certaines fonctions méromorphes bornées sur le cercle unité. Application à un ensemble fermé de nombres algébriques* (Ann. scient. Éc. Norm. Sup., t. 72, 1955, p. 69-92).
 - [6] P. FATOU, *Séries trigonométriques et séries de Taylor* [Acta Math., t. 30, 1906, p. 335-400 (voir p. 368-369)].
 - [7] J. HADAMARD, *Résolution d'une question relative aux déterminants* (Bull. Sc. Math., t. 17, 1893, p. 240-246).
 - [8] M. KRASNER, *Sur la primitivité des corps \mathbf{P} -adiques* [Mathematica, t. 13, 1937, p. 72-191 (voir p. 172)].
 - [9] L. KRONECKER, *Zur Theorie der Elimination einer Variablen aus zwei algebraischen Gleichungen* (Monatsber., Berlin, 1881, p. 535-600).
 - [10] C. PISOT, *La répartition modulo 1 et les nombres algébriques* (Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Série II, t. 7, 1938, p. 205-248).
 - [11] C. PISOT, *Ensembles fermés de nombres algébriques et familles normales de fractions rationnelles* (C. R. Acad. Sc., t. 256, 1963, p. 1418-1419).
 - [12] C. PISOT, *Une famille normale de fractions rationnelles* (Séminaire Delange-Pisot, Théorie des nombres, t. 4, 1962-1963, n° 4, 6 pages).
 - [13] C. PISOT, *Familles normales de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques* (Séminaire Dubreil-Pisot, Algèbre et Théorie des nombres, 16^e année, 1962-1963, n° 14, 12 pages).
 - [14] R. SALEM, *Sets of uniqueness and sets of multiplicity* (Trans. Amer. Math. Soc., t. 54, 1943, p. 218-228; t. 56, 1944, p. 32-49).
 - [15] R. SALEM, *A remarkable class of algebraic integers. Proof of a conjecture of Vijayaraghavan* (Duke Math. J., t. 11, 1944, p. 103-108).
 - [16] R. SALEM et A. ZYGMUND, *Sur un théorème de Piatetcki-Shapiro. Sur les ensembles parfaits dissymétriques à rapport constant* (C. R. Acad. Sc., t. 240, 1955, p. 2040-2042 et 2281-2283).
- R. SALEM, *Algebraic numbers and Fourier analysis*, Heath mathematical monographs, Boston, V. S. A., 1963.