ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

H. AKBAR-ZADEH

Les espaces de Finsler et certaines de leurs généralisations

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 80, nº 1 (1963), p. 1-79
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1963_3_80_1_1_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 80, 1963, p. 1 à 79.

LES ESPACES DE FINSLER
ET CERTAINES DE LEURS GÉNÉRALISATIONS (1)

PAR M. H. AKBAR-ZADEH.

INTRODUCTION.

L'objet principal de ce travail est d'étudier la géométrie des espaces V des vecteurs tangents à une variété différentiable V_n, ainsi que les espaces de Finsler et d'étendre aux espaces V ou aux espaces de Finsler un certain nombre de théorèmes concernant les transformations affines d'une variété à connexion linéaire et les isométries d'une variété riemannienne. C'est pourquoi le premier chapitre est consacré à la géométrie des espaces V.

Soit V_n une variété différentiable de dimension n et de classe C^∞. Soit V l'espace fibré des vecteurs non nuls tangents à V_n, de fibre-type R^n et de groupe structural le groupe linéaire de n variables réels $GL(n, R)$. On désignera par π la projection canonique de V sur V_n. Soient $E(V_n)$ l'espace fibré des repères linéaires sur V_n et $\pi^{-1}E(V_n)$ l'image inverse de $E(V_n)$ par π. Nous appelons connexion linéaire de vecteurs une connexion infinitésimale sur $\pi^{-1}E(V_n)$ (§ 4). L'étude de cette connexion nous conduit à dégager une condition de régularité (déf., § 5).

(1) *Thèse Sc. math.*, Paris, 1961.

S'il en est ainsi des formes tensorielles indépendantes peuvent être introduites sur V. A toute connexion linéaire régulière de vecteurs sont canoniquement associés deux tenseurs de torsion S et T, ainsi que trois tenseurs de courbure R, P et Q dont nous évaluerons les expressions (§ 7). En vue d'obtenir les formules de la théorie des connexions linéaires habituelles nous établirons un théorème de réduction (§ 8). A l'aide des dérivations covariantes des deux types ∇ et $\nabla^{\cdot}$ nous formons les trois identités de Ricci pour un champ de tenseurs au sens large (§ 9).

Au paragraphe 10 nous démontrons qu'il existe entre les deux tenseurs de torsion S et T ainsi que les trois tenseurs de courbure R, P et Q d'une connexion régulière générale, cinq identités, dites identités de Bianchi, dont nous donnerons les formules explicites. Le cadre géométrique de la théorie des connexions linéaires sur V étant ainsi défini, nous abordons brièvement dans le paragraphe 11 les questions relatives à l'holonomie de l'espace. Au paragraphe 12 nous montrons qu'il est possible d'étendre aux espaces V la notion des connexions affines au sens de André Lichnerowicz [17]. En partant de cette notion nous généralisons ainsi aux espaces V les résultats concernant les géodésiques des connexions affines sur une variété différentiable dus à M^me Maurer-Tison [19].

Le deuxième chapitre est essentiellement consacré à la géométrie des espaces de Finsler. Une structure de variété finslérienne sur V_n est définie par la donnée d'une fonction $\mathcal{L}(x, v_x)$ positive homogène de degré 1 sur V conduisant à un problème *régulier* de calcul des variations (déf. § 6). Dans la première partie de ce chapitre nous démontrons le théorème fondamental de la géométrie finslérienne :

Étant donné une variété finslérienne, il existe une connexion euclidienne régulière de directions telle que le tenseur de torsion S *est nul et le tenseur* T *satisfait à une condition de symétrie* (th., § 7).

Cette nouvelle caractérisation de la connexion finslérienne nous conduit tout naturellement à la connexion euclidienne d'Élie Cartan [9]. Utilisant les résultats du chapitre I (§ 7 et 8) nous établirons les formules fondamentales de la géométrie finslérienne; les trois tenseurs de courbure, les cinq identités de Bianchi, ont été complètement explicités (§ 8). Au paragraphe 9 nous étudions la réductibilité d'un espace de Finsler; sous certaine condition que doit satisfaire le tenseur de torsion T, nous étendons à une variété finslérienne le théorème important de la réductibilité d'une variété riemannienne. Le théorème établi ici est de nature locale. Au paragraphe 10 nous introduisons les coordonnées normales géodésiques et nous montrons sur un exemple (th. 2, § 10) que l'emploi de ces coordonnées se révèle très commode.

La deuxième partie de ce chapitre est consacrée aux variétés finslériennes isotropes. Étant donné trois éléments plans $\mu_i \subset T\pi z$ $(i = 1, 2, 3)$ en $x = \pi z$ définis par trois couples de vecteurs (X, Y), $(X, \dot{Y})$ et $(\dot{X}, \dot{Y})$, linéairement indépendants en $x = \pi z \in V_n$, à partir des trois tenseurs de courbure R, P et Q de l'espace nous définissons trois scalaires restreints $K_i (i = 1, 2, 3)$ en $z \in V$ qui seront appelés les courbures scalaires dans les éléments plans μ_i $(i = 1, 2, 3)$.

Une variété finslérienne sera dite *partiellement isotrope* (p. i.) en chaque point $z \in V$ si $K_1(z, \mu_1)$ est indépendant de l'élément plan μ_1, s'il en est ainsi nous obtenons le tenseur de courbure R à l'aide du tenseur métrique, comme en géométrie riemannienne (§ 11). En utilisant les identités de Bianchi, nous démontrons que K_1 est une constante absolue $(n > 2)$, puis pour $n > 2$ et $K_1 \neq 0$ nous établirons que *toute variété finslérienne* p. i. *est une variété de Berwald* (la courbure minkowskienne de l'espace est o). Ainsi l'étude des variétés finslériennes p. i. est ramenée à l'étude des variétés de Berwald p. i. Au sujet de K_2 (resp. K_3) nous montrons que (th. 2, § 11) si K_2 (resp. K_3) est indépendant de μ_2 (resp. μ_3), on a $K_2 = 0$ (resp. $K_3 = 0$), ce qui entraîne la nullité du tenseur de courbure P (resp. Q). Au paragraphe 12 nous étendons aux espaces de Finsler le théorème de Schur concernant les variétés riemanniennes isotropes [10] et enfin au paragraphe 13 nous traitons le cas de réduction.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des transformations infinitésimales (t. i.) affines d'une connexion linéaire généralisée en liaison avec l'holonomie de l'espace. Dans la première partie nous rappelons la règle de calcul des dérivées de Lie d'un champ de tenseurs au sens large et d'une forme de connexion linéaire de vecteurs en adaptant la méthode de André Lichnerowicz [18] à l'objet de notre étude. Soit L l'algèbre de Lie des t. i. sur V_n, à tout élément $X \in L$ est associé un certain endomorphisme A (X) de $T\pi z$ dont l'expression contient le tenseur de torsion T de l'espace (§ 6). Soit $\underline{A}\, z\,(L)$ l'algèbre de Lie des endomorphismes de $T\pi z$ correspondant à tous les éléments de L. Nous établirons alors dans le paragraphe 6 une relation entre les éléments $A[X, Y]$, AX, AY et la courbure de l'espace, généralisant ainsi le cas riemannien dû à B. Kostant [14], puis au paragraphe 7 nous caractérisons les t. i. affines (resp. partielles) d'une connexion linéaire régulière de vecteurs. Au paragraphe 8 nous démontrons que la dérivée de Lie L (X) commute avec les dérivations covariantes des deux types ∇ et $\nabla^{\cdot}$ (resp. du type ∇) lorsque X définit une t. i. affine (resp. partielle) et inversement. Soit L l'algèbre de Lie des t. i. affines d'une connexion linéaire généralisée et $\tilde{L}$ son relèvement sur V. L'algèbre de Lie $\underline{A}\, z\,(L)$ correspondant à L est l'algèbre de Lie d'un groupe connexe $K\, z\,(L)$ des transformations linéaires de $T\pi z$. C'est l'étude de ce groupe qui fait l'objet des paragraphes 9, 10 et 11. Dans le cas où l'algèbre de Lie $\tilde{L}$ *est transitive sur* V nous avons alors la relation d'inclusion

$$\sigma z \subset K z(L) \subset \mathrm{No}(\sigma z),$$

où σz est le groupe d'holonomie homogène restreint en $z \in V$ et No (σz) indique le passage au normalisateur connexe. Le groupe K z (L) a été introduit dans le cas riemannien par B. Kostant [14], puis, dans le cas d'une connexion infinitésimale sur E (V_n), par André Lichnerowicz [18]. Enfin, dans la dernière partie de ce chapitre (§ 12 et 13) nous étudions les t. i. affines d'une connexion finslérienne ainsi que les isométries infinitésimales.

Le quatrième chapitre contient l'étude des transformations conformes d'une variété finslérienne *compacte*. Au paragraphe 1 nous établirons une formule de divergence qui sera employée dans la suite. Les t. i. conformes sont d'abord étudiées dans le cas général (§ 2), puis lorsque V_n est compacte, elles sont caractérisées par des conditions du second ordre (th. 1, § 3); des conditions équivalentes plus simples sont définies à la fin de ce paragraphe (th. 2). Au paragraphe 4 nous démontrons que le *plus grand groupe connexe des transformations affines partielles pour la connexion finslérienne coïncide avec le plus grand groupe connexe d'isométries*, généralisant ainsi le cas riemannien [25]. Et enfin dans le dernier paragraphe, nous étudions le cas particulier où le groupe K z (L) correspondant à l'algèbre de Lie d'isométries infinitésimales L coïncide avec σz.

CHAPITRE I.

Connexions linéaires sur un espace d'éléments linéaires.

I. — Connexions linéaires régulières.

1. Espaces $\mathcal{V}$ et W. — *a*. Soit V_n une variété différentiable de dimension n de classe C^∞ (1). L'espace $\mathcal{V}$ des vecteurs non nuls tangents à V_n peut être muni d'une structure de variété fibrée différentiable sur V_n de dimension $2n$, de groupe structural, le groupe linéaire de n variables réelles GL (n, R), la fibre étant isomorphe à l'espace vectoriel numérique R^n privé de l'origine. Dans la suite un point de $\mathcal{V}$ sera désigné par z. On désignera par π la projection canonique de chaque vecteur z de $\mathcal{V}$ sur son origine $x \in V_n$:

$$\pi z = x.$$

(1) Sauf indication contraire par le mot différentiable on entendra toujours de classe C^∞.

b. On appelle *direction orientée* tangente en un point $x \in V_n$, la classe d'équivalence définie sur les vecteurs non nuls d'origine x par la colinéarité positive : deux vecteurs z_1 et $z_2 \in \mathcal{V}$ non nuls d'origine x ont même direction s'il existe un scalaire $\lambda > 0$ tel que $z_2 = \lambda z_1$. L'espace quotient de $\mathcal{V}$ par la relation d'équivalence définie par la colinéarité positive sera appelé l'*espace des directions orientés tangentes à* V_n, il sera noté par W. L'espace $\mathcal{V}$ est fibré sur W avec pour groupe structural le groupe des homothéties positives. Un point de W est désigné par y; on désignera par η l'application canonique de $\mathcal{V}$ sur W; $\eta z = y$. Il est clair que W est douée d'une structure de variété fibrée différentiable sur V_n, de dimension $(2n - 1)$, de fibre-type homéomorphe à la boule S_{n-1} et de groupe structural le groupe $O(n)$. Si p est la projection canonique correspondante, on a

$$py = x.$$

Entre les applications p, η et π vient la relation

$$p \circ \eta = \pi.$$

2. Repères et corepères. — *a*. Soit $\mathcal{E}(V_n, F, G)$ un espace fibré différentiable sur la base V_n, de fibre-type F et de groupe structural G. Si f désigne une application différentiable d'une variété V' sur la variété V_n, on sait (Steenrod [23], p. 47) qu'on peut construire à partir de $\mathcal{E}(V_n, F, G)$ un espace fibré différentiable $\mathcal{E}'(V', F, G)$ de base V' et de mêmes fibre-type et groupe structural que $\mathcal{E}$, cet espace est l'*espace fibré induit de* $\mathcal{E}$ *par* f et sera noté $f^{-1}\mathcal{E}$. Si l'on désigne respectivement par g et g' les applications canoniques de $\mathcal{E} \to V_n$ et de $\mathcal{E}' \to V'$ nous avons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}' = f^{-1}\mathcal{E} & \xrightarrow{h} & \mathcal{E} \\ {\scriptstyle g'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ V' & \xrightarrow{f} & V_n \end{array}$$

où h est l'application *induite* de $\mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ et

$$f \circ g' = g \circ h.$$

b. Soit $E(V_n)$ l'espace fibré principal des repères linéaires sur V_n de fibre-type et groupe structural le groupe linéaire $GL(n, R)$. L'espace fibré induit de $E(V_n)$ par $p : W \to V_n$ (resp. par $\pi : \mathcal{V} \to V_n$) est alors un espace fibré principal $p^{-1}E(V_n)$ [resp. $\pi^{-1}E(V_n)$] de base W (resp. $\mathcal{V}$) de fibre-type et groupe structural identique à $GL(n, R)$ et qui sera dit l'*espace fibré sur* W (*resp. sur* $\mathcal{V}$) *des repères linéaires*. Il est clair que $\pi^{-1}E(V_n)$ n'est autre que l'espace fibré induit de $p^{-1}E(V_n)$ par $\eta : \mathcal{V} \to W$. Pour construire ces espaces on peut aussi procéder par la méthode usuelle du recouvrement.

c. Considérons un recouvrement de V_n par des voisinages ouverts et connexes ((U, V, ...). A chaque point $z \in \pi^{-1}(U)$ nous attachons différentiablement un *repère* $R^z{}_U$ base de $T\pi z$, c'est-à-dire un ensemble ordonné de n vecteurs de $T\pi z$, linéairement indépendants. Si U et V sont deux voisinages du recouvrement, soit $R^z{}_U$ et $R^z{}_V$ les repères attachés à $z \in \pi^{-1}(U \cap V)$ il existe une matrice régulière élément du groupe GL (n, R) telle que

$$R^z{}_V = R^z{}_U . A^U{}_V(z), \qquad z \in \pi^{-1}(U \cap V).$$

A un tel repère de $T\pi z$ correspond dans $\overset{\star}{T}\pi z$ une base duale ou *corepère* $\alpha^U z$: c'est un ensemble ordonné de n formes linéaires $(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n)$ linéairement indépendantes de $\overset{\star}{T}\pi z$. Si $\alpha^U z$ et $\alpha^V z$ sont les corepères duaux de $R^z{}_U$ et $R^z{}_V$ on a en notation matricielle la relation

$$\alpha^U z = A^U{}_V(z)\, \alpha^V z, \qquad z \in \pi^{-1}(U \cap V).$$

Soit Q^z l'ensemble des repères attachés à $z \in \pi^{-1}(U)$ sur la réunion

$$\bigcup_{z \in \mathcal{V}} Q^z, \tag{2.1}$$

on peut définir une topologie et une structure naturelle de variété différentiable : à tout système de coordonnées locales (x^i) de V_n nous faisons correspondre un système de coordonnées locales pour (2.1) où les coordonnées d'un élément $R^z \in \bigcup Q^z$ sont définies par les coordonnées (x^i, v^i) de son origine z, les v^i étant les composantes du vecteur z par rapport au repère naturel d'origine x, et par la matrice A définissant R^z par rapport au même repère naturel. La projection ρ qui à tout élément $R^z \in \bigcup Q^z$ fait correspondre son origine z définit $\bigcup Q^z$ comme espace fibré principal sur $\mathcal{V}$, de fibre-type et groupe structural le groupe GL (n, R). Cet espace sera identifié à $\pi^{-1} E(V_n)$.

3. Tenseurs et formes tensorielles. — *a. Champ de tenseurs au sens large.* — On appellera *champ de tenseurs affines au sens large* une application qu'à $z \in \mathcal{V}$ fait correspondre un élément de l'algèbre tensorielle affine construite sur $T\pi z$. Par abus de langage on dira tenseur au sens large au lieu de champ de tenseurs au sens large.

b. Champ de tenseurs au sens restreint. — Soit t un champ de tenseurs au sens large. A deux points z_1 et z_2 appartenant à $\eta^{-1}(y)$ correspondent deux valeurs $t(z_1)$ et $t(z_2)$ en général non proportionnelles. Supposons que pour $z_2 = \lambda z_1$ on ait nécessairement

$$t(z_2) = f(\lambda)\, t(z_1) \qquad (\lambda > 0), \tag{3.1}$$

où $f(\lambda)$ est une fonction continue de λ. Écrivons cette relation pour trois points de $\eta^{-1}(y)$, soit z_1, $z_2 = \lambda z_1$, $z_3 = \mu z_2$, nous obtenons

$$t(z_3) = f(\mu)\, t(z_2) = f(\mu) f(\lambda)\, t(z_1).$$

Comme $z_3 = \mu\lambda z_1$, on a aussi

$$t(z_3) = f(\mu\lambda)\, t(z_1),$$

il s'ensuit que f doit satisfaire à

$$f(\mu\lambda) = f(\mu) f(\lambda).$$

La seule solution continue de cette équation fonctionnelle est de la forme ([8], p. 19) :

$$f(\lambda) = \lambda^p,$$

où $p \in \mathrm{R}$. Nous appelons *champ de tenseurs au sens restreint* (par abus de langage tenseur restreint) un champ de tenseurs t tels que si z_1 et $z_2 \in \eta^{-1}(y)$, on ait pour $z_2 = \lambda z_1$:

$$(3.2) \qquad t(z_2) = \lambda^p\, t(z_1),$$

p sera dit le *degré* du tenseur t. En particulier, un champ de tenseurs au sens restreint de degré 0 n'est autre qu'un champ de tenseurs sur W.

c. Par r-forme tensorielle au *sens large* sur $\mathcal{V}$ d'un type déterminé (k, l) nous entendons une application qui à tout élément $z \in \mathcal{V}$ fait correspondre un élément de $\mathrm{T}^k_{\pi z} \otimes \overset{*}{\mathrm{T}}{}^l_{\pi z} \otimes \Lambda^{(r)}_z$, où $\Lambda^{(r)}_z$ est l'espace en z des r-formes à valeurs scalaires de $\mathcal{V}$. Une telle forme est une r-forme tensorielle de type habituel de l'espace fibré principal $\pi^{-1}\mathrm{E}(\mathrm{V}_n)$, λ étant une constante réelle > 0 donnée, soit μ_λ la transformation de $\mathcal{V}$ définie par $\mu_\lambda : z \to \lambda z$ une r-forme tensorielle τ au *sens restreint* de degré d'homogénéité p est une r-forme tensorielle sur $\mathcal{V}$ telle que pour tout λ, on a

$$\mu_\lambda^* \tau = \lambda^p \tau.$$

4. Connexions linéaires. — Soit $\pi^{-1}\mathrm{E}(\mathrm{V}_n)$ l'espace fibré principal sur $\mathcal{V}$ des repères linéaires. On appellera *connexion linéaire de vecteurs* une connexion infinitésimale de $\pi^{-1}\mathrm{E}(\mathrm{V}_n)$ [12]. Étant donné un recouvrement de V_n par des voisinages munis des sections locales de $\pi^{-1}\mathrm{E}(\mathrm{V}_n)$. Une connexion linéaire de vecteurs peut être définie par la donnée dans chaque U d'une 1-forme différentielle $\omega^z{}_{\mathrm{U}}$ sur $\pi^{-1}(\mathrm{U})$ à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe $\mathrm{GL}(n, \mathrm{R})$ et telle que si pour $z \in \pi^{-1}(\mathrm{U} \cap \mathrm{V})$, on a

$$\mathrm{R}^z{}_{\mathrm{V}} = \mathrm{R}^z{}_{\mathrm{U}} . \mathrm{A}^{\mathrm{U}}{}_{\mathrm{V}}(z), \qquad \mathrm{A} \in \mathrm{GL}(n, \mathrm{R}),$$

elles satisfassent à la condition de cohérence

$$(4.1) \qquad \omega^z{}_{\mathrm{V}} = \mathrm{A}^{-1\mathrm{U}}{}_{\mathrm{V}}\, \omega^z{}_{\mathrm{U}}\, \mathrm{A}^{\mathrm{U}}{}_{\mathrm{V}} + \mathrm{A}^{-1\mathrm{U}}{}_{\mathrm{V}}\, d\mathrm{A}^{\mathrm{U}}{}_{\mathrm{V}},$$

où dans chaque U muni de repères la forme ω^{σ}_{U} a été représentée par une matrice $(n \times n)$ dont les éléments sont *des* 1*-formes différentielles sur* π^{-1} (U) *:* les éléments des matrices de ω^{σ}_{U} et ω^{σ}_{V} seront notés par

$$\omega^{\sigma}_{U} = (\omega^{i}_{j}), \qquad \omega^{\sigma}_{V} = (\omega^{k'}_{h'}).$$

A la connexion linéaire envisagée correspond une 1-forme ω sur $\mathcal{V}$ à valeurs dans l'algèbre de Lie de GL (n, R). Nous appelons *connexion linéaire de directions* une connexion infinitésimale de p^{-1} E (V_n). Une telle connexion peut être définie d'une manière semblable à la précédente.

5 Différentielle absolue dans une connexion linéaire. Connexion linéaire régulière. — *a.* Étant donné un recouvrement de V_n par des voisinages munis de repères, considérons un champ de vecteurs W au sens large dans $\mathcal{V}$; pour $z \in \pi^{-1}$ (U) il peut être défini par la matrice à 1-ligne de ses composantes W^U. La différentielle absolue de W relativement à la connexion linéaire de vecteurs est

$$\nabla W^U = dW^U + \omega_U W^U, \tag{5.1}$$

où ∇W^U définit une forme différentielle linéaire sur $\mathcal{V}$ à valeurs vectorielles. De même, la différentielle absolue d'un vecteur covariant β_U est définie par

$$\nabla \beta_U = d\beta_U - \beta_U \omega_U. \tag{5.2}$$

Il existe un champ de vecteurs au sens large canonique : Celui qui à tout z de $\mathcal{V}$ fait correspondre le vecteur de $T\pi z$ défini par z. Ce champ de vecteurs canonique sera désigné dans la suite par v. De la considération de sa différentielle absolue on déduit les n-formes locales

$$\theta^i = \nabla v^i = dv^i + \omega^i_j v^j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{5.3}$$

qui définissent une 1-forme θ de type vectoriel. L'ensemble (α^i, dv^i) constitue un corepère de l'espace vectoriel Θz tangent à $\mathcal{V}$ en z; pour que l'ensemble (α^i, θ^i) constitue un corepère de Θz il faut et il suffit que le système de n-formes auquel se réduisent les θ^i pour $\alpha^i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ soit linéairement indépendant. Supposons que la connexion linéaire de vecteurs soit définie par

$$\omega^i_j = \Gamma^i_{jk} dx^k + \mathcal{C}^i_{jk} dv^k. \tag{5.4}$$

En vertu de la condition de cohérence les $\mathcal{C}^i_{jk}$ sont les composantes d'un tenseur de type (1, 2), si l'on désigne par μ^i les restrictions des θ^i à la fibre $\pi^{-1}(x)$ de (5.3) et (5.4) il résulte

$$\mu^i = dv^i + v^j \mathcal{C}^i_{jk} dv^k = (\delta^i_k + v^j \mathcal{C}^i_{jk})\, dv^k. \tag{5.5}$$

Nous sommes ainsi ramenés à étudier le système en dv défini par $\mu^i = 0$; pour que ce système n'admette d'autres solutions que la solution nulle il faut et il suffit que la matrice

(5.6) $$(\delta^i{}_k + v^j \mathcal{C}^i{}_{jk}) \qquad (\delta^i{}_k \text{ symbole de Krönecker})$$

soit *régulière*; s'il en est ainsi l'ensemble (α^i, θ^i) constitue *effectivement* un corepère de Θz. Il est clair que cette matrice définit un tenseur de type $(1, 1)$.

DÉFINITION 1.5. — *Une connexion linéaire de vecteurs est dite régulière si l'ensemble* $(\alpha^i, \theta^i = \nabla v^i)$ *constitue un corepère de l'espace vectoriel tangent à* $\mathcal{V}$ *en* $z \in \mathcal{V}$.

b. Dans la suite nous supposons que la connexion linéaire de vecteurs est régulière, rapportée au corepère (α^i, θ^i) la matrice $\omega^i{}_j$ s'écrit

(5.7) $$\omega^i{}_j = \gamma^i{}_{jk}\alpha^k + C^i{}_{jk}\theta^k;$$

ω étant régulière, on en déduit, en portant (5.7) dans (5.3), que la matrice

(5.8) $$L^i{}_k = \delta^i{}_k - v^j C^i{}_{jk}$$

est *régulière*. On désignera dans la suite par M l'inverse de L

$$L \circ M = M \circ L = E,$$

où E est la matrice identité; d'après la condition de cohérence (4.1), les coefficients des deux espèces de la connexion linéaire de vecteurs se transforment selon les formules

(5.9) $$\gamma^{k'}{}_{h'l'} = A^{k'}_i A^j_{h'} A^k_{l'} \gamma^i{}_{jk} + A^{k'}_r \,\partial l' A^r_{h'},$$

(5.10) $$C^{k'}{}_{h'l'} = A^{k'}_i A^j_{h'} A^k_{l'} C^i{}_{jk} + A^{k'}_r \,\dot{\partial l'} A^h_r,$$

où $\partial l'$ et $\dot{\partial l'}$ désignent respectivement les dérivées pfaffiennes par rapport aux $\alpha^{l'}$ et $\theta^{l'}$.

Si l'on considère un recouvrement de V_n muni des sections locales de E (V_n) les A^r_h, ne dépendent que de x, donc $\dot{\partial}_l A^r_h = 0$, la relation (5.10) se réduit à

(5.11) $$C^{k'}{}_{h'l'} = A^{k'}_i A^j_{h'} A^k_{l'} C^i{}_{jk}.$$

Il en résulte que, relativement aux repères d'un tel recouvrement, les $C^i{}_{jk}$ sont les composantes d'un tenseur T de type $(1, 2)$. Ainsi rapportée au corepère (dx^i, θ^i) la matrice $\omega^i{}_j$ de la connexion linéaire de vecteurs s'écrit

(5.12) $$\omega^i{}_j = \check{\Gamma}^i{}_{jk}dx^k + T^i{}_{jk}\theta^k;$$

(5.12) est identique à (5.4); en vertu de (5.3), on a

$$\check{\Gamma}^i{}_{jk}dx^k + T^i{}_{jk}\theta^k \equiv \Gamma^i{}_{jk}dx^k + \mathcal{C}^i{}_{jh}\left[\theta^h - v^r\left(\check{\Gamma}^h{}_{rk}dx^k + T^h{}_{rk}\theta^k\right)\right],$$

d'où

$$(5.13) \qquad \check{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \mathcal{C}^i_{jh} v^r \check{\Gamma}^h_{rk},$$

$$(5.14) \qquad T^i_{jk} = \mathcal{C}^i_{jk} - \mathcal{C}^i_{jh} v^r T^h_{rk}.$$

Il est clair que pour les corepères (dx^i, θ^i) les $L^i_k = \delta^i_k - v^j T^i_{jk}$ sont les composantes d'un tenseur de type (1, 1) il en est de même pour la matrice M inverse de L, définie par (5.6).

6. Formes différentielles extérieures. — *a.* Étant donnée une connexion linéaire régulière de vecteurs, dans le paragraphe qui précède nous avons montré que l'ensemble (α^i, θ^i) constitue une base pour les 1-formes sur $\mathcal{V}$, toute 1-forme sur $\mathcal{V}$ peut donc s'écrire

$$(6.1) \qquad \pi = a_i \alpha^i + b_i \theta^i.$$

Pour que π soit l'image réciproque sur $\mathcal{V}$ d'une 1-forme sur W par l'application canonique η ($\mathcal{V} \to$ W) il faut et il suffit que, quels que soient z_1 et $z_2 \in \eta^{-1}(y)$, on ait pour $z_2 = \lambda z_1$ $(\lambda > 0)$

$$(6.2) \qquad \pi(z_2) = \pi(z_1);$$

de $v_2 = \lambda v_1$ on obtient

$$\nabla v^i_2 = \lambda \nabla v^i_1 + v^i_1 \, d\lambda.$$

En portant cette relation dans (6.2) et en identifiant les deux membres, il vient

$$(6.3) \qquad \begin{cases} a_i(z_2) = a_i(z_1), \\ b_i(z_2) = \lambda^{-1} b_i(z_1), \\ b_i v^i = 0. \end{cases}$$

Dans la suite l'opération de multiplication contractée par v sera notée par un indice o ainsi la dernière relation de (6.3) s'écrit

$$b_0 = 0.$$

De même, étant donnée une 2-forme différentielle sur $\mathcal{V}$,

$$(6.4) \qquad \frac{1}{2} a_{ij} \alpha^i \wedge \alpha^j + b_{ij} \alpha^i \wedge \theta^j + \frac{1}{2} C_{ij} \theta^i \wedge \theta^j.$$

Pour qu'elle soit l'image réciproque sur $\mathcal{V}$ d'une 2-forme différentielle sur W par η ($\mathcal{V} \to$ W) il faut et il suffit qu'on ait pour z_1, $z_2 = \lambda z_1$ $(\lambda > 0) \in \eta^{-1}(y)$,

$$(6.5) \qquad \begin{cases} a_{ij}(z_2) = a_{ij}(z_1), \\ b_{ij}(z_2) = \lambda^{-1} b_{ij}(z_1), \qquad b_{i0} = 0, \\ C_{ij}(z_2) = \lambda^{-2} C_{ij}(z_1), \qquad C_{0j} = 0 = C_{i0}; \end{cases}$$

d'une façon générale, *pour qu'une r-forme sur* $\mathcal{V}$ *soit l'image réciproque d'une r-forme sur* W *par l'application canonique* η ($\mathcal{V} \to$ W) *il faut et il suffit que le coefficient de terme mixte p fois contenant* α^i *et* q ($p+q=r$) *fois contenant* θ^i *soit restreint de degré* $-q$ *satisfaisant q fois à la condition d'homogénéité de multiplication contractée par* $\mathcal{V}$. S'il en est ainsi, cette r-forme sera identifiée à une r-forme sur W. Le résultat précédent s'applique à la forme de connexion :

Pour qu'une connexion linéaire régulière ω *sur* $\mathcal{V}$ *soit l'image réciproque d'une connexion linéaire sur* W *par* η ($\mathcal{V} \to$ W) *il faut et il suffit que pour* z_1 *et* $z_2 = \lambda z_1$ ($\lambda > 0$) $\in \eta^{-1}(y)$ *on ait*

$$\text{(6.6)} \qquad \begin{cases} \gamma^i{}_{jk}(z_2) = \gamma^i{}_{jk}(z_1), \\ C^i{}_{jk}(z_2) = \lambda^{-1} C^i{}_{jk}(z_1), \qquad C^i{}_{j0} = 0 \end{cases}$$

et l'on identifiera ω à une connexion linéaire de directions. Il est clair que la condition d'homogénéité des coefficients de seconde espèce de la connexion est invariante par un changement de repères.

b. Soit t un tenseur au sens large sur $\mathcal{V}$ de type (1, 1), la différentielle absolue de t relativement à la connexion linéaire de vecteurs est

$$\nabla t^i_j = dt^i_j + \omega^i{}_r t^r_j - t^i_r \omega^r{}_j.$$

Dans ce qui suit nous désignerons par ∇_k et $\dot{\nabla}_k$ respectivement les dérivées covariantes par rapport aux corepères α^k et θ^k, en vertu de (5.7) la relation précédente nous donne

$$\nabla_k t^i_j = \partial_k t^i_j + \gamma^i{}_{rk} t^r_j - t^i_r \gamma^r{}_{jk},$$
$$\dot{\nabla}_k t^i_j = \dot{\partial}_k t^i_j + C^i{}_{rk} t^r_j - t^i_r C^r{}_{jk}.$$

En particulier, on a

$$\nabla_k v^i = 0, \qquad \dot{\nabla}_k v^i = \delta^i_k.$$

Dans ce qui précède nous avons introduit les dérivées pfaffiennes par rapport aux corepères (α^k, θ^k). Nous sommes aussi amenés dans la suite à raisonner en corepère (α^k, dv^k) si l'on désigne par δ_k et $\dot{\delta}_k$ les dérivées pfaffiennes relatives aux (α^k, dv^k) nous nous proposons d'établir les relations qui existent entre ces différentes dérivations. A cet effet portons l'expression de $\omega^i{}_j$ définie par (5.7) dans (5.3),

$$\text{(6.7)} \qquad \theta^k = dv^k + (\gamma^k{}_{ih}\alpha^h + C^k{}_{ih}\theta^h)\, v^i.$$

Soit Φ une fonction à valeurs réelles au sens large sur $\mathcal{V}$, en un point $z \in \mathcal{V}$ sa différentielle s'écrit indifféremment

$$d\Phi = \partial_k \Phi\, \alpha^k + \dot{\partial}_k \Phi\, \theta^k \equiv \delta_k \Phi\, \alpha^k + \dot{\delta}_k \Phi\, dv^k$$

En vertu de (6.7), la relation précédente devient

$$\partial_k \Phi\, \alpha^k + \dot{\partial}_k \Phi\, \theta^k \equiv (\delta_k \Phi - \dot{\delta}_r \Phi\, \gamma^r{}_{0k})\, \alpha^k + (\dot{\delta}_k \Phi - \dot{\delta}_r \Phi\, C^r{}_{0k})\, \theta^k,$$

d'où

$$\partial_k = \delta_k - \gamma^r{}_{0k}\,\dot\delta_r, \tag{6.8}$$

$$\dot\partial_k = \dot\delta_k - C^r{}_{0k}\,\dot\delta_r. \tag{6.9}$$

Ainsi les opérateurs de dérivations ∂ et $\dot\partial$ s'expriment au moyen de δ et $\dot\delta$ et les coefficients de la connexion par (6.8) et (6.9), la connexion linéaire envisagée étant régulière, les formules précédentes sont *inversibles* et l'on a

$$\delta_k = \partial_k + \gamma^h{}_{0k}\,M^r_h\,\dot\partial_r, \tag{6.10}$$

$$\dot\delta_k = M^r_k\,\dot\partial_r. \tag{6.11}$$

II. — Courbure et torsion d'une connexion linéaire régulière.

7. Tenseurs de torsion et de courbure d'une connexion linéaire générale. — 1° *Tenseurs de torsion.* — Soit ω une connexion linéaire régulière de vecteurs représentée dans chaque U par la matrice $\omega^i{}_j$ définie par (5.7) et satisfaisant à la condition de cohérence. Il est clair que les matrices à une ligne dont les éléments sont

$$\Sigma^i = d\alpha^i + \omega^i{}_j \wedge \alpha^j \tag{7.1}$$

définissent sur $\mathcal{V}$ une 2-forme à valeurs vectorielles. A cette 2-forme vectorielle on donne le nom de *forme de torsion* associée à la connexion linéaire envisagée. Le système de Pfaff $\alpha^i = 0$ étant complètement intégrable les $d\alpha^i$ s'écrivent

$$d\alpha^i = \frac{1}{2}\,b^i{}_{jk}\,\alpha^j \wedge \alpha^k + a^i{}_{jk}\,\alpha^j \wedge \theta^k, \tag{7.2}$$

où les $b^i{}_{jk}$ sont antisymétriques par rapport aux indices inférieurs; compte tenu de cette relation, la forme de torsion peut être mise sous la forme

$$\Sigma^i = d\alpha^i + \omega^i{}_j \wedge \alpha^j = \frac{1}{2}\,S^i{}_{jk}\,\alpha^j \wedge \alpha^k + T^i{}_{jk}\,\theta^k \wedge \alpha^j, \tag{7.3}$$

où

$$S^i{}_{jk} + S^i{}_{kj} = 0,$$

les $S^i{}_{jk}$ et $T^i{}_{jk}$ sont les composantes de deux tenseurs de type (1, 2) qui seront dits *les tenseurs de torsion* des deux espèces de la connexion. En portant (7.2) dans (7.3) et en identifiant les deux membres on obtient

$$S^i{}_{jk} = b^i{}_{jk} - (\gamma^i{}_{jk} - \gamma^i{}_{kj}), \tag{7.4}$$

$$T^i{}_{jk} = C^i{}_{jk} - a^i{}_{jk}. \tag{7.5}$$

2° *Tenseurs de courbure.* — *a.* A la connexion linéaire régulière ω sur $\mathcal{V}$ on peut associer une 2-forme tensorielle Ω de type $\operatorname{adj} g^{-1}$ sur $\mathcal{V}$ ayant pour éléments

$$\Omega^i{}_j = d\omega^i{}_j + \omega^i{}_r \wedge \omega^r{}_j. \tag{7.6}$$

A cette 2-forme on donne le nom de *forme de courbure* de la connexion. Rapportés au corepère (α^i, θ^i) les $\Omega^i{}_j$ s'écrivent

$$(7.7) \qquad \Omega^i{}_j = \frac{1}{2} R^i{}_{jkl}\alpha^k \wedge \alpha^l + P^i{}_{jkl}\alpha^k \wedge \theta^l + \frac{1}{2} Q^i{}_{jkl}\theta^k \wedge \theta^l;$$

les tenseurs R, P et Q seront dits les *tenseurs de courbure* de la connexion, le premier ainsi que le dernier sont antisymétriques par rapport aux indices k et l. Afin d'évaluer ces tenseurs, il suffit de développer le second membre de (7.6) et de l'identifier à (7.7). A cet effet, par différentiation extérieure, on obtient

$$(7.8) \qquad d\omega^i{}_j = \frac{1}{2}(\partial_k \gamma^i{}_{jl} - \partial_l \gamma^i{}_{jk})\alpha^k \wedge \alpha^l + (\partial_k C^i{}_{jl} - \dot\partial_l \gamma^i{}_{jk})\alpha^k \wedge \theta^l$$
$$+ \frac{1}{2}(\dot\partial_k C^i{}_{jl} - \dot\partial_l C^i{}_{jk})\theta^k \wedge \theta^l + \gamma^i{}_{jr} d\alpha^r + C^i{}_{jr} d\theta^r.$$

Dans la relation précédente nous voyons apparaître les différentiels de corepères; $d\alpha^r$ et $d\theta^r$, le premier sera calculé à partir de (7.3); quant au second nous avons, d'après (5.3),

$$(7.9) \qquad d\theta^r = d\omega^r{}_s v^s - \omega^r{}_s \wedge dv^s = \theta^s \wedge \omega^r{}_s + \Omega^r{}_0.$$

D'autre part, le dernier terme du second membre de (7.6) s'écrit

$$(7.10) \qquad \omega^i{}_r \wedge \omega^r{}_j = \frac{1}{2}(\gamma^i{}_{rk}\gamma^r{}_{jl} - \gamma^i{}_{rl}\gamma^r{}_{jk})\alpha^k \wedge \alpha^l + (\gamma^i{}_{rk}C^r{}_{jl} - \gamma^r{}_{jk}C^i{}_{rl})\alpha^k \wedge \theta^l$$
$$+ \frac{1}{2}(C^i{}_{rk}C^r{}_{jl} - C^i{}_{rl}C^r{}_{jk})\theta^k \wedge \theta^l.$$

Ajoutons (7.8) à (7.10) et identifions l'expression ainsi obtenue à (7.7), nous avons

$$(7.11) \qquad R^i{}_{jkl} = \overset{\star}{R}{}^i{}_{jkl} + C^i{}_{jr}R^r{}_{0kl},$$

$$(7.12) \qquad P^i{}_{jkl} = \overset{\star}{P}{}^i{}_{jkl} + C^i{}_{jr}P^r{}_{0kl},$$

$$(7.13) \qquad Q^i{}_{jkl} = \overset{\star}{Q}{}^i{}_{jkl} + C^i{}_{jr}Q^r{}_{0kl},$$

où nous avons posé

$$(7.14) \qquad \overset{\star}{R}{}^i{}_{jkl} = (\partial_k \gamma^i{}_{jl} - \partial_l \gamma^i{}_{jk}) + (\gamma^i{}_{rk}\gamma^r{}_{jl} - \gamma^i{}_{rl}\gamma^r{}_{jk}) + \gamma^i{}_{jr}(S^r{}_{kl} + \gamma^r{}_{kl} - \gamma^r{}_{lk}),$$

$$(7.15) \qquad \overset{\star}{P}{}^i{}_{jkl} = (\partial_k C^i{}_{jl} - \dot\partial_l \gamma^i{}_{jk}) + (\gamma^i{}_{rk}C^r{}_{jl} - \gamma^r{}_{jk}C^i{}_{rl} - \gamma^r{}_{lk}C^i{}_{jr}) + \gamma^i{}_{jr}(C^r{}_{kl} - T^r{}_{kl}),$$

$$(7.16) \qquad \overset{\star}{Q}{}^i{}_{jkl} = (\dot\partial_k C^i{}_{jl} - \dot\partial_l C^i{}_{jk}) + (C^i{}_{rk}C^r{}_{jl} - C^i{}_{rl}C^r{}_{jk}) + C^i{}_{jr}(C^r{}_{kl} - C^r{}_{lk}).$$

Multiplions les deux membres de (7.11) par v^j

$$(\delta^i{}_s - C^i{}_{0s})R^s{}_{0kl} = \overset{\star}{R}{}^i{}_{0kl}.$$

Mais l'expression entre parenthèses n'est autre que la matrice L^i_s définie par (5.8); la connexion linéaire envisagée étant régulière, il en résulte en multipliant les deux membres par M^r_i

$$(7.17) \qquad R^r{}_{0kl} = M^r_i \overset{\star}{R}{}^i{}_{0kl}.$$

Ainsi (7.11) s'écrit

$$R^i{}_{jkl} = \overset{\star}{R}{}^i{}_{jkl} + C^i{}_{jr} M^r_a \overset{\star}{R}{}^a{}_{0kl}. \tag{7.18}$$

Nous obtenons de même pour les deux autres tenseurs

$$P^i{}_{jkl} = \overset{\star}{P}{}^i{}_{jkl} + C^i{}_{jr} M^r_a \overset{\star}{P}{}^a{}_{0kl}, \tag{7.19}$$

$$Q^i{}_{jkl} = \overset{\star}{Q}{}^i{}_{jkl} + C^i{}_{jr} M^r_a \overset{\star}{Q}{}^a{}_{0kl}, \tag{7.20}$$

où $\overset{\star}{R}$, $\overset{\star}{P}$ et $\overset{\star}{Q}$ sont définis par (7.14), (7.15) et (7.16). Nous voyons donc que les *trois tenseurs de courbure d'une connexion linéaire régulière s'expriment au moyen des coefficients de la connexion et ses dérivées premières ainsi que les tenseurs de torsion par les formules* (7.18), (7.19) *et* (7.20).

b. Il est souvent commode de raisonner en corepère (dx^i, θ^i) de coordonnées locales, dans ce cas la matrice de la connexion linéaire est représentée par (5.12), de (7.2) il résulte

$$b^i{}_{jk} = 0, \qquad a^i{}_{jk} = 0, \tag{7.21}$$

de (7.4) on obtient

$$S^i{}_{jk} = -\left(\overset{\star}{\Gamma}{}^i{}_{jk} - \overset{\star}{\Gamma}{}^i{}_{kj}\right) \tag{7.22}$$

et les coefficients de seconde espèce $C^i{}_{jk}$, coïncident avec le tenseur de torsion $T^i{}_{jk}$. Les formules (7.14), (7.15) et (7.16) se réduisent dans ce cas à

$$\overset{\star}{R}{}^i{}_{jkl} = \partial_k \overset{\star}{\Gamma}{}^i{}_{jl} - \partial_l \overset{\star}{\Gamma}{}^i{}_{jk} + \overset{\star}{\Gamma}{}^i{}_{rk} \overset{\star}{\Gamma}{}^r{}_{jl} - \overset{\star}{\Gamma}{}^i{}_{rl} \overset{\star}{\Gamma}{}^r{}_{jk}, \tag{7.23}$$

$$\overset{\star}{P}{}^i{}_{jkl} = \nabla_k T^i{}_{jl} - \dot{\partial}_l \overset{\star}{\Gamma}{}^i{}_{jk}, \tag{7.24}$$

$$\overset{\star}{Q}{}^i{}_{jkl} = \dot{\nabla}_k T^i{}_{jl} - \dot{\nabla}_l T^i{}_{jk} + T^i{}_{rl} T^r{}_{jk} - T^i{}_{rk} T^r{}_{jl} \tag{7.25}$$

et les tenseurs de courbure s'écrivent

$$R^i{}_{jkl} = \overset{\star}{R}{}^i{}_{jkl} + T^i{}_{jr} M^r_a \overset{\star}{R}{}^a{}_{0kl}, \tag{7.26}$$

$$P^i{}_{jkl} = \overset{\star}{P}{}^i{}_{jkl} + T^i{}_{jr} M^r_a \overset{\star}{P}{}^a{}_{0kl}, \tag{7.27}$$

$$Q^i{}_{jkl} = \overset{\star}{Q}{}^i{}_{jkl} + T^i{}_{jr} M^r_a \overset{\star}{Q}{}^a{}_{0kl}. \tag{7.28}$$

D'après les formules précédentes, il est clair que les $\overset{\star}{R}$, $\overset{\star}{P}$ et $\overset{\star}{Q}$ définissent dans ce cas trois *tenseurs*.

8. Cas particulier d'une connexion linéaire de directions. Conditions de réduction. — *a.* Dans le cas d'une connexion linéaire régulière de directions on sait que les coefficients de $\omega^i{}_j$ satisfont à (6.6), les formules précédentes donnant les tenseurs de torsion et de courbure d'une connexion linéaire générale sont en particulier valables pour une telle connexion et l'on a, en outre,

$$T^i{}_{j0} = 0, \qquad P^i{}_{jk0} = 0, \qquad Q^i{}_{j0l} = Q^i{}_{jk0} = 0. \tag{8.1}$$

b. Soit ω une connexion linéaire régulière sur $\pi^{-1}\mathrm{E}(\mathrm{V}_n)$, supposons qu'elle soit l'image réciproque d'une connexion linéaire sur $\mathrm{E}(\mathrm{V}_n)$ par l'application canonique de $\pi^{-1}\mathrm{E}(\mathrm{V}_n)$ sur $\mathrm{E}(\mathrm{V}_n)$, rapportée au corepère (dx^i, dv^i) la matrice de cette connexion s'écrit

$$\omega^i{}_j = \Gamma^i{}_{jk}(x)\,dx^k. \tag{8.2}$$

Il en résulte, d'après (5.13) et (5.14),

$$\overset{\star}{\Gamma}{}^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{jk}(x), \qquad \mathrm{T}^i{}_{jk} = 0.$$

En vertu de (7.27), (7.24) et (6.9), on a

$$\mathrm{P}^i{}_{jkl} = \overset{\star}{\mathrm{P}}{}^i{}_{jkl} = -\,\partial^{\cdot}_l\,\Gamma^i{}_{jk} = -\,\partial^{\cdot}_l\,\Gamma^i{}_{jk} = 0.$$

Ainsi les tenseurs T et P sont o. Inversement, supposons que les tenseurs T et P d'une connexion linéaire régulière sur $\pi^{-1}\mathrm{E}(\mathrm{V}_n)$ soient nuls, des relations (5.13), (5.14), (6.9), (7.27) et (7.24) il résulte que $\mathcal{C}^i{}_{jk}$ est identiquement nul et $\overset{\star}{\Gamma}{}^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{jk}$ ne dépend pas de la direction, ainsi la matrice de la connexion linéaire est de la forme (8.2), d'où :

Théorème. — *Pour qu'une connexion linéaire régulière ω sur $\pi^{-1}\mathrm{E}(\mathrm{V}_n)$ soit l'image réciproque d'une connexion linéaire sur* $\mathrm{E}(\mathrm{V}_n)$ *par l'application canonique de* $\pi^{-1}\mathrm{E}(\mathrm{V}_n)$ *sur* $\mathrm{E}(\mathrm{V}_n)$, *il faut et il suffit que les tenseurs* ($\mathrm{T} = 0$, $\mathrm{P} = 0$).

S'il en est ainsi, $\mathrm{Q} = 0$ et la connexion peut être identifiée à une connexion linéaire sur $\mathrm{E}(\mathrm{V}_n)$.

9. Identités de Ricci. — Étant donné un recouvrement de V_n par des voisinages (U) munis des repères naturels de coordonnées locales. Soit X un champ de vecteurs au sens large, dans chaque (U), X définit une o-forme à valeurs vectorielles $\mathrm{X}_\varepsilon{}^{\mathrm{U}} = (\mathrm{X}^i)$, la relation $dd\mathrm{X}^i \equiv 0$ s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\partial_k\partial_l - \partial_l\partial_k)\,\mathrm{X}^i dx^k \wedge dx^l + (\partial_k\partial^{\cdot}_l - \partial^{\cdot}_l\,\partial_k)\,\mathrm{X}^i dx^k \wedge \theta^l \\ + \frac{1}{2}(\partial^{\cdot}_k\partial^{\cdot}_l - \partial^{\cdot}_l\,\partial^{\cdot}_k)\,\mathrm{X}^i\theta^k \wedge \theta^l + \partial^{\cdot}_r\,\mathrm{X}^i d\theta^r \equiv 0,\end{aligned}$$

où ∂_k et $\partial^{\cdot}_k$ sont les dérivées pfaffiennes par rapport au corepère local (dx^k, θ^k). En tenant compte de (7.9), la relation précédente nous donne

$$(\partial_k\partial_l - \partial_l\partial_k)\,\mathrm{X}^i + \partial^{\cdot}_r\,\mathrm{X}^i\mathrm{R}^r{}_{0kl} = 0, \tag{9.1}$$

$$(\partial_k\partial^{\cdot}_l - \partial^{\cdot}_l\,\partial_k)\mathrm{X}^i + \partial^{\cdot}_r\,\mathrm{X}^i\left(\mathrm{P}^r{}_{0kl} - \overset{\star}{\Gamma}{}^r{}_{lk}\right) = 0, \tag{9.2}$$

$$(\partial^{\cdot}_k\partial^{\cdot}_l - \partial^{\cdot}_l\,\partial^{\cdot}_k)\mathrm{X}^i + \partial^{\cdot}_r\,\mathrm{X}^i(\mathrm{Q}^r{}_{0kl} + \mathrm{T}^r{}_{kl} - \mathrm{T}^r{}_{lk}) = 0. \tag{9.3}$$

D'autre part, la dérivée covariante de type ∇l de X est

$$\nabla_l\mathrm{X}^i = \partial_l\mathrm{X}^i + \mathrm{X}^s\overset{\star}{\Gamma}{}^i{}_{sl}.$$

Une deuxième dérivation de même type nous donne

$$\nabla_k \nabla_l X^i = \partial_k \partial_l X^i + \partial_k X^s \overset{\star}{\Gamma}{}^i_{sl} + X^s \partial_k \overset{\star}{\Gamma}{}^i_{sl} + \partial_l X^r \overset{\star}{\Gamma}{}^i_{rk} + X^s \overset{\star}{\Gamma}{}^r_{sl} \overset{\star}{\Gamma}{}^i_{rk} - \nabla_r X^i \overset{\star}{\Gamma}{}^r_{lk}.$$

On en déduit, compte tenu de (9.1), (7.22) et (7.23), l'identité

$$(9.4) \qquad (\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) X^i = X^r R^i{}_{rkl} - \dot{\nabla}_r X^i R^r{}_{0kl} - \nabla_r X^i S^r{}_{kl}.$$

D'une manière analogue, on obtient

$$(9.5) \qquad (\nabla_k \dot{\nabla}_l - \dot{\nabla}_l \nabla_k) X^i = X^r P^i{}_{rkl} - \dot{\nabla}_r X^i P^r{}_{0kl} + \nabla_r X^i T^r{}_{kl},$$

$$(9.6) \qquad (\dot{\nabla}_k \dot{\nabla}_l - \dot{\nabla}_l \dot{\nabla}_k) X^i = X^r Q^i{}_{rkl} - \dot{\nabla}_r X^i Q^r{}_{0kl}.$$

Plus généralement, soit $t^{i_1 \ldots i_\alpha}{}_{j_1 \ldots j_\beta}$ un champ de tenseurs au sens large, nous obtenons

$$(9.7) \qquad (\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k)\, t^{i_1 \ldots i_\alpha}{}_{j_1 \ldots j_\beta} = \sum_{\gamma=1}^{\alpha} R^{i_\gamma}{}_{rkl}\, t^{i_1 \ldots r \ldots i_\alpha}{}_{j_1 \ldots j_\beta} - \sum_{\mu=1}^{\beta} R^r{}_{j_\mu kl}\, t^{i_1 \ldots i_\alpha}{}_{j_1 \ldots r \ldots j_\beta} - R^r{}_{0kl} \dot{\nabla}_r\, t^{i_1 \ldots i_\alpha}{}_{j_1 \ldots j_\beta} - S^r{}_{kl} \nabla_r\, t^{i_1 \ldots i_\alpha}{}_{j_1 \ldots j_\beta},$$

$$(9.8) \qquad (\nabla_k \dot{\nabla}_l - \dot{\nabla}_l \nabla_k)\, t^{i_1 \ldots i_\alpha}{}_{j_1 \ldots j_\beta} = \sum_{\gamma=1}^{\alpha} P^{i_\gamma}{}_{rkl}\, t^{i_1 \ldots r \ldots i_\alpha}{}_{j_1 \ldots j_\beta} - \sum_{\mu=1}^{\beta} P^r{}_{j_\mu kl}\, t^{i_1 \ldots i_\alpha}{}_{j_1 \ldots r \ldots j_\beta} - P^r{}_{0kl} \dot{\nabla}_r\, t^{i_1 \ldots i_\alpha}{}_{j_1 \ldots j_\beta} + T^r{}_{kl} \nabla_r\, t^{i_1 \ldots i_\alpha}{}_{j_1 \ldots j_\beta},$$

$$(9.9) \qquad (\dot{\nabla}_k \dot{\nabla}_l - \dot{\nabla}_l \dot{\nabla}_k)\, t^{i_1 \ldots i_\alpha}{}_{j_1 \ldots j_\beta} = \sum_{\gamma=1}^{\alpha} Q^{i_\gamma}{}_{rkl}\, t^{i_1 \ldots r \ldots i_\alpha}{}_{j_1 \ldots j_\beta} - \sum_{\mu=1}^{\beta} Q^r{}_{j_\mu kl}\, t^{i_1 \ldots i_\alpha}{}_{j_1 \ldots r \ldots j_\beta} - Q^r{}_{0kl} \dot{\nabla}_r\, t^{i_1 \ldots i_\alpha}{}_{j_1 \ldots j_\beta}.$$

Aux identités (9.7), (9.8) et (9.9) on donne le nom des *identités de Ricci*.

10. Identités de Bianchi. — A la connexion linéaire régulière sur $\mathcal{V}$ nous avons associé trois tenseurs de courbure et deux tenseurs de torsion; entre ces différents tenseurs et leurs dérivées covariantes il existe des relations que nous allons établir. Par différentiation extérieure, des formules (7.1) et (7.6) nous obtenons

$$(10.1) \qquad d\Sigma^i = \Omega^i{}_j \wedge \alpha^j - \omega^i{}_j \wedge \Sigma^j,$$

$$(10.2) \qquad d\Omega^i{}_j = \Omega^i{}_s \wedge \omega^s{}_j - \omega^i{}_s \wedge \Omega^s{}_j,$$

les relations (10.1) et (10.2) sont appelées les *identités de Bianchi*. En identifiant dans (10.1) les termes en $\alpha^k \wedge \alpha^l \wedge \alpha^m$ nous obtenons

$$\mathfrak{S}\, R^i{}_{mkl} - \mathfrak{S}\, T^i{}_{mr} R^r{}_{0kl} = \mathfrak{S}\, \nabla_m S^i{}_{kl} + \mathfrak{S}\, S^i{}_{rm} S^r{}_{kl}, \tag{10.3}$$

où $\mathfrak{S}$ désigne la somme des termes obtenus en permutant circulairement les indices (k, l, m) les coefficients des termes en $\alpha^k \wedge \alpha^l \wedge \theta^m$ et en $\alpha^k \wedge \theta^l \wedge \theta^m$ dans (10.1) s'évanouissent. De même, en identifiant dans (10.2) les termes en $\alpha^k \wedge \alpha^l \wedge \alpha^m$, $\alpha^k \wedge \alpha^l \wedge \theta^m$, $\alpha^k \wedge \theta^l \wedge \theta^m$ et $\theta^k \wedge \theta^l \wedge \theta^m$ nous obtenons successivement

$$\mathfrak{S}\, \nabla_m R^i{}_{jkl} + \mathfrak{S}\, S^r{}_{kl} R^i{}_{jrm} - \mathfrak{S}\, P^i{}_{jmr} R^r{}_{0kl} = 0, \tag{10.4}$$

$$\begin{aligned} \dot\nabla_m R^i{}_{jkl} + T^r{}_{km} R^i{}_{jrl} + T^r{}_{lm} R^i{}_{jkr} + \nabla_k P^i{}_{jlm} - \nabla_l P^i{}_{jkm} \\ + S^r{}_{kl} P^i{}_{jrm} - (P^i{}_{jkr} P^r{}_{0lm} - P^i{}_{jlr} P^r{}_{0km}) + Q^i{}_{jrm} R^r{}_{0kl} = 0, \end{aligned} \tag{10.5}$$

$$\begin{aligned} \dot\nabla_m P^i{}_{jkl} - \dot\nabla_l P^i{}_{jkm} + \nabla_k Q^i{}_{jlm} + P^i{}_{jrl} T^r{}_{km} - P^i{}_{jrm} T^r{}_{kl} \\ + Q^i{}_{jrm} P^r{}_{0kl} - Q^i{}_{jrl} P^r{}_{0km} - P^i{}_{jkr} Q^r{}_{0lm} = 0, \end{aligned} \tag{10.6}$$

$$\mathfrak{S}\, \dot\nabla_m Q^i{}_{jkl} + \mathfrak{S}\, Q^i{}_{jrm} Q^r{}_{0kl} = 0. \tag{10.7}$$

III. — Groupes d'holonomie et géodésiques.

11. Groupes d'holonomie. — *a*. Dans ce paragraphe nous rappelons quelques résultats concernant les groupes d'holonomie d'une connexion infinitésimale sur un espace fibré principal; pour la démonstration le lecteur pourra se reporter à A. Lichnerowicz [17]. Soit $\pi^{-1}E(V_n)$ l'espace fibré principal sur $\mathcal{V}$ des repères linéaires. Un point de cet espace sera représenté par u, on désignera par ρ l'application canonique de $\pi^{-1}E(V_n)$ sur $\mathcal{V}$ $(\rho u = z)$. Soit ω une connexion linéaire régulière au sens du paragraphe 5. Le groupe d'holonomie homogène Ψu de la connexion au point $u \in \pi^{-1}E(V_n)$ (resp. le groupe d'holonomie homogène restreint σu) est l'ensemble des $g \in GL(n, R)$ tels que u soit joint à ug^{-1} par un chemin horizontal (resp. par un chemin horizontal dont la projection sur $\mathcal{V}$ soit un lacet homotope à 0). Dans la suite, l'algèbre de Lie du groupe d'holonomie homogène restreint en un point $z = \rho u \in \mathcal{V}$ sera représentée par $\underline{\sigma} z$. Soit Θz l'espace vectoriel tangent à $\mathcal{V}$ en z et $\tilde{X} \in \Theta z$, nous poserons

$$i(\tilde{X})\, \alpha^i = X^i, \qquad i(\tilde{X})\, \theta^i = \dot{X}^i,$$

où i désigne l'opérateur du produit intérieur.

Théorème 1 [17]. — *Étant donné un voisinage $\overline{U} \subset \mathcal{V}$, soit $a^i_j(z)$ un champ de tenseurs au sens large continûment différentiable tel que pour chaque*

$z \in \overline{U}$, $a(z)$ définisse un élément de $\sigma z(\overline{U})$, alors pour tout vecteur $\tilde{X}(X, \dot{X}) \in \Theta z$ le tenseur en z

$$\nabla a^i{}_j(\tilde{X}), \qquad \tilde{X} \in \Theta z$$

définit un élément de $\sigma z(\overline{U})$.

THÉORÈME 2 [17]. — *En un point $z \in \overline{U}$ pour tout couple de vecteurs arbitraires $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ tangents à $\mathcal{V}$ en z, le tenseur $\Omega^i{}_j(\tilde{X}, \tilde{Y})$ définit un élément de l'algèbre de Lie $\sigma z(\overline{U})$.*

THÉORÈME 3 [17], [7]. — *L'algèbre de Lie du groupe d'holonomie homogène restreint σz_0 est l'algèbre de Lie engendrée par les éléments déduits des tenseurs en $z \in \mathcal{V}$*

$$\Omega^i{}_j(\tilde{X}, \tilde{Y}), \quad \tilde{X}, \tilde{Y} \in \Theta z$$

par transport le long des chemins reliant z_0 à z.

b. Soit $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ un couple de vecteurs arbitraires en $z \in \mathcal{V}$, d'après le théorème 2 le tenseur en z

$$\Omega^i{}_j(\tilde{X}, \tilde{Y}) = R^i{}_{jkl} X^k Y^l + P^i{}_{jkl}(X^k \dot{Y}^l - Y^k \dot{X}^l) + Q^i{}_{jkl} \dot{X}^k \dot{Y}^l$$

appartient à $\sigma z(\overline{U})$. En particulier, si nous choisissons successivement les couples de vecteurs

$$[(X, 0), (Y, 0)], \quad [(X, 0), (0, \dot{Y})], \quad [(0, \dot{X}), (0, \dot{Y})],$$

nous obtenons respectivement les tenseurs en z

$$R^i{}_j = R^i{}_{jkl} X^k Y^l, \qquad P^i{}_j = P^i{}_{jkl} X^k \dot{Y}^l, \qquad Q^i{}_j = Q^i{}_{jkl} \dot{X}^k \dot{Y}^l$$

appartenant à $\sigma z(\overline{U})$. En appliquant le théorème 1 à l'un des tenseurs ci-dessus on a, par exemple, pour $R^i{}_j$ et $\tilde{Z}_1 \in \Theta z$,

$$\nabla R^i{}_j(\tilde{Z}_1) = Z_1^r \nabla_r R^i{}_{jkl} X^k Y^l + \dot{Z}_1^r \dot{\nabla}_r R^i{}_{jkl} X^k Y^l + R^i{}_{jkl} \nabla X^k(\tilde{Z}_1) Y^l + R^i{}_{jkl} X^k \nabla Y^l(\tilde{Z}_1).$$

Le premier membre ainsi que les deux derniers termes du second membre appartiennent à $\sigma z(\overline{U})$, il en est alors de même pour les deux premiers termes du second membre. On obtient le même résultat pour les tenseurs $P^i{}_j$ et $Q^i{}_j$. En réitérant ce procédé, nous voyons que les tenseurs en z

(11.1) $\quad R^i{}_j, \quad \nabla R^i{}_{jkl}(\tilde{Z}_1) X^k Y^l, \quad \ldots, \quad \nabla \ldots \nabla R^i{}_{jkl}(\tilde{Z}_1 \ldots \tilde{Z}_q) X^k Y^l, \quad \ldots,$

(11.2) $\quad P^i{}_j, \quad \nabla P^i{}_{jkl}(\tilde{Z}_1) X^k \dot{Y}^l, \quad \ldots, \quad \nabla \ldots \nabla P^i{}_{jkl}(\tilde{Z}_1 \ldots \tilde{Z}_q) X^k \dot{Y}^l, \quad \ldots,$

(11.3) $\quad Q^i{}_j, \quad \nabla Q^i{}_{jkl}(\tilde{Z}_1) \dot{X}^k \dot{Y}^l, \quad \ldots, \quad \nabla \ldots \nabla Q^i{}_{jkl}(\tilde{Z}_1 \ldots \tilde{Z}_q) \dot{X}^k \dot{Y}^l, \quad \ldots$

définissent des éléments de $\sigma z(\overline{U})$. Dans la suite nous désignerons par $C^\alpha{}_0$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ les espaces vectoriels des tenseurs de type $(1, 1)$ engendrés par $R^i{}_j$, $P^i{}_j$ et $Q^i{}_j$ respectivement où les trois couples de vecteurs prennent toutes les valeurs possibles en $z \in \mathcal{V}$, par $C^\alpha_{(m,n)}$ ceux engendrés par les éléments correspondant à la $q^{\text{ième}}$ ($q = m + n$, m fois de type ∇_k et n fois de type $\dot\nabla_k$) dérivée covariante en z des tenseurs de courbure. Nous poserons

$$(11.4)\qquad C_0 = \bigcup_{\alpha=1}^{3} C^\alpha{}_0, \qquad C^\alpha_q = \bigcup_{m+n=q} C^\alpha_{(m,n)}, \qquad C_q = \bigcup_{\alpha=1}^{3} C^\alpha_q.$$

Soit $K^i{}_{jklr_1\ldots r_q}$ un tenseur au sens large; de la première identité de Ricci (9.7), il résulte

$$(11.5)\qquad \begin{aligned} &R^i{}_r K^r{}_{jklr_1\ldots r_q} - R^r{}_j K^i{}_{rklr_1\ldots r_q} \\ &\quad = X^p Y^s (\nabla_p \nabla_s - \nabla_s \nabla_p) K^i{}_{jklr_1\ldots r_q} + R^r{}_k K^i{}_{jrlr_1\ldots r_q} + R^r{}_l K^i{}_{jkrr_1\ldots r_q} \\ &\quad + \sum_{a=1}^{q} R^t{}_{r_a} K^i{}_{jklr_1\ldots t\ldots r_q} + R^r{}_0 \dot\nabla_r K^i{}_{jklr_1\ldots r_q} + S^r{}_{ps} X^p Y^s \nabla_r K^i{}_{jklr_1\ldots r_q}. \end{aligned}$$

En multipliant les deux membres par q vecteurs $Z_1^{r_1} \ldots Z_1^{r_m}$, $\dot Z_1^{r_1} \ldots \dot Z_1^{r_n}$ ($m + n = q$) ainsi que par un couple de vecteurs convenables selon le choix du tenseur de courbure, on obtient

$$(11.6)\qquad [C_0^1, C^\alpha_{(m,n)}] \subset C^\alpha_{(m,n)} + C^\alpha_{(m+1,n)} + C^\alpha_{(m,n+1)} + C^\alpha_{(m+2,n)},$$

d'où

$$(11.7)\qquad [C_0^1, C^\alpha_q] \subset C^\alpha_q + C^\alpha_{q+1} + C^\alpha_{q+2}.$$

De même, de l'identité (9.8), il résulte

$$\begin{aligned} P^i{}_r K^r{}_{jklr_1\ldots r_q} - P^r{}_j K^i{}_{rklr_1\ldots r_q} &= X^p \dot Y^s (\nabla_p \dot\nabla_s - \dot\nabla_s \nabla_p) K^i{}_{jklr_1\ldots r_q} \\ &+ P^r{}_k K^i{}_{jrlr_1\ldots r_q} + P^r{}_l K^i{}_{jkrr_1\ldots r_q} \\ &+ \sum_{a=1}^{q} P^t{}_{r_a} K^i{}_{jklr_1\ldots t\ldots r_q} + P^r{}_0 \dot\nabla_r K^i{}_{jklr_1\ldots r_q} - T^r{}_{ps} X^p \dot Y^s \nabla_r K^i{}_{jklr_1\ldots r_q}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$(11.8)\qquad [C_0^2, C^\alpha_{(m,n)}] \subset C^\alpha_{(m,n)} + C^\alpha_{(m+1,n)} + C^\alpha_{(m,n+1)} + C^\alpha_{(m+1,n+1)},$$

d'où

$$(11.9)\qquad [C_0^2, C^\alpha_q] \subset C^\alpha_q + C^\alpha_{q+1} + C^\alpha_{q+2}$$

et de la troisième identité de Ricci (9.9) nous obtenons

$$(11.10)\qquad [C_0^3, C^\alpha_{(m,n)}] \subset C^\alpha_{(m,n)} + C^\alpha_{(m,n+1)} + C^\alpha_{(m,n+2)},$$

d'où

$$(11.11)\qquad [C_0^3, C^\alpha_q] \subset C^\alpha_q + C^\alpha_{q+1} + C^\alpha_{q+2},$$

des formules (11.7), (11.9) et (11.11) on obtient

$$(11.12)\qquad [C_0, C^\alpha_q] \subset C^\alpha_q + C^\alpha_{q+1} + C^\alpha_{q+2},$$

d'où

$$(11.13)\qquad [C_0, C_q] \subset C_q + C_{q+1} + C_{q+2}.$$

De l'identité (9.7), nous obtenons par dérivation covariante

$$[C^1_{(1,0)}, C^\alpha_{(m,n)}] \subset C^\alpha_{(m,n)} + C^\alpha_{(m+1,n)} + C^\alpha_{(m,n+1)} + C^\alpha_{(m+2,n)} + C^\alpha_{(m+1,n+1)} + C^\alpha_{(m+3,n)},$$
$$[C^1_{(0,1)}, C^\alpha_{(m,n)}] \subset C^\alpha_{(m,n)} + C^\alpha_{(m+1,n)} + C^\alpha_{(m,n+1)} + C^\alpha_{(m,n+2)} + C^\alpha_{(m+1,n+1)} + C^\alpha_{(m+2,n+1)},$$

d'où

$$[C^1_1, C^\alpha_q] \subset C^\alpha_q + C^\alpha_{q+1} + C^\alpha_{q+2} + C^\alpha_{q+3}.$$

De même, des identités (9.8) et (9.9) on obtient aisément

$$[C^2_1, C^\alpha_q] \subset C^\alpha_q + C^\alpha_{q+1} + C^\alpha_{q+2} + C^\alpha_{q+3},$$
$$[C^3_1, C^\alpha_q] \subset C^\alpha_q + C^\alpha_{q+1} + C^\alpha_{q+2} + C^\alpha_{q+3}.$$

En réitérant ce procédé et en raisonnant par récurrence, nous obtenons d'une façon générale

$$(11.14)\qquad [C^\beta_l, C^\alpha_q] \subset C^\alpha_q + C^\alpha_{q+1} + \ldots + C^\alpha_{q+l+2} \qquad (l \leq q;\ \beta, \alpha = 1, 2, 3),$$

d'où

$$(11.15)\qquad [C_l, C_q] \subset C_q + C_{q+1} + \ldots + C_{q+l+2} \qquad (l \leq q).$$

De la formule (11.15) il résulte qu'en un point $z \in \mathcal{V}$, l'espace vectoriel engendré par C_q $(q = 0, 1, 2, \ldots)$ définit une sous-algèbre de Lie $\underline{\sigma}'z$ de $\underline{\sigma}z$: il existe donc un sous-groupe connexe $\sigma'z$ de σz (Chevalley, [11], p. 109, th. 1) qui admet comme algèbre de Lie $\underline{\sigma}'z$. Au groupe $\sigma'z$ on donne le nom de *groupe d'holonomie infinitésimal en* $z \in \mathcal{V}$. D'autre part, de (11.14) il résulte que les espaces vectoriels engendrés par C^α_q $(q = 0, 1, 2, \ldots)$ définissent pour $(\alpha = 1, 2, 3)$ trois idéaux $\underline{r}'_z$, $\underline{p}'_z$ et $\underline{q}'_z$ de $\underline{\sigma}z$, il existe donc trois sous-groupes connexes invariants r'_z, p'_z et q'_z de σz admettant comme algèbre de Lie $\underline{r}'_z$, $\underline{p}'_z$ et $\underline{q}'_z$ respectivement et $\underline{\sigma}'z$ peut être considérée comme somme de $\underline{r}'_z$, $\underline{p}'_z$ et $\underline{q}'_z$.

12. Connexions affines. — *a*. Soit $\mathcal{E}(V_n)$ l'espace fibré principal des repères affines sur V_n de fibre-type et groupe structural le groupe affine sur l'espace de dimension n [17]. Nous désignerons par $\pi^{-1}\mathcal{E}(V_n)$ l'espace fibré induit de $\mathcal{E}(V_n)$ par l'application canonique $\pi : \mathcal{V} \to V_n$. $\pi^{-1}\mathcal{E}(V_n)$ sera dit l'*espace fibré principal sur* $\mathcal{V}$ *des repères affines*. Considérons un recouvrement de V_n par des voisinages ouverts U, à chaque $z \in \pi^{-1}(U)$ nous associons différentiablement l'ensemble $S^z_U = (\xi^U, R^z_U)$, d'un élément $\xi \in T\pi z$ et d'un repère linéaire R^z_U base de l'espace vectoriel $T\pi z$. S^z est appelé ici un repère affine d'origine ξ. Si U et V sont deux voisinages d'un recouvrement de V_n, soit S^z_U et S^z_V les repères affines

attachés à $z \in \pi^{-1}(\mathrm{U} \cap \mathrm{V})$ il existe une matrice $\mathrm{B}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{U}}(z)$ $((n+1) \times (n+1))$ telle que

$$\mathrm{S}_{\mathrm{V}}^{z} = \mathrm{S}_{\mathrm{U}}^{z} \mathrm{B}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{U}}(z), \qquad z \in \pi^{-1}(\mathrm{U} \cap \mathrm{V}), \tag{12.1}$$

avec

$$\mathrm{B}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{U}}(z) = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_{\mathrm{V}}^{\mathrm{U}} \\ 0 & \mathrm{A}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{U}}(z) \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{A} \in \mathrm{GL}(n, \mathrm{R}), \tag{12.2}$$

où $\varphi_{\mathrm{V}}^{\mathrm{U}}$ est la matrice à une ligne représentant $(\xi^{\mathrm{V}} - \xi^{\mathrm{U}})$ par rapport à $\mathrm{R}_{\mathrm{U}}^{z}$. Nous pouvons ainsi procéder pour tous les voisinages d'un recouvrement de V_n, nous dirons dans ce cas que le recouvrement a été muni de repères affines.

b. Nous appelons *connexion affine de vecteurs* (²) une connexion infinitésimale sur $\pi^{-1}\mathcal{E}(\mathrm{V}_n)$. Considérons un recouvrement de V_n par des voisinages munis des repères affines. Une connexion affine de vecteurs est définie ici par la donnée pour chaque U, d'une 1-forme différentielle π_{U}^{z} sur $\pi^{-1}(\mathrm{U})$ à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe affine. Une telle forme peut être représentée par une matrice $(n+1) \times (n+1)$ qu'on désignera par π_{U}^{z}

$$\pi_{\mathrm{U}}^{z} = \begin{pmatrix} 0 & \pi^{i}{}_{0}(z) \\ 0 & \pi^{i}{}_{j}(z) \end{pmatrix} \qquad [z \in \pi^{-1}(\mathrm{U})] \tag{12.3}$$

et telle que si pour $z \in \pi^{-1}(\mathrm{U} \cap \mathrm{V})$, on a

$$\mathrm{S}_{\mathrm{V}}^{z} = \mathrm{S}_{\mathrm{U}}^{z} \mathrm{B}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{U}}(z),$$

elle doit satisfaire à la condition de cohérence

$$\pi_{\mathrm{V}}^{z} = \overset{-1}{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{U}}(z)\, \pi_{\mathrm{U}}^{z} \mathrm{B}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{U}}(z) + \overset{-1}{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{U}}(z)\, d\mathrm{B}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{U}}(z), \tag{12.4}$$

où $\mathrm{B}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{U}}$ est défini par (12.2). A la connexion affine envisagée correspond une 1-forme π sur $\pi^{-1}\mathcal{E}(\mathrm{V}_n)$ à valeurs dans l'algèbre de Lie de B. Comme dans le cas de la connexion affine sur une variété différentiable V_n (³) il est aisé de démontrer qu'à toute connexion linéaire de vecteurs on peut associer canoniquement une connexion affine de vecteurs. Plus généralement, soient sur $\mathcal{V}$ une connexion linéaire ω et une 1-forme (semi-basique) vectorielle contravariante Ψ, sur chaque $\pi^{-1}(\mathrm{U})$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \Psi_{z}^{\mathrm{U}} + \overset{\omega}{\nabla}\xi^{\mathrm{U}} \\ 0 & \omega_{\mathrm{U}}^{z} \end{pmatrix}, \tag{12.15}$$

où $\overset{\omega}{\nabla}$ désigne la différentielle absolue dans la connexion linéaire ω, définit une connexion affine qui sera dite *associée à* (ω, Ψ). On appellera *Connexion*

(²) Voir *Connexion coaffine d'espace d'éléments linéaires* [4].

(³) La connexion affine dans ce sens est due à A. Lichnerowicz, *voir* [17], p. 88-94.

affine de directions, une connexion infinitésimale sur $p^{-1}\mathcal{E}(V_n)$. Une telle connexion sera définie d'une manière semblable à la précédente.

13. Géodésiques. — *a.* Soit $x(t)$ un chemin de V_n d'origine $x_0 = x(0)$ et d'extrémité $x_1 = x(1)$ défini par une application différentiable de $I(0 \leqq t \leqq 1)$ dans V_n. Étant donné un repère affine $\bar{S}(0)$ au-dessus de x_0, considérons le chemin $\bar{S}(t)$ de $\pi^{-1}\mathcal{E}(V_n)$ issu de $\bar{S}(0)$ au-dessus de $x(t)$. Le développement de $\bar{S}(t)$ sur l'espace affine Tx_0 peut être défini à partir d'une suite de repères affines $S(t) = [\xi(t), R(t)]$ telle que $S(0) = \bar{S}(0)$ et

$$dS(t) = S(t)\,\pi_{\bar{S}}(d\bar{S}), \tag{13.1}$$

où $\pi_{\bar{S}}(d\bar{S})$ est la valeur de la forme de connexion affine pour le vecteur $d\bar{S}$ tangent à $\pi^{-1}\mathcal{E}(V_n)$ en $\bar{S}(t)$. Supposons que la connexion affine soit définie par (12.5) et choisissons pour $\bar{S}(t)$ les repères $\bar{S}(t) = [0, \bar{R}(t)]$, un tel chemin de $\pi^{-1}\mathcal{E}(V_n)$ sera identifié à un chemin de $\pi^{-1}E(V_n)$, la formule (13.1) s'écrit

$$d\xi(t) = R(t)\,\Psi_{\bar{R}}(d\bar{R}), \tag{13.2}$$

$$dR(t) = R(t)\,\omega_{\bar{R}}(d\bar{R}). \tag{13.3}$$

Le chemin défini par $\xi(t)$, au moyen du développement, sur l'espace affine tangent Tx_0 sera dit le développement de $x(t)$ sur l'espace affine Tx_0. *Ce chemin ne dépend pas du chemin choisi dans l'espace fibré* $\pi^{-1}E(V_n)$ [17]. $x(t)$ sera dit un arc géodésique pour la connexion affine envisagée si son développement est un segment de droite : pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit, d'après (13.2) et (13.3), qu'il existe un scalaire $\lambda(t)$ tel que

$$\frac{\nabla u}{dt} = \lambda(t)\,u, \tag{13.4}$$

où u est la matrice à une ligne définie par

$$u = \frac{\Psi}{dt}. \tag{13.5}$$

En coordonnées locales, l'équation (13.4) s'écrit

$$\frac{\nabla(\Psi^i{}_j\dot{x}^j)}{dt} = \frac{\nabla\Psi^i{}_j}{dt}\dot{x}^j + \Psi^i{}_j\frac{\nabla\dot{x}^j}{dt} = \lambda(t)\,\Psi^i{}_j\dot{x}^j \qquad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}\right).$$

Désormais *la matrice* $(\Psi^i{}_j)$ *sera supposée régulière*, en multipliant les deux membres par $\Psi'^r{}_i$ on obtient

$$\Psi'^r{}_i\frac{\nabla\Psi^i{}_j}{dt}\dot{x}^j + \frac{\nabla\dot{x}^r}{dt} = \lambda(t)\,\dot{x}^r. \tag{13.6}$$

Nous sommes ainsi amenés à introduire une connexion linéaire $\bar{\omega}$ sur $\mathcal{V}$ telle que

$$\bar{\omega}^i{}_j = \omega^i{}_j + \Psi'^i{}_k\nabla\Psi^k{}_j. \tag{13.7}$$

d'où

$$\overline{\nabla} \dot{x}^r = \nabla \dot{x}^r + \Psi'^r{}_i \nabla \Psi^i{}_j \dot{x}^j,$$

où $\overline{\nabla}$ est le symbole de la dérivation covariante dans $\overline{\omega}$, ainsi (13.6) s'écrit

$$\frac{\overline{\nabla} \dot{x}^r}{dt} = \lambda(t) \dot{x}^r.$$

Nous énoncerons donc le :

THÉORÈME 1. — *La géodésique de la connexion affine de vecteurs associée à* (ω, Ψ) *coïncide avec celle de la connexion linéaire* $\overline{\omega}$ *définie par* (13.7).

b. Soit X un champ de vecteurs au sens large et Y son image par Ψ

(13.8) $$\Psi : \quad Y^i = \Psi^i{}_j X^j \qquad (X \in T\pi z).$$

Cette application définit un endomorphisme de $T\pi z$ sur lui-même, d'après (13.7) la dérivée covariante de Y s'écrit

(13.9) $$\nabla Y^i = \nabla \Psi^i{}_j X^j + \Psi^i{}_j \nabla X^j = \nabla \Psi^i{}_j X^j + \Psi^i{}_j (\overline{\nabla} X^j - \Psi'^j{}_r \nabla \Psi^r{}_k X^k) = \Psi^i{}_j \overline{\nabla} X^j.$$

Inversement, soit X un champ de vecteurs arbitraire et Y son image par Ψ, si l'on suppose qu'il existe entre $\overline{\nabla} X$ et ∇Y la relation (13.9), où $\overline{\nabla}$ (resp. ∇) est la dérivée covariante dans la connexion linéaire arbitraire $\overline{\omega}$ (resp. ω), alors $\overline{\omega}$ et ω sont liés par (13.7). En effet, en vertu de (13.8), la relation (13.9) s'écrit

$$\nabla(\Psi^i{}_j X^j) = \nabla \Psi^i{}_j X^j + \Psi^i{}_j \nabla X^j = \Psi^i{}_j \overline{\nabla} X^j,$$

d'où

$$\nabla \Psi^i{}_k X^k = \Psi^i{}_j (\overline{\nabla} X^j - \nabla X^j) = \Psi^i{}_j (\overline{\omega}^j{}_k - \omega^j{}_k) X^k,$$

X étant arbitraire on a

$$\nabla \Psi^i{}_k = \Psi^i{}_j (\overline{\omega}^j{}_k - \omega^j{}_k).$$

Comme Ψ est régulière, en multipliant les deux membres par $\Psi'^r{}_i$ nous obtenons (13.7), d'où :

THÉORÈME 2. — *Pour qu'une connexion linéaire* $\overline{\omega}$ *soit liée à* ω *par* (13.7) *il faut et il suffit que* ∇Y *soit l'image de* $\overline{\nabla} X$ *par* Ψ $(X \to Y)$ *quel que soit le champ de vecteurs* X.

14. RELATIONS ENTRE LES COURBURES. — La connexion linéaire $\overline{\omega}$ étant liée à ω par (13.7), supposons ω régulière, à quelle condition $\overline{\omega}$ est régulière elle aussi ? A cet effet, par dérivation covariante, on obtient

(14.1) $$\overline{\theta}^i = \overline{\nabla} v^i = dv^i + v^j \overline{\omega}^i{}_j = \theta^i + \Psi'^i{}_k \nabla \Psi^k{}_j v^j.$$

Pour que $\overline{\omega}$ soit régulière, il faut et il suffit que la matrice

(14.2) $$\delta^i{}_k + \Psi'^i{}_h \nabla^{\cdot}_k \Psi^h{}_j v^j = \Psi'^i{}_h \nabla^{\cdot}_k \Psi^h{}_0$$

soit régulière. Il en résulte que si la connexion linéaire ω est régulière il n'en est pas nécessairement de même pour $\overline{\omega}$. Nous sommes ainsi amenés à supposer dans la suite que les connexions $\overline{\omega}$ et ω sont toutes deux régulières [4]. Soit $\overline{\Omega}$ la forme de courbure de $\overline{\omega}$, ses éléments sont :

$$\overline{\Omega}^i{}_j = d\overline{\omega}^i{}_j + \overline{\omega}^i{}_r \wedge \overline{\omega}^r{}_j. \tag{14.3}$$

En vertu de (13.7), on a

$$d\overline{\omega}^i{}_j = d\omega^i{}_j + d\Psi^i{}_s \wedge \nabla \Psi^s{}_j + \Psi^i{}_s d\nabla \Psi^s{}_j. \tag{14.4}$$

En exprimant dans (14.4) $d\Psi^i{}_s$ en fonction de $\nabla\Psi^i{}_s$ et en développant le dernier terme

$$\begin{aligned} d\overline{\omega}^i{}_j = {} & \Psi^i{}_s (d\omega^s{}_m + \omega^s{}_k \wedge \omega^k{}_m) \Psi^m{}_j - \omega^i{}_r \wedge \omega^r{}_j \\ & + \nabla\Psi^i{}_s \wedge \nabla\Psi^s{}_j - \Psi^m{}_s \omega^i{}_m \wedge \nabla\Psi^s{}_j - \Psi^i{}_s \nabla\Psi^s{}_m \wedge \omega^m{}_j. \end{aligned} \tag{14.5}$$

De même, d'après (13.7), on a

$$\overline{\omega}^i{}_r \wedge \overline{\omega}^r{}_j = \omega^i{}_r \wedge \omega^r{}_j + \Psi^m{}_s \omega^i{}_m \wedge \nabla\Psi^s{}_j + \Psi^i{}_s \nabla\Psi^s{}_r \wedge \omega^r{}_j - \nabla\Psi^i{}_s \wedge \nabla\Psi^s{}_j. \tag{14.6}$$

Si Ω est la forme de courbure de ω, en ajoutant (14.5) à (14.6) on obtient

$$\overline{\Omega}^i{}_j = \Psi^i{}_s (d\omega^s{}_m + \omega^s{}_k \wedge \omega^k{}_m) \Psi^m{}_j = \Psi^i{}_s \Omega^s{}_m \Psi^m{}_j.$$

Relation exprimée sous forme matricielle

$$\overline{\Omega} = \Psi \Omega \Psi^{-1}. \tag{14.7}$$

On en déduit les relations entre les tenseurs de courbure correspondants.

CHAPITRE II.

Variétés finslériennes.

I. — Connexions finslériennes.

1. Variétés métriques. — Soit g_{ij} un champ de tenseurs au sens restreint de degré o symétrique et défini positif. Au champ de tenseurs g_{ij} on peut faire correspondre un scalaire au sens restreint de degré 2 tel que

$$2F = \mathcal{L}^2 = g_{ij}(x, v) v^i v^j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.1}$$

---

[4] Les connexions linéaires ω et $\overline{\omega}$ étant supposées régulières, il est aisé d'évaluer la matrice inverse de (14.2). Tout d'abord on a

$$\overline{\nabla} \Psi^h{}_j + \nabla \Psi^h{}_j = 0$$

et les θ^i s'écrivent

$$\theta^i = \overline{\theta}^i + \Psi^i{}_h \overline{\nabla} \Psi^h{}_j v^j,$$

d'où la matrice inverse de (14.2) est

$$\Psi^k{}_h \overline{\nabla}_i \Psi^h{}_0.$$

où $\mathcal{L}$ ($>$ o) sera par définition la longueur du vecteur v tangent à V_n en x. Lorsqu'il en est ainsi nous dirons que la donnée de g doue V_n d'une *structure de variété métrique*, g_{ij} est dit le tenseur métrique, $\mathcal{L}$ sera appelé la fonction fondamentale de la structure métrique. A l'aide du tenseur g on peut normer l'espace vectoriel tangent Tpy ($x = py$). Un repère orthonormé en $y \in W$ est, par définition, une base orthonormée de l'espace vectoriel euclidien Tpy; c'est un ensemble ordonné de n vecteurs unitaires $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de Tpy tels que leurs produits scalaires deux à deux soient donnés par

$$e_i e_j = \delta_{ij} \, (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Nous désignerons par $M(W, g)$ l'espace fibré principal sur W des repères orthonormés. Cet espace admet une fibre et un groupe structural identique au groupe orthogonal $O(n)$. Considérons un recouvrement de V_n par des voisinages (U) munis des repères orthonormés, soit R_U^y un repère orthonormé en $y \in p^{-1}(U)$ si $y \in p^{-1}(U \cap V)$, on a

$$R_V^y = R_U^y C_V^U(y),$$

où la matrice C est un élément du groupe $O(n)$; par rapport à un tel recouvrement la métrique de l'espace s'écrit

$$ds^2 = 2F(x, dx) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha^i)^2. \tag{1.2}$$

2. Connexions euclidiennes. — Nous appelons *Connexion euclidienne de directions* une connexion infinitésimale sur $M(W, g)$. Considérons un recouvrement de V_n par des voisinages munis des sections locales de $M(W, g)$, une connexion euclidienne de directions est définie ici par la donnée dans chaque U d'une 1-forme $\omega_U^y (y \in p^{-1}(U))$ sur $p^{-1}(U)$ à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe orthogonal $O(n)$. Une telle forme est représentée par une matrice $(n \times n)$ *antisymétrique* que nous désignerons encore par ω_U^y

$$\omega_U^y = (\omega_{ij}) \qquad (\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0),$$

ses éléments sont *des 1-formes différentielles de y*. Si, pour $y \in p^{-1}(U \cap V)$, on a

$$R_V^y = R_U^y C_V^U(y) \qquad (y \in p^{-1}(U \cap V)), \tag{2.1}$$

les ω_U^y doivent satisfaire à la condition de cohérence

$$\omega_V^y = \overset{-1}{C}{}_V^U(y)\, \omega_U^y C_V^U(y) + \overset{-1}{C}{}_V^U(y)\, dC_V^U(y) \qquad (C \in O(n)). \tag{2.2}$$

Nous allons démontrer qu'à toute connexion euclidienne de directions est naturellement associée une connexion linéaire. Considérons la connexion linéaire définie par rapport à un recouvrement de V_n muni de repères orthonormés par les matrices π_U^V telles que

$$\pi_U^V = \omega_U^V.$$

La connexion linéaire ainsi définie est manifestement indépendante de recouvrement choisi, elle est dite la connexion linéaire associée à la connexion euclidienne, la différentielle absolue du tenseur $g_{ij}(y)$ dans cette connexion est donnée par

$$\nabla g_{ij} = dg_{ij} - \omega^h{}_i g_{hj} - \omega^h{}_j g_{ih}. \tag{2.3}$$

Les repères étant orthonormés, on a

$$g_{ij} = \delta_{ij}.$$

La relation (2.3) s'écrit

$$\nabla g_{ij} = -(\omega_{ji} + \omega_{ij}) = 0. \tag{2.4}$$

Il en résulte que la différentielle absolue du tenseur métrique est nulle. Inversement, soit π une connexion linéaire telle que la différentielle absolue du tenseur métrique dans cette connexion soit nulle; d'après (2.3) et (2.4), il est clair que pour un recouvrement de V_n par des voisinages munis des sections locales de $M(W, g)$ les matrices π_U^V de la connexion linéaire sont antisymétriques, d'autre part si $y \in p^{-1}(U \cap V)$, on a

$$R_V^V = R_U^V C_V^U(y),$$

où C_V^U est un élément du groupe $O(n)$; pour la connexion linéaire envisagée on a la condition de cohérence

$$\pi_V^V = \overset{-1}{C}{}_V^U \pi_U^V C_V^U + \overset{-1}{C}{}_V^U dC_V^U.$$

Il en résulte que les matrices $\omega_U^V = \pi_U^V$ définissent une 1-forme de connexion à valeurs dans l'algèbre de Lie de $O(n)$, c'est-à-dire une connexion euclidienne, nous énonçons le

THÉORÈME. — *Pour qu'une connexion linéaire sur* W *soit naturellement associée à une connexion euclidienne de directions, il faut et il suffit que la différentielle absolue du tenseur métrique* $g_{ij}(y)$ *dans cette connexion soit nulle.*

La connexion euclidienne est dite *régulière* si la connexion linéaire associée est régulière et cette dernière sera identifiée à la connexion euclidienne envisagée.

Remarque sur la courbure. — Soit ω une connexion euclidienne régulière; considérons un recouvrement de V_n par des voisinages munis des repères orthonormés, nous pouvons donc placer tous les indices en positions inférieures, la forme de courbure s'écrit :

$$\Omega_{ij} = d\omega_{ij} + \omega_{ir} \wedge \omega_{rj} \qquad (\Omega_{ij} = g_{ih}\Omega^h{}_j).$$

Par rapport aux repères précédents, les ω_{ij} sont antisymétriques, d'où

$$\Omega_{ij} + \Omega_{ji} = 0.$$

Cette relation étant valable en repères orthonormés est valable en repères arbitraires, il en résulte que les trois tenseurs de courbure d'une connexion euclidienne régulière sont antisymétriques par rapport aux deux premiers indices.

3. Système de générateurs sur W. — *a.* Au champ de vecteurs canonique v on peut faire correspondre le vecteur

$$l = \mathcal{L}^{-1} v,$$

il est manifestement de degré 0, donc définit canoniquement un champ de vecteurs unitaire de degré 0, c'est-à-dire un champ sur W de vecteurs. Soit ω une connexion euclidienne régulière sur W, en un point $x \in V_n$, la fibre $p^{-1}(x)$ de W peut être identifiée à la sphère de $\pi^{-1}(x)$ de centre l'origine et de rayon 1 si l'espace vectoriel tangent à $\pi^{-1}(x)$ est rapporté au corepère (μ^i), l'espace vectoriel tangent à $p^{-1}(x)$ est défini par l'équation

$$l_i \mu^i = 0. \tag{3.1}$$

La différentielle absolue de l dans la connexion euclidienne régulière est

$$\beta^i = \nabla l^i = \mathcal{L}^{-1}(\theta^i - l^i d\mathcal{L}), \tag{3.2}$$

l étant unitaire, on a

$$l_i \beta^i = \mathcal{L}^{-1}(l_i \theta^i - d\mathcal{L}) = 0, \tag{3.3}$$

d'où

$$\partial_h \mathcal{L} = 0, \qquad \dot{\partial}_h \mathcal{L} = l_h. \tag{3.4}$$

Ainsi (3.2) s'écrit

$$\beta^i = \mathcal{L}^{-1}(\theta^i - l^i l_h \theta^h), \tag{3.5}$$

d'où

$$\nabla_k l^i = 0, \qquad \dot{\nabla}_k l^i = \mathcal{L}^{-1}(\delta^i_k - l^i l_k). \tag{3.6}$$

D'après (3.5), il est clair que les β^i définissent sur $\mathcal{V}$ une 1-forme à valeurs vectorielles. Cette 1-forme étant de degré 0 et satisfaisant à (3.1) peut être identifiée à une 1-forme sur W à valeurs vectorielles. Si l'on désigne par γ^i les restrictions des β^i à la fibre $p^{-1}(x)$, elles satisfont à

$$l_i \gamma^i = 0. \tag{3.7}$$

Ainsi toute combinaison linéaire des γ^i est une 1-forme à valeurs dans l'espace vectoriel tangent à $p^{-1}(x)$ en y. Inversement, les γ^i forment un *système de générateurs* pour ces 1-formes, autrement dit entre les γ^i il n'existe pas de relation linéaire non triviale distincte de (3.7). En effet, soit

$$a_i \gamma^i = 0 \tag{3.8}$$

une telle relation où les a_i ne sont pas tous nuls, en vertu de (3.5) elle s'écrit

$$a_i(\mu^i - l^i l_h \mu^h) = 0,$$

soit

$$(a_i - a_h l^h l_i)\mu^i = 0,$$

la connexion euclidienne étant régulière, les μ^i sont ainsi linéairement indépendants; on a

$$a_i = (a_h l^h) l_i$$

et la relation (3.8) n'est pas distincte de (3.7). Il en résulte que *pour une connexion euclidienne régulière l'ensemble* (α^i, β^i) *forme un système de générateurs pour les* 1*-formes de l'espace vectoriel tangent à* W.

b. Soit π une forme linéaire sur W, son image réciproque sur $\mathcal{V}$ par $\eta\,(\mathcal{V} \to W)$ que nous désignerons encore par π, peut se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme

$$\pi = C_i \alpha^i + d_i \theta^i, \tag{3.9}$$

où les C_i et d_i sont des vecteurs restreints de degré 0 et — 1 respectivement et les d_i satisfont à la condition d'homogénéité (chap. I, § 6)

$$d_0 = 0. \tag{3.10}$$

Si nous rapportons π au système de générateurs (α^i, β^i), elle s'écrit

$$\pi = a_i \alpha^i + b_i \beta^i. \tag{3.11}$$

En portant dans (3.9) l'expression de θ^i tirée de (3.5), compte tenu de (3.10) nous obtenons

$$\pi = C_i \alpha^i + \mathcal{L}\, d_i \beta^i. \tag{3.12}$$

En identifiant (3.11) à (3.12), on a

$$a_i = C_i, \qquad b_i = \mathcal{L}\, d_i.$$

Ainsi rapportée au système de générateurs (α^i, β^i) toute 1-forme sur W peut s'écrire de la forme (3.11), où les a_i et b_i sont des vecteurs restreints de degré 0 et les b_i satisfont à

$$b_0 = 0. \tag{3.13}$$

Démontrons l'unicité de l'expression de π définie par (3.11). En effet, supposons que $\pi = 0$; la restriction de π à la fibre $p^{-1}(x)$ donne, compte tenu de $b_0 = 0$,

$$b_i\gamma^i = \mathcal{L}^{-1} b_i(\mu^i - l^i l_h \mu^h) = \mathcal{L}^{-1} b_i \mu^i = 0.$$

Les μ^i sont linéairement indépendants, d'où

$$b_i = 0;$$

de $\pi = \alpha_i \alpha^i = 0$ on a alors $a_i = 0$, ainsi l'unicité est établie. Si nous rapportons l'espace vectoriel tangent à W au système de générateurs (α^i, β^i) la 1-forme de la connexion euclidienne régulière de directions s'écrit d'une manière unique sous la forme

$$\omega^i{}_j = \gamma^i{}_{jk}\alpha^k + B^i{}_{jk}\beta^k, \tag{3.14}$$

où les $B^i{}_{jk}$ satisfont à

$$B^i{}_{j0} = 0, \tag{3.15}$$

les $\gamma^i{}_{jk}$ et $B^i{}_{jk}$ sont des quantités restreintes de degré 0. En portant dans (3.14) l'expression de β^i définie par (3.5), on a alors avec les notations du chapitre I (§ 5),

$$B^i{}_{jk}(x, v) = \mathcal{L}(x, v) C^i{}_{jk}(x, v). \tag{3.16}$$

4. Connexions spéciales [3]. — Soit ω une connexion euclidienne régulière de directions, la différentielle absolue du tenseur métrique dans cette connexion est nulle

$$dg_{ij} = \omega^h{}_i g_{hj} + \omega^h{}_j g_{ih}. \tag{4.1}$$

Nous poserons

$$\gamma_{jik} = g_{jh}\gamma^h{}_{ik}, \qquad C_{jik} = g_{jh}C^h{}_{ik}. \tag{4.2}$$

Ainsi (4.1) s'écrit

$$dg_{ij} = (\gamma_{ijk} + \gamma_{jik})\alpha^k + (C_{ijk} + C_{jik})\theta^k,$$

d'où

$$\gamma_{ijk} + \gamma_{jik} = \partial_k g_{ij}, \tag{4.3}$$

$$C_{ijk} + C_{jik} = \dot\partial_k g_{ij}. \tag{4.4}$$

En vertu de (6.6) du chapitre I, les $\dot\partial_k g_{ij}$ satisfont à

$$\dot\partial_0 g_{ij} = 0.$$

Supposons que les tenseurs de torsion associés à ω satisfassent à

$$S_{ijk} = 0 \qquad (S_{ijk} = g_{ir}S^r{}_{jk}), \tag{4.5}$$

$$T_{ijk} = T_{jik} \qquad (T_{ijk} = g_{ir}T^r{}_{jk}). \tag{4.6}$$

Des formules (7.4) et (7.5) du chapitre I, il résulte qu'entre les coefficients de la connexion euclidienne envisagée il existe en outre les relations suivantes :

$$(4.7) \qquad \gamma_{ijk} - \gamma_{ikj} = b_{ijk} \qquad (b_{ijk} = g_{ir} b^r{}_{jk}),$$

$$(4.8) \qquad C_{ijk} - C_{jik} = a_{ijk} - a_{jik} \qquad (a_{ijk} = g_{ir} a^r{}_{jk}).$$

En ajoutant les équations (4.4) à (4.8), nous obtenons

$$(4.9) \qquad C_{ijk} = \frac{1}{2} \dot{\partial}_k g_{ij} + \frac{1}{2}(a_{ijk} - a_{jik}).$$

D'autre part, des relations (4.3) et (4.7), il vient

$$(4.10) \qquad \gamma_{jik} + \gamma_{ikj} = \partial_k g_{ij} - b_{ijk}.$$

En permutant circulairement les indices i, j, k, on obtient

$$(4.11) \qquad \gamma_{kji} + \gamma_{jik} = \partial_i g_{jk} - b_{jki},$$

$$(4.12) \qquad \gamma_{ikj} + \gamma_{kji} = \partial_j g_{ki} - b_{kij}.$$

En retranchant (4.12) de la somme de (4.10) et (4.11) on a, après un changement d'indice,

$$(4.13) \qquad \gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ik} - \partial_i g_{kj}) - \frac{1}{2}(b_{ikj} + b_{jik} - b_{kji}).$$

Inversement, il est aisé de vérifier que les quantités γ_{ijk} et C_{ijk} définies par (4.9) et (4.13) satisfont aux systèmes d'équations (4.3), (4.4), (4.7) et (4.8), d'où :

Définition. — *Nous appelons connexion spéciale toute connexion euclidienne régulière telle que les tenseurs de torsion correspondant satisfassent à* (4.5) *et* (4.6). *Les coefficients d'une telle connexion peuvent être exprimés par les formules* (4.9) *et* (4.13).

5. Cas des repères orthonormés et coordonnées locales pour la classe des connexions spéciales. — *a*. Considérons un recouvrement de V_n par des voisinages munis des repères orthonormés et soit $R(e_i)$ un tel repère, nous avons

$$e_i e_j = \delta_{ij} = g_{ij}$$

dans ce cas, les formules (4.9) et (4.13) se réduisent à

$$(5.1) \qquad C_{ijk} = \frac{1}{2}(a_{ijk} - a_{jik}) \qquad (C_{ij0} = 0),$$

$$(5.2) \qquad \gamma_{ijk} = -\frac{1}{2}(b_{jik} + b_{ikj} - b_{kji}).$$

b. Si V_n est recouvert par des voisinages (U) munis des repères naturels de coordonnées locales les quantités a et b s'annulent, les coefficients des deux espèces de la connexion spéciale se réduisent à :

(5.3) $$T_{ijk} = \frac{1}{2}\dot{\partial}_k g_{ij} \qquad (T_{ij0} = 0),$$

(5.4) $$\overset{*}{\Gamma}_{ijk} = \frac{1}{2}(\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ik} - \partial_i g_{kj}).$$

6. Variétés finslériennes. — *a.* Dans le paragraphe 1 nous avons défini la longueur du vecteur canonique v_x tangent à V_n, en x par une fonction $\mathcal{L}(x, v_x)$ positive restreinte de degré 1. Substituons dx à v_x dans $\mathcal{L}$ et posons

(6.1) $$ds = \mathcal{L}(x, dx),$$

$\mathcal{L}$ est, par définition, l'élément d'arc. Soit $l(x_0, x_1)$ un chemin de V_n d'origine x_0 et d'extrémité x_1; en vertu de (6.1), la longueur de $l(x_0, x_1)$ est définie par

(6.2) $$s(x_0, x_1) = \int_{l(x_0, x_1)} \mathcal{L}(x, \dot{x})\, du \qquad \left(\dot{x} = \frac{dx}{du}\right),$$

$\mathcal{L}$ étant restreint de degré 1, l'intégrale du second membre est indépendante de la représentation paramétrique choisie pour le chemin $l(x_0, x_1)$. La variation première de cette intégrale à extrémités non fixes de l'arc $l(x_0, x_1)$ est donnée par

(6.3) $$\delta s = \pi_1 - \pi_0 - \int_{l(x_0, x_1)} \left(\frac{d}{du}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i}\right)\delta x^i\, du,$$

où π est une forme différentielle linéaire restreinte de degré 0 définie par

(6.4) $$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\delta x^i$$

et π_0 et π_1 correspondent aux points variés x_0 et x_1. On appellera *extrémale* du problème de calcul des variations attachés à $\mathcal{L}(x, \dot{x})$ une solution du système différentiel du second ordre

(6.5) $$\frac{d}{du}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En choisissant pour la représentation paramétrique du chemin $l(x_0, x_1)$ la longueur d'arc $s(x_0, x) = s$ le système (6.5) s'écrit

(6.5)' $$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0 \qquad \left(\dot{x} = \frac{dx}{ds}\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ce système admet l'intégrale première

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = 1 \qquad \left(\dot{x} = \frac{dx}{ds}\right).$$

Il en résulte, en multipliant les deux membres de (6.5)′ par $\mathcal{L}$, et en introduisant la fonction $2\,F = \mathcal{L}^2$, le système différentiel du second ordre

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Soit, en développant,

$$(6.6) \qquad \dot{\partial}_i \dot{\partial}_j F\, \ddot{x}^j + \partial_i \dot{\partial}_j F\, \dot{x}^j - \partial_i F = 0 \qquad \left(\ddot{x} = \frac{d^2 x}{ds^2},\ \dot{x} = \frac{dx}{ds}\right) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Le problème du calcul des variations attaché à la fonction $\mathcal{L}(x, \dot{x})$ *est dit régulier si le coefficient de* $\ddot{x}$ *dans* (6.6) *est une forme quadratique non dégénérée*, c'est-à-dire si

$$(6.7) \qquad \text{dét}(\dot{\partial}_i \dot{\partial}_j F) \neq 0.$$

Ce problème est dit *positivement régulier* si, $\dot{\partial}_i \dot{\partial}_j F$ est *défini positif*. Il est clair que pour un recouvrement de V_n par des voisinages munis des repères naturels de coordonnées locales, les $\dot{\partial}_i \dot{\partial}_j F$ sont les composantes d'un tenseur symétrique d'ordre 2 restreint de degré 0; nous poserons

$$(6.8) \qquad g_{ij}(x, v_x) = \dot{\partial}_i \dot{\partial}_j F(x, v_x).$$

Ce tenseur définit sur V_n une structure de variété métrique. Multiplions les deux membres de (6.8) par v^i et v^j successivement en vertu de l'homogénéité de F, on a

$$g_{ij}(x, v_x)\, v^i v^j = v^j\, \dot{\partial}_j F = 2\,F = \mathcal{L}^2(x, v_x).$$

Nous sommes ainsi conduits à la définition suivante :

DÉFINITION. — *Soit* V_n *une variété différentiable et* $\mathcal{V}$ *l'espace des vecteurs non nuls tangents à* V_n, *une structure de variété finslérienne sur* V_n *est définie par la donnée d'une fonction* $\mathcal{L}(x, v_x)$ *positive restreinte de degré* 1 *sur* $\mathcal{V}$, *conduisant à un problème régulier de calcul des variations.*

Dans la suite, nous supposons que $\mathcal{L}$ conduit à un problème *positivement régulier.*

b. Dans ce qui précède nous avons vu qu'une structure de variété finslérienne détermine sur V_n une structure de variété métrique par le tenseur g_{ij} défini par (6.8), nous nous proposons ici d'étudier le problème inverse.

Considérons une structure métrique définie par la donnée d'un champ de tenseurs $g_{ij}(x, v)$ symétrique restreint de degré 0 défini positif. A ce champ de tenseurs nous associons un scalaire $2\,F = g_{ij} v^i v^j$ définissant le carré de la norme du vecteur v tangent à V_n en x. *A quelle condition* g_{ij}

est-il le tenseur métrique d'une variété finslérienne? autrement dit, à quelle condition g_{ij} peut-il se déduire de F par

$$g_{ij} = \dot{\partial}_{ij}F, \tag{6.9}$$

$$2F = g_{ij}(x, v)v^i v^j \quad ? \tag{6.10}$$

Il est clair que pour un recouvrement de V_n par des voisinages munis des repères naturels de coordonnéss locales le second membre de (6.9) est un tenseur si pour un tel recouvrement g_{ij} est défini par (6.9), nous obtenons par dérivation

$$\dot{\partial}_k g_{ij} = \dot{\partial}_{ijk} F,$$

d'où

$$\dot{\partial}_k g_{ij} = \dot{\partial}_i g_{jk} = \dot{\partial}_j g_{ki},$$

il en résulte

$$v^i \dot{\partial}_k g_{ij} = 0. \tag{6.11}$$

Inversement, cette condition est suffisante : en effet, si la relation (6.11) est satisfaite, de l'expression 2 F on déduit par dérivation

$$\dot{\partial}_k F = \frac{1}{2}(\dot{\partial}_k g_{ij})v^i v^j + g_{kj}v^j = g_{kj}v^j.$$

Une deuxième dérivation nous donne

$$\dot{\partial}_{kl} F = (\dot{\partial}_l g_{kj})v^j + g_{kl} = g_{kl}.$$

Nous énoncerons le :

THÉORÈME. — *Pour qu'un tenseur métrique g_{ij} soit le tenseur métrique d'une variété finslérienne, il faut et il suffit qu'on ait* (6.11).

7. CONNEXION FINSLÉRIENNE. — Nous avons mis en évidence dans le paragraphe qui précède une classe de connexions euclidiennes régulières : *les connexions spéciales.* L'étude précédente va nous permettre d'établir qu'il existe pour une structure de variété finslérienne, une connexion linéaire spéciale et une seule qui lui correspond. Nous raisonnons en coordonnées locales. Soit g_{ij} le tenseur métrique d'une variété finslérienne défini par (6.8). Soit (ω^i_j) la matrice d'une connexion euclidienne spéciale associée à g_{ij}

$$\omega^i_j = \Gamma^i_{jk}\,dx^k + \mathcal{C}^i_{jk}\,dv^k = \check{\Gamma}^i_{jk}\,dx^k + T^i_{jk}\theta^k, \tag{7.1}$$

où les T^i_{jk} et $\check{\Gamma}^i_{jk}$ sont définis par (5.3) et (5.4). En vertu de (5.3) et (6.9) du chapitre I on a, en coordonnées locales,

$$T_{ijk} = \frac{1}{2}\dot{\partial}_k g_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{\partial}_k g_{ij} - T^r_{0k}\dot{\partial}_r g_{ij}). \tag{7.2}$$

Le tenseur métrique g_{ij} de la vérité finslérienne satisfait à (6.11); multipliant les deux membres de (7.2) par v^i on obtient

$$v^i \mathrm{T}_{ijk} = \frac{1}{2} v^i \partial^{\cdot}_k g_{ij} = 0\,;$$

T étant symétrique par rapport aux deux premiers indices, on a

$$\mathrm{T}^i{}_{0k} = 0. \tag{7.3}$$

Inversement, si la relation (7.3) est satisfaite d'après (6.9) du chapitre I, *les dérivées pfaffiennes des deux types* $\partial^{\cdot}_k$ *et* $\delta^{\cdot}_k$ (*coordonnées locales*) *coïncident* et, en multipliant les deux membres de (5.3) par v^i, on retrouve la relation (6.11). Ainsi (7.3) *est équivalente à* (6.11) et le tenseur de torsion de la connexion spéciale associée à g_{ij} s'écrit

$$\mathrm{T}_{ijk} = \frac{1}{2} \delta^{\cdot}_k g_{ij} = \frac{1}{2} \delta^{\cdot\cdot\cdot}_{kij} \mathrm{F} \qquad (\mathrm{T}_{0jk} = \mathrm{T}_{i0k} = \mathrm{T}_{ij0} = 0), \tag{7.4}$$

les T et $\mathcal{C}$ sont liés par la formule (5.14) du chapitre I; vu l'homogénéité de T ils coïncident et l'on a

$$\mathrm{T}^i{}_{jk} = \mathcal{C}^i{}_{jk} = \frac{1}{2} g^{ir} \delta^{\cdot\cdot\cdot}_{rjk} \mathrm{F}. \tag{7.5}$$

Nous avons ainsi évalué le tenseur de torsion à l'aide de g et ses dérivées premières par rapport à v. Avant de calculer les coefficients Γ et $\overset{*}{\Gamma}$ nous remarquons que, en vertu de l'homogénéité du tenseur T, la connexion linéaire (7.1) est nécessairement régulière. Car la matrice (5.6) du chapitre I se réduit à la matrice identité. D'après la formule (5.13) du chapitre I, on a

$$\overset{*}{\Gamma}{}^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{jk} - \mathrm{T}^i{}_{jr} \overset{*}{\Gamma}{}^r{}_{0k}, \tag{7.6}$$

vu l'homogénéité de T, nous avons

$$\overset{*}{\Gamma}{}^i{}_{0k} = \Gamma^i{}_{0k}. \tag{7.7}$$

D'autre part, en vertu de (6.8) du chapitre I et (7.4), on a

$$\partial_k g_{ij} = \delta_k g_{ij} - 2\,\mathrm{T}_{ijr} \overset{*}{\Gamma}{}^r{}_{0k}, \tag{7.8}$$

d'où les coefficients $\overset{*}{\Gamma}_{ijk}$ définis par (5.4) s'écrivent

$$\overset{*}{\Gamma}_{ijk} = \frac{1}{2}(\delta_k g_{ij} + \delta_j g_{ik} - \delta_i g_{kj}) - v^r\left(\mathrm{T}_{ijs} \overset{*}{\Gamma}{}^s{}_{rk} + \mathrm{T}_{iks} \overset{*}{\Gamma}{}^s{}_{rj} - \mathrm{T}_{kjs} \overset{*}{\Gamma}{}^s{}_{ri}\right). \tag{7.9}$$

Multiplions cette relation par v^j, compte tenu de l'homogénéité du tenseur T, on a

$$v^j \overset{*}{\Gamma}_{ijk} = \frac{1}{2}(\delta^{\cdot}_{ki} \mathrm{F} + v^j \delta_j g_{ik} - \delta^{\cdot}_{ik} \mathrm{F}) - \mathrm{T}_{iks} \overset{*}{\Gamma}{}^s{}_{rj} v^r v^j. \tag{7.10}$$

Multiplions les deux membres par v^k :

$$(7.11)\qquad v^k v^j \overset{*}{\Gamma}_{ijk} = \frac{1}{2}(\partial^{\cdot}_{ki}F + v^j \partial_j g_{ik} - \partial^{\cdot}_{ik}F)v^k = v^k \partial^{\cdot}_{ki}F - \partial_i F.$$

Nous poserons

$$(7.12)\qquad 2G^r(x, v) = \overset{*}{\Gamma}{}^r{}_{jk}(x, v)\, v^j, v^k$$

d'où

$$(7.13)\qquad 2g_{ir}G^r(x, v) = \overset{*}{\Gamma}_{ijk}v^j v^k = v^k \partial^{\cdot}_{ki}F - \partial_i F.$$

La relation précédente détermine G^r en fonction de F et ses dérivées, nous remarquons en outre que le dernier membre de cette relation figure dans le système différentiel des extrémales (6.6); une dérivation par rapport à v^r nous donne

$$(7.14)\qquad g_{is}\,\partial^{\cdot}_r G^s = \frac{1}{2}(\partial^{\cdot}_{ri}F + v^k \partial_k g_{ir} - \partial^{\cdot}_{ir}F) - 2T_{irs}G^s = v^j \overset{*}{\Gamma}_{ijr},$$

d'où

$$(7.15)\qquad \partial^{\cdot}_k G^r = \overset{*}{\Gamma}{}^r{}_{0k}.$$

En portant (7.15) dans (7.9), on obtient

$$(7.16)\qquad \overset{*}{\Gamma}_{ijk} = \frac{1}{2}(\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ik} - \partial_i g_{kj}) - (T_{ijs}\,\partial^{\cdot}_k G^s + T_{iks}\,\partial^{\cdot}_j G^s - T_{kjs}\,\partial^{\cdot}_i G^s).$$

Pour obtenir l'expression de $\overset{*}{\Gamma}{}^r{}_{jk}$ il suffit de multiplier les deux membres de (7.16) par g^{ir}.

Ainsi les coefficients $\overset{*}{\Gamma}{}^i{}_{jk}$ se trouvent complètement déterminés à partir du tenseur métrique de la variété finslérienne et de ses dérivées premières. Quant aux coefficients $\Gamma^i{}_{jk}$, on a d'après (7.6),

$$(7.17)\qquad \Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ik} - \partial_i g_{kj}) + T_{kjs}\,\partial^{\cdot}_i G^s - T_{iks}\,\partial^{\cdot}_j G^s,$$

les Γ et $\mathcal{C}$ déterminent donc une connexion linéaire régulière et une seule sur W. Inversement, il est aisé de démontrer que les quantités Γ et $\mathcal{C}$ définies par (7.17) et (7.4) déterminent canoniquement une connexion linéaire spéciale associée au tenseur g_{ij}, d'où :

Théorème [3], [9]. — *Étant donnée une variété finslérienne* V_n, *il existe une connexion euclidienne spéciale et une seule qui lui correspond et cette connexion sera dite, la connexion finslérienne.*

8. Tenseurs de courbure de la connexion finslérienne. — *a.* Les formules du paragraphe 7 (chap. I) donnant les tenseurs de courbure d'une connexion linéaire régulière générale peuvent être appliquées, en particulier, à la connexion finslérienne. Nous raisonnons en coordonnées locales.

Rappelons qu'en vertu de l'homogénéité du tenseur de torsion T de la connexion finslérienne la matrice L [(5.8), chap. I] ainsi que son inverse M se réduisent à la matrice identité (coordonnées locales). D'après (7.23), (7.26) et (6.8) du chapitre I, on a alors

$$(8.1)\qquad R^i{}_{jkl} = \overset{*}{R}{}^i{}_{jkl} + T^i{}_{jr}\overset{*}{R}{}^r{}_{0kl},$$

$$(8.2)\qquad \overset{*}{R}{}^i{}_{jkl} = \left(\partial_k \overset{*}{\Gamma}{}^i{}_{jl} - \dot\partial_s \overset{*}{\Gamma}{}^i{}_{jl}\,\dot\partial_k G^s\right) - \left(\partial_l \overset{*}{\Gamma}{}^i{}_{jk} - \dot\partial_s \overset{*}{\Gamma}{}^i{}_{jk}\,\dot\partial_l G^s\right) + \left(\overset{*}{\Gamma}{}^i{}_{rk}\overset{*}{\Gamma}{}^r{}_{jl} - \overset{*}{\Gamma}{}^i{}_{rl}\overset{*}{\Gamma}{}^r{}_{jk}\right).$$

Nous allons maintenant établir la proposition suivante :

Le tenseur de courbure P *de la connexion finslérienne s'exprime au moyen du tenseur de torsion* T *et sa dérivée covariante du type* ∇h *et le tenseur de courbure* Q *se déduit algébriquement du tenseur* T [9].

En effet, d'après (7.24) et (7.27) du chapitre I, on a

$$(8.3)\qquad P^i{}_{jkl} = \overset{*}{P}{}^i{}_{jkl} + T^i{}_{jr}\overset{*}{P}{}^r{}_{0kl},$$

$$(8.4)\qquad \overset{*}{P}{}^i{}_{jkl} = \nabla_k T^i{}_{jl} - \dot\partial_l \overset{*}{\Gamma}{}^i{}_{jk}.$$

D'autre part,

$$\dot\partial_l\left(\overset{*}{\Gamma}{}_{sjk}\right) = \dot\partial_l\left(g_{si}\overset{*}{\Gamma}{}^i{}_{jk}\right) = g_{si}\,\dot\partial_l\left(\overset{*}{\Gamma}{}^i{}_{jk}\right) + 2\,T_{sil}\overset{*}{\Gamma}{}^i{}_{jk}.$$

En évaluant le premier membre de cette relation à partir de (7.16), il vient

$$(8.5)\qquad \begin{aligned} g_{si}\,\dot\partial_l\left(\overset{*}{\Gamma}{}^i{}_{jk}\right) = {} & (\partial_k T_{sjl} + \partial_j T_{skl} - \partial_s T_{kjl}) - 2\,T_{srl}\overset{*}{\Gamma}{}^r{}_{jk} \\ & - (\dot\partial_l T_{sjr}\,\dot\partial_k G^r + \dot\partial_l T_{skr}\,\dot\partial_j G^r - \dot\partial_l T_{kjr}\,\dot\partial_s G^r) \\ & - (T_{sjr}\,\dot\partial_{kl} G^r + T_{skr}\,\dot\partial_{jl} G^r - T_{kjr}\,\dot\partial_{sl} G^r). \end{aligned}$$

En multipliant les deux membres par v^j on obtient

$$(8.6)\qquad v^j\,\dot\partial_l \overset{*}{\Gamma}{}^i{}_{jk} = \nabla_0 T^i{}_{kl}.$$

En dérivant par rapport à v^l la relation (7.15), on a

$$(8.7)\qquad \dot\partial_{kl} G^r = \overset{*}{\Gamma}{}^r{}_{lk} + \nabla_0 T^r{}_{kl}.$$

Compte tenu de cette relation, (8.5) s'écrit

$$(8.8)\qquad \dot\partial_l \overset{*}{\Gamma}{}^i{}_{jk} = \nabla_k T^i{}_{jl} + \nabla_j T^i{}_{kl} - \nabla^i T_{kjl} + T^r{}_{kj}\,\nabla_0 T^i{}_{rl} - T^i{}_{kr}\nabla_0 T^r{}_{jl} - T^i{}_{jr}\,\nabla_0 T^r{}_{kl},$$

d'où

$$(8.9)\qquad P^i{}_{jkl} = \nabla^i T_{kjl} - \nabla_j T^i{}_{kl} + T^i{}_{kr}\,\nabla_0 T^r{}_{jl} - T^r{}_{kj}\,\nabla_0 T^i{}_{rl}.$$

On en déduit

$$(8.10)\qquad P^i{}_{j0l} = P^i{}_{jk0} = 0.$$

Quant au tenseur de courbure Q, on a d'après (7.25) et (7.28) du chapitre I

$$(8.11)\qquad Q^i{}_{jkl} = \overset{*}{Q}{}^i{}_{jkl} + T^i{}_{jr}\overset{*}{Q}{}^r{}_{0kl},$$

$$(8.12)\qquad \overset{*}{Q}{}^i{}_{jkl} = (\dot\partial_k T^i{}_{jl} - \dot\partial_l T^i{}_{jk}) + (T^r{}_{jl}T^i{}_{rk} - T^i{}_{rl}T^r{}_{jk}).$$

D'autre part,

$$\dot{\partial}_k(T^i{}_{jl}) = \dot{\partial}_k(g^{ir}T_{rjl}) = -2T^i{}_{rk}T^r{}_{jl} + g^{ir}\dot{\partial}_k T_{rjl}.$$

En portant cette relation dans (8.12), on obtient

$$Q^i{}_{jkl} = \overset{\star}{Q}{}^i{}_{jkl} = T^i{}_{rl}T^r{}_{jk} - T^i{}_{rk}T^r{}_{jl}, \tag{8.13}$$

il satisfait à

$$Q_{0jkl} = Q_{i0kl} = Q_{ij0l} = Q_{ijk0} = 0. \tag{8.14}$$

Ainsi notre proposition est établie.

b. Dans le paragraphe 10 du chapitre I nous avons défini la liste complète des identités de Bianchi pour une connexion linéaire régulière générale. Ces cinq identités s'écrivent, dans le cas d'une connexion finslérienne,

$$\mathfrak{S}R^i{}_{mkl} - \mathfrak{S}T^i{}_{mr}R^r{}_{0kl} = 0, \tag{8.15}$$

$$\mathfrak{S}\nabla_m R^i{}_{jkl} - \mathfrak{S}P^i{}_{jmr}R^r{}_{0kl} = 0, \tag{8.16}$$

$$\begin{aligned}\dot{\nabla}_m R^i{}_{jkl} + T^r{}_{km}R^i{}_{jrl} + T^r{}_{lm}R^i{}_{jkr} + \nabla_k P^i{}_{jlm} - \nabla_l P^i{}_{jkm}&\\ -(P^i{}_{jlr}\nabla_0 T^r{}_{km} - P^i{}_{jkr}\nabla_0 T^r{}_{lm}) + Q^i{}_{jrm}R^r{}_{0kl} &= 0,\end{aligned} \tag{8.17}$$

$$\begin{aligned}\dot{\nabla}_m P^i{}_{jkl} - \dot{\nabla}_l P^i{}_{jkm} + \nabla_k Q^i{}_{jlm} + P^i{}_{jrl}T^r{}_{km} - P^i{}_{jrm}T^r{}_{kl}&\\ + Q^i{}_{jrl}\nabla_0 T^r{}_{km} - Q^i{}_{jrm}\nabla_0 T^r{}_{kl} &= 0,\end{aligned} \tag{8.18}$$

$$\mathfrak{S}\dot{\nabla}_m Q^i{}_{jkl} = 0, \tag{8.19}$$

où nous avons désigné par ∇_m et $\dot{\nabla}_m$ les deux dérivations covariantes dans la connexion finslérienne et par $\mathfrak{S}$ la somme des termes obtenus en permutant circulairement les indices (k, l, m). En vertu de (8.1), l'identité (8.15) s'écrit

$$\underset{(j,k,l)}{\mathfrak{S}}\check{R}_{ijkl} = 0. \tag{8.20}$$

Multiplions les deux membres par v^i

$$\underset{(j,k,l)}{\mathfrak{S}}\check{R}_{0jkl} = 0. \tag{8.21}$$

Multiplions cette relation par v^k

$$\check{R}_{0j0l} = \check{R}_{0l0j}. \tag{8.22}$$

Le tenseur R_{ijkl} étant antisymétrique par rapport aux indices i et j, k et l, on a

$$\check{R}_{ijkl} = -\check{R}_{jikl} - 2T_{ijr}\check{R}^r{}_{0kl}. \tag{8.23}$$

$$2R_{ijkl} = \check{R}_{ijkl} + \check{R}_{jilk}. \tag{8.24}$$

Compte tenu de (8.23), l'identité (8.20) s'écrit

$$(8.25)\qquad \overset{*}{\mathrm{R}}_{jikl}-\overset{*}{\mathrm{R}}_{kijl}=-\overset{*}{\mathrm{R}}_{lijk}-2\left(\mathrm{T}_{ijr}\overset{*}{\mathrm{R}}{}^{r}{}_{0kl}+\mathrm{T}_{kir}\overset{*}{\mathrm{R}}{}^{r}{}_{0lj}+\mathrm{T}_{lir}\overset{*}{\mathrm{R}}{}^{r}{}_{0jk}\right).$$

En changeant dans la relation précédente les indices j, i, k, l en k, l, j, i respectivement et en ajoutant la relation ainsi obtenue à (8.25), compte tenu de (8.24) nous avons

$$(8.26)\qquad \left(\overset{*}{\mathrm{R}}_{jikl}-\overset{*}{\mathrm{R}}_{kijl}\right)+\left(\overset{*}{\mathrm{R}}_{klji}-\overset{*}{\mathrm{R}}_{jlki}\right)$$
$$=-2\mathrm{R}_{lijk}-2\left[\mathrm{T}_{ijr}\overset{*}{\mathrm{R}}{}^{r}{}_{0kl}+\mathrm{T}_{kir}\overset{*}{\mathrm{R}}{}^{r}{}_{0lj}+\mathrm{T}_{lkr}\overset{*}{\mathrm{R}}{}^{r}{}_{0ji}+\mathrm{T}_{jlr}\overset{*}{\mathrm{R}}{}^{r}{}_{0ik}\right].$$

De même, en changeant dans (8.26) les indices l, i, j, k en j, k, l, i respectivement et en retranchant (8.26) de la relation ainsi obtenue, on a

$$(8.27)\qquad \mathrm{R}_{lijk}-\mathrm{R}_{jkli}=\mathrm{T}_{ijr}\overset{*}{\mathrm{R}}{}^{r}{}_{0lk}+\mathrm{T}_{kir}\overset{*}{\mathrm{R}}{}^{r}{}_{0jl}+\mathrm{T}_{lkr}\overset{*}{\mathrm{R}}{}^{r}{}_{0ij}+\mathrm{T}_{jlr}\overset{*}{\mathrm{R}}{}^{r}{}_{0ki}.$$

9. Réductibilité d'une variété finslérienne [1]. — Étant donnée une variété finslérienne V_n, soit $\mathrm{T}py$ l'espace vectoriel euclidien tangent à V_n en $x=py$. Le groupe d'holonomie homogène Ψy en $y\in \mathrm{W}$ de la connexion finslérienne est dit *réductible* ou *irréductible* selon qu'il laisse invariant ou non un sous-espace vectoriel non trivial de $\mathrm{T}py$. *Supposons* Ψy *réductible*, soit $\overset{1}{\mathrm{T}}y\subset \mathrm{T}py$ un p-plan $(0<p<n)$ invariant par Ψy; tout vecteur orthogonal à $\overset{1}{\mathrm{T}}y$ sera transformé par une rotation de Ψy en un vecteur orthogonal à $\overset{1}{\mathrm{T}}y$; il en résulte que si $\overset{2}{\mathrm{T}}y\subset \mathrm{T}py$ est le q-plan $(p+q=n)$ orthogonal à $\overset{1}{\mathrm{T}}y$, il sera lui aussi invariant par Ψy. Il est clair que si nous transportons par parallélisme les hyperplans $\overset{1}{\mathrm{T}}$ et $\overset{2}{\mathrm{T}}$ le long d'un chemin arbitraire $\bar{l}(y, y_1)$ de W nous obtenons en $x_1=py_1$ deux hyperplans $\overset{1}{\mathrm{T}}y_1$ et $\overset{2}{\mathrm{T}}y_1$ orthogonaux indépendants du chemin $\bar{l}(y, y_1)$ et invariants par Ψy_1. Au point $y\in \mathrm{W}$ nous associons un repère orthonormé $\mathrm{R}^y(e_i)$ tel que les p-premiers vecteurs e_{i_1} $(i_1=1, 2, \ldots, p)$ soient dans $\overset{1}{\mathrm{T}}y$ et les q vecteurs e_{i_2} $(i_2=p+1, \ldots, n)$ dans $\overset{2}{\mathrm{T}}y$. A l'aide de ces repères les hyperplans $\overset{1}{\mathrm{T}}y$ et $\overset{2}{\mathrm{T}}y$ seront définis par

$$(9.1)\qquad \overset{1}{\mathrm{T}}y:\quad \alpha_{i_2}=0\qquad (i_2=p+1, \ldots, n),$$

$$(9.2)\qquad \overset{2}{\mathrm{T}}y:\quad \alpha_{i_1}=0\qquad (i_1=1, 2, \ldots, p).$$

Supposons que le tenseur de torsion de la connexion finslérienne satisfasse à

$$(9.3)\qquad \mathrm{T}_{i_1 j_2 h}=0\qquad (h=1, 2, \ldots, n).$$

Nous dirons que le tenseur T est décomposable.

En vertu de cette relation, la formule de structure (7.3) du chapitre I pour la connexion finslérienne s'écrit

$$(9.4)\qquad d\alpha_{i_1} = \alpha_{j_1} \wedge \omega_{i_1 j_1} + \alpha_{j_2} \wedge \omega_{i_1 j_2} + T_{i_1 j_1 h}\theta_h \wedge \alpha_{j_1},$$

$$(9.5)\qquad d\alpha_{i_2} = \alpha_{j_1} \wedge \omega_{i_2 j_1} + \alpha_{j_2} \wedge \omega_{i_2 j_2} + T_{i_2 j_2 h}\theta_h \wedge \alpha_{j_2}.$$

Les systèmes de Pfaff (9.1) *et* (9.2) *sont complètement intégrables :* en effet, soit $X(X_{i_1}, 0)$ un élément de $\overset{1}{T}y$ par transport le long de $\bar{l}(y, y_1)$ ce vecteur doit rester dans ce p-plan, il en résulte que pour toute valeur X_{i_1} on a

$$\nabla X_{i_2} = X_{j_1}\omega_{j_1 i_2} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \omega_{j_1 i_2} = 0 = \omega_{i_2 j_1}.$$

Les systèmes (9.4) et (9.5) se réduisent à

$$(9.6)\qquad d\alpha_{i_1} = \alpha_{j_1} \wedge \omega_{i_1 j_1} + T_{i_1 j_1 h}\theta_h \wedge \alpha_{j_1},$$

$$(9.7)\qquad d\alpha_{i_2} = \alpha_{j_2} \wedge \omega_{i_2 j_2} + T_{i_2 j_2 h}\theta_h \wedge \alpha_{j_2}.$$

Il en résulte, d'après le théorème de Frobenius, que les systèmes de Pfaff (9.1) et (9.2) sont complètement intégrables. Les α_{i_1} sont de la forme

$$\alpha_{i_1} = \lambda_{i_1 j}(z)\, dx^j.$$

Vu la complète intégrabilité, les α_{i_1} sont p combinaisons linéaires indépendantes de p différentielles

$$\alpha_{i_1} = \mu_{i_1 j_1}\, d\xi^{j_1} = \mu_{i_1 j_1}\, \partial_h \xi^{j_1}\, dx^h + \mu_{i_1 j_1}\, \dot{\partial}_h \xi^{j_1}\, dv^h.$$

D'après la forme des α_{i_1}, on obtient

$$\dot{\partial}_h \xi^{j_1} = 0, \qquad \alpha_{i_1} = \mu_{i_1 j_1}\, \partial_h \xi^{j_1}\, dx^h.$$

Ainsi les (ξ^{j_1}) sont indépendants de la direction et définissent p-intégrales premières linéairement indépendantes pour les systèmes (9.2). De même, il existe q intégrales premières (ξ^{j_2}) indépendantes de la direction relatives à (9.1) et les hyperplans $\overset{1}{T}y$ et $\overset{2}{T}y$ ne dépendent que de $x = py$. De ce qui précède résulte que l'ensemble (ξ^{i_1}, ξ^{i_2}) constitue un système de coordonnées locales de V_n et l'on a alors, en changeant les notations,

$$\alpha_{i_1} = a_{i_1 j_1}(z)\, dx^{j_1}, \qquad \alpha_{i_2} = a_{i_2 j_2}(z)\, dx^{j_2},$$

où (a_{ij}) est une matrice régulière restreinte de degré 0 et la métrique de V_n s'écrit

$$ds^2 = \sum_{1}^{p} (\alpha_{i_1})^2 + \sum_{p+1}^{n} (\alpha_{i_2})^2 = g_{i_1 j_1}(z)\, dx^{i_1}\, dx^{j_1} + g_{i_2 j_2}(z)\, dx^{i_2}\, dx^{j_2}.$$

La relation (9.3) nous donne

$$\dot{\partial}_{j_2} g_{i_1 j_1} = 0, \qquad \dot{\partial}_{j_1} g_{i_2 j_2} = 0.$$

Ainsi les tenseurs $g_{i_1 j_1}$ et $g_{i_2 j_2}$ sont respectivement indépendants des v^{j_2} et

v^{j_1}. Compte tenu de la complète intégrabilité des systèmes (9.1) et (9.2) par chaque point $x \in V_n$, il passe une variété intégrale des systèmes (9.1) de dimension p tangent à T^1 et une seule $E(x)$ et une variété intégrale des systèmes (9.2) de dimension q tangent à T^2 et une seule $F(x)$. Soit $Y(Y^{i_1}, 0)$ un élément de $\overset{1}{T}$, transportons-le par parallélisme, ce vecteur doit rester dans $\overset{1}{T}$, on a alors en coordonnées locales

$$\nabla_k Y^{i_2} = Y^{i_1} \overset{*}{\Gamma}{}^{i_2}{}_{i_1 k} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \overset{*}{\Gamma}{}^{i_2}{}_{i_1 k} = \overset{*}{\Gamma}{}^{i_2}{}_{k i_1} = 0.$$

De la formule (7.8) on obtient

$$\partial_{r_1} g_{i_2 j_2} = \delta_{r_1} g_{i_2 j_2} - \dot{\delta}_r g_{i_2 j_2} v^k \overset{*}{\Gamma}{}^r{}_{k r_1} = \delta_{r_1} g_{i_2 j_2} - \dot{\delta}_{r_2} g_{i_2 j_2} v^k \overset{*}{\Gamma}{}^{r_2}{}_{k r_1}$$

et, d'après la relation précédente, on a

$$\partial_{r_1} g_{i_2 j_2} = \delta_{r_1} g_{i_2 j_2}. \tag{9.8}$$

D'autre part, $g_{j_2 m_1} = 0$, il vient

$$\overset{*}{\Gamma}_{j_2 i_2 r_1} = g_{j_2 m} \overset{*}{\Gamma}{}^m{}_{i_2 r_1} = g_{j_2 m_2} \overset{*}{\Gamma}{}^{m_2}{}_{i_2 r_1} = 0.$$

Compte tenu de (9.8), (9.9) et la formule (7.16), nous avons

$$\overset{*}{\Gamma}_{j_2 i_2 r_1} = \frac{1}{2}(\partial_{r_1} g_{j_2 i_2} + \partial_{i_2} g_{j_2 r_1} - \partial_{j_2} g_{r_1 i_2}) = \frac{1}{2} \partial_{r_1} g_{j_2 i_2} = \frac{1}{2} \delta_{r_1} g_{j_2 i_2} = 0.$$

Ainsi le tenseur $g_{j_2 i_2}$ est indépendant de x^{r_1}; par le même raisonnement on démontre que le tenseur $g_{j_1 i_1}$ est indépendant de x^{r_2} et la métrique de V_n s'écrit

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2,$$

où

$$ds_1^2 = g_{i_1 j_1}(x^{d_1}, v^{d_1})\, dx^{i_1} dx^{j_1}, \qquad ds_2^2 = g_{i_2 j_2}(x^{d_2}, v^{d_2})\, dx^{i_2} dx^{j_2}.$$

THÉORÈME. — *Une variété finslérienne est réductible si le groupe d'holonomie homogène Ψy est réductible et si, en outre, le tenseur de torsion de la connexion finslérienne est décomposable, c'est-à-dire satisfait* (9.3).

10. COORDONNÉES NORMALES GÉODÉSIQUES. — *a.* Un mouvement différentiable $x(t)$ sur V_n est défini par une application différentiable de $I\ (0 \leqq t \leqq 1)$ dans V_n, soit $l(x_0, x_1)$ le chemin défini par ce mouvement. Nous désignerons par $(x, \dot{x})(t)$, $t \in I$ le relèvement de ce chemin dans W, où $\dot{x}$ est le vecteur vitesse en x. Soit ω une connexion linéaire régulière de directions, $l(x_0, x_1)$ est dit un arc géodésique pour la connexion linéaire envisagée si en tout point $x(t) \in l(x_0, x_1)$ les vecteurs « vitesse » et « accélération » sont colinéaires

$$\frac{\nabla \dot{x}}{dt} = \lambda(t)\dot{x} \quad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}\right), \tag{10.1}$$

où $\lambda(t)$ dépend de la représentation paramétrique de $l(x_0, x_1)$. En substituant au paramètre t un paramètre convenable $s(t)\left(\frac{ds}{dt} > 0\right)$ nous pouvons annuler $\lambda(t)$: en effet, si $u = \frac{dx}{ds}$, on a

$$\dot{x} = us' \qquad \left(s' = \frac{ds}{dt}\right),$$

d'où (10.1) s'écrit

$$\frac{\nabla u}{ds} s' = \left(\lambda(t) - \frac{s''}{s'}\right) u \qquad \left(s'' = \frac{d^2 s}{dt^2}\right) \tag{10.2}$$

si $s(t)$ est tel que

$$s'' = \lambda(t) s'. \tag{10.3}$$

Les équations différentielles (10.2) pour la connexion linéaire de directions s'écrivent

$$\frac{\nabla u^i}{ds} = \frac{du^i}{ds} + \check{\Gamma}^i{}_{jk}(x, u) u^j u^k = 0 \qquad \left(u = \frac{dx}{ds}\right). \tag{10.4}$$

De (10.3) il résulte que s est défini à une transformation $s \to as + b$ près. Nous voyons qu'il existe sur $l(x_0, x_1)$ un paramètre s et un seul tel que la représentation paramétrique de l'arc géodésique satisfasse à (10.4) et pour lequel en x_0, $s = 0$ et

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 = u_0,$$

où u_0 est un vecteur tangent en x_0 à l'arc géodésique. Le paramètre s est dit *le paramètre affine* correspondant à (x_0, u_0) [18]. La donnée au point $x_0 \in V_n$ du vecteur u_0 et d'un nombre s tel que $|s| < \varepsilon$ (ε suffisamment petit) détermine un point x extrémité de l'arc géodésique d'origine x_0. Inversement, nous pouvons trouver un voisinage U de x_0 tel que si $x \in U$, il existe un arc géodésique et un seul joignant, dans U, x_0 à x; la valeur en x du paramètre affine s qui s'annule en x_0 est définie au facteur a près et le vecteur vitesse u_0 correspondant en x_0 au facteur $\frac{1}{a}$ près. Soit R^{x_0} un repère en x_0 et u_0^i les composantes par rapport à R^{x_0} du vecteur u_0; à tout point $x \in U$ nous pouvons faire correspondre les n nombres bien déterminés $x^i = u_0^i s$ dont la donnée détermine le point x. On définit ainsi un système de coordonnées locales (x^i) sur U appelées *coordonnées normales* en x_0 relativement au repère R^{x_0}. De la relation (10.4) il résulte qu'on a le long de la géodésique issue de x_0

$$\check{\Gamma}^i{}_{jk}(x, u) u^j u^k = 0.$$

Cette relation est valable en particulier au point x_0 *quel que soit la direction* u. Si ω est la connexion finslérienne, la relation précédente s'écrit

$$G^i(x, u) = 0,$$

d'où par dérivation en ce point

$$\delta^{\cdot}_{k} G^{i} = \overset{*}{\Gamma}{}^{i}{}_{jk} u^{j} = 0 \tag{10.5}$$

et par une nouvelle dérivation, on peut vérifier aisément que

$$\overset{*}{\Gamma}{}^{i}{}_{lk} = -\nabla_0 T^{i}{}_{kl}. \tag{10.6}$$

b. Soit V_n une variété finslérienne, les extrémales du problème du calcul des variations attaché à $\mathcal{L}$ sont définies par (6.6); d'autre part, les géodésiques de la connexion finslérienne sont définies par (10.4) où $\overset{*}{\Gamma}$ est le coefficient de première espèce de cette connexion, en multipliant cette relation par g_{ji} on trouve (6.6). Ainsi :

THÉORÈME 1. — *Les géodésiques de la connexion finslérienne coïncident avec les extrémales du problème du calcul des variations attaché à la fonction* $\mathcal{L}$.

Par l'emploi des coordonnées normales en un point, A. Lichnerowicz [5] a obtenu l'expression du tenseur de courbure P. Nous allons établir ici, en utilisant ces coordonnées, un résultat intéressant. Le tenseur de courbure P de la connexion finslérienne est défini par (8.9); si le tenseur T satisfait à

$$\nabla_j T^{i}{}_{kl} = 0, \tag{10.7}$$

il est clair que $P = 0$. Inversement, supposons que

$$P^{i}{}_{jkl} = 0. \tag{10.8}$$

Nous allons montrer qu'on a nécessairement (10.7) : en effet, (10.8) entraîne

$$P^{i}{}_{0kl} = \overset{*}{P}{}^{i}{}_{0kl} = -v^{j}\,\delta^{\cdot}_{l}\overset{*}{\Gamma}{}^{i}{}_{jk} = -\nabla_0 T^{i}{}_{kl} = 0 \tag{10.9}$$

et, d'après (8.4),

$$\nabla_k T^{i}{}_{jl} = \delta^{\cdot}_{l}\overset{*}{\Gamma}{}^{i}{}_{jk}. \tag{10.10}$$

Supposons que le voisinage U soit rapporté aux coordonnées normales (x^i), on a alors (10.6); compte tenu de (10.9), il vient au centre x des coordonnées normales

$$\overset{*}{\Gamma}{}^{i}{}_{jk} = 0,$$

d'où

$$\delta^{\cdot}_{l}\overset{*}{\Gamma}{}^{i}{}_{jk} = 0.$$

D'après (10.10), le tenseur T est à dérivée covariante du type ∇_k nulle; nous énonçons :

THÉORÈME 2. — *Pour que le tenseur de courbure* P *de la connexion finslérienne soit identiquement nul il faut et il suffit que la dérivée covariante du type* ∇_k *du tenseur de torsion* T *soit nulle.*

---

[5] A. LICHNEROWICZ, *Cours du Collège de France*, 1959-1960.

II. — Variétés finslériennes isotropes.

11. VARIÉTÉS FINSLÉRIENNES ISOTROPES [5]. — A. Dans ce qui suit, V_n sera muni d'une structure de variété finslérienne. Soient X et Y deux vecteurs restreints de degré o, on désignera par (X, Y) leur produit scalaire local en $x = \pi z \in V_n$, par $|X|$ la norme de X en $x = \pi z \in V_n$. Soit $\mu_1(X, Y) \subset T\pi z$ l'élément plan défini par le couple X et Y. Nous appelons *courbure scalaire* (Sectional curvature) dans l'élément plan $\mu_1(X, Y)$ l'expression

$$K_1(z, \mu_1) = \frac{R_{ijkl}X^iY^jX^kY^l}{|X|^2|Y|^2 - (X, Y)^2}, \tag{11.1}$$

où R est le premier tenseur de courbure de la connexion finslérienne. K_1 étant un scalaire restreint de degré o, dépend en général de z et de $\mu_1(X, Y)$. La variété finslérienne sera dite *partiellement isotrope*, si la courbure scalaire $K_1(z, \mu_1)$ est indépendante de l'élément plan $\mu_1(X, Y)$. Supposons qu'il en soit ainsi, nous avons tout d'abord

$$[K_1(g_{ki}g_{lj} - g_{li}g_{kj}) - R_{ijkl}]X^iY^jX^kY^l = 0. \tag{11.2}$$

Cette relation doit être satisfaite quel que soit le couple de vecteurs (X, Y), d'où pour les indices tous différents, les termes en $X^iY^jX^kY^l$ nous donne

$$2K_1[(g_{ki}g_{lj} - g_{li}g_{kj}) + (g_{ki}g_{jl} - g_{ji}g_{kl})] = R_{ijkl} + R_{kjil} + R_{ilkj} + R_{klij}. \tag{11.3}$$

Compte tenu de (8.1) et (8.27), la relation précédente s'écrit

$$\begin{aligned} 2K_1[(g_{ki}g_{lj} - g_{li}g_{kj}) &+ (g_{ki}g_{jl} - g_{ji}g_{kl})] \\ &= 2\left(\check{R}_{ijkl} + \check{R}_{ilkj}\right) + 3T_{ijr}\check{R}^r{}_{0kl} + 3T_{ilr}\check{R}^r{}_{0kj} \\ &\quad + 2T_{jlr}\check{R}^r{}_{0ik} + T_{kjr}\check{R}^r{}_{0li} + T_{klr}\check{R}^r{}_{0ji}. \end{aligned} \tag{11.4}$$

Multiplions les deux membres par v^i il vient

$$\begin{aligned} 2K_1(2v_kg_{lj} &- v_lg_{kj} - v_jg_{kl}) \\ &= 2\left(\check{R}_{0jkl} + \check{R}_{0lkj}\right) + 2T_{jlr}\check{R}^r{}_{00k} + T_{kjr}\check{R}^r{}_{0l0} + T_{klr}\check{R}^r{}_{0j0}. \end{aligned} \tag{11.5}$$

En multipliant les deux membres de cette relation par v^k et en tenant compte de (8.22), on obtient

$$\check{R}_{0j0l} = K_1(|v|^2g_{lj} - v_lv_j). \tag{11.6}$$

Ainsi la relation (11.5) peut s'écrire

$$\check{R}_{0jkl} + \check{R}_{0lkj} = K_1(2v_kg_{lj} - v_lg_{kj} - v_jg_{kl}). \tag{11.7}$$

Soit

$$\check{R}_{0jkl} - K_1(v_kg_{lj} - v_lg_{kj}) = \check{R}_{0ljk} - K_1(v_jg_{kl} - v_kg_{jl}) = \check{R}_{0klj} - K_1(v_lg_{jk} - v_jg_{lk}). \tag{11.8}$$

La valeur commune de ces trois différences est nulle puisque leur somme est nulle en vertu de l'identité (8.21), ainsi nous avons

$$(11.9) \qquad \overset{*}{R}_{0jkl} = K_1(v_k g_{lj} - v_l g_{kj}).$$

En portant cette relation dans (11.4) nous obtenons

$$K_1[(g_{ki}g_{lj} - g_{li}g_{kj}) + (g_{ki}g_{jl} - g_{ji}g_{kl})] = \left(\overset{*}{R}_{ijkl} + \overset{*}{R}_{ilkj}\right) + K_1(T_{ilk}v_j + T_{ijk}v_l - 2T_{ilj}v_k).$$

Cette relation peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}\overset{*}{R}_{ijkl} - K_1(g_{ki}g_{lj} - g_{li}g_{kj}) + K_1(T_{ijk}v_l - T_{ilj}v_k) \\ = \overset{*}{R}_{iljk} - K_1(g_{ji}g_{kl} - g_{ki}g_{jl}) + K_1(T_{ilj}v_k - T_{ikl}v_j) \\ = \overset{*}{R}_{iklj} - K_1(g_{li}g_{jk} - g_{ji}g_{lk}) + K_1(T_{ikl}v_j - T_{ijk}v_l),\end{aligned}$$

où nous avons tenu compte d'une permutation circulaire sur les indices j, k, l. En ajoutant membre à membre ces égalités, en tenant compte de l'identité (8.20), nous voyons que la valeur commune de ces égalités est nulle puisque leur somme est nulle, ainsi

$$(11.10) \qquad \overset{*}{R}_{ijkl} = K_1(g_{ki}g_{lj} - g_{li}g_{kj}) - K_1(T_{ijk}v_l - T_{ilj}v_k).$$

En vertu de (11.9) et (11.10) le tenseur de courbure R s'écrit finalement

$$(11.11) \qquad R^i{}_{jkl} = K_1(\delta^i{}_k g_{lj} - \delta^i{}_l g_{kj}),$$

où δ est le symbole de Kronecker. Nous allons maintenant démontrer que la fonction scalaire restreinte K_1 est une constante absolue. A cet effet, en multipliant les deux membres de l'identité (8.17) par v^j et v^l successivement, on obtient

$$(11.12) \qquad (\dot{\nabla}_m R^i{}_{jkl})v^j v^l + T^r{}_{km} R^i{}_{0r0} + \nabla_0 \nabla_0 T^i{}_{km} = 0.$$

Les deux derniers termes de cette relation sont symétriques par rapport aux indices k et m, il en résulte que

$$(11.13) \qquad (\dot{\nabla}_m R^i{}_{jkl})v^j v^l = (\dot{\nabla}_k R^i{}_{jml})v^j v^l.$$

En vertu de (11.11), cette relation s'écrit

$$\dot{\nabla}_m K_1(|v|^2 \delta^i{}_k - v^i v_k) = \dot{\nabla}_k K_1(|v|^2 \delta^i{}_m - v^i v_m).$$

En contractant i et k dans cette relation et en sommant, il vient

$$(n-2)\dot{\nabla}_m K_1 |v|^2 = 0,$$

d'où pour $n \neq 2$, on a

$$\dot{\nabla}_m K_1 = \dot{\partial}_m K_1 = 0.$$

Ainsi K_1 est indépendant de la direction. D'autre part, en multipliant les deux membres de l'identité (8.16) par v^j et v^l successivement et en contractant les indices i et k, nous obtenons

$$\nabla_m R^i{}_{0i0} - \nabla_i R^i{}_{0m0} - \nabla_0 R^i{}_{0im} = \nabla_0 T_r R^r{}_{0m0} - \nabla_0 T^i{}_{mr} R^r{}_{0i0}. \tag{11.14}$$

Mais de (11.11) il vient

$$R^i{}_{0k0} = K_1(\delta^i_k |v|^2 - v^i v_k), \tag{11.15}$$

$$R^i{}_{0i0} = (n-1) K_1 |v|^2, \tag{11.16}$$

$$R^i{}_{0im} = (n-1) K_1 v_m. \tag{11.17}$$

En vertu de ces relations, (11.14) s'écrit

$$(n-2)(\delta^i_m |v|^2 - v^i v_m) \nabla_i K_1 = 0,$$

K_1 étant indépendant de la direction, d'où pour $n \neq 2$,

$$(\delta^i_m |v|^2 - v^i v_m) \partial_i K_1 = 0, \tag{11.18}$$

une dérivation par rapport à v^h nous donne

$$(2\delta^i_m v_h - \delta^i_h v_m - v^i g_{mh}) \partial_i K_1 = 0.$$

Multiplions cette relation par g^{hr} et contractons les indices r et m, nous avons

$$(1-n) v^i \partial_i K_1 = 0.$$

En vertu de cette relation, (11.18) nous donne

$$\partial_i K_1 = 0.$$

Ainsi K_1 ne dépend pas non plus de x, c'est donc un scalaire constant. Inversement, il est clair que si R est défini par (11.11) la variété finslérienne est partiellement isotrope. Nous énonçons donc le :

THÉORÈME 1. — *Pour qu'une variété finslérienne* ($n > 2$) *soit partiellement isotrope, il faut et il suffit que le tenseur de courbure* R *de la connexion finslérienne soit défini par* (11.11) *et* K_1 *est une constante absolue.*

B. 1° Soient X et $\dot{Y}$ deux vecteurs restreints de degré 0 et + 1 respectivement. Nous désignerons par $\mu_2(X, \dot{Y})$ l'élément plan défini par ce couple. On appellera *courbure scalaire* dans l'élément $\mu_2(X, \dot{Y})$ l'expression

$$K_2(z, \mu_2) = \frac{P_{ijkl} X^i \dot{Y}^j X^k \dot{Y}^l}{|X|^2 |\dot{Y}|^2 - (X, \dot{Y})^2}, \tag{11.19}$$

avec

$$P_{ijkl} = \nabla_i T_{kjl} - \nabla_j T_{ikl} + T_{ikr} \nabla_0 T^r{}_{jl} - T_{jkr} \nabla_0 T^r{}_{il}. \tag{11.20}$$

Il est clair que $K_2(z, \mu_2)$ dépend en général de $z \in \mathcal{V}$ et de $\mu_2(X, \dot{Y})$. Supposons qu'en chaque point $z \in \mathcal{V}$, la quantité restreinte $K_2(z, \mu_2)$

soit indépendante de l'élément plan $\mu_2(X, \dot{Y})$. Il en résulte que pour les éléments $\mu_2(X, \dot{Y})$ et $\mu'_2\left(l = \frac{v}{\mathcal{L}}, \dot{Y}\right)$ on a

$$(11.21) \qquad K_2(z, X, \dot{Y}) = K_2(z, l, \dot{Y}).$$

En vertu de l'homogénéité du tenseur de courbure P, le second membre de (11.21) s'annule, on a alors d'après (11.19),

$$P_{ijkl}X^i\dot{Y}^jX^k\dot{Y}^l = 0$$

quels que soient les vecteurs X et $\dot{Y}$, d'où

$$(11.22) \qquad P_{ijkl} + P_{kjil} + P_{ilkj} + P_{klij} = 0.$$

Multiplions les deux membres par φ^i, vu l'homogénéité du tenseur P on obtient

$$(11.23) \qquad \nabla_0 T_{jkl} = 0.$$

Ainsi la relation (11.22) s'écrit

$$(11.24) \qquad (\nabla_i T_{kjl} - \nabla_j T_{ikl}) + (\nabla_k T_{ijl} - \nabla_l T_{ikj}) = 0.$$

En échangeant les indices k et l et en ajoutant la relation ainsi obtenue à (11.24), on a

$$(11.25) \qquad \nabla_i T_{kjl} = \nabla_j T_{ikl}.$$

Compte tenu de (11.23) et (11.25), on a alors

$$(11.26) \qquad P_{ijkl} = 0.$$

2° Étant donnés deux vecteurs $\dot{X}$ et $\dot{Y}$ restreints de degré 1; comme précédemment nous définissons à partir du tenseur de courbure Q de la connexion finslérienne et du couple de vecteurs $\mu_3(\dot{X}, \dot{Y})$ la quantité restreinte en $z \in \mathcal{V}$

$$(11.27) \qquad K_3(z, \mu_3) = \frac{Q_{ijkl}\dot{X}^i\dot{Y}^j\dot{X}^k\dot{Y}^l}{|\dot{X}|^2|\dot{Y}|^2 - (\dot{X}, \dot{Y})^2},$$

avec

$$(11.28) \qquad Q_{ijkl} = T_{ilr}T^r{}_{jk} - T_{ikr}T^r{}_{jl},$$

où K_3 sera appelé la *courbe scalaire* dans l'élément plan $\mu_3(\dot{X}, \dot{Y})$. Supposons qu'en chaque point $z \in \mathcal{V}$, $K_3(z, \mu_3)$ soit indépendant de l'élément $\mu_3(\dot{X}, \dot{Y})$ nous devons avoir

$$[K_3(g_{ki}g_{lj} - g_{li}g_{kj}) - Q_{ijkl}]\dot{X}^i\dot{Y}^j\dot{X}^k\dot{Y}^l = 0$$

quels que soient les vecteurs $\dot{X}$ et $\dot{Y}$, il en résulte

$$(11.29) \quad 2K_3[(g_{ki}g_{lj} - g_{li}g_{kj}) + (g_{ik}g_{lj} - g_{lk}g_{ij})] = Q_{ijkl} + Q_{kjil} + Q_{ilkj} + Q_{klij}.$$

Mais, d'après (11.28), nous avons

$$Q_{ijkl} = Q_{klij}, \tag{11.30}$$

$$Q_{ijkl} + Q_{iklj} + Q_{iljk} = 0. \tag{11.31}$$

En vertu de (11.30) la relation (11.29) s'écrit

$$K_3[(g_{ki}g_{lj} - g_{li}g_{kj}) + (g_{ik}g_{lj} - g_{lk}g_{ij})] = Q_{ijkl} + Q_{ilkj}.$$

Soit

$$K_3(g_{ki}g_{lj} - g_{li}g_{kj}) - Q_{ijkl} = K_3(g_{ij}g_{lk} - g_{ik}g_{lj}) - Q_{iljk} = K_3(g_{il}g_{kj} - g_{ij}g_{kl}) - Q_{iklj}.$$

La valeur commune de ces trois différences est o puisque leur somme est o, en vertu de (11.31) il en résulte que

$$Q_{ijkl} = K_3(g_{ki}g_{lj} - g_{li}g_{kj}), \tag{11.32}$$

d'où

$$Q^i{}_{jkl} = K_3(\delta^i{}_k g_{lj} - \delta^i{}_l g_{kj}).$$

En contractant les indices i et k et en sommant, il vient

$$Q_{jl} = Q^i{}_{jil} = (n-1)K_3 g_{lj}. \tag{11.33}$$

Multiplions les deux membres par v^j et v^l successivement, on obtient

$$K_3 = 0;$$

on a donc, d'après (11.32),

$$Q_{ijkl} = 0. \tag{11.34}$$

Nous énoncerons donc le :

THÉORÈME 2. — *Si en chaque point* $z \in \mathcal{V}$, $K_2(z, \mu_2)$ [*resp.* $K_3(z, \mu_3)$] *est indépendant de l'élément plan* μ_2 (*resp.* μ_3) *on a* $K_2 = 0$ (*resp.* $K_3 = 0$), *ce qui entraîne que le tenseur de courbure* P (*resp.* Q) *soit nul.*

On appelle *variété de Berwald* une variété finslérienne pour laquelle le tenseur de courbure Q est identiquement nul.

12. GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE SCHUR. — A partir des tenseurs de courbure d'une connexion finslérienne nous définissons trois scalaires

$$R = R^i{}_{jil}g^{jl}, \qquad P = P^i{}_{jil}g^{jl}, \qquad Q = Q^i{}_{jil}g^{jl} \tag{12.1}$$

qui sont restreints de degré o, — 1 et — 2 respectivement. Ces trois scalaires seront appelés les *courbures finslériennes scalaires*. Supposons que la variété finslérienne soit *partiellement isotrope* avec $K_1 \neq 0$, le tenseur de courbure R étant défini par (11.11) est à dérivée covariante nulle; nous avons donc, d'après (8.16),

$$P^i{}_{jmr}(\delta^r{}_k v_l - \delta^r{}_l v_k) + P^i{}_{jkr}(\delta^r{}_l v_m - \delta^r{}_m v_l) + P^i{}_{jlr}(\delta^r{}_m v_k - \delta^r{}_k v_m) = 0.$$

En multipliant cette relation par v^l on obtient

$$P^i_{jmk} = P^i_{jkm}. \tag{12.2}$$

Ainsi le *tenseur de courbure* P *est symétrique par rapport aux deux derniers indices.* D'autre part, la dérivée covariante du type $\nabla^{\cdot}_m$ du tenseur de courbure R étant o, par permutation circulaire sur les indices *m*, *k*, *l* de l'identité (8.17), nous obtenons

$$Q^i_{jkm} v_l + Q^i_{jml} v_k + Q^i_{jlk} v_m = 0.$$

Multiplions les deux membres de cette relation par v^l; vu l'homogénéité du tenseur Q on a

$$Q^i_{jkl} = 0. \tag{12.3}$$

Ainsi *toute variété finslérienne partiellement isotrope* ($n > 2$) *est une variété de Berwald.* En vertu de (11.11) et (11.20), on a

$$R = n(n-1)K_1 = \text{Cte}, \qquad P = -\frac{1}{2}\nabla_0 Q = 0.$$

Il en résulte que pour une variété finslérienne partiellement isotrope les courbures finslériennes scalaires sont des constantes absolues R = Cte, P = o, Q = o, ceci constitue la généralisation du théorème de Schur.

Théorème. — *Une variété finslérienne* ($n > 2$) *qui est partiellement isotrope a des courbures finslériennes scalaires constantes* (R = Cte, P = o, Q = o).

13. Conditions de réduction. — Dans ce paragraphe nous supposons que la variété finslérienne est partiellement isotrope, le tenseur de courbure R étant défini par (11.11), le tenseur de courbure Q s'annule et nous avons, d'après l'identité (8.17),

$$K_1[T^i_{km}g_{jl} - T_{kjm}\delta^i_l + T_{ljm}\delta^i_k - T^i_{lm}g_{kj}] \\ + \nabla_k P^i_{jlm} - \nabla_l P^i_{jkm} - (P^i_{jlr}\nabla_0 T^r_{km} - P^i_{jkr}\nabla_0 T^r_{lm}) = 0.$$

Multiplions les deux membres par v^j et v^l successivement

$$K_1 T^i_{km}|v|^2 + \nabla_0\nabla_0 T^i_{km} = 0. \tag{13.1}$$

En contractant *i* et *m* et en sommant

$$K_1 T_k |v|^2 + \nabla_0\nabla_0 T_k = 0. \tag{13.2}$$

Supposons que le tenseur de torsion contracté satisfasse à

$$\nabla_0\nabla_0 T_k = 0, \tag{13.3}$$

de (13.2) il résulte

$$T_k = 0$$

et la nullité du tenseur de courbure Q entraîne

$$T_{ijk} = 0.$$

Nous énoncerons donc :

THÉORÈME. — *Une variété finslérienne* ($n > 2$) *partiellement isotrope pour laquelle le tenseur de torsion contracté satisfait à* (13.3) *se réduit à une variété riemannienne à courbure constante.*

CHAPITRE III.

TRANSFORMATIONS INFINITÉSIMALES AFFINES ET HOLONOMIE.

I. — Transformations infinitésimales.

1. GROUPE LOCAL A 1-PARAMÈTRE DE TRANSFORMATIONS LOCALES ET DÉRIVÉE DE LIE [18]. — *a.* Un champ de vecteurs X sur V_n engendre un groupe local à 1-paramètre de transformations locales de V_n par l'intégration du système différentiel

$$\frac{dx(u)}{du} = X\,x(u) \qquad (u \in R) \tag{1.1}$$

à partir d'un point initial $x(0) = x$. Du théorème d'existence pour les solutions du système différentiel il résulte qu'il est possible de trouver des voisinages $U(\bar{x})$ et des nombres positifs $\varepsilon(\bar{x})$ pour tout $\bar{x} \in V_n$ tels que (1.1) admette une solution notée

$$x(u) = \exp(uX)\,x \tag{1.2}$$

définie pour $|u| < \varepsilon(\bar{x})$ issue d'un point $x \in U(\bar{x})$ et satisfaisant à la relation de groupe

$$\exp[(u+u')X]\,x = \exp(uX)\exp(u'X)\,x \tag{1.3}$$

pourvu que les deux membres soient définis. En général, les nombres $\varepsilon(\bar{x})$ dépendent de $\bar{x}$; si nous pouvons choisir ε indépendant, de $\bar{x}$, alors $\exp(uX)$ peut être défini pour tout $x \in V_n$ et pour $|u| < \infty$, dans ce cas, X engendre un groupe à 1-paramètre de transformations globales de V_n. Si la variété V_n est compacte, tout champ de vecteurs sur V_n engendre un groupe à 1-paramètre de transformations globales de V_n.

b. L'application différentiable $\exp(uX)$ est définie sur $U(x)$ pour $|u| < \varepsilon(\bar{x})$ et elle admet une application linéaire tangente notée $\exp(uX)'$ qui définit un isomorphisme de Tx sur $Tx(u)$. A tout élément z de $\mathcal{V}$ au-dessus de $U(\bar{x})$ correspond ainsi un élément $z(u)$. De l'application

$$z \to z(u), \tag{1.4}$$

il résulte que pour chaque $U(\overline{x})$ et $\varepsilon(\overline{x})$ se trouve ainsi définie une application différentiable dans $\pi^{-1}(U(\overline{x}))$

$$\exp(u\tilde{X}) : \quad z \to z(u),$$

$\exp(u\tilde{X})$ définit un groupe local à 1-paramètre de transformations locales de $\mathcal{V}$ qu'on appellera le *groupe prolongé*. D'après sa définition, on a

$$\pi \circ \exp(u\tilde{X}) z = \exp(uX) \circ \pi z, \tag{1.5}$$

on en déduit en dérivant par rapport à u que le champ de vecteur $\tilde{X}$ sur $\mathcal{V}$ est projetable par π

$$\pi \tilde{X} = X; \tag{1.6}$$

de (1.5) il résulte

$$\pi' \circ \exp(uX)' = \exp(uX)' \circ \pi', \tag{1.7}$$

$$\exp(u\tilde{X})^* \circ \pi^* = \pi^* \circ \exp(uX)^*, \tag{1.8}$$

$\tilde{X}$ sera dit un *relèvement* de X sur $\mathcal{V}$. Soit (α^i, θ^i) un corepère en $z \in \mathcal{V}$, où les θ^i sont supposés quelconques; si l'on désigne par i l'opérateur du produit intérieur, nous poserons

$$i(\tilde{X})\alpha^i = X^i, \qquad i(\tilde{X})\theta^i = \dot{X}^i. \tag{1.9}$$

Ainsi au point $z \in \mathcal{V}$ le vecteur $\tilde{X}$ a pour composantes par rapport au corepère envisagé les quantités X^i et $\dot{X}^i$; en particulier, pour le corepère local (dx^i, dv^i) en $z \in \mathcal{V}$ les composantes de $\tilde{X}$ seront

$$\left(\frac{dx^i(u)}{du}\right)_{u=0} = X^i, \qquad \left(\frac{dv^i(u)}{du}\right)_{u=0} = v^j \partial_j X^i = \partial_0 X^i. \tag{1.10}$$

Nous remarquons que dans un changement de repères les quantités $\partial_0 X^i$ ne se transforment pas selon les composantes d'un vecteur.

c. Soit Φ une r-forme sur $\mathcal{V}$ à valeurs dans un espace vectoriel M. Nous appelons transformée infinitésimale de Φ par $\tilde{X}$ en z la r-forme $L(\tilde{X})\Phi$ [par abus de notation $L(X)\Phi$] en z à valeurs dans M définie par

$$L(X)\Phi = i(\tilde{X})\, d\Phi + di(\tilde{X})\Phi. \tag{1.11}$$

Il est clair que L (X) est une *dérivation de degré* o *qui commute avec d*. Si f est une fonction à valeurs réelles sur $\mathcal{V}$, d'après (1.11) on a

$$L(X)f = i(\tilde{X})\, df = X^k \partial_k f + \dot{X}^k \dot{\partial}_k f,$$

où X^k et $\dot{X}^k$ sont les composantes de $\tilde{X}$ par rapport au corepère (α^i, θ^i); relativement au corepère (dx^i, dv^i) cette relation s'écrit

$$L(X)f = X^k \partial_k f + \partial_0 X^k \dot{\partial}_k f,$$

$L(x)$ commute avec les opérations ∂_k et $\dot{\partial}_k$ de dérivations ordinaires.

Étant donné un champ de tenseurs au sens large (ou forme de connexion) sur $\mathcal{V}$, pour qu'il soit invariant par le groupe prolongé $\exp(u\tilde{X})$, *il faut et il suffit que sa dérivée de Lie relativement à* $\tilde{X}$ *soit* o. *De plus, il est clair que le vecteur canonique* v *est invariant par le groupe prolongé* $\exp(u\tilde{X})$, *en d'autres termes,* $\exp(u\tilde{X})$ *n'altère pas la structure différentiable de l'espace* $\mathcal{V}$.

A un repère R^z attaché à $z \in \pi^{-1}(U(\bar{x}))$ correspond par l'action du groupe $\exp(u\tilde{X})$ un repère $R^{z(u)}$, en $z(u)$ l'application différentiable

$$\exp(u\hat{X}): \quad R^z \to R^{z(u)}$$

définit un groupe local à 1-paramètre de transformations locales de l'espace fibré $\pi^{-1}E(V_n)$, engendré par le champ de vecteurs $\hat{X}$ qui est un *relèvement de* $\tilde{X}$. Nous définirons de la même façon qu'en géométrie différentielle classique [18] la transformée infinitésimale d'une forme sur $\pi^{-1}E(V_n)$:

Étant donnée une forme Λ sur $\pi^{-1}E(V_n)$ à valeurs dans un espace vectoriel M, la transformée infinitésimale de Λ par $\hat{X}$ est, par définition, la dérivée de Lie par X et sera notée $L(X)\Lambda$ on démontre que [18] :

1° Si Λ est q-forme tensorielle de type $R(G)$ (représentation linéaire de G dans M). $L(X)\Lambda$ est une q-forme tensorielle de même type;

2° Si ω est une 1-forme de connexion à valeurs dans l'algèbre de Lie de $GL(n, R)$ de type adj., $L(X)\omega$ est une 1-forme tensorielle de type adj.

Soit Y un champ de vecteurs au sens large Λ une 1-forme (semi-basique) sur $\mathcal{V}$, $L(X)$ satisfaisant à la règle de Leibniz pour le produit tensoriel et commutant avec l'opérateur trace, on a

$$L(X)\,i(Y)\Lambda = i(Y)\,L(X)\Lambda + i(L(X)Y)\Lambda. \tag{1.12}$$

2. Sections locales invariantes. — *a*. Soit $\tilde{X}$ un champ de vecteurs sur $\mathcal{V}$, un point $z \in \mathcal{V}$ sera dit un point *ordinaire* s'il n'est pas un zéro de $\tilde{X}$; z sera dit un *zéro de première espèce* si tout voisinage $\overline{U}$ de z contient des points ordinaires; z est un *zéro de seconde espèce* s'il existe un voisinage $\overline{U}$ de z tel que tout point de $\overline{U}$ soit un zéro de $\tilde{X}$, dans ce cas, $\exp(u\tilde{X})$ définit l'identité sur $\overline{U}$ et le transformé infinitésimal d'un tenseur au sens large ou d'une connexion au point z est o. En ce qui concerne les zéros de premières espèces, si t est un champ de tenseurs au sens large (ou forme de connexion); si nous savons évaluer $[L(X)t]z$ en un point ordinaire $z \in \mathcal{V}$, nous pouvons obtenir $[L(X)t]z_0$ en un zéro z_0 de première espèce par passage à la limite.

b. Étant donné un point ordinaire $z \in \mathcal{V}$ il existe un voisinage $U \subset \mathcal{V}$ de z composé de points ordinaires; si R^z est le repère attaché à z les points de $\pi^{-1} E(V_n)$ définis par $R^{z(u)} = \exp(u\hat{X}) R^z$ appartiennent à la trajectoire de $\hat{X}$ issue de R^z. Nous sommes ainsi conduits à la définition suivante :

Définition. — *Étant donné un voisinage $\overline{U} \subset \mathcal{V}$ composé de points ordinaires, on appelle section locale invariante par* X *au-dessus de* $\overline{U}$ *une section locale* μ *de* $\pi^{-1} E(V_n)$ *engendrée par les trajectoires de* $\hat{X}$.

Sur $\overline{U}$ les repères de la section locale définissent un champ de vecteurs $e_i(z)$ invariant par X; si les n vecteurs $e_i(z)$ déterminent le repère en z, $R^z = \mu z$, on a

$$L(X)\, e_i(z) = 0. \tag{2.1}$$

D'autre part, on a l'égalité entre scalaires

$$i(e_j)\,\alpha^i = \delta^i_j$$

la dérivée de Lie du second membre étant o, compte tenu de (1.22), on a

$$L(X)\, i(e_j)\,\alpha^i = i(L(X)\, e_j)\,\alpha^i + i(e_j)\, L(X)\,\alpha^i = 0.$$

Pour que (2.1) soit satisfait, il faut et il suffit que

$$i(e_j)\, L(X)\,\alpha^i = 0$$

quel que soit j, d'où

$$L(X)\,\alpha^i = 0. \tag{2.2}$$

c. Soit Λ une forme sur $\pi^{-1} E(V_n)$ à valeurs dans un espace vectoriel M. Soit $\overline{\Lambda}$ la forme induite sur la section locale de $\pi^{-1} E(V_n)$ au-dessus de $\overline{U}$. Sur $\overline{U}$ il existe une forme $\Phi_{\overline{U}}$ à valeurs dans M telle que

$$\mu^* \overline{\Lambda} = \Phi_{\overline{U}}.$$

Pour la section locale envisagée, on obtient

$$\mu^* \overline{L(\hat{X})\Lambda} = L(X)\,\Phi_{\overline{U}} = [i(\hat{X})\, d + d i(\hat{X})]\,\Phi_{\overline{U}}. \tag{2.3}$$

Cette formule nous permet d'évaluer $L(\hat{X})\Lambda$. En vertu de (2.3), la relation (2.2) s'écrit

$$[L(X)\,\alpha]^i = L(X)\,\alpha^i = 0. \tag{2.4}$$

3. Introduction d'une connexion linéaire régulière. — *a.* Considérons un recouvrement de V_n par des voisinages U, soit ω une connexion linéaire régulière sur $\mathcal{V}$ représentée dans chaque $\pi^{-1}(U)$ par les matrices ω^i_j des 1-formes définies par [(5.7), chap. I]. Introduisons la connexion linéaire $\overline{\omega}$ dite *associée* à ω définie par les matrices $\overline{\omega}^i_j$ telles que

$$\overline{\omega}^i_j = \omega^i_j + S^i_{jk}\,\alpha^k, \tag{3.1}$$

où S est le premier tenseur de torsion de ω. Si $\overline{\nabla}$ désigne la différentielle absolue dans la connexion associée, de (3.1) il résulte

$$\overline{\theta}^i = \overline{\nabla} v^i = \theta^i + S^i_{0k}\alpha^k, \tag{3.2}$$

il est clair, d'après (3.1), que la connexion associée est régulière. En rapportant les deux connexions ω et $\overline{\omega}$ aux corepères (dx, θ) et $(dx, \overline{\theta})$ respectivement, la relation (3.1) s'écrit

$$\overline{\overset{*}{\Gamma}}{}^i_{jk}\,dx^k + \overline{T}^i_{jk}\,\overline{\theta}^k = \overset{*}{\Gamma}{}^i_{jk}\,dx^k + T^i_{jk}\theta^k - \left(\overset{*}{\Gamma}{}^i_{jk} - \overset{*}{\Gamma}{}^i_{kj}\right)dx^k = \overset{*}{\Gamma}{}^i_{kj}\,dx^k + T^i_{jk}\theta^k,$$

où $\overline{\overset{*}{\Gamma}}$ et $\overline{T}$ sont les coefficients de la connexion $\overline{\omega}$; en portant dans cette relation les θ^k définis par (3.2) et en identifiant les deux membres, on obtient

$$\overline{\overset{*}{\Gamma}}{}^i_{jk} = \overset{*}{\Gamma}{}^i_{kj} - T^i_{jh}S^h_{0k}, \tag{3.3}$$

$$\overline{T}^i_{jk} = T^i_{jk}. \tag{3.4}$$

Si $\overline{S}$ désigne le tenseur de torsion de $\overline{\omega}$ de (3.3), il vient

$$\overline{S}^i_{jk} = T^i_{jh}S^h_{0k} - T^i_{kh}S^h_{0j} - S^i_{jk}. \tag{3.5}$$

Ainsi les tenseurs de torsion de $\overline{\omega}$ sont définis par (3.4) et (3.5). Soit Y un champ de vecteurs au sens large, sa différentielle absolue relativement à $\overline{\omega}$ peut se mettre sous la forme

$$\overline{\nabla} Y^i = \overline{\nabla}_k Y^i.\alpha^k + \overline{\nabla}^{\cdot}_k Y^i.\overline{\theta}^k = D_k Y^i.\alpha^k + D^{\cdot}_k Y^i.\theta^k, \tag{3.6}$$

où $D_k Y^i$ et $D^{\cdot}_k Y^i$ sont deux tenseurs au sens large du type (1.1). En portant dans cette relation les $\overline{\theta}^k$ définis par (3.2), il vient

$$D_k Y^i = \overline{\nabla}_k Y^i + \overline{\nabla}^{\cdot}_h Y^i.S^h_{0k}, \tag{3.7}$$

$$D^{\cdot}_k Y^i = \overline{\nabla}^{\cdot}_k Y^i. \tag{3.8}$$

b. Soit U un voisinage de $\mathcal{V}$ composé de points ordinaires, considérons une section locale invariante par X au-dessus de $\overline{U}$, nous avons montré que pour une telle section on a (2.4), soit

$$[L(X)\alpha]^i = L(X)\alpha^i = i(\tilde{X})\,d\alpha^i + di(\tilde{X})\alpha^i = 0, \tag{3.9}$$

compte tenu de [(7.3), chap. I]. Cette relation s'écrit

$$dX^i + (\omega^i_j + S^i_{jk}\alpha^k)X^j - \omega^i_k(\tilde{X})\alpha^k + T^i_{kh}\dot{X}^h\alpha^k - X^h T^i_{hk}\theta^k = 0. \tag{3.10}$$

Soit

$$\overline{\nabla} X^i + T^i_{kh}\dot{X}^h\alpha^k = \omega^i_k(\tilde{X})\alpha^k + X^h T^i_{hk}\theta^k. \tag{3.11}$$

En vertu de (3.6), on en déduit pour les repères de la section locale envisagée

$$D_k X^i + T^i_{kh}\dot{X}^h = \omega^i_k(\tilde{X}), \tag{3.12}$$

$$D^{\cdot}_k X^i = X^h T^i_{hk}. \tag{3.13}$$

c. Il est facile maintenant d'évaluer la dérivée de Lie d'un tenseur au sens large ou d'une connexion linéaire régulière. Calculons d'abord le transformé infinitésimal d'un champ de vecteurs au sens large Y. Étant donné un voisinage $\overline{\mathrm{U}}$ composé de points ordinaires; considérons une section locale invariante par X au-dessus de $\overline{\mathrm{U}}$, rapporté aux repères de cette section Y définit une o-forme à valeurs vectorielles $\mathrm{Y}_{\overline{\mathrm{U}}} = (\mathrm{Y}^i)$ de (2.3), on a alors pour ces repères

$$[\mathrm{L}(\mathrm{X})\mathrm{Y}]^i = \mathrm{L}(\mathrm{X})\mathrm{Y}^i = i(\tilde{\mathrm{X}})\,d\mathrm{Y}^i = \nabla\mathrm{Y}^i(\tilde{\mathrm{X}}) - \mathrm{Y}^k\omega^i{}_k(\tilde{\mathrm{X}}),$$

compte tenu de (3.12) il s'écrit

$$(3.14)\qquad [\mathrm{L}(\mathrm{X})\mathrm{Y}]^i = \nabla\mathrm{Y}^i(\tilde{\mathrm{X}}) - \mathrm{Y}^k(\mathrm{D}_k\mathrm{X}^i + \mathrm{T}^i{}_{kh}\dot{\mathrm{X}}^h),$$

les deux membres de cette formule étant des vecteurs au sens large sur $\mathcal{V}$ l'égalité est valable en repères arbitraires et aux points ordinaires de $\mathcal{V}$, par passage à la limite elle est valable en tout point. Afin d'évaluer les quantités $\dot{\mathrm{X}}$ qui figurent dans le second membre de (3.14), il suffit de remarquer que la dérivée de Lie du champ de vecteurs canonique v est o, d'où

$$(3.15)\qquad \dot{\mathrm{X}}^i = \mathrm{D}_0\mathrm{X}^i + \mathrm{T}^i{}_{0h}\dot{\mathrm{X}}^h,$$

soit

$$(3.16)\qquad \dot{\mathrm{X}}^h(\delta^i{}_h - \mathrm{T}^i{}_{0h}) = \mathrm{D}_0\mathrm{X}^i.$$

D'autre part, la formule (3.14) peut se mettre sous la forme

$$[\mathrm{L}(\mathrm{X})\mathrm{Y}]^i = \mathrm{X}^k\nabla_k\mathrm{Y}^i - \mathrm{Y}^k\mathrm{D}_k\mathrm{X}^i + \dot{\mathrm{X}}^k(\dot{\nabla}_k\mathrm{Y}^i - \mathrm{Y}^h\mathrm{T}^i{}_{hk}),$$

où les $\dot{\mathrm{X}}$ sont définis par (3.16). En corepère local (dx, θ) le terme entre parenthèses dans le second membre de cette formule n'est autre que la dérivée pfaffienne de Y^i par rapport aux θ^k; en tenant compte de [(6.9), chap. I] et (3.16), il vient

$$(3.17)\qquad [\mathrm{L}(\mathrm{X})\mathrm{Y}]^i = \mathrm{X}^k\nabla_k\mathrm{Y}^i - \mathrm{Y}^k\mathrm{D}_k\mathrm{X}^i + \dot{\partial}_s\mathrm{Y}^i\mathrm{D}_0\mathrm{X}^s.$$

Le second membre est indépendant de la connexion introduite, supposons que rapporté au corepère (dx, dv) les coefficients de ω soient o, il en est alors de même pour la connexion associée, et la relation (3.17) se réduit à

$$(3.18)\qquad [\mathrm{L}(\mathrm{X})\mathrm{Y}]^i = \mathrm{X}^k\,\partial_k\mathrm{Y}^i - \mathrm{Y}^k\,\partial_k\mathrm{X}^i + \dot{\partial}_s\mathrm{Y}^i\,\partial_0\mathrm{X}^s.$$

4. Dérivée de Lie d'un tenseur au sens large. — Nous allons appliquer la méthode précédente au calcul de la dérivée de Lie d'un tenseur au sens large. Soit t^i_{jk} un tenseur au sens large sur $\mathcal{V}$, en repères d'une section locale invariante par X on a

$$[\mathrm{L}(\mathrm{X})t]^i_{jk} = i(\tilde{\mathrm{X}})\,dt^i_{jk} = \nabla t^i_{jk}(\tilde{\mathrm{X}}) + t^i_{rk}\omega^r{}_j(\tilde{\mathrm{X}}) + t^i_{jr}\omega^r{}_k(\tilde{\mathrm{X}}) - t^r_{jk}\omega^i{}_r(\tilde{\mathrm{X}}).$$

En vertu de (3.12), nous obtenons

$$(4.1)\qquad [L(X)t]^i_{jk} = \nabla t^i_{jk}(\tilde{X}) + t^i_{rk}(D_j X^r + T^r_{jh}\dot{X}^h) + t^i_{jr}(D_k X^r + T^r_{kh}\dot{X}^h) - t^r_{jk}(D_r X^i + T^i_{rh}\dot{X}^h),$$

où $\dot{X}$ est défini par (3.16). Cette formule est valable en repères arbitraires et en tout point. Par le même raisonnement que précédemment, on a en corepère-local (dx^i, θ^i)

$$(4.2)\qquad [L(X)t]^i_{jk} = X^r \nabla_r t^i_{jk} + t^i_{rk} D_j X^r + t^i_{jr} D_k X^r - t^r_{jk} D_r X^i + \dot{\partial}_s t^i_{jk} D_0 X^s$$

et

$$(4.3)\qquad [L(X)t]^i_{jk} = X^r \partial_r t^i_{jk} + t^i_{rk}\ \partial_j X^r + t^i_{jr}\ \partial_k X^r - t^r_{jk}\ \partial_r X^i + \dot{\partial}_s t^i_{jk}\ \partial_0 X^s.$$

5. Dérivée de Lie des coefficients d'une connexion linéaire régulière. — Soit ω une connexion linéaire régulière sur $\mathcal{V}$. On sait que la dérivée de Lie de ω par X est une 1-forme tensorielle sur $\pi^{-1}E(V_n)$ de type adj. Soit $\overline{U}$ un voisinage de $\mathcal{V}$ composé de points ordinaires, considérons une section locale invariante par X au-dessus de $\overline{U}$. D'après (2.3), on a alors en ces repères

$$(5.1)\qquad [L(X)\omega]^i_j = L(X)\omega^i_j = i(\tilde{X})\,d\omega^i_j + di(\tilde{X})\omega^i_j.$$

L'opérateur i est une antidérivation de [(7.6), chap. I], on obtient

$$(5.2)\qquad i(\tilde{X})\,d\omega^i_j = i(\tilde{X})\Omega^i_j - \omega^i_r(\tilde{X})\omega^r_j + \omega^i_r\omega^r_j(\tilde{X}).$$

En vertu de [(7.7), chap. I] le premier terme du second membre s'écrit

$$(5.3)\qquad i(\tilde{X})\Omega^i_j = (X^h R^i_{jhk} - \dot{X}^h P^i_{jkh})\alpha^k + (X^h P^i_{jhk} + \dot{X}^h Q^i_{jhk})\theta^k.$$

Par rapport aux repères envisagés on a, d'après (3.12),

$$(5.4)\qquad di(\tilde{X})\omega^i_j + \omega^i_r\omega^r_j(\tilde{X}) - \omega^i_r(\tilde{X})\omega^r_j = \nabla(D_j X^i + T^i_{jh}\dot{X}_h).$$

Compte tenu de (5.2), (5.3) et (5.4), la formule (5.1) s'écrit

$$(5.5)\qquad [L(X)\omega]^i_j = L(X)\omega^i_j = \nabla(D_j X^i + T^i_{jh}\dot{X}^h) + (X^h R^i_{jhk} - \dot{X}^h P^i_{jkh})\alpha^k + (X^h P^i_{jhk} + \dot{X}^h Q^i_{jhk})\theta^k,$$

où $\dot{X}$ est défini par (3.16). Relativement aux repères précédents, la dérivée de Lie de θ^r s'écrit

$$(5.6)\qquad [L(X)\theta]^r = L(X)\theta^r = L(X)\,(dv^r + v^s\omega^r_s) = [L(X)\omega]^r_0.$$

Compte tenu de cette relation, la formule (5.5) s'écrit, en corepère local (dx, θ),

$$(5.7)\qquad [L(X)\omega]^i_j = L(X)\check{\Gamma}^i_{jk}\,dx^k + L(X)\,T^i_{jk}\theta^k + T^i_{jr}[L(X)\omega]^r_0,$$

d'où, en multipliant les deux membres par φ^i,

$$[\mathrm{L}(\mathrm{X})\,\omega]^i_0 = \mathrm{L}(\mathrm{X})\,\check{\Gamma}^i_{0k}\,dx^k + \mathrm{L}(\mathrm{X})\,\mathrm{T}^i_{0k}.\theta^k + \mathrm{T}^i_{0r}[\mathrm{L}(\mathrm{X})\,\omega]^r_0.$$

Il en résulte

$$[\mathrm{L}(\mathrm{X})\,\omega]^r_0 = \mathrm{M}^r_s\big(\mathrm{L}(\mathrm{X})\,\check{\Gamma}^s_{0k}\,dx^k + \mathrm{L}(\mathrm{X})\,\mathrm{T}^s_{0k}.\theta^k\big), \tag{5.8}$$

où M est la matrice inverse de L. En portant (5.8) dans (5.7), compte tenu de (5.5), il vient

$$\begin{aligned}[\mathrm{L}(\mathrm{X})\omega]^i_j &= \big(\mathrm{L}(\mathrm{X})\,\check{\Gamma}^i_{jk} + \mathrm{T}^i_{jr}\mathrm{M}^r_s\mathrm{L}(\mathrm{X})\,\check{\Gamma}^s_{0k}\big)\,dx^k + (\mathrm{L}(\mathrm{X})\,\mathrm{T}^i_{jk} + \mathrm{T}^i_{jr}\mathrm{M}^r_s\mathrm{L}(\mathrm{X})\,\mathrm{T}^s_{0k})\,\theta^k \\ &= \nabla(\mathrm{D}_j\mathrm{X}^i + \mathrm{T}^i_{jh}\dot{\mathrm{X}}^h) + (\mathrm{X}^h\mathrm{R}^i_{jhk} - \dot{\mathrm{X}}^h\mathrm{P}^i_{jkh})\,dx^k + (\mathrm{X}^h\mathrm{P}^i_{jhk} + \dot{\mathrm{X}}^h\mathrm{Q}^i_{jhk})\,\theta^k.\end{aligned} \tag{5.9}$$

En vertu de (5.6), la formule (5.5) nous donne

$$\begin{aligned}&\mathrm{L}(\mathrm{X})\,\check{\Gamma}^i_{jk}\,dx^k + \mathrm{L}(\mathrm{X})\,\mathrm{T}^i_{jk}.\theta^k \\ &\quad = \nabla(\mathrm{D}_j\mathrm{X}^i + \mathrm{T}^i_{jh}\dot{\mathrm{X}}^h) + (\mathrm{X}^h\mathrm{R}^i_{jhk} - \dot{\mathrm{X}}^h\mathrm{P}^i_{jkh})\,dx^k \\ &\qquad + (\mathrm{X}^h\mathrm{P}^i_{jhk} + \dot{\mathrm{X}}^h\mathrm{Q}^i_{jhk})\,\theta^k \\ &\qquad - \mathrm{T}^i_{jr}v^s\big[\nabla(\mathrm{D}_s\mathrm{X}^r + \mathrm{T}^r_{sh}\dot{\mathrm{X}}^h) + (\mathrm{X}^h\mathrm{R}^r_{shk} - \dot{\mathrm{X}}^h\mathrm{P}^r_{skh})\,dx^k \\ &\qquad + (\mathrm{X}^h\mathrm{P}^r_{shk} + \dot{\mathrm{X}}^h\mathrm{Q}^r_{shk})\,\theta^k\big],\end{aligned} \tag{5.10}$$

où $\dot{\mathrm{X}}$ est défini par (3.16). Les deux membres des formules (5.9) et (5.10) étant des 1-formes tensorielles de type adj, ces relations sont valables en repères arbitraires et en tout point, d'où

$$\begin{aligned}\mathrm{L}(\mathrm{X})\,\check{\Gamma}^i_{jk} &= \nabla_k(\mathrm{D}_j\mathrm{X}^i + \mathrm{T}^i_{jh}\dot{\mathrm{X}}^h) + (\mathrm{X}^h\mathrm{R}^i_{jhk} - \dot{\mathrm{X}}^h\mathrm{P}^i_{jkh}) \\ &\quad - \mathrm{T}^i_{jr}v^s\big[\nabla_k(\mathrm{D}_s\mathrm{X}^r + \mathrm{T}^r_{sh}\dot{\mathrm{X}}^h) + \mathrm{X}^h\mathrm{R}^r_{shk} - \dot{\mathrm{X}}^h\mathrm{P}^r_{skh}\big]\end{aligned} \tag{5.11}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{L}(\mathrm{X})\,\mathrm{T}^i_{jk} &= \nabla^{\cdot}_k(\mathrm{D}_j\mathrm{X}^i + \mathrm{T}^i_{jh}\dot{\mathrm{X}}^h) + (\mathrm{X}^h\mathrm{P}^i_{jhk} + \dot{\mathrm{X}}^h\mathrm{Q}^i_{jhk}) \\ &\quad - \mathrm{T}^i_{jr}v^s\big[\nabla^{\cdot}_k(\mathrm{D}_s\mathrm{X}^r + \mathrm{T}^r_{sh}\dot{\mathrm{X}}^h) + (\mathrm{X}^h\mathrm{P}^r_{shk} + \dot{\mathrm{X}}^h\mathrm{Q}^r_{shk})\big].\end{aligned} \tag{5.12}$$

En vertu de (7.26), (7.27) du chapitre I, la formule (5.11) se réduit à

$$\mathrm{L}(\mathrm{X})\,\check{\Gamma}^i_{jk} = \nabla_k\mathrm{D}_j\mathrm{X}^i + \mathrm{X}^h\check{\mathrm{R}}^i_{jhk} + \partial^{\cdot}_s\check{\Gamma}^i_{jk}\mathrm{D}_0\mathrm{X}^s. \tag{5.13}$$

Quant à (5.12), en développant le second membre, nous retrouvons la formule donnant la dérivée de Lie du tenseur T (4.2).

II. — **Transformations infinitésimales affines.**

6. Forlume fondamentale. — Dans ce qui suit nous supposons que $\mathcal{V}$ est muni d'une connexion linéaire régulière et nous raisonnons en corepère local (dx^i, θ^i). Soit g l'espace vectoriel sur les réels des transformations infinitésimales définies par les champs de vecteurs sur V_n. A tout couple $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in g$ nous faisons correspondre le crochet usuel

$$[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = \mathrm{L}(\mathrm{X})\,\mathrm{Y}, \tag{6.1}$$

g muni de cette loi de composition devient une algèbre de Lie, qui sera dite l'algèbre de Lie des transformations infinitésimales de V_n, elle sera désignée par $\underline{g}$. Considérons l'application qu'à tout $X \in \underline{g}$ fait correspondre le tenseur de type adj défini par

$$(6.2) \qquad (AX)^i_j = -(D_j X^i + T^i{}_{jh}\dot{X}^h),$$

où

$$(6.3) \qquad \dot{X}^h(\delta^r{}_h - T^r{}_{0h}) = D_0 X^r.$$

En corepère local (dx, θ) l'expression entre parenthèses dans (6.3) n'est autre que la matrice L^r_h définie par [(5.8), chap. I], la connexion linéaire envisagée étant régulière; cette matrice a donc une inverse que nous avons désignée par M; de (6.3) on obtient

$$(6.4) \qquad \dot{X}^h = M^h_r D_0 X^r.$$

En portant (6.4) dans (6.2), il vient

$$(AX)^i_j = -(D_j X^i + T^i{}_{jh} M^h_r D_0 X^r).$$

Ainsi à tout $X \in \underline{g}$ nous faisons correspondre l'endomorphisme $Az(X)$ de $T\pi z$. Nous désignerons par $Az(g)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de $T\pi z$ correspondant à tous les éléments de $\underline{g}$. $Az(g)$ peut être muni d'une structure d'algèbre de Lie par la loi de composition définie par le crochet usuel : si AX et AY sont deux éléments de $Az(g)$, leur crochet sera défini par

$$(6.5) \qquad [AX, AY] = AXAY - AYAX.$$

On désignera par $\underline{A}$ cette algèbre. Soit X un élément de $\underline{g}$ et AX l'endomorphisme correspondant : si t^i_{jk} est un champ de tenseurs au sens large nous poserons

$$(6.6) \qquad (AXt)^i_{jk} = (AX)^i_r t^r_{jk} - (AX)^r_j t^i_{rk} - (AX)^r_k t^i_{jr}.$$

Avec ces notations, la formule (4.1), donnant la dérivée de Lie de t^i_{jk} par X, peut s'écrire d'une manière simple

$$(6.7) \qquad [L(X)t]^i_{jk} = \nabla t^i_{jk}(\tilde{X}) + (AXt)^i_{jk}.$$

Soient X et Y deux éléments de $\underline{g}$ et AX et AY les éléments de $\underline{A}$ correspondants; au crochet [X, Y] correspond l'élément A [X, Y] de $\underline{A}$, nous nous proposons d'évaluer A [X, Y] en fonction de AX et AY. Si l'on pose

$$Z = [X, Y],$$

on a, d'après (6.2),

$$(6.8) \qquad (AZ)^i_j = -(D_j Z^i + T^i{}_{jh}\dot{Z}^h),$$

avec

$$\dot{Z}^h = D_0 Z^h + T^h{}_{0k} \dot{Z}^k, \tag{6.9}$$

de (6.7), il résulte

$$[L(X) AY]^i_j = \nabla (AY)^i_j (\tilde{X}) + [AX, AY]^i_j.$$

Compte tenu de la définition de AY, cette relation s'écrit

$$[AX, AY]^i_j + \nabla (AY)^i_j (\tilde{X}) = -[L(X) D_j Y^i + L(X) T^i{}_{jh} . \dot{Y}^h + T^i{}_{jh} L(X) \dot{Y}^h], \tag{6.10}$$

avec

$$\dot{Y}^h = D_0 Y^h + T^h{}_{0k} \dot{Y}^k. \tag{6.11}$$

En retranchant (6.10) de (6.8), il vient

$$\begin{aligned} (AZ)^i_j - [AX, AY]^i_j - \nabla (AY)^i_j (\tilde{X}) \\ = L(X) D_j Y^i - D_j L(X) Y^i + T^i{}_{jh} (L(X) \dot{Y}^h - \dot{Z}^h) + L(X) T^i{}_{jh} . Y^h. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Nous allons évaluer le second membre de cette relation; tout d'abord en vertu de (3.7) on a

$$D_j Y^i = \overline{\nabla}_j Y^i + Y^m T^i{}_{mh} S^h{}_{0j} = \delta_j Y^i + Y^k \check{\Gamma}^i{}_{jk},$$

d'où

$$L(X) D_j Y^i - D_j L(X) Y^i = Y^k L(X) \check{\Gamma}^i{}_{jk}. \tag{6.13}$$

D'autre part, en prenant la dérivée de Lie relativement à X, des deux membres de (6.11) on a

$$L(X) \dot{Y}^h = L(X) D_0 Y^h + L(X) T^h{}_{0k} . \dot{Y}^k + T^h{}_{0k} L(X) \dot{Y}^k.$$

En retranchant de cette relation l'expression de $\dot{Z}^h$ définie par (6.9) et en tenant compte de (6.13), on obtient

$$L(X) \dot{Y}^h - \dot{Z}^h = T^h{}_{0k} (L(X) \dot{Y}^k - \dot{Z}^k) + Y^k L(X) \check{\Gamma}^h{}_{0k} + \dot{Y}^k L(X) T^h{}_{0k},$$

d'où

$$L(X) \dot{Y}^h - \dot{Z}^h = M^h_r \big(Y^k L(X) \check{\Gamma}^r{}_{0k} + \dot{Y}^k L(X) T^r{}_{0k} \big). \tag{6.14}$$

En vertu de (6.13) et (6.14), la relation (6.12) s'écrit

$$\begin{aligned} (AZ)^i_j - [AX, AY]^i_j - \nabla (AY)^i_j (\tilde{X}) = \; & Y^k \big(L(X) \check{\Gamma}^i{}_{jk} + T^i{}_{jh} M^h_r L(X) \check{\Gamma}^r{}_{0k} \big) \\ & + \dot{Y}^k (L(X) T^i{}_{jk} + T^i{}_{jh} M^h_r L(X) T^r{}_{0k}). \end{aligned}$$

En évaluant le second membre de cette relation d'après (5.9), nous obtenons la formule fondamentale

$$A[X, Y] = [AX, AY] + \nabla AY(\tilde{X}) - \nabla AX(\tilde{Y}) + \Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}). \tag{6.15}$$

7. Transformations infinitésimales affines. — Soit $\exp(uX)$ le groupe local à 1-paramètre de transformations locales de V_n engendré par X et $\exp(u\tilde{X})$ son groupe prolongé. Soit ω une connexion linéaire régulière sur $\mathcal{V}$. On appellera *transformation infinitésimale affine*, une transformation infinitésimale (t. i.) X sur V_n telle que son groupe prolongé $\exp(u\tilde{X})$ laisse invariante la connexion linéaire ω; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que

$$L(X)\omega = 0. \tag{7.1}$$

En vertu de (5.7), la relation précédente entraîne

$$L(X)\overset{*}{\Gamma}{}^i{}_{jk} = 0, \tag{7.2}$$

$$L(X)T^i{}_{jk} = 0. \tag{7.3}$$

Inversement, si les relations (7.2) et (7.3) sont satisfaites quel que soit X, d'après (5.8) et (5.7), on a alors (7.1) et X définit une t. i. affine. Ainsi

Pour qu'une t. i. X sur V_n définisse une t. i. affine, il faut et il suffit qu'il laisse invariants les coefficients des deux espèces de la connexion. D'après (5.9), les relations (7.2) et (7.3) entraînent

$$\nabla(AX)^i_j = i(\tilde{X})\Omega^i{}_j. \tag{7.4}$$

Celle-ci est équivalente à

$$\nabla_k(AX)^i_j = X^h R^i{}_{jhk} - \dot{X}^h P^i{}_{jkh}, \tag{7.5}$$

$$\dot{\nabla}_k(AX)^i_j = X^h P^i{}_{jhk} + \dot{X}^h Q^i{}_{jhk}, \tag{7.6}$$

où AX et $\dot{X}$ sont définis par (6.2) et (6.4). Inversement, supposons que (7.4) soit satisfaite quel que soit X, on a alors, d'après (5.11) et (5.12), les relations (7.2) et (7.3), ainsi X est une t. i. affine. Nous sommes aussi amenés dans la suite à envisager les transformations infinitésimales qui laissent invariants les coefficients de première espèce $\overset{*}{\Gamma}{}^i{}_{jk}$ de la connexion une telle t. i. sera dite une *t. i. affine partielle*. En vertu de (5.9) et (5.10), une t. i. affine partielle peut être caractérisée par le système (7.5); nous énoncerons donc le :

Théorème. — *Pour qu'une transformation infinitésimale X définisse une transformation infinitésimale affine (resp. partielle) pour la connexion ω, il faut et il suffit qu'il satisfasse à (7.4) [resp. (7.5)].*

Il est clair qu'*une t. i. affine partielle laisse invariantes les géodésiques de la connexion linéaire* ω. Si X définit une t. i. affine, on a

$$L(X)R^i{}_{jkl} = 0, \qquad L(X)P^i{}_{jkl} = 0, \qquad L(X)Q^i{}_{jkl} = 0. \tag{7.7}$$

8. Transformations infinitésimales affines et dérivations covariantes. — Soit t un tenseur de type R(G) à valeurs dans un espace

vectoriel, M et ω une connexion linéaire régulière sur $\mathcal{V}$. On désignera par $\tilde{\mathrm{R}}(\underline{\mathrm{G}})$ la représentation de l'algèbre de Lie $\underline{\mathrm{G}}$ de G induite par R. Soit $\overline{\mathrm{U}}$ un voisinage de $\mathcal{V}$ composé de points ordinaires et une section locale invariante par X au-dessus de $\overline{\mathrm{U}}$. Le tenseur t et la connexion linéaire définissent sur $\overline{\mathrm{U}}$ respectivement une o-forme $t_{\overline{\mathrm{U}}}$ à valeurs dans M et une 1-forme $\omega_{\overline{\mathrm{U}}}$ à valeurs dans $\underline{\mathrm{G}}$. La différentielle absolue de t est une 1-forme $\nabla t_{\overline{\mathrm{U}}}$ à valeurs dans M

$$\nabla t_{\overline{\mathrm{U}}} = dt_{\overline{\mathrm{U}}} + \tilde{\mathrm{R}}(\omega_{\overline{\mathrm{U}}})\, t_{\overline{\mathrm{U}}},$$

d'où

$$\mathrm{L}(\mathrm{X})\, \nabla t_{\overline{\mathrm{U}}} = d\mathrm{L}(\mathrm{X})\, t_{\overline{\mathrm{U}}} + \tilde{\mathrm{R}}(\mathrm{L}(\mathrm{X})\, \omega_{\overline{\mathrm{U}}})\, t_{\overline{\mathrm{U}}} + \tilde{\mathrm{R}}(\omega_{\overline{\mathrm{U}}})\, \mathrm{L}(\mathrm{X})\, t_{\overline{\mathrm{U}}},$$

on en déduit

$$\mathrm{L}(\mathrm{X})\, \nabla t_{\overline{\mathrm{U}}} - \nabla \mathrm{L}(\mathrm{X})\, t_{\overline{\mathrm{U}}} = \tilde{\mathrm{R}}(\mathrm{L}(\mathrm{X})\, \omega_{\overline{\mathrm{U}}})\, t_{\overline{\mathrm{U}}};$$

d'où, on a alors en tout point de $\mathcal{V}$,

$$\mathrm{L}(\mathrm{X})\, \nabla t - \nabla \mathrm{L}(\mathrm{X})\, t = \tilde{\mathrm{R}}(\mathrm{L}(\mathrm{X})\, \omega)\, t. \tag{8.1}$$

En particulier, pour un champ de vecteurs au sens large Y, on a

$$\mathrm{L}(\mathrm{X})\, \nabla_k \mathrm{Y}^i - \nabla_k \mathrm{L}(\mathrm{X})\, \mathrm{Y}^i = \mathrm{L}(\mathrm{X})\, \check{\Gamma}^i{}_{jk} \mathrm{Y}^j - \mathrm{L}(\mathrm{X})\, \check{\Gamma}^r{}_{0k}\, \partial^{\cdot}_r \mathrm{Y}^i, \tag{8.2}$$

$$\mathrm{L}(\mathrm{X})\, \nabla^{\cdot}_k \mathrm{Y}^i - \nabla^{\cdot}_k \mathrm{L}(\mathrm{X})\, \mathrm{Y}^i = \mathrm{L}(\mathrm{X})\, \mathrm{T}^i{}_{jk} \mathrm{Y}^j - \mathrm{L}(\mathrm{X})\, \mathrm{T}^r{}_{0k}\, \partial^{\cdot}_r \mathrm{Y}^i, \tag{8.3}$$

des formules (8.2) et (8.3), il résulte le :

THÉORÈME. — *Pour qu'une t. i.* X *définisse une t. i. affine* (*resp. partielle*) *pour la connexion* ω, *il faut et il suffit que les dérivées covariantes des deux types* ∇_k *et* $\nabla^{\cdot}_k$ (*resp. de type* ∇_k) *d'un tenseur large commute avec sa dérivée de Lie par* X.

9. LE GROUPE $\mathrm{K}z(\mathrm{L})$. — Soit L l'algèbre de Lie des t. i. affines de V_n pour la connexion ω. Dans les paragraphes qui précèdent nous avons vu qu'à tout champ de vecteurs $\mathrm{X} \in \mathrm{L}$ sur V_n on peut faire correspondre un champ de vecteurs $\tilde{\mathrm{X}}(\mathrm{X}, \dot{\mathrm{X}})$ sur $\mathcal{V}$ qui est un relèvement de X. Nous désignerons par $\tilde{\mathrm{L}}$ le relèvement de L sur $\mathcal{V}$. Sur $\tilde{\mathrm{L}}$ nous pouvons définir une structure d'algèbre de Lie par le crochet usuel, le crochet de deux éléments de $\tilde{\mathrm{L}}$ est projetable par π. Soit $\underline{\mathrm{A}}z(\mathrm{L})$ l'algèbre de Lie des endomorphismes de $\mathrm{T}\pi z$ correspondant aux éléments de L. $\underline{\mathrm{A}}z(\mathrm{L})$ est l'algèbre de Lie d'un groupe connexe $\mathrm{K}z(\mathrm{L})$ des transformations linéaires de $\mathrm{T}\pi z$. D'après le paragraphe 11 du chapitre I, on sait qu'en un point $z \in \mathcal{V}$ l'algèbre de Lie d'holonomie infinitésimale peut être engendrée par les éléments

$$r^i{}_j = \nabla \ldots \nabla\, \mathrm{R}^i{}_{jkl}(\tilde{\mathrm{Z}}_1 \ldots \tilde{\mathrm{Z}}_q)\, u^k_1 u^l_2, \tag{9.1}$$

$$p^i{}_j = \nabla \ldots \nabla\, \mathrm{P}^i{}_{jkl}(\tilde{\mathrm{Z}}_1 \ldots \tilde{\mathrm{Z}}_q)\, u^k_1 \dot{u}^l_2, \tag{9.2}$$

$$q^i{}_j = \nabla \ldots \nabla\, \mathrm{Q}^i{}_{jkl}(\tilde{\mathrm{Z}}_1 \ldots \tilde{\mathrm{Z}}_q)\, \dot{u}^k_1 \dot{u}^l_2, \tag{9.3}$$

où $Z_1, \ldots, \tilde{Z}_q$, $\tilde{u}_1 (u_1, \dot{u}_1)$ et $\tilde{u}_2 (u_2, \dot{u}_2)$ sont des champs locaux de vecteurs au voisinage de $z \in \mathcal{V}$. Nous désignerons par $\underline{\sigma}' z$ l'algèbre de Lie d'holonomie infinitésimale en $z \in \mathcal{V}$, par $\underline{r}' z$, $\underline{p}' z$ et $\underline{q}' z$ celles engendrées par r, p et q respectivement. Si $X \in L$, la dérivée de Lie relativement à X commute avec la dérivée covariante et X laisse invariants les trois tenseurs de courbure, ainsi $L(X)r$, $L(X)p$ et $L(X)q$ appartiennent respectivement à $\underline{r}' z$, $\underline{p}' z$ et $\underline{q}' z$. D'autre part, en vertu de (6.7), la dérivée de Lie par X de r^i_j (par exemple) s'écrit

$$L(X) r^i_j = \nabla r^i_j(\tilde{X}) + [A_z(X), r]^i_j.$$

Le premier membre ainsi que le premier terme du second membre appartiennent à $\underline{r}' z$, d'où

$$[A_z(X), \underline{r}' z] \subset \underline{r}' z;$$

de même,

$$[A_z(X), \underline{p}' z] \subset \underline{p}' z, \qquad [A_z(X), \underline{q}' z] \subset \underline{q}' z.$$

$\underline{\sigma}' z$ étant somme de $\underline{r}' z$, $\underline{p}' z$ et $\underline{q}' z$, d'où

$$[A_z(X), \underline{\sigma}' z] \subset \underline{\sigma}' z.$$

Nous énoncerons le

THÉORÈME. — *Le groupe* $Kz(L)$ *est sous-groupe de normalisateur connexe* $N_0(\sigma' z)$ *du groupe d'holonomie infinitésimale en* $z \in \mathcal{V}$, *dans le groupe des transformations linéaires de* $T\pi z$.

10. Algèbre transitive des transformations infinitésimales affines.

— 1° Soit Θz l'espace vectoriel tangent à $\mathcal{V}$ en z.

DÉFINITION. — *L'algèbre de Lie* $\tilde{L}$ *des t. i. affines est dite transitive sur* $\mathcal{V}$ *si en tout point* $z \in \mathcal{V}$ *le sous-espace de* Θz *engendré par les* $\tilde{X} z$ *pour* $\tilde{X} \in \tilde{L}$ *coïncide avec* Θz.

Dans ce paragraphe on supposera que $\tilde{L}$ est transitive sur $\mathcal{V}$. Soit $z \in \mathcal{V}$, $\overline{U}$ et $\overline{V}$ deux voisinages de z; de la définition précédente il résulte que pour tout point $\bar{z} \in \overline{U}$ il existe une transformation affine de $\overline{V}$ sur un voisinage de $\bar{z}$ qui applique z sur $\bar{z}$, on en déduit alors que sur $\overline{U}$ les groupes d'holonomies infinitésimales ont même dimension, donc z est régulier [18] ([6]) pour l'holonomie infinitésimale. Ainsi tous les points de $\mathcal{V}$ étant réguliers pour l'holonomie infinitésimale, le groupe d'holonomie infinitésimale $\sigma' z$ en tout point $z \in \mathcal{V}$ coïncide avec le groupe d'holonomie restreint σz ([21], [17]).

([6]) Ce raisonnement est dû à A. Lichnerowicz [18], p. 95.

2° Soient X et Y deux éléments de L de (7.4), il vient

$$\nabla AX(\tilde{Y}) = \Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}), \tag{10.1}$$

de (6.15), il résulte

$$\Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = [AX, AY] - A[X, Y], \tag{10.2}$$

d'où, pour tout couple X, $Y \in L$, on a

$$\Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) \in \underline{A}z(L).$$

Soit $Z_1 \in L$, d'après (6.7) nous avons

$$L(Z_1)\,\Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = [AZ_1, \Omega] + \nabla\,\Omega(\tilde{X}, \tilde{Y})(\tilde{Z}_1). \tag{10.3}$$

Posons

$$[Z_1, X] = \zeta_1, \qquad [Z_1, Y] = \eta_1;$$

Z_1 appartenant à L, on a

$$L(Z_1)\dot{X}^h = D_0 L(Z_1) X^h + T^h_{0k} L(Z_1)\dot{X}^k,$$

d'où

$$L(Z_1)\dot{X}^h = M^h_k D_0 \zeta^k_1.$$

Le second membre n'est autre que $\dot{\zeta}^h_1$, d'où

$$L(Z_1)\dot{X}^h = \dot{\zeta}^h_1;$$

de même

$$L(Z_1)\dot{Y}^h = \dot{\eta}^h_1.$$

Ainsi le premier membre de (10.3) s'écrit

$$L(Z_1)\,\Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \Omega(\tilde{\zeta}_1, \tilde{Y}) + \Omega(\tilde{X}, \tilde{\eta}_1),$$

d'où le premier membre est un élément de $\underline{A}z$(L), de la relation (10.3) il résulte que $\nabla\,\Omega(\tilde{X}, \tilde{Y})\,(\tilde{Z}_1)$ appartient à $\underline{A}z$(L), en réitérant ce procédé nous voyons donc que l'espace vectoriel Cq ($q = 0, 1, 2, \ldots$) appartient à $\underline{A}z$(L). Ainsi le groupe d'holonomie restreint σz est contenu dans le groupe connexe Kz(L). Compte tenu du théorème précédent, nous énonçons le :

THÉORÈME. — *Si l'algèbre de Lie* $\tilde{L}$ *des t. i. affines est transitive sur* $\mathcal{V}$, *en tout point* $z \in \mathcal{V}$ *on a*

$$\sigma z \subset Kz(L) \subset N_0(\sigma z),$$

ou $N_0(\sigma z)$ *est le normalisateur connexe du groupe d'holonomie restreint* σz *dans le groupe des transformations linéaires de* $T\pi z$.

Dans la suite L sera appelé l'algèbre de Lie de base des t. i. affines.

11. Algèbre de Lie L. — 1. Soit L l'algèbre de Lie de base des t. i. affines et $\underline{A}z(L)$ l'algèbre de Lie des endomorphismes de $T\pi z$ correspondant aux éléments de L. Le lemme suivant résulte aisément du système différentiel linéaire (7.4).

Lemme. — *Soient* X *et* Y *deux éléments de* L *et* AX *et* AY *les endomorphismes de* $T\pi z$ *correspondants si en un point* $x_0 = \pi z_0$ *on a*

$$Xx_0 = Yx_0, \qquad Az_0(X) = Az_0(Y).$$

Alors X *et* Y *coïncident sur tout* V_n.

2° Soit $\tilde{G}$ l'espace vectoriel défini par la somme directe

$$\tilde{G} = \underline{A}z(L) + T\pi z, \tag{11.1}$$

sur $\tilde{G}$ nous définissons la loi de composition suivante :

$$\left\{\begin{array}{lll} [A_1, A_2] = A_1A_2 - A_2A_1 & & [A_1, A_2 \in \underline{A}z(L)], \\ [A, s] & = -[s, A] = As & [s \in T\pi z, A \in \underline{A}z(L)], \\ [s_1, s_2] & = -\Sigma(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2) - \Omega(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2) & [s_1, s_2 \in T\pi z], \end{array}\right. \tag{11.2}$$

où $\tilde{s}$ est défini comme d'habitude par le couple $\tilde{s} = (s, \dot{s} = MD_0 s)$.

La loi de composition (11.2) ne détermine pas en général sur $\tilde{G}$ une structure d'algèbre de Lie, car l'identité de Jacobi n'est pas satisfaite en général. Considérons l'application qui à tout $X \in L$ fait correspondre

$$\mathcal{J}z : \quad X \in L \;\to\; Az(X) - Xx,$$

où $Az(X) \in \underline{A}z(L)$ est Xx est la valeur de X en $x = \pi z$. Soit $\underline{G} = \mathcal{J}z(L)$; il est clair que $\underline{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\tilde{G}$. Nous nous proposons d'étudier les propriétés de $\mathcal{J}z$, par conséquent la structure de $\underline{G}$. Tout d'abord, $\mathcal{J}z$ est une application *linéaire* et *biunivoque* de L sur $\underline{G}$: en effet, la linéarité de $\mathcal{J}z$ résulte immédiatement de sa définition; soit $AX - Xx$ un élément de $\underline{G}$, nous dirons qu'il lui correspond *au plus* un $X \in L$ tel que

$$\mathcal{J}z(X) = Az(X) - Xx \qquad (x = \pi z).$$

Car si Y est un autre élément de L auquel correspond $Az(X) - Xx$, nous devons avoir

$$\mathcal{J}z(Y) = Az(X) - Xx \qquad (x = \pi z);$$

d'après la définition de $\mathcal{J}z(Y)$, on a alors

$$Az(Y) - Yx = Az(X) - Xx \qquad (x = \pi z),$$

d'où

$$Az(Y) = Az(X), \qquad Yx = Xx \qquad (x = \pi z).$$

En vertu du lemme précédent, X et Y coïncident sur tout V_n. Ainsi $\mathcal{J}z$ est une application linéaire et biunivoque. Démontrons que $\mathcal{J}z$ est un *homomorphisme* de L sur $\underline{G}$, comme elle est linaire il suffit de démontrer qu'elle conserve le crochet. Soient X et Y deux éléments de L, on a

$$\mathcal{J}z([X, Y]) = Az[X, Y] - [X, Y]x \qquad (x = \pi z). \tag{11.3}$$

D'autre part, le dernier terme du second membre s'écrit aisément

$$[X, Y]_x = Az(X)Y_x - Az(Y)Xx + \Sigma(\tilde{X}, \tilde{Y}) \qquad (x = \pi z).$$

En portant l'expression précédente dans (11.3) et en substituant $Az[X, Y]$ par sa valeur tirée de (10.2), nous obtenons

$$\mathcal{J}z([X, Y]) = [Az(X), Az(Y)] - Az(X)Yx + Az(Y)Xx - \Sigma(\tilde{X}, \tilde{Y}) - \Omega(\tilde{X}, \tilde{Y});$$

conformément à (11.2), on a alors

$$\mathcal{J}z([X, Y]) = [Az(X) - Xx, Az(Y) - Yx] = [\mathcal{J}z(X), \mathcal{J}z(Y)].$$

Ainsi $\mathcal{J}z$ définit un isomorphisme de L sur la sous-algèbre de Lie $\underline{G}$ de $\tilde{G}$, d'où :

Théorème. — *Soit* L *l'algèbre de Lie de base des transformations infinitésimales affines et* $\tilde{G}$ *l'espace vectoriel défini par la somme directe*

$$\tilde{G} = \underline{A}z(L) + T\pi z,$$

ou $T\pi z$ *est l'espace vectoriel tangent à* V_n *en* $x = \pi z$ *et* $\underline{A}z(L)$ *l'algèbre de Lie des endomorphismes de* $T\pi z$ *correspondant aux éléments de* L. *Supposons que* $\tilde{G}$ *soit muni de la loi de composition définie par* (11.2); *alors* L *est isomorphe à l'algèbre de Lie* $\underline{G} = \mathcal{J}z(L) \subset \tilde{G}$ *par l'application définie*

$$\mathcal{J}z : \; X \in L \;\to\; Az(X) - Xx.$$

III. — Cas des variétés finslériennes.

12. Transformations infinitésimales affines [2]. — Dans cette section nous supposons que V_n est muni d'une structure de variété finslérienne. Soit g le tenseur métrique de cette variété et ω la connexion finslérienne correspondante. On sait que le tenseur de torsion S de cette connexion est nul; si dans la formule (3.1) ω représente la connexion finslérienne, alors la connexion linéaire $\overline{\omega}$ *associée* à ω coïncide avec ω, la matrice L ainsi que son inverse M se réduisent à l'identité (coordonnées locales) et l'endomorphisme A (X) défini par (6.2) peut s'écrire

$$(A(X))^i_j = -(\nabla_j X^i + T^i{}_{jh}\nabla_0 X^h), \tag{12.1}$$

où ∇ représente la dérivée covariante dans la connexion finslérienne.

Les résultats obtenus dans les paragraphes précédents relatifs aux transformations infinitésimales affines d'une connexion linéaire régulière générale, sont en particulier, valables pour la connexion finslérienne. Soit X une transformation infinitésimale de V_n, en vertu de (6.6) et (6.7) la dérivée de Lie par X du tenseur métrique g s'écrit

$$L(X)g_{ij} = -(A(X)_{ij} + A(X)_{ji}), \tag{12.2}$$

où

$$A(X)_{ji} = -(\nabla_j X_i + T_{ijh} \nabla_0 X^h). \tag{12.3}$$

Nous poserons

$$t(X)_{ij} = -(A(X)_{ij} + A(X)_{ji}). \tag{12.4}$$

Pour la transformation infinitésimale X, nous avons

$$\nabla_k t(X)_{ij} = g_{ir} L(X) \check{\Gamma}^r_{jk} + g_{rj} L(X) \check{\Gamma}^r_{ik} + 2 T_{ijr} L(X) \check{\Gamma}^r_{0k}, \tag{12.5}$$

$$\dot{\nabla}_k t(X)_{ij} = g_{ir} L(X) T^r_{jk} + g_{rj} L(X) T^r_{ik}; \tag{12.6}$$

des formules précédentes on obtient

$$\begin{aligned} L(X)\check{\Gamma}^i_{jk} = \left(\frac{1}{2}\right) g^{ih} [\nabla_j t(X)_{hk} + \nabla_k t(X)_{jh} - \nabla_h t(X)_{jk}] \\ - \left(T^i_{jr} L(X) \check{\Gamma}^r_{0k} + T^i_{kr} L(X) \check{\Gamma}^r_{0j} - T_{jkr} g^{ih} L(X) \check{\Gamma}^r_{0h}\right), \end{aligned} \tag{12.7}$$

$$L(X) T^i_{jk} = \left(\frac{1}{2}\right) g^{ih} [\dot{\nabla}_j t(X)_{hk} + \dot{\nabla}_k t(X)_{jh} - \dot{\nabla}_h t(X)_{jk}]. \tag{12.8}$$

Si X définit une t. i. affine (resp. partielle) pour la connexion finslérienne, d'après (12.5) et (12.6) il est clair que la dérivée covariante des deux types ∇_k et $\dot{\nabla}_k$ (resp. du type ∇_k) du tenseur $t(X)$ est o. Inversement, supposons que la dérivée covariante des deux types ∇_k et $\dot{\nabla}_k$ (resp. du type ∇_k) du tenseur t (X) soit o, nous allons montrer que la transformation infinitésimale X définit une t. i. affine (resp. partielle) pour la connexion finslérienne. En effet, si la dérivée covariante du type ∇_k du tenseur t (X) est o, la relation (12.7) s'écrit

$$L(X)\check{\Gamma}^i_{jk} = -\left(T^i_{jr} L(X) \check{\Gamma}^r_{0k} + T^i_{kr} L(X) \check{\Gamma}^r_{0j} - T_{jkr} g^{ih} L(X) \check{\Gamma}^r_{0h}\right). \tag{12.9}$$

Multiplions les deux membres par v^j; compte tenu de l'homogénéité du tenseur de torsion, on a

$$L(X)\check{\Gamma}^i_{0k} = -T^i_{kr} L(X) \check{\Gamma}^r_{00}. \tag{12.10}$$

Multiplions cette relation par v^k, il vient

$$L(X)\check{\Gamma}^i_{00} = 0, \tag{12.11}$$

de (12.10), il résulte

$$L(X)\check{\Gamma}^i_{0k} = 0.$$

Ainsi la relation (12.9) nous donne

$$L(X)\dot{\Gamma}^i_{jk} = 0,$$

d'où X est une transformation infinitésimale affine *partielle*; si, en outre, la dérivée covariante du type $\dot{\nabla}_k$ du tenseur $t(X)$ est 0, de (12.8) on a alors

$$L(X)T^i_{jk} = 0.$$

Ainsi X définit une t. i. affine pour la connexion finslérienne, nous énoncerons donc le :

Théorème. — *Étant donnée une variété finslérienne* V_n, *pour qu'une transformation infinitésimale* X *sur* V_n *définisse une transformation infinitésimale affine (resp. partielle) pour la connexion finslérienne, il faut et il suffit que la dérivée covariante des deux types* ∇_k *et* $\dot{\nabla}_k$ *(resp. du type* ∇_k*) du tenseur symétrique* $t(X)_{ij}$, *défini par* (12.4), *soit nulle.*

Si X définit une t. i. affine partielle pour la connexion finslérienne de [(8.3), chap. II] et [(8.6), chap. II], on obtient

$$L(X)P^i_{0kl} = -v^j\partial_l^{\cdot} L(X)\dot{\Gamma}^i_{jk} = -L(X)\nabla_0 T^i_{kl} = 0. \tag{12.12}$$

13. Isométries infinitésimales [2]. — 1° Soit V_n une variété finslérienne et g le tenseur métrique de cette variété. Nous appelons *isométrie infinitésimale*, une transformation infinitésimale de V_n laissant invariante la métrique. Pour qu'une transformation infinitésimale X sur V_n définisse une isométrie infinitésimale, il faut et il suffit que

$$L(X)g = 0. \tag{13.1}$$

En vertu de (12.2), on a alors

$$A(X)_{ij} + A(X)_{ji} = 0. \tag{13.2}$$

Ainsi le *tenseur* A(X) *défini par* (12.3) *est antisymétrique.* D'après (13.1), nous pouvons alors construire un système de coordonnées locales (x^i) tel que les composantes du tenseur métrique g_{ij} dans ces coordonnées ne dépendent pas de l'une des coordonnées (x^1) par exemple. Soit $x(t)$ un arc géodésique et $v_x = \dot{x}$ le vecteur « vitesse » en chaque point de cet arc; si X est une isométrie infinitésimale, on a alors le long de cet arc

$$\nabla(X_i\dot{x}^i) = \dot{x}^j\nabla_j(X_i\dot{x}^i) = \dot{x}^i\dot{x}^j\nabla_j X_i = \left(\frac{1}{2}\right)t(X)_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0.$$

Il en résulte que la projection du vecteur X du champ sur la tangente à la géodésique est constante le long de la géodésique. En particulier, si la trajectoire de X est la géodésique de l'espace, il s'ensuit que la longueur du vecteur du champ est constante. Dans ce cas, l'isométrie engendrée par X est une translation.

2° Une isométrie infinitésimale est manifestement une transformation infinitésimale affine pour la connexion finslérienne, ainsi les résultats des paragraphes précédents s'appliquent aux algèbres de Lie d'isométries infinitésimales. Soit L l'algèbre de Lie de base d'isométrie infinitésimales, nous désignerons par $\tilde{\mathrm{L}}$ son relèvement sur $\mathcal{V}$. A tout champ de vecteur $\mathrm{X} \in \mathrm{L}$ nous pouvons associer un endomorphisme antisymétrique $\mathrm{A}(\mathrm{X})$ de l'espace vectoriel euclidien $\mathrm{T}\pi z$. Pour le crochet usuel, ces endomorphismes définissent une algèbre de Lie $\underline{\mathrm{A}}z(\mathrm{L})$ qui est l'algèbre de Lie d'un groupe connexe $\mathrm{K}z(\mathrm{L})$ de rotations de $\mathrm{T}\pi z$. Sur $\underline{\mathrm{A}}z(\mathrm{L})$ introduisons le produit scalaire défini par

$$(\alpha(z), \beta(z)) = \left(\frac{1}{2}\right)\alpha_{ij}\beta^{ij}, \qquad \alpha(z), \beta(z) \in \underline{\mathrm{A}}z(\mathrm{L}).$$

Soit $\underline{\sigma}z$ l'algèbre de Lie du groupe d'holonomie restreint en z et $\mathrm{B}z$ l'ortho-complément de $\underline{\sigma}z$ dans l'espace A des endomorphismes antisymétriques de $\mathrm{T}\pi z$ ($\mathrm{B}z$ est le sous-espace supplémentaire de $\underline{\sigma}z$ dans A orthogonal à $\underline{\sigma}z$ au sens du produit scalaire précédent). Soit $\overline{\mathrm{U}}$ un voisinage de $z \in \mathcal{V}$ si pour tout $z \in \overline{\mathrm{U}}$, $\mathrm{S}_{ij}(z)$ appartient à $\underline{\sigma}z(\overline{\mathrm{U}})$, d'après le théorème 1 (§ 11, chap. I), il en est alors de même de $\nabla \mathrm{S}_{ij}(\tilde{\mathrm{Z}})$ pour tout champ local de vecteurs $\tilde{\mathrm{Z}}(\mathrm{Z}, \dot{\mathrm{Z}})$ sur $\overline{\mathrm{U}}$. Par suite, si pour tout $z \in \overline{\mathrm{U}}$, $\beta_{ij}(z) \in \mathrm{B}z$ par différentiation de $\frac{1}{2}\mathrm{S}_{ij}\beta^{ij} = 0$, il vient

$$\frac{1}{2}\nabla \mathrm{S}_{ij}(\tilde{\mathrm{Z}}).\beta^{ij} + \frac{1}{2}\mathrm{S}^{ij}\nabla\beta_{ij}(\tilde{\mathrm{Z}}) = 0;$$

le premier terme étant o, il en est de même du second quel que soit S^{ij}, donc $\nabla\beta_{ij}(\tilde{\mathrm{Z}})$ *appartient à* $\mathrm{B}z$. Soit X une isométrie infinitésimale et $\mathrm{A}z(\mathrm{X})$ l'endomorphisme correspondant. $\mathrm{A}z(\mathrm{X}) \in \underline{\mathrm{A}}z(\mathrm{L})$ peut donc être décomposé selon

$$\mathrm{A}z(\mathrm{X}) = \mathrm{S}(z) + \beta(z), \qquad (\mathrm{S}(z) \in \underline{\sigma}z,\ \beta(z) \in \mathrm{B}z). \tag{13.3}$$

D'autre part, d'après (7.4), on a

$$\nabla \mathrm{A}(\mathrm{X})_{ji}(\tilde{\mathrm{Z}}) = \Omega_{ij}(\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{Z}});$$

de (13.3) il résulte

$$-\Omega_{ij}(\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{Z}}) = \nabla \mathrm{S}_{ij}(\tilde{\mathrm{Z}}) + \nabla\beta_{ij}(\tilde{\mathrm{Z}}).$$

Le premier membre ainsi que le premier terme du second membre appartient à $\underline{\sigma}z$ tandis que le dernier terme du second membre appartient à $\mathrm{B}z$, d'où quel que soit $\tilde{\mathrm{Z}}$, on a

$$\nabla\beta_{ij}(\tilde{\mathrm{Z}}) = 0.$$

Il en résulte que la forme β est à dérivée covariante nulle, elle est donc invariante par le groupe d'holonomie Ψz, en particulier

$$[\sigma z, \beta z] = 0.$$

Ainsi βz *appartient au centralisateur connexe* Co (σz) *du groupe d'holonomie restreint* σz *dans le groupe des rotations de* $T\pi z$. Il en résulte, *d'après* (13.3), *que* $Kz(L)$ *est contenu dans le normalisateur connexe* No (σz) *du groupe d'holonomie restreint* σz *dans le groupe des rotations de* $T\pi z$. Si la variété finslérienne n'admet pas de 2-formes à dérivée covariante nulle, le groupe $Kz(L)$ est contenu dans σz; si, en outre, l'algèbre de Lie $\tilde{L}$ d'isométries infinitésimales est transitive sur $\mathcal{V}$, alors le groupe $Kz(L)$ coïncide avec σz, nous énoncerons le :

Théorème. — *Soit* V_n *une variété finslérienne et* $\mathcal{V}$ *l'espace des vecteurs non nuls tangents à* V_n. *Soit* L *l'algèbre de Lie sur* V_n *d'isométries infinitésimales et* $\tilde{L}$ *son relèvement sur* $\mathcal{V}$. *Si la variété finslérienne n'admet pas de 2-formes à dérivée covariante nulle, le groupe* $Kz(L)$ *est contenu dans le groupe d'holonomie restreint* σz; *si, en outre,* $\tilde{L}$ *est transitive sur* $\mathcal{V}$, $Kz(L)$ *coïncide avec* σz.

CHAPITRE IV.

Transformations des variétés finslériennes compactes.

1. Formule de divergence. — *a*. Dans ce qui suit V_n est muni d'une structure de variété finslérienne. Considérons un recouvrement de V_n par des voisinages munis des repères orthonormés, par rapport à ces repères la métrique de l'espace s'écrit

$$ds^2 = \sum_1^n (\alpha_i)^2$$

et l'élément de volume de V_n est

$$\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n. \tag{1.1}$$

Dans la suite, l'image réciproque de α par l'application $p(W \to V_n)$ sera encore désignée par α. Considérons la forme Φ_0 définie par

$$\Phi_0 = \sum \mathcal{E}_{i_1 \ldots i_n} \beta_{i_1} \wedge \beta_{i_2} \wedge \ldots \wedge \beta_{i_{n-1}} l_{i_n}, \tag{1.2}$$

où $l = \mathcal{L}^{-1} v$, $\beta = \nabla l$ et $i_1, \ldots, i_n$ est une permutation de la suite $1, 2, \ldots, n$ et $\mathcal{E}$ désigne l'indicateur de cette permutation. Dans un changement de repères orthonormés, le second membre de (1.2) sera multiplié par le déterminant d'une matrice orthogonale propre. Ainsi Φ_0 est une forme intrinsèque définie sur W. Choisissons maintenant une base orthonormée (e_i) de $T\pi z$ telle que le vecteur e_n coïncide avec l, dans ce cas, on a

$$l_n = 1, \quad \beta_n = 0, \quad l_\alpha = 0, \quad \beta_\alpha = \omega_{\alpha n} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{1.3}$$

et la forme Φ_0 se réduit à

$$\Phi_0 = (n-1)!\, \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \ldots \wedge \beta_{n-1}.$$

Nous poserons

$$\beta = \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_{n-1}, \tag{1.4}$$

$$\eta = \alpha \wedge \beta, \tag{1.5}$$

η est une $(2n-1)$-forme manifestement fermée sur W.

b. Nous introduisons ici deux opérateurs linéaires sur les formes $\star$ et $\tilde{\star}$: étant donnée une q-forme *semi-basique* Ψ sur W, on désignera par $\star\Psi$ son *adjointe* (7) relativement à α, par $\tilde{\star}\Psi$ son *adjointe* relativement à η, entre $\star$ et $\tilde{\star}$ vient la relation

$$\tilde{\star}\,\Psi = \star\,\Psi \wedge \beta. \tag{1.6}$$

Comme dans la théorie des formes harmoniques nous désignerons par δ l'opérateur de la codifférentiation : étant donnée une q-forme sur W, sa codifférentielle est

$$\delta = (-1)^q\, \tilde{\star}^{-1}\, d\, \tilde{\star}, \tag{1.7}$$

où $\tilde{\star}^{-1}$ est tel que

$$\tilde{\star}^{-1}\,\tilde{\star} = \tilde{\star}\,.\,\tilde{\star}^{-1} = E$$

et pour une q-forme,

$$\tilde{\star}^{-1} = (-1)^{q(2n-1-q)}\,\tilde{\star}. \tag{1.8}$$

Soit π une 1-forme définie par

$$\pi = \sum_1^n a_i \alpha_i. \tag{1.9}$$

Nous nous proposons d'évaluer $\delta\pi$. A cet effet, en vertu de (1.6), nous avons

$$d(\tilde{\star}\,\pi) = d(\star\,\pi \wedge \beta) = d(\star\,\pi) \wedge \beta + (-1)^{n-1} \star\,\pi \wedge d\beta; \tag{1.10}$$

compte tenu de (1.7) et (1.8), on a

$$\delta\pi = -\,\tilde{\star}\,[d(\star\,\pi) \wedge \beta] + (-1)^n\,\tilde{\star}\,[(\star\,\pi) \wedge d\beta]. \tag{1.11}$$

Explicitons le second membre, tout d'abord,

$$\star\,\pi = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_i \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\alpha}_i \wedge \ldots \wedge \alpha_n, \tag{1.12}$$

(7) Pour la construction des forme adjointes, *voir* [16].

où le signe $\hat{}$ signifie que le terme correspondant doit être omis dans le produit extérieur considéré, d'où

$$(1.13)\qquad d(\star\pi) \equiv \nabla_i a_i \alpha \qquad (\operatorname{mod} \beta_i),$$

où ∇ représente la dérivée covariante dans la connexion finslérienne de (1.4); on obtient par différentiation

$$(1.14)\qquad d\beta = \sum_{\lambda=1}^{n-1} (-1)^{\lambda-1} d\beta_\lambda \wedge \beta_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\beta}_\lambda \wedge \ldots \wedge \beta_{n-1}.$$

D'autre part,

$$\beta_i = dl_i + l_j \omega_{ij};$$

il en résulte

$$(1.15)\qquad d\beta_i = \beta_h \wedge \omega_{ih} + l_r \Omega_{ir},$$

où

$$(1.16)\qquad l_r \Omega_{ir} = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} R_{iokl} \alpha_k \wedge \alpha_l + P_{iokl} \alpha_k \wedge \beta_l.$$

Ainsi (1.14) s'écrit

$$(1.17)\qquad d\beta = \sum (P_{hokh} \alpha_k) \wedge \beta + \left(\frac{1}{2}\right) \mathcal{L}^{-1} \sum_\lambda (-1)^{\lambda-1} \times \sum_{k,l} (R_{\lambda okl} \alpha_k \wedge \alpha_l) \wedge \beta_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\beta}_\lambda \wedge \ldots \wedge \beta_{n-1},$$

d'où

$$(1.18)\qquad (-1)^n \star \pi \wedge d\beta = -\sum (a_i P_{hoih}) \eta.$$

Compte tenu de (1.13) et (1.18), l'expression $\delta\pi$ définie par (1.11) s'écrit

$$(1.19)\qquad \delta\pi = -(\nabla_i a_i + a_i P_{hoih}).$$

En vertu de (8.9) du chapitre II, la formule précédente s'écrit en repères naturels de coordonnées locales

$$(1.20)\qquad \delta\pi = -(\nabla_i a^i - a^i \nabla_0 T_i),$$

où T_i désigne le tenseur de torsion contracté de la connexion finslérienne. Supposons maintenant que V_n soit compacte. Nous remarquons que l'*espace* W *est toujours orientable* (Steenrod [23], p. 23), que V_n *soit orientable ou non*. En appliquant la formule de Stokes généralisée, on a

$$(1.21)\qquad \int_W \delta\pi\eta = -\int_W (\nabla_i a^i - a^i \nabla_0 T_i)\, \eta = 0.$$

A cette formule, on donne le nom de *formule de divergence*.

2. Transformations infinitésimales conformes. — *a*. Soit μ une transformation de V_n et $\tilde{\mu}$ son prolongement sur $\mathcal{V}$. Soit g le tenseur

métrique de la variété finslérienne. La transformation μ est dite conforme s'il existe un scalaire réel φ sur V_n tel que

$$\mu^* g = \exp(2\varphi) g. \tag{2.1}$$

Il en résulte que la transformation conforme μ laisse invariant le tenseur de torsion de la connexion finslérienne. En effet, en désignant par $\hat{g}$ le premier membre de (2.1), on a

$$\hat{g}_{ij} = \exp(2\varphi) g_{ij},$$

φ étant indépendant de la direction, une dérivation par rapport à v^k nous donne

$$\dot{\partial}_k \hat{g}_{ij} = \exp(2\varphi)\, \dot{\partial}_k g_{ij}.$$

En multipliant les deux membres de cette relation par $\frac{1}{2}\exp(-2\varphi)\, g^{ir}$ on obtient

$$\hat{T}^r{}_{jk} = T^r{}_{jk},$$

où $\hat{T}$ est le tenseur de torsion correspondant à $\hat{g}$.

A l'aide du tenseur métrique nous pouvons construire la densité scalaire de poids 1 sur W

$$\underline{g} = \sqrt{\text{dét}(g_{ij})} \tag{2.2}$$

et la densité tensorielle de poids $-\frac{2}{n}$ sur W définie par

$$\underline{C} = \underline{g}^{-\frac{2}{n}} g. \tag{2.3}$$

Il est clair que la transformation conforme μ laisse invariante la densité tensorielle $\underline{C}$ et inversement, toute transformation de V_n qui laisse invariante cette densité tensorielle est une transformation conforme. Soit alors $\exp(uX)$ un groupe de transformations de V_n et $\exp(u\tilde{X})$ son groupe prolongé opérant sur $\mathcal{V}$. Pour que les transformations de ce groupe soient conformes, il faut et il suffit que

$$L(X)\, \underline{C} = 0. \tag{2.4}$$

Une transformation infinitésimale X sur V_n sera dite *une transformation infinitésimale conforme* s'il satisfait à (2.4). Si V_n est *compacte*, toute transformation infinitésimale conforme définit un groupe à 1-paramètre de transformations conformes de V_n.

b. Soit X une transformation infinitésimale de V_n, nous sommes ainsi amenés à évaluer $L(X)\underline{C}$; de (2.3) il vient

$$L(X)\, \underline{C} = -\frac{2}{n} \underline{g}^{-\frac{2}{n}-1} g\, L(X)\, \underline{g} + \underline{g}^{-\frac{2}{n}} L(X)\, g. \tag{2.5}$$

D'autre part, de (2.2) on obtient

$$\mathrm{L}(\mathrm{X})\underline{g} = \frac{1}{2}\underline{g}\, g^{ij}\,\mathrm{L}(\mathrm{X})g_{ij}; \tag{2.6}$$

de (12.2) du chapitre III on a

$$g^{ij}\,\mathrm{L}(\mathrm{X})g_{ij} = 2(\nabla_i \mathrm{X}^i + \mathrm{T}^i\nabla_0\mathrm{X}_i). \tag{2.7}$$

Désignons encore par X la 1-forme semi-basique associée au champ de vecteurs X par la dualité définie par la métrique; si l'on pose

$$\rho = \mathrm{T}^i\mathrm{X}_i, \tag{2.8}$$

on a, d'après (1.20),

$$\delta(\mathrm{X} + \rho v) = -(\nabla_i\mathrm{X}^i + \mathrm{T}^i\nabla_0\mathrm{X}_i). \tag{2.9}$$

Ainsi la relation (2.6) s'écrit

$$\mathrm{L}(\mathrm{X})\underline{g} = -\underline{g}\,\delta(\mathrm{X} + \rho v)$$

et la formule (2.5) devient

$$\mathrm{L}(\mathrm{X})\,\underline{\mathrm{C}} = \underline{g}^{-\frac{2}{n}}\left[\mathrm{L}(\mathrm{X})g + \frac{2}{n}g\,\delta(\mathrm{X} + \rho v)\right]. \tag{2.10}$$

Au champ de vecteurs X nous associons le tenseur symétrique restreint sur W défini par

$$\tau(\mathrm{X}) = \underline{g}^{\frac{2}{n}}\,\mathrm{L}(\mathrm{X})\,\underline{\mathrm{C}} = \mathrm{L}(\mathrm{X})g + \frac{2}{n}g\,\delta(\mathrm{X} + \rho v).$$

Ce tenseur a pour composantes

$$\tau(\mathrm{X})_{ij} = \nabla_i\mathrm{X}_j + \nabla_j\mathrm{X}_i + 2\mathrm{T}^h{}_{ij}\nabla_0\mathrm{X}_h + \frac{2}{n}g_{ij}\,\delta(\mathrm{X} + \rho v), \tag{2.11}$$

d'où

$$g^{ij}\,\tau(\mathrm{X})_{ij} = 0. \tag{2.12}$$

Pour que X *définisse une transformation infinitésimale conforme, il faut et il suffit* que

$$\tau(\mathrm{X}) = 0. \tag{2.13}$$

Pour que X *définisse une isométrie infinitésimale, il faut et il suffit que*

$$\tau(\mathrm{X}) = 0, \qquad \delta(\mathrm{X} + \rho v) = 0. \tag{2.14}$$

c. Soit X une transformation infinitésimale conforme, on a

$$\mathrm{L}(\mathrm{X})g_{ij} + \frac{2}{n}g_{ij}\,\delta(\mathrm{X} + \rho v) = 0;$$

une dérivation nous donne

$$\mathrm{L}(\mathrm{X})\,\mathrm{T}_{ijh} + \frac{2}{n}\mathrm{T}_{ijh}\,\delta(\mathrm{X} + \rho v) + \frac{1}{n}g_{ij}\,\dot{\partial}_h\,\delta(\mathrm{X} + \rho v) = 0. \tag{2.15}$$

Multiplions cette relation par v^i :

$$g_{ij} v^i \dot{\delta}_h \delta(X + \rho v) = 0.$$

Il vient

(2.16) $$\dot{\delta}_h \delta(X + \rho v) = 0.$$

Soit ξ une transformation infinitésimale de V_n; pour que ξ définisse une transformation infinitésimale conforme, *il faut et il suffit qu'il existe une fonction $a(y)$ à valeurs réelles sur* W *telle que*

(2.17) $$L(\xi) g = a(y) g \qquad (y \in W)$$

et cette fonction est nécessairement l'image d'une fonction de V_n; la relation (2.17) s'écrit, en effet,

(2.18) $$\tau(\xi) = a(y) g + \frac{2}{n} g \delta(\xi + \gamma v),$$

avec

$$\gamma = \xi_i T^i.$$

Multiplions les deux membres de (2.18) par g^{ij}; il vient, compte tenu de (2.12),

$$a(y) + \frac{2}{n} \delta(\xi + \gamma v) = 0,$$

d'où $\tau(\xi) = 0$ et l'on en déduit que $a(y)$ ne dépend pas de la direction.

3. Caractérisation des transformations infinitésimales conformes. — 1° *a*. Soient t et t' deux tenseurs restreints de degré 0, d'ordre p, leur produit scalaire local sera par définition

(3.1) $$(t, t') = \frac{1}{p!} t_{i_1 \dots i_p} t'^{i_1 \dots i_p}.$$

Supposons V_n compacte de (t, t'); on obtient par intégration sur W *le produit scalaire global*

(3.2) $$\langle t, t' \rangle = \int_W (t, t') \eta,$$

$\langle t, t \rangle$ étant positif et $\langle t, t \rangle = 0$ entraîne $t = 0$ sur W.

b. Dans le paragraphe précédent nous avons associé au champ de vecteurs X sur V_n un tenseur d'ordre 2 symétrique restreint sur W

(3.3) $$\tau(X)_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i + 2 T^h{}_{ij} \nabla_0 X_h + \frac{2}{n} g_{ij} \delta(X + \rho v).$$

Avec

(3.4) $$\rho = X_i T^i.$$

Soit $u(X)$ la 1-forme semi-basique sur W, ayant pour composantes

(3.5) $$u_i(X) = X^j \tau(X)_{ij},$$

d'où

$$(3.6)\qquad \begin{aligned}\delta u &= -(\nabla^i u_i - u_i \nabla_0 T^i)\\ &= -(\tau(X), \tau(X)) - X^j \nabla^i \tau(X)_{ij} + T^h{}_{ij} \nabla_0 X_h \tau(X)^{ij} + X^j \nabla_0 T^i \tau(X)_{ij}.\end{aligned}$$

Soit λ la fonction à valeurs réelles sur W définie par

$$\lambda = T^h{}_{ij} X_h \tau(X)^{ij},$$

on en déduit

$$(3.7)\qquad \delta(\lambda v) = -\nabla_0 T^h{}_{ij} X_h \tau(X)^{ij} - T^h{}_{ij} \nabla_0 X_h \tau(X)^{ij} - T^h{}_{ij} X_h \nabla_0 \tau(X)^{ij}.$$

En ajoutant membre à membre les relations (3.6) et (3.7), on obtient

$$(3.8)\qquad \begin{aligned}\delta(u + \lambda v) = -(\tau(X), \tau(X)) &- X^j [\nabla^i \tau(X)_{ij} + T_{ijh} \nabla_0 \tau(X)^{ih}]\\ &- X_h [\nabla_0 T^h{}_{ij} \tau(X)^{ij} - \tau(X)^{ih} \nabla_0 T_i].\end{aligned}$$

D'autre part,

$$T_i = T^j{}_{ij} = g^{jr} T_{rij}.$$

Multiplions les deux membres par g^{ih}

$$g^{ih} T_i = g^{jr} T^h{}_{rj},$$

d'où

$$g^{ih} \nabla_0 T_i = g^{ij} \nabla_0 T^h{}_{ij}.$$

En prenant la dérivée de Lie par X des deux membres, on obtient

$$(3.9)\qquad L(X) g^{ih} \nabla_0 T_i - L(X) g^{ij} \nabla_0 T^h{}_{ij} = g^{ij} L(X) \nabla_0 T^h{}_{ij} - g^{ih} L(X) \nabla_0 T_i.$$

Mais, d'après la formule (6.7) du chapitre III, on a

$$L(X) g^{ih} = -\left[\tau(X)^{ih} - \frac{2}{n} g^{ih} \delta(X + \rho v)\right].$$

En portant cette relation dans (3.9), il vient

$$(3.10)\qquad \tau(X)^{ij} \nabla_0 T^h{}_{ij} - \tau(X)^{ih} \nabla_0 T_i = g^{ij} L(X) \nabla_0 T^h{}_{ij} - g^{ih} L(X) \nabla_0 T_i.$$

Ainsi (3.8) s'écrit

$$(3.11)\qquad \begin{aligned}\delta(u + \lambda v) = &-(\tau(X), \tau(X))\\ &- X_j [\nabla_i \tau(X)^{ij} + T^j{}_{ih} \nabla_0 \tau(X)^{ih} + g^{ih} L(X) \nabla_0 T^j{}_{ih} - g^{ij} L(X) \nabla_0 T_i].\end{aligned}$$

Lemme. — *La variété finslérienne* V_n *étant compacte, par intégration de* (3.11) *sur* W *on a*

$$(3.12)\qquad \langle \tau(X), \tau(X) \rangle + \langle \zeta(X), X \rangle = 0,$$

avec

$$(3.13)\qquad \zeta^j(X) = \nabla_i \tau(X)^{ij} + T^j{}_{ih} \nabla_0 \tau(X)^{ih} + g^{ih} L(X) \nabla_0 T^j{}_{ih} - g^{ij} L(X) \nabla_0 T_i.$$

c. Soit X une transformation infinitésimale conforme dans ce cas $\tau(X) = 0$ et, en vertu de (3.10) et (3.13), ζ est identiquement nul, que la variété V_n soit compacte ou non. Inversement, supposons sur une variété finslérienne compacte V_n une transformation infinitésimale X telle que $\zeta(X) = 0$; du lemme précédent il résulte que $\langle \tau(X), \tau(X) \rangle = 0$, ainsi $\tau(X) = 0$ sur W. Nous énoncerons donc le :

Théorème 1. — *Soit V_n une variété finslérienne compacte, pour qu'une transformation infinitésimale X sur V_n définisse une transformation infinitésimale conforme, il faut et il suffit que*

$$\nabla_i \tau(X)^{ij} + T^j{}_{ih} \nabla_0 \tau(X)^{ih} + g^{ih} L(X) \nabla_0 T^j{}_{ih} - g^{ij} L(X) \nabla_0 T_i = 0. \tag{3.14}$$

Soit X une transformation infinitésimale conforme et supposons, en outre, qu'on a

$$d\,\delta(X + \rho v) = 0 \qquad (\rho = X_i T^i), \tag{3.15}$$

d'où

$$\delta(X + \rho v) = \text{Cte},$$

Si V_n est compacte, de la relation précédente on obtient par intégration sur W,

$$\delta(X + \rho v) = 0.$$

Ainsi X définit une isométrie infinitésimale; de (3.14) on déduit :

Corollaire. — *Pour qu'une transformation infinitésimale X définisse sur une variété finslérienne compacte V_n une isométrie infinitésimale, il faut et il suffit qu'on ait* (3.15) *et*

$$\nabla_i t(X)^{ij} + T^j{}_{ih} \nabla_0 t(X)^{ih} + g^{ih} L(X) \nabla_0 T^j{}_{ih} - g^{ij} L(X) \nabla_0 T_i = 0, \tag{3.16}$$

avec

$$t(X)_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i + 2 T^h{}_{ij} \nabla_0 X_h. \tag{3.17}$$

2° Soit X une transformation infinitésimale sur V_n, en vertu de (3.3) et (3.17), les tenseurs $\tau(X)$ et $t(X)$ sont liés par

$$\tau(X)_{ij} = t(X)_{ij} + \frac{2}{n} g_{ij}\, \delta(X + \rho v) \qquad (\rho = X_i T^i), \tag{3.18}$$

d'où

$$\nabla_j t(X)_{hk} = \nabla_j \tau(X)_{hk} - \frac{2}{n} g_{hk} p_j, \tag{3.19}$$

avec

$$p_j = \partial_j\, \delta(X + \rho v) \qquad (\rho = X_i T^i). \tag{3.20}$$

Compte tenu de (3.19) et (3.20), la formule (12.7) du chapitre III s'écrit

$$\begin{aligned} L(X)\, \check{\Gamma}^i{}_{jk} = {} & \left(\frac{1}{2}\right) g^{ih} [\nabla_j \tau(X)_{hk} + \nabla_k \tau(X)_{jh} - \nabla_h \tau(X)_{jk}] \\ & - \frac{1}{n} [\delta^i_k p_j + \delta^i_j p_k - g_{jk} p^i] \\ & - \left[T^i{}_{jr} L(X) \check{\Gamma}^r{}_{0k} + T^i{}_{kr} L(X) \check{\Gamma}^r{}_{0j} - T_{jkr} g^{ih} L(X) \check{\Gamma}^r{}_{0h} \right]. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Supposons que X soit une transformation infinitésimale conforme, on a alors $\tau(X) = 0$ et $\dot{\partial}_j \partial(X + \rho v) = 0$; la relation précédente devient

$$(3.22)\qquad L(X)\check{\Gamma}^i_{jk} = -\frac{1}{n}[\delta^i_k p_j + \delta^i_j p_k - g_{jk} p^i] - \left[T^i_{jr} L(X)\check{\Gamma}^r_{0k} + T^i_{kr} L(X)\check{\Gamma}^r_{0j} - T_{jkr} g^{ih} L(X)\check{\Gamma}^r_{0h}\right].$$

Multiplions cette relation par v^j :

$$v^j L(X)\check{\Gamma}^i_{jk} = -\frac{1}{n}[\delta^i_k (p, v) + v^i p_k - v_k p^i] - T^i_{kr} L(X)\check{\Gamma}^r_{00}.$$

Multiplions cette dernière par v^k

$$L(X)\check{\Gamma}^i_{00} = \frac{2}{n}[F p^i - (p, v) v^i].$$

Avec les notations du chapitre II (§ 7), on a

$$(3.23)\qquad L(X) G^i = \frac{1}{n}[F p^i - (p, v) v^i],$$

où

$$(3.24)\qquad p_i = \partial_i \partial(X + \rho v), \qquad \dot{\partial}_h \partial(X + \rho v) = 0 \qquad (\rho = X_i T^i).$$

Ainsi si X est une transformation infinitésimale conforme, on a (3.23) et (3.24). Inversement, sur une variété finslérienne compacte, soit X une transformation infinitésimale satisfaisant à (3.23) et (3.24). Nous allons montrer que X définit une transformation infinitésimale conforme. En effet, par dérivation covariante de (3.18), on obtient

$$(3.25)\qquad \nabla_i \tau(X)^{ih} + T^h_{ij} \nabla_0 \tau(X)^{ij} = \nabla_i t(X)^{ih} + T^h_{ij} \nabla_0 t(X)^{ij} + \frac{2}{n}[p^h + T^h(p, v)].$$

D'autre part, de la formule (8.7), du chapitre II, il vient

$$(3.26)\qquad g^{ij} L(X) \nabla_0 T^h_{ij} - g^{ih} L(X) \nabla_0 T_i = g^{ij} \dot{\partial}_{ij} L(X) G^h - g^{ih} \dot{\partial}_{ij} L(X) G^j - g^{ij} L(X)\check{\Gamma}^h_{ij} + g^{ih} L(X)\check{\Gamma}^j_{ij}.$$

Des relations (12.5) et (12.7) du chapitre III on obtient les formules suivantes :

$$(3.27)\qquad \nabla_i t(X)^{ih} - g^{ij} L(X)\check{\Gamma}^h_{ij} = 2 T^{hk}_r L(X)\check{\Gamma}^r_{0k} - T_r g^{hi} L(X)\check{\Gamma}^r_{0i} - p^h,$$

$$(3.28)\qquad g^{ih} L(X)\check{\Gamma}^j_{ij} = -p^h - T_r g^{ih} L(X)\check{\Gamma}^r_{0i},$$

$$(3.29)\qquad T^h_{ij} \nabla_0 t(X)^{ij} = 2\left(T^{hr}_i L(X)\check{\Gamma}^i_{r0} + T^h_{ij} T^{ij}_r L(X)\check{\Gamma}^r_{00}\right).$$

En ajoutant membre à membre les relations (3.25) et (3.26), compte tenu de (3.27), (3.28) et (3.29), on obtient en utilisant la formule (7.15) du chapitre II.

$$(3.30)\qquad \zeta^h(X) = 4 T^{hk}_r \dot{\partial}_k L(X) G^r - 2 T_r g^{hk} \dot{\partial}_k L(X) G^r + 4 T^h_{ij} T^{ij}_r L(X) G^r + g^{ij} \dot{\partial}_{ij} L(X) G^h - g^{ih} \dot{\partial}_{ij} L(X) G^j + \frac{2}{n}(p, v) T^h + \left(\frac{2}{n} - 2\right) p^h.$$

Par hypothèse, X satisfait aux relations (3.23) et (3.24); il en résulte, par dérivation,

$$(3.31)\qquad \dot{\partial}_k L(X) G^r = \frac{1}{n}\left[v_k p^r - p_k v^r - \mathcal{L}^2 p^m T^r{}_{mk} - (p, v)\, \delta^r{}_k\right],$$

$$(3.32)\qquad \dot{\partial}_{lk} L(X) G^r = \frac{1}{n}\left[g_{kl} p^r - 2 v_k T^r{}_{ml} p^m - 2 v_l T^r{}_{mk} p^m - \mathcal{L}^2 p_m \dot{\partial}_l T^{mr}_k - p_k \delta^r{}_l - p_l \delta^r{}_k\right].$$

En tenant compte de

$$g^{kh} \dot{\partial}_r T^{mr}_k - g^{rk} \dot{\partial}_r T^{hm}_k = 2 T^{kh}_r T^{mr}_k - 2 T^k T^{hm}_k,$$

la relation (3.32) nous donne

$$(3.33)\qquad g^{ij} \dot{\partial}_{ij} L(X) G^h - g^{kh} \dot{\partial}_{rk} L(X) G^r$$
$$= \frac{1}{n}\left[(2n-2) p^h + 2 v^h p_m T^m + 2 \mathcal{L}^2 p_m (T^{kh}_r T^{mr}_k - T^k T^{hm}_k)\right].$$

En portant (3.23), (3.31) et (3.33) dans (3.30) nous voyons que $\zeta(X) = 0$; il s'ensuit, d'après le théorème 1, que X définit une transformation infinitésimale conforme; nous énonçons donc le :

THÉORÈME 2. — *Pour qu'une transformation infinitésimale* X *sur une variété finslérienne compacte définisse une transformation infinitésimale conforme, il faut et il suffit que*

$$L(X) G^i = \frac{1}{n}\left[F p^i - (p, v) v^i\right],$$

où

$$p_j = \partial_j \partial(X + \rho v), \qquad \dot{\partial}_h \partial(X + \rho v) = 0 \qquad (\rho = X_i T^i).$$

4. TRANSFORMATIONS AFFINES D'UNE VARIÉTÉ FINSLÉRIENNE. — Soit V_n une variété finslérienne compacte et X une transformation infinitésimale affine partielle pour la connexion finslérienne.

D'après le théorème du paragraphe 12, du chapitre III, la dérivée covariante du type ∇_k du tenseur $t(X)$ associé à X est nulle, et nous avons, d'autre part, (3.26). Ainsi X satisfait à la relation (3.16). D'après (3.28), $\nabla^h \partial(X + \rho v) = 0$ et X définit une transformation infinitésimale conforme satisfaisant à (3.15), donc une isométrie infinitésimale. Inversement, il est clair qu'une isométrie infinitésimale est une transformation infinitésimale affine partielle, d'où :

THÉORÈME [8]. — *Sur une variété finslérienne compacte le plus grand groupe connexe des transformations affines partielles pour la connexion finslérienne coïncide avec le plus grand groupe connexe d'isométries.*

Il en est *a fortiori* de même pour les transformations affines.

---

[8] Ce théorème a été établi dans le cas riemannien par K. Yano [25], p. 222, *voir* aussi A. Lichnerowicz [18], p. 130.

5. Holonomie et isométries infinitésimales. — Dans ce paragraphe, nous supposons que la variété finslérienne V_n est compacte et le tenseur de torsion contracté satisfait à

$$\nabla_0 T_i = 0. \tag{5.1}$$

Soit L l'algèbre de Lie d'isométries infinitésimales sur V_n et $\tilde{L}$ son relèvement sur $\mathcal{V}$. Soit $X \in L$ et $A(X)$ l'endomorphisme de $T\pi z$ correspondant. D'après le paragraphe 13 du chapitre III, on sait que $A(X)$ peut être décomposé en

$$A_z(X) = S(z) + \beta(z),$$

où $S(z) \in \sigma z$ et $\beta(z)$ est à dérivée covariante o. Soit Y le champ de vecteurs défini par

$$Y^i = \beta^{ij} X_j,$$

d'où

$$\delta Y = -\nabla_i Y^i = -\beta^{ij} \nabla_i X_j = \beta^{ij} A(X)_{ij} = \beta^{ij} \beta_{ij} \geqq 0.$$

Par intégration sur W, on obtient

$$\int_W \delta Y \eta = \int_W (\beta^{ij} \beta_{ij}) \eta = 0,$$

il en résulte que $\beta = 0$ sur W, ainsi :

Théorème. — *Soit V_n une variété finslérienne compacte,* L *l'algèbre de Lie d'isométries infinitésimales sur V_n et $\tilde{L}$ son relèvement sur $\mathcal{V}$. Si le tenseur de torsion contracté de la connexion finslérienne satisfait à* (5.1), *le groupe* $Kz(L)$ *correspondant à* L *est contenu dans le groupe d'holonomie homogène* σz, *si en outre* $\tilde{L}$ *est transitive sur* $\mathcal{V}$, *alors* $Kz(L)$ *coïncide avec* σz.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] H. Akbar-Zadeh, *Sur la réductibilité d'une variété finslérienne* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 239, 1954, p. 945-947).
[2] H. Akbar-Zadeh, *Sur les isométries infinitésimales d'une variété finslérienne* (*Ibid.*, t. 242, 1956, p. 608-610).
[3] H. Akbar-Zadeh, *Sur une connexion euclidienne d'espace d'éléments linéaires* (*Ibid.*, t. 245, 1957, p. 26-28).
[4] H. Akbar-Zadeh, *Sur une connexion coaffine d'espace d'éléments linéaires* (*Ibid.*, t. 247, 1958, p. 1 707-1 710).
[5] H. Akbar-Zadeh, *Sur les espaces de Finsler isotropes* (*Ibid.*, t. 252, 1961, p. 2061-2063).
[6] H. Akbar-Zadeh, *Transformations infinitésimales conformes des variétés finslériennes compactes* (*Ibid.*, t. 252, 1961, p. 2 807-2 809).
[7] W. Ambrose et I. M. Singer, *A theorem on holonomy* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 75, 1953, p. 428-443).
[8] N. Bourbaki, *Topologie générale*, Livre III, Hermann, Paris 1955.
[9] É. Cartan, *Les espaces de Finsler*, Hermann, Paris, 1934.

[10] É. CARTAN, *Leçons sur la Géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris, 1951.

[11] C. CHEVALLEY, *Theory of Lie groups*, Princeton University Press, 1946.

[12] C. EHRESMANN, *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Coll. de Topologie, Bruxelles, 1950, p. 29-55.

[13] H. HIRAMATU, *Groups of homothetic transformations in a Finsler space* (*Tensor*, t. 3, 1954, p. 131-143).

[14] B. KOSTANT, *Holonomy and the Lie algebra of infinitésimal motions of a Riemann manifold* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 80, 1955, p. 528-542).

[15] A. LICHNEROWICZ, *Les espaces variationnels généralisés* (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 1945-1946, p. 338-384).

[16] A. LICHNEROWICZ, *Quelques théorèmes de géométrie différentielle globale* (*Comm. Math. Helv.*, t. 22, fasc. 4, 1949).

[17] A. LICHNEROWICZ, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Dunod, Paris 1955.

[18] A. LICHNEROWICZ, *Géométrie des groupes de transformations*, Dunod, Paris, 1958.

[19] F. MAURER-TISON, *L'espace fibré des corepères affines et son rôle fondamental en théorie unitaire d'Einstein-Schrödinger* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 246, 1958, p. 240).

[20] A. NIJENHUIS, *On the Holonomy groups of linear connections*. I. *General properties of affine connection* (*Proc. Kon. Akad. Ams.*, A, t. 56, 1953, p. 233-249).

[21] A. NIJENHUIS, *A note infinitésimal holonomy groups Nagoya* (*Math. J.*, t. 12, 1957, p. 145-146).

[22] H. RUND, *The Differential geometry of Finsler spaces*, *Springer-Verlag*, Berlin ,1959.

[23] N. STEENROD, *The topology of fibre bundles*, Princeton University Press, 1951.

[24] H. C. WANG, *On Finsler spaces with completely integrable equations of Killing* (*J. London Math. Soc.*, t. 22, 1947, p. 5-9).

[25] K. YANO, *The theory of Lie derivatives and its applications*, North-Holland Publishing Co, Amsterdam.

[26] K. YANO et S. BOCHNER, *Curvature and Betti numbers*, Princeton University Press, 1953.