F. Maurer-Tison

Aspects mathématiques de la théorie unitaire du champ d'Einstein

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 76, no 3 (1959), p. 185-269

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1959_3_76_3_185_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 76, 1959, p. 185 à 269.

ASPECTS MATHÉMATIQUES
DE LA
THÉORIE UNITAIRE DU CHAMP D'EINSTEIN

PAR Mme F. MAURER-TISON.

TABLE DES MATIÈRES.

Chapitre III. — *Connexions infinitésimales et théorie unitaire.*

I. — *Interprétation géométrique du système des équations de liaison.*

II. — *L'espace fibré des corepères affines.*

DEUXIÈME PARTIE.

Le problème de Cauchy pour les équations du champ.

Chapitre IV. — *Les coordonnées isothermes.*

Chapitre V. — *Conditions générales d'existence des solutions.*

I. — *Analyse du système des équations du champ.*

II. — *Détermination complète des variétés caractéristiques.*

Chapitre VI. — *Les éléments géométriques attachés à chaque point de V_4.*

I. — *Étude algébrique des relations qui tient les tenseurs dérivés du tenseur fondamental.*

II. — *Les trois cônes caractéristiques.*

TROISIÈME PARTIE.

INTERPRÉTATION PHYSIQUE.

CHAPITRE VII. — *Surfaces d'ondes gravitationnelles et électromagnétiques.*

CHAPITRE VIII. — *Le tenseur d'impulsion-énergie.*

INTRODUCTION.

La théorie du champ unifié d'Einstein-Schrödinger attire par son apparente simplicité et rebute par les calculs pénibles qu'elle nécessite; c'est une théorie jeune, dont le bagage est mince s'il est examiné avec rigueur, immense si l'on considère les efforts tentés pour explorer ses possibilités.

Considérons un tenseur fondamental d'ordre 2 sur une variété différentiable munie d'une connexion linéaire, et imposons au tenseur et à la connexion de satisfaire à un principe variationnel : c'est l'hyperchamp géométrique qui doit réunir le champ de gravitation et le champ électromagnétique, ce sont les équations qui doivent généraliser les équations de Maxwell et les équations d'Einstein du schéma électromagnétique pur; la théorie sera d'autant plus unitaire que la séparation des deux champs sera plus artificielle, d'autant plus satisfaisante qu'elle apportera des nouveautés sous forme de termes d'interaction ou autres. Après substitution à la connexion linéaire initiale d'une connexion linéaire à vecteur de torsion nul de coefficients $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ définissant le même parallélisme, les équations finalement adoptées liant le tenseur fondamental $g_{\alpha\beta}$ et la connexion $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ sont les suivantes [1] :

$$\partial_\rho g_{\lambda\mu} - L^{\sigma}_{\lambda\rho} g_{\sigma\mu} - L^{\sigma}_{\rho\mu} g_{\lambda\sigma} = 0, \tag{1}$$

$$\partial_\rho (g^{[\rho\beta]} \sqrt{-g}) = 0, \tag{2}$$

$$P_{\alpha\beta} - \frac{2}{3} (\partial_\alpha \Sigma_\beta - \partial_\beta \Sigma_\alpha) = 0. \tag{3}$$

Les premières définissent la connexion en fonction du tenseur fondamental sauf cas exceptionnel, les secondes traduisent la propriété de torsion de la connexion $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$, les dernières, où $P_{\alpha\beta}$ est le tenseur de Ricci, Σ_α un vecteur covariant arbitraire, sont les équations de champ proprement dites. Quatre identités de conservation, déduites du principe variationnel, lient $P_{\alpha\beta}$ et $g_{\alpha\beta}$: elles jouent un rôle primordial dans la résolution du problème de Cauchy : celui-ci a été entièrement analysé en 1953 par Lichnerowicz avec des méthodes d'approche directement inspirées de la relativité générale et sans calculs explicites; l'étude conclut à l'existence de surfaces d'ondes du champ unitaire solutions de l'équation

$$l^{\alpha\beta}\, \partial_\alpha f\, \partial_\beta f = 0. \tag{4}$$

D'autres surfaces d'ondes, variétés caractéristiques du système des équations de champ, devaient apparaître dans l'étude d'un cas exceptionnel laissé provisoirement de côté ; ce fut le point de départ de notre travail.

Ayant montré qu'en chaque point de la variété V_4 le conoïde caractéristique était constitué de trois nappes tangentes respectivement à trois cônes du second ordre, la question s'est posée de fixer la position relative de ces trois cônes; ils sont en général emboîtés; à ce point, la tentation était grande de se lancer dans les interprétations physiques : le cône extérieur serait le cône de lumière, et déterminerait la « vraie métrique »; un des cônes intérieurs, plus probablement celui défini par $l_{\alpha\beta}$, propagerait l'énergie électromagnétique. A la suite des travaux de Pham Mau Quan [15], ceci nous menait à chercher deux tenseurs champ et induction définissant en chaque point un « libre courant » fonction des valeurs du tenseur fondamental en ce point; les sources du champ seraient donc incluses dans le cadre géométrique de la théorie sous forme d'une distribution continue de charge dans tout l'espace. Alors nous avons voulu extraire des équations (3), où $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ est supposé remplacé par la solution unique de (1) un système de la forme

$$S_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} \tag{5}$$

comportant au premier membre un tenseur d'Einstein formé à partir de notre métrique, et, au second membre, un tenseur de Maxwell symétrisé formé à

---

[1] Notations et symboles sont précisés p. 192 et 193.

partir des tenseurs champ et induction supposés. L'entreprise est grandement facilitée par l'emploi de coordonnées particulières et aboutit à un résultat comprenant le tenseur de Maxwell désiré, déjà mis en évidence par M^me Tonnelat par une autre méthode, et d'autres tenseurs dont l'interprétation est douteuse à ce stade de la théorie; nous avons dû employer en dernier ressort des hypothèses de champ faible, ce qui n'est pas pour nous étonner, car tenseur et équations de Maxwell sont directement issus de la relativité restreinte, et n'ont pas été vraiment « généralisés » par la relativité générale. Les coordonnées particulières utilisées s'inspirent des coordonnées isothermes de De Donder et Darmois; mais leur succès n'est que partiel : alors que, sur une variété riemannienne, l'usage des coordonnées isothermes sépare les potentiels dans l'expression des composantes du tenseur de Ricci en ce qui concerne les dérivées du second ordre, sur notre variété à connexion linéaire, la séparation est incomplète; cela s'explique aisément; en relativité générale, les surfaces coordonnées privilégiées satisfont à une équation invariante du deuxième ordre admettant les mêmes caractéristiques que les équations d'Einstein; en théorie unitaire, nous avons des équations de champ qui comportent un système triple de caractéristiques dont une seule famille subsiste dans l'équation invariante qui définit les coordonnées isothermes. Il nous semble donc que des coordonnées vraiment « isothermes » ne doivent pas exister en théorie unitaire; néanmoins les identités « fondamentales » que nous avons obtenues permettent des calculs d'approximation avec un maximum de simplicité et semblent indiquer la direction des interprétations physiques.

Nos identités ne sont des identités, répétons-le, que si l'on y suppose remplacée la connexion linéaire par la solution unique de (1); comme cette solution est inutilisable directement, nos calculs n'ont pu se faire que suivant une méthode qui donne le résultat correspondant en géométrie riemannienne, sans autre recours que les identités de Ricci et les équations $\nabla_\rho a_{\lambda\mu} = 0$ auxquelles se réduisent (1) si $g_{\lambda\mu}$ est symétrique. C'est ainsi que nous avons abordé la question de la signification géométrique de (1). La donnée du champ de tenseurs réguliers $g_{\alpha\beta}$ crée un isomorphisme naturel entre l'espace vectoriel tangent en un point et son dual : les équations (1) expriment que le transport d'un vecteur contravariant relativement à $L^\alpha_{\beta\gamma}$ et le transport d'un vecteur covariant relativement à la connexion transposée $\overline{L}^\alpha_{\beta\gamma} = L^\alpha_{\gamma\beta}$ sont compatibles avec cet isomorphisme. Il suit de là un antiisomorphisme naturel entre les groupes d'holonomie des deux connexions et l'on retrouve une relation connue depuis longtemps entre les tenseurs de courbure de L et de $\overline{L}$. Mais on s'aperçoit que la propriété de transport que nous venons d'énoncer est vraie plus généralement pour deux connexions associées par l'intermédiaire d'un tenseur deux fois covariant par la relation

$$\omega^{*\alpha}_\beta = \omega^\alpha_\beta + g^{\lambda\alpha} D g_{\lambda\beta},$$

(1) exprime que $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ et $\bar{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ sont associées par l'intermédiaire de $g_{\alpha\beta}$. Nous rejoignons ainsi des travaux récents de Mme Cattaneo [3], [4] qui rencontrait des connexions associées par l'intermédiaire d'un tenseur régulier de type 1-1 en étudiant les connexions infinitésimales sur l'espace fibré des repères affines [*cf.* note (2), chap. I]. Considérant donc l'espace fibré des repères « coaffines » (un repère coaffine est la réunion d'un corepère linéaire et d'une forme différentielle linéaire jouant le rôle d'origine) il est facile de voir que l'ensemble du tenseur régulier $g_{\alpha\beta}$ et de la connexion linéaire $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ définit une connexion infinitésimale sur cet espace fibré, connexion que nous appelons coaffine. Nous avons ainsi « unifié » les données géométriques de la théorie qui ne comportent plus qu'une variété différentiable à quatre dimensions, munie d'une connexion coaffine fondamentale particularisée par le principe variationnel.

Ces résultats géométriques constituent notre première partie. Ils sont précédés de deux chapitres d'exposition : le chapitre I traite des connexions infinitésimales sur un espace fibré principal dans un formalisme assez général et abstrait pour s'appliquer à la fois aux connexions linéaires et coaffines; le chapitre II est un bref résumé, sans calculs détaillés, des notions de base de la théorie; nous avons adopté les notations de Lichnerowicz [21] qui sont celles de notre initiation aux théories unitaires, et c'est là la seule raison qui nous a fait les préférer.

La deuxième partie traite du problème de Cauchy; au chapitre IV nous avons défini les coordonnées isothermes et établi nos identités fondamentales; modulo des fonctions additives des dérivées premières des potentiels et en coordonnées isothermes, nous avons

$$P_{\rho\lambda}g^{\rho\beta}g_{\beta\mu}+P_{\mu\rho}g^{\beta\rho}g_{\lambda\beta}\sim -l^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta}g_{\lambda\mu}-m^{\alpha\rho}P^{\beta}{}_{\lambda\alpha\rho}g_{\beta\mu} \tag{6}$$

qui généralisent les identités correspondantes en géométrie riemannienne

$$2\,G_{\lambda\mu}\sim -a^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta}a_{\lambda\mu},$$

il est remarquable que les termes contenant des dérivées premières, non écrits ici, soient les mêmes dans les deux cas, à la place près des indices [*cf.* (22.6) et (23.11)]. Au chapitre V nous reprenons le problème de Cauchy suivant la méthode de Lichnerowicz; la formule (6) apporte une légère simplification au calcul de $\partial_{00}g_{ij}$, à la fin. Nous mettons ainsi en évidence le cas exceptionnel qui n'avait pas encore été traité et qui se ramène à l'inversion du système linéaire

$$\partial_0 L^h_{ik}g_{hj}+\partial_0 L^h_{kj}g_{ih}=T_{ikj}\qquad (i,j,k=1,2,3),$$

où le second membre est connu, et $\text{dét}(g_{ij})\neq 0$. Si $\text{dét}(h_{ij})\neq 0$, ce système est justiciable des méthodes appliquées au système (1). Si $\text{dét}(h_{ij})=0$, un examen de trois des équations du système, écrites dans un repère particulier, montre rapidement que le système n'est pas inversible. Nous obtenons donc, outre les caractéristiques solutions de (4), les solutions de

$$\gamma^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha f\,\partial_\beta f = 0, \qquad \text{où} \quad \gamma^{\alpha\beta} = 2h/gh^{\alpha\beta} - l^{\alpha\beta}, \tag{7}$$

$$h^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha f\,\partial_\beta f = 0. \tag{8}$$

Le paragraphe 1 du chapitre VI, ne contient rien d'original dans le fond, sinon dans la forme : nous avons jugé qu'il pourrait être agréable de trouver là, justifiées dans le détail, les relations entre matrices et déterminants, instrument indispensable de tous les calculs en théorie unitaire; paragraphe 2, nous montrons que les hypersurfaces caractéristiques en un point enveloppent trois cônes du second ordre, sauf si

$$2h + 2k - g = 0.$$

Par des techniques de réduction de quadriques, on voit qu'il n'y a que deux cas possibles pour les positions relatives de ces trois cônes suivant le signe de $2h + 2k - g$; dans le cas qui rentre dans le domaine de l'interprétation physique ($k_{\alpha\beta}$ petit devant $h_{\alpha\beta}$), les trois cônes sont emboîtés, le cône extérieur correspondant à $\gamma_{\alpha\beta}$ et le cône intérieur à $l_{\alpha\beta}$; si $2h + 2k - g > 0$, les cônes correspondant à $l_{\alpha\beta}$ et $h_{\alpha\beta}$ gardent la même position relative, mais sont dans la région extérieure au troisième.

Nous abordons dans la troisième partie les problèmes d'interprétation physique. Le chapitre VII débute par un exposé des aspects relativistes de l'électromagnétisme dans la matière dont nous retiendrons essentiellement l'existence de deux cônes caractéristiques pour les équations de Maxwell et d'Einstein, et la continuité du vecteur courant électrique à la traversée d'une hypersurface où les dérivées obliques du champ peuvent être discontinues. Passant à la théorie unitaire, nous remplaçons le système (1), (3) par (3) et nos identités fondamentales, et en nous appuyant sur les idées que nous venons d'énoncer, nous proposons de choisir le tenseur champ de manière que (2) traduisent l'existence d'un potentiel vecteur pour $H_{\alpha\beta}$

$$H_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\mu}\sqrt{-g}\,m^{\lambda\mu} \tag{9}$$

et que, dans un des groupes d'équations du nouveau système, le tenseur induction bloque les termes contenant des dérivées de l'ordre le plus élevé, tandis que le reste définit un vecteur courant électrique. On obtient

$$K^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon^{\lambda\mu\alpha\beta}}{\sqrt{-g}}\,\underset{+-}{\Delta}\,k_{\lambda\mu}, \tag{10}$$

$\underset{+-}{\Delta}$ est un laplacien généralisé.

Au chapitre VIII, nous mettons l'autre groupe d'équations de notre système sous la forme (5); il est facile de voir sur l'expression (6) comment apparaît, par soustraction aux deux membres de la quantité $\frac{1}{2}g_{\lambda\mu}P_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$, d'une part le tenseur

$$\mathfrak{T}_{\lambda\mu} = P_{[\lambda\sigma]} m^{\rho\sigma} h_{\rho\mu} + P_{[\mu\sigma]} m^{\rho\sigma} h_{\lambda\rho} - \frac{h_{\lambda\mu}}{2} P_{[\alpha\beta]} m^{\alpha\beta} \tag{11}$$

qui s'identifiera au tenseur de Maxwell de la théorie « naïve » défini à partir de (9) et (10), d'autre part le tenseur d'Einstein $S_{\alpha\beta}$ par l'intermédiaire du terme

$$-\sqrt{-g}\, l^{\alpha\beta}\, \partial_{\alpha\beta} \frac{g_{\lambda\mu}}{\sqrt{-g}},$$

pour poursuivre, nous précisons les hypothèses de champ faible que nous adoptons; on peut alors exhiber le tenseur d'impulsion-énergie extrait des équations du champ, avec une métrique proportionnelle à $\gamma_{\alpha\beta}$; notre méthode permet de constater l'existence de tenseurs autres que (11) parfaitement indépendants de la métrique choisie et même des hypothèses d'approximation.

Je suis profondément reconnaissante à M. Lichnerowicz pour son aide et sa bienveillance et je remercie vivement M^me Tonnelat qui m'a toujours aimablement conseillée.

Notations et symboles.

α et tout indice grec $= 0, 1, 2, 3$;
i et tout indice latin $= 1, 2, 3$;

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

L'indice o désigne la variable de temps dans les paragraphes où l'on a défini un tenseur métrique; dans les autres paragraphes, il est relatif au carré précédé du signe + de la forme hyperbolique normale

$$\Phi(u) = g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta.$$

Tenseur fondamental :

$l^{\alpha\beta} = g^{(\alpha\beta)}$,	partie symétrique de $g^{\alpha\beta}$	$l =$	déterminant	$(l_{\alpha\beta})$;
$m^{\alpha\beta} = g^{[\alpha\beta]}$,	» antisymétrique de $g^{\alpha\beta}$	$m =$	»	$(m_{\alpha\beta})$;
$h_{\alpha\beta} = g_{(\alpha\beta)}$,	» symétrique de $g_{\alpha\beta}$	$h =$	»	$(h_{\alpha\beta})$;
$k_{\alpha\beta} = g_{[\alpha\beta]}$,	» antisymétrique de $g_{\alpha\beta}$	$k =$	»	$(k_{\alpha\beta})$.

$t^{\alpha\beta}$ et $t_{\alpha\beta}$ sont toujours deux tenseurs associés, c'est-à-dire tels que

$$t^{\alpha\rho} t_{\beta\rho} = t^{\rho\alpha} t_{\rho\beta} = \delta^\alpha_\beta$$

et $\delta^\alpha_\beta = 0$ pour $\alpha \neq \beta$, $= 1$ pour $\beta = \alpha$.

Connexion :

	Linéaire arbitraire	Linéaire à vecteur covariant de torsion nul
	$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$.	$L^{\alpha}_{\beta\gamma}$.
Tenseur de torsion	$\Sigma^{\alpha}_{\beta\gamma}$	$S^{\alpha}_{\beta\gamma}$
Vecteur de torsion..........	Σ_{β}	$S_{\beta} = 0$
Dérivation covariante	d_{ρ}	D_{ρ}
Tenseur de courbure........	$R^{\alpha}_{\beta,\lambda\mu}$	$P^{\alpha}_{\beta,\lambda\mu}$
Tenseur de Ricci...........	$R_{\alpha\beta} = R^{\lambda}_{\alpha,\lambda\beta}$	$P_{\alpha\beta} = P^{\lambda}_{\alpha,\lambda\beta}$
Coordonnées isothermes.....	–	$F^{\rho} \equiv g^{\alpha\beta} L^{\rho}_{\alpha\beta} = 0$

Sur une variété riemannienne :

Tenseur métrique : $a_{\alpha\beta}$;

Connexion : $\left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\}_a$ et $[\alpha\beta, \gamma]_a$;

Dérivation covariante : $\overset{a}{\nabla}_{\rho}$;

Tenseur de courbure : $G^{\alpha}{}_{\beta,\lambda\mu}$;

Tenseur de Ricci : $G_{\alpha\beta}$;

Coordonnées isothermes : $f^{\alpha}_{a} \equiv a^{\rho\sigma} \left\{ {\alpha \atop \rho\sigma} \right\}_a = 0.$

La lettre a n'est pas indiquée à côté de l'accolade, du crochet, au-dessus du ∇, à côté du f quand il n'y a pas de confusion possible.

PREMIÈRE PARTIE.

LES ÉQUATIONS DU CHAMP.

CHAPITRE I.

QUELQUES GÉNÉRALITÉS SUR LES CONNEXIONS INFINITÉSIMALES.

1. ESPACE FIBRÉ PRINCIPAL DIFFÉRENTIABLE. — Nous supposons connus les axiomes de la structure de variété différentiable C^r sur un espace topologique séparé connexe. Dans tout ce paragraphe, et pour simplifier, la différentiabilité sera C^{∞}. Soit une variété différentiable V_n de dimension n et un groupe de Lie G; on dit qu'une variété différentiable E est un espace fibré principal si les

conditions suivantes sont remplies :

1° G (groupe structural) opère différentiablement et effectivement sur E

$$(z, g) \in E \times G \to zg \in E,$$

le point zh sera aussi noté $D_g z$.

2° V_n (base) est l'espace quotient de E par la relation d'équivalence induite par G et l'application canonique p est différentiable et de rang n.

3° E est localement trivial : tout point x de V_n a un voisinage ouvert U; tel que $\bar{p}^1(U)$ et $U \times G$ se correspondent dans un isomorphisme différentiable, plus précisément, x étant fixé, si $\gamma \in G$ et $z \in \bar{p}^1(x)$ sont homologues, γg et zg le sont aussi; $\bar{p}^1(x)$ est la fibre F_x au-dessus de x; un vecteur tangent à une fibre est dit vertical. On déduit de là un isomorphisme entre l'algèbre de Lie L de G et une algèbre de Lie de champs de vecteurs verticaux : à un vecteur vertical en z correspond un vecteur tangent à G en γ, soit θ_γ; ce vecteur, transporté par translation à gauche (G est considéré comme opérant sur lui-même à gauche) donne, en l'identité de G, un élément $\lambda = \bar{\gamma}^1 \theta_\gamma$ de l'algèbre de Lie de G; l'opération inverse fait correspondre à $\gamma \in L$ un vecteur vertical en z, $\tau(z)$, noté aussi $z\lambda$.

2. Connexion infinitésimale sur un espace fibré principal. — Rappelons, sans démonstration d'équivalence, les trois définitions :

A. Soit Θ_z l'espace vectoriel tangent à E en z, et V_z le sous-espace vectoriel tangent à la fibre en z; une connexion infinitésimale sur E est donnée par un champ de sous-espaces vectoriels $\mathcal{H}_z$ de Θ_z tels que :

1° Θ_z est la somme directe de V_z et $\mathcal{H}_z$. Les vecteurs de $\mathcal{H}_z$ sont dits horizontaux. Tout vecteur τ de Θ_z est la somme de sa partie verticale $V\tau$ et de sa partie horizontale $\mathcal{H}\tau$;

2° $\mathcal{H}_z$ dépend différentiablement de z;

3° $\mathcal{H}_z$ est invariant par G.

B. Une connexion infinitésimale sur E peut encore être définie par une 1-forme ω sur E à valeurs dans L : si $\tau \in \Theta_z$ et si λ est l'élément de L engendré par $V\tau$, $\omega(V\sigma) = \lambda . \omega$ satisfait aux trois propriétés :

1° si τ est vertical, $\omega(\tau)$ est l'élément de L engendré par τ;

2° ω dépend différentiablement de z;

3° $\omega(D_g \tau) = \mathrm{adj}(\bar{g}^1)\, \omega(\tau)$.

C. *Définition locale.* — Une section locale d'un espace fibré est une application différentiable d'un ouvert U de V_n dans $\bar{p}^1(U)$: une telle section locale existe toujours d'après (1, 3°). Considérons un recouvrement de V_n par des voisinages U_i, et au-dessus de chaque voisinage, prenons une section locale de E définie par $z_i(x)$. Pour $x \in U_i \cap U_j$, il existe un élément $g_{ij}(x)$ de G tel que

$$z_j(x) = z_i(x) g_{ij}(x) \tag{2.1}$$

au vecteur dx tangent en x à V_n correspondent des vecteurs dz_i et dz_j tangents à E en z_i et z_j tels que

$$p\, dz_i = p\, dz_j = dx$$

et un vecteur dg_{ij} tangent à G en g_{ij}. Posons

$$\omega_i(dx) = \omega(dz_i) \tag{2.2}$$

en différentiant (2.1) et en prenant la valeur de ω pour le vecteur en z_j défini par chacun des deux membres, on obtient

$$\omega(dz_j) = (\operatorname{adj} \bar{g}_{ij}^1)\, \omega(dz_i) + \bar{g}_{ij}^1\, dg_{ij}, \tag{2.3}$$

soit, d'après (2.2), la condition dite « de cohérence »

$$\omega_j = (\operatorname{adj} \bar{g}_{ij}^1)\, \omega_i + \bar{g}_{ij}^1\, dg_{ij}. \tag{2.4}$$

Une connexion infinitésimale sur E est définie, pour un recouvrement U_i de V_n muni de sections locales, par un système de formes locales ω_i de V_n à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe structural, et satisfaisant à (2.4).

Enfin, on voit facilement, d'après la définition B, qu'étant donné une connexion ω sur E, on peut obtenir toutes les autres par addition à ω d'une forme tensorielle à valeurs dans L, de type adjoint.

3. Développement, transport, groupe d'holonomie. — Considérons sur V_n un chemin arbitraire $x(t)\,(0 \leqq t \leqq 1)$: le problème se pose naturellement de l'existence et de l'unicité d'un chemin horizontal (c'est-à-dire à tangentes horizontales) au-dessus de $x(t)$; supposons-le résolu et définissons ce chemin à partir d'un chemin quelconque $z(t)$ au-dessus de $x(t)$ par

$$z'(t) = z(t)\, \bar{g}^1(t);$$

de même qu'au paragraphe 2, on déduisait (2.3) de (2.1), on obtient

$$\omega_z(dz) = (\operatorname{adj} \bar{g}^1)\, \omega_{z'}(dz') + \bar{g}^1\, dg,$$

donc, pour que dz' soit horizontal, il faut et il suffit que $g(t)$ satisfasse à

$$\bar{g}^1\, dg = \omega_z(dz), \tag{3.1}$$

la solution de (3.1) telle que $g(0) = g_0$ est dite le développement du chemin $z(t)$ sur G à partir de g_0 ; g_0 étant arbitraire, on voit qu'au-dessus de tout chemin $x(t)$ de V_n, il existe un chemin horizontal et un seul de E issu d'un point arbitraire de la fibre F_{x_0}.

On appelle transport le long du chemin $x(t)(0 \leqq t \leqq 1)$ l'application différentiable de F_{x_0} sur F_{x_1} qui, au point z_0 de F_{x_0}, fait correspondre le point z_1 de F_{x_1}, extrémité du chemin horizontal $z(t)$ de E au-dessus de $x(t)$, issu de z_0. Étant donné un point z de E, on appelle groupe d'holonomie ψ_z de la connexion en ce point l'ensemble des éléments g de G tels que z et zg^{-1} puissent être reliés par un chemin horizontal : dans le langage du transport, on peut dire que le lacet l_x de V_n induit l'élément g du groupe d'holonomie ψ_z si le transport le long de l_x fait correspondre à l'élément z de F_x l'élément zg^{-1} de la même fibre.

4. Différentielle absolue, courbure. — Nous nous contenterons de rappeler très brièvement les définitions. Étant donné une q-forme π sur E à valeurs dans un espace vectoriel M, on appelle différentielle absolue de la forme π relativement à une connexion infinitésimale, et l'on désigne par ∇_π, la $q+1$-forme à valeurs dans M définie par

$$\nabla\pi(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_q) = d\pi(\mathcal{H}\tau_0, \mathcal{H}\tau_1, \ldots, \mathcal{H}\tau_q),$$

où $d\pi$ est la différentielle extérieure de la forme π, et $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_q$, $q+1$ vecteurs de Θ_z; si π est une q-forme tensorielle de type R(G), ∇_π est une $q+1$-forme tensorielle du même type; si l'on prend la différentielle absolue de la forme de connexion elle-même, on obtient une 2-forme de type adjoint, qui est tensorielle bien que ω ne le soit pas : c'est la forme de courbure de la connexion

$$\Omega = \nabla_\omega.$$

On établit à partir de la définition du ∇ la formule

$$\Omega = d\omega + [\omega, \omega]. \tag{4.1}$$

5. Connexion linéaire. — Un exemple simple d'espace fibré principal différentiable est donné par la réunion de l'ensemble des repères R^x d'origine x sur V_n quand x parcourt V_n

$$E(V_n) = \bigcup_{x \in V_n} R^x,$$

la structure de variété difiérentiable peut être définie de la manière suivante : si (x^α) est un système de coordonnées locales de V_n, $R^x \in V_n$ aura pour coordonnées les coordonnées locales de son origine x et la matrice qui définit R^x par rapport au repère naturel en x. Le groupe structural G est le groupe linéaire; identifié au groupe des matrices $(n \times n)$ il opère à droite sur $E(V_n)$ suivant

$$R'^x = R^x A$$

[R^x est considéré comme la matrice à une colonne $e_\alpha(\alpha = 1, \ldots, n)$ et l'on convient désormais que la multiplication s'effectue colonnes par lignes]. La projection canonique fait correspondre à un repère son origine. La fibre au-dessus de x est l'ensemble des repères de l'espace vectoriel T_x tangent à V_n en x; un élément λ de l'algèbre de Lie du groupe linéaire est représenté par une matrice $n \times n$ par rapport à R^x.

On appelle connexion linéaire sur V_n une connexion infinitésimale sur $E(V_n)$ (²). Pour expliciter la théorie générale dans ce cas particulier, nous utiliserons le formalisme local (*cf.* § 2, C). Étant donné un recouvrement de V_n par des voisinages ouverts U munis de repères linéaires, une connexion linéaire est définie relativement à un repère $R^x{}_U$ par un ensemble de formes locales ω_U à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe linéaire; si, pour $x \in U \cap V$,

$$R^x{}_V = R^x{}_U A^U_V(x) \quad [cf. (2.1)],$$

ces formes locales satisfont à la condition de cohérence

$$\omega_V = \overset{-1}{A}{}^U_V \omega_U A^U_V + \overset{-1}{A}{}^U_V dA^U_V \quad [cf. (2.4)], \tag{5.1}$$

les corepères duaux de $R^x{}_V$ et $R^x{}_U$, représentés par une matrice à une ligne, sont tels que

$$\theta^V_x = A^V_U(x)\,\theta^U_x, \tag{5.2}$$

où A^V_U est la matrice inverse de A^U_V.

Prenons la différentielle extérieure des deux membres de (5,2) et formons la matrice à une ligne, d'éléments les 2-formes

$$\Sigma^U = d\theta^U + \omega_U \wedge \theta^U \qquad \text{pour} \quad x \in U.$$

Il résulte de (5.1) et (5.2) que les Σ^U définissent une 2-forme vectorielle contravariante, car pour $x \in U \cap V$,

$$\Sigma^V = A^V_U \Sigma^U,$$

la forme Σ s'appelle la forme de torsion de la connexion; si le voisinage U est muni des coordonnées locales (x^α) la matrice ω_U a pour éléments les ω^α_β et Σ a pour composantes

$$\Sigma^\alpha = \omega^\alpha_\rho \wedge dx^\rho.$$

Introduisons les $L^\alpha_{\beta\gamma}$, coefficients de la connexion en coordonnées locales

$$\omega^\alpha_\beta = L^\alpha_{\beta\gamma}\, dx^\gamma,$$

alors le tenseur canoniquement associé à la forme de torsion (au facteur $-\frac{1}{2}$

(²) C'est-à-dire qu'on nommait généralement une connexion affine; suivant Lichnerowicz [6], nous réserverons le nom d'affine à une connexion infinitésimale sur un espace fibré dont le groupe structural est le groupe affine.

près $\Big)$ a pour composantes

$$S^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(L^{\gamma}_{\alpha\beta} - L^{\gamma}_{\beta\alpha}),$$

$S^{\gamma}_{\alpha\beta}$ porte le nom de tenseur de torsion ; par contraction, on en déduit le vecteur covariant de torsion

$$S_{\alpha} = \frac{1}{2}(L^{\rho}_{\alpha\rho} - L^{\rho}_{\rho\alpha}).$$

Soit un tenseur de type R(G) défini par des fonctions locales à valeurs dans un espace vectoriel M

$$t_V(x) = R(A^V_U)\, t_U(x) \qquad \text{pour} \quad x \in U \cap V$$

Si $\tilde{R}$ est la représentation de l'algèbre de Lie du groupe linéaire induite par R, on montre que la différentielle absolue de la o-forme tensorielle t est définie par

$$\nabla t_U = dt_U + \tilde{R}(\omega_U)\, t_U; \tag{5.3}$$

par exemple, pour un vecteur covariant v,

$$v_V = v_U A^U_V$$

la représentation concernée de G fait correspondre à l'élément A^V_U de G l'endomorphisme de M représenté par $\overset{-1}{A^V_U}$: ce passage à l'inverse se traduit par un passage à l'opposé pour l'élément ω_U de L, et

$$\nabla v_U = dv_U - v_U \omega_U; \tag{5.4}$$

en coordonnées locales, le tenseur associé à cette 1-forme, ou dérivée covariante du vecteur v, a pour composantes

$$\nabla_{\gamma} v_{\alpha} = \partial_{\gamma} v_{\alpha} - L^{\rho}_{\alpha\gamma} v_{\rho}.$$

Explicitons maintenant la formule (4.1) qui donne la 2-forme de courbure ; en utilisant la définition du crochet pour des formes à valeurs dans un espace vectoriel muni d'une structure d'algèbre de Lie [ici l'algèbre de Lie des matrices $(n \times n)$], on trouve

$$[\omega, \omega]^{\alpha}_{\beta} = \omega^{\alpha}_{\rho} \wedge \omega^{\rho}_{\beta}.$$

Il vient

$$\Omega^{\alpha}_{\beta} = d\omega^{\alpha}_{\beta} + \omega^{\alpha}_{\rho} \wedge \omega^{\rho}_{\beta}$$

et le tenseur canoniquement associé a pour composantes en coordonnées locales

$$P^{\alpha}_{\beta,\lambda\mu} = \partial_{\lambda} L^{\alpha}_{\beta\mu} - \partial_{\mu} L^{\alpha}_{\beta\lambda} + L^{\alpha}_{\rho\lambda} L^{\rho}_{\beta\mu} - L^{\alpha}_{\rho\mu} L^{\rho}_{\beta\lambda}. \tag{5.5}$$

Sur ce tenseur d'ordre 4, l'opération de contraction permet de définir deux tenseurs covariants :

a. en α et λ, on obtient le tenseur de Ricci

$$P_{\lambda\mu} = \partial_\rho L^\rho_{\lambda\mu} - \partial_\mu L^\rho_{\lambda\rho} + L^\rho_{\sigma\rho} L^\sigma_{\lambda\mu} - L^\rho_{\sigma\mu} L^\sigma_{\lambda\rho}; \tag{5.6}$$

b. en α et β, « le tenseur contracté antisymétrique de courbure »

$$V_{\lambda\mu} = \partial_\lambda L^\rho_{\rho\mu} - \partial_\mu L^\rho_{\lambda\rho} \tag{5.7}$$

entre dérivées covariantes secondes, courbure et torsion relatifs à une connexion linéaire, existent des relations, que nous utiliserons fréquemment par la suite, appelées identités de Ricci. Pour un tenseur $t_{\alpha_1\ldots\alpha_p}{}^{\beta_1\ldots\beta_q}$,

$$\begin{aligned} &\nabla_\lambda \nabla_\mu t_{\alpha_1\ldots\alpha_p}{}^{\beta_1\ldots\beta_q} - \nabla_\mu \nabla_\lambda t_{\alpha_1\ldots\alpha_p}{}^{\beta_1\ldots\beta_q} \\ &\quad = -\sum_i P^\rho{}_{\alpha_i,\lambda\mu} t_{\alpha_1\ldots\rho\ldots\alpha_p}{}^{\beta_1\ldots\beta_q} + \sum_j P^{\beta_j}{}_{\rho,\lambda\mu} t_{\alpha_1\ldots\alpha_p}{}^{\beta_1\ldots\rho\ldots\beta_q} + 2 S^\rho_{\lambda\mu} \nabla_\rho t_{\alpha_1\ldots\alpha_p}{}^{\beta_1\ldots\beta_q}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Pour terminer, ajoutons quelques mots sur le transport le long d'un chemin $x(t)(0 \leqq t \leqq 1)$ sur une variété V_n munie d'une connexion linéaire : c'est un isomorphisme de T_{x_0} sur $T_{x(t)}$ qui, au repère $R_{(0)}$ fait correspondre le repère $R_{(t)}$ de manière que le chemin $R(t)$ au-dessus de $x(t)$ soit horizontal; on en déduit la définition du transport d'un tenseur de type $R(G)$: si $\mathcal{E}_{R_{(0)}}$ sont les composantes de ce tenseur par rapport à $R_{(0)}$, les composantes du tenseur image dans le transport au point $x(t)$ par rapport au repère $R_{(t)}$ sont

$$\mathcal{E}_{R(t)} = \mathcal{E}_{R(0)}.$$

Donc, le long du chemin $R(t)$, $d\mathcal{E}_{R(t)} = 0$. D'autre part, $\omega(dR(t)) = 0$, puisque $R(t)$ est horizontal; de (5.3) on déduit alors

$$\nabla \mathcal{E}_{R(t)} = 0 \tag{5.9}$$

et réciproquement : si $\mathcal{E}_{R(t)}$ satisfait à (5.9), le tenseur $\mathcal{E}$ a bien été transporté de $x(0)$ à $x(t)$. Et puisque $\nabla\mathcal{E}$ est une forme tensorielle, on peut supprimer dans (5.9) l'indice du repère, et dire : pour transporter un tenseur donné $\mathcal{E}_0$ en x_0 le long de $x(t)$, il suffit de chercher la solution du système différentiel

$$\nabla \mathcal{E} = 0 \tag{5.10}$$

le long de $x(t)$, qui prend la valeur $\mathcal{E}_0$ en x_0.

CHAPITRE II.

LES BASES DE LA THÉORIE UNITAIRE DU CHAMP D'EINSTEIN.

6. LA VARIÉTÉ FONDAMENTALE V_4. — Sur une variété différentiable V_4 à quatre dimensions, nous nous donnons indépendamment une connexion linéaire de coefficients $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ et un champ de tenseurs $g_{\alpha\beta}$.

La variété différentiable est de classe C^2, C^4 par morceaux, comme en relativité générale; l'expression « C^4 par morceaux » signifie que, dans l'intersection des domaines de deux systèmes de coordonnées admissibles les dérivés secondes continues du changement de coordonnées admettent encore la classe C^2, excepté dans le voisinage d'un nombre fini de surfaces de discontinuité; les discontinuités sont alors du type de Hamadard.

La connexion linéaire est arbitraire; nous désignerons par $\Sigma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ son tenseur de torsion, par Σ_{β} son vecteur covariant de torsion, par $R_{\alpha\beta}$ son tenseur de Ricci. Des hypothèses sur la différentiabilité de V_4 et des formules de changement de coordonnées pour les coefficients d'une connexion linéaire, il suit qu'il faut supposer les $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ continus et de classe C^2_1 par morceaux. De même, le tenseur fondamental $g_{\alpha\beta}$ devra être de classe C^1, C^3 par morceaux. Il devra, en outre, satisfaire aux hypothèses suivantes :

a. $g = \text{dét}(g_{\alpha\beta}) \neq 0$; on dit que le tenseur $g_{\alpha\beta}$ est régulier;

b. La forme quadratique $\Phi(u) = \varphi_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta}$ est non dégénérée et de type hyperbolique normal à un carré positif et trois carrés négatifs.

L'hypothèse *a* entraîne immédiatement l'existence d'un tenseur $g^{\alpha\beta}$ tel que

$$g_{\alpha\rho} g^{\beta\rho} = g_{\rho\alpha} g^{\rho\beta} = \delta^{\beta}_{\alpha}, \tag{6.1}$$

$g^{\alpha\beta}$ sera dit le tenseur associé de $g_{\alpha\beta}$. Dans toute la suite, deux tenseurs associés, l'un covariant, l'autre contravariant, seront désignés par la même lettre d'appui, et le déterminant de la matrice des composantes du tenseur *covariant* sera désigné par cette même lettre.

7. Premières propriétés des tenseurs déduits du tenseur fondamental par symétrisation et antisymétrisation. — Nous poserons

$$g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + k_{\alpha\beta}, \qquad g^{\alpha\beta} = l^{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta}, \tag{7.1}$$

où (³)

$$h_{\alpha\beta} = g_{(\alpha\beta)}, \; k_{\alpha\beta} = g_{[\alpha\beta]}, \qquad l^{\alpha\beta} = g^{(\alpha\beta)}, \qquad m^{\alpha\beta} = g^{[\alpha\beta]}.$$

Nous allons montrer ([21], p. 491), que l'hypothèse *b* entraîne la régularité des deux tenseurs $h_{\alpha\beta}$ et $l^{\alpha\beta}$. D'après (7.1),

$$\Phi(u) = h_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta}, \tag{7.2}$$

$\Phi(u)$ étant non dégénérée, de type hyperbolique normal à un carré positif et trois carrés négatifs

$$h = \text{dét}(h_{\alpha\beta}) < 0$$

(³) L'opération de symétrisation (resp. antisymétrisation) d'un tenseur par rapport à deux indices sera notée par des parenthèses (resp. crochets) comprenant les deux indices.

et en particulier $h \neq 0$, ce qui assure l'existence de $h^{\alpha\beta}$. D'autre part, d'après (6.1),

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} g^{\lambda\mu},$$

en symétrisant, il vient

$$h_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} + g_{\beta\lambda} g_{\alpha\mu}) g^{\lambda\mu}$$
$$\frac{1}{2} g_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} (g^{\lambda\mu} + g^{\mu\lambda}) = g_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} l^{\lambda\mu},$$

remplaçons $h_{\alpha\beta}$ par cette dernière expression dans (7.2),

$$\Phi(u) = l^{\lambda\mu} g_{\alpha\lambda} u^{\alpha} g_{\beta\mu} u^{\beta},$$

au vecteur contravariant u associons le vecteur covariant de composantes

$$v_{\lambda} = g_{\alpha\lambda} u^{\alpha}. \tag{7.3}$$

$g_{\alpha\beta}$ étant régulier, la correspondance entre u et v est un isomorphisme de l'espace vectoriel T_x tangent en x à V_4 sur son dual $T_x^{\star}$, isomorphisme que nous aurons l'occasion d'étudier au chapitre III. Pour u et v liés par (7.3),

$$\Psi(v) \equiv l^{\lambda\mu} v_{\lambda} v_{\mu} = h_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta} \equiv \Phi(u),$$

$\Psi(v)$ est donc aussi non dégénérée et de signature $+ - - -$ et dét $(l^{\alpha\beta}) < 0$, d'où l'existence de $l_{\alpha\beta}$ avec $l = \text{dét}(l_{\alpha\beta}) \neq 0$. Nous étudierons en détail au chapitre VI les formules, compliquées malgré la simplicité du point de départ, qui permettent le passage effectif de $h_{\alpha\beta}$ et $k_{\alpha\beta}$ à $l^{\alpha\beta}$ et $m^{\alpha\beta}$.

8. Le principe variationnel. — On impose au tenseur fondamental et à la connexion linéaire donnés de satisfaire à des équations, dites équations du champ, déduites d'un principe variationnel comme en relativité générale. Soit C une chaîne différentiable de dimension 4 de la variété V_4. Considérons l'intégrale à valeurs scalaires

$$I = \int_C g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \sqrt{|g|}\, dx^0 \wedge \ldots \wedge dx^3.$$

Principe. — Les équations du champ de la théorie sont celles qui définissent l'extremum de l'intégrale I vis-à-vis de toutes les variations du tenseur fondamental et de la connexion astreintes seulement à s'annuler au bord de C.

La variation de I, soit δI, est due aux variations indépendantes $\delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ et $\delta g_{\alpha\beta}$, ce que nous mettons en évidence en décomposant

$$\delta I = \delta_1 I + \delta_2 I,$$
$$\delta_1 I = \int_C g^{\alpha\beta}\, \delta R_{\alpha\beta} \sqrt{|g|}\, dx^0 \wedge \ldots \wedge dx^3,$$
$$\delta_2 I = \int R_{\alpha\beta}\, \delta(g^{\alpha\beta} \sqrt{|g|})\, dx^0 \wedge \ldots \wedge dx^3.$$

Introduisons la notation

$$(8.1)\qquad \gamma_\rho = \frac{\partial_\rho\sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\,\partial_\rho g_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\,\partial_\rho g^{\alpha\beta},$$

on trouve ([4])

$$\delta_1 I = -\int_C (G_\rho^{\alpha\beta} - \delta_\rho^\beta G_\lambda^{\alpha\lambda})\,\delta\Gamma_{\alpha\beta}^\rho \sqrt{|g|}\, dx^0 \wedge \ldots \wedge dx^3,$$

où

$$G_\rho^{\alpha\beta} \equiv d_\rho g^{\alpha\beta} - (\Gamma_{\rho\sigma}^\sigma - \gamma_\rho) g^{\alpha\beta} + 2 g^{\alpha\sigma} \Sigma_{[\rho\sigma]}^\beta + \frac{2}{3}\delta_\rho^\beta g^{\alpha\sigma}\Sigma_\sigma.$$

Donc, pour une variation des coefficients de la connexion linéaire sans variation du tenseur fondamental, $\delta I = \delta_1 I$ et le principe variationnel fournit les équations

$$(8.2)\qquad G_\rho^{\alpha\beta} = 0.$$

D'autre part, il est facile de vérifier que la donnée de la densité tensorielle $\mathfrak{g}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}\sqrt{|g|}$ est équivalente à la donnée du tenseur $g_{\alpha\beta}$. Alors, si l'on varie arbitrairement $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ sans varier la connexion affine, $\delta_2 I$ seule doit être nulle, ce qui entraîne

$$(8.3)\qquad R_{\alpha\beta} = 0,$$

(8.2) et (8.3) constituent le système des équations du champ.

9. Les équations du champ. — Nous allons modifier ce système initial en remplaçant $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ par la connexion à vecteur covariant de torsion nul qui définit le même paraléllisme, soit

$$(9.1)\qquad L_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + \frac{2}{3}\delta_\beta^\alpha \Sigma_\gamma, \qquad S_\beta = L_{[\beta\alpha]}^\alpha = 0,$$

le calcul donne, en ce qui concerne le système (8.2),

$$(9.2)\qquad G_\rho^{\alpha\beta} = \partial_\rho g^{\alpha\beta} + L_{\sigma\rho}^\alpha g^{\sigma\beta} + L_{\rho\sigma}^\beta g^{\alpha\sigma} - (L_{\sigma\rho}^\sigma - \gamma_\rho) g^{\alpha\beta} = 0;$$

en multipliant les deux membres de (9.2) par $g_{\alpha\beta}$ et en tenant compte de (8.1), il vient

$$\gamma_\rho = L_{\sigma\rho}^\sigma = L_{\rho\sigma}^\sigma.$$

Reportons dans (9.2)

$$(9.3)\qquad \partial_\rho g^{\alpha\beta} + L_{\sigma\rho}^\alpha g^{\sigma\beta} + L_{\rho\sigma}^\beta g^{\alpha\sigma} = 0,$$

on montre aisément que (8.2) et (9.3), où la connexion L a un vecteur covariant de torsion nul, sont équivalents. Nous nommerons souvent (9.3) « équations de liaison » pour les distinguer de l'autre système d'équations

([4]) Pour le détail des calculs, *voir* Lichnerowicz [21], p. 494-507.

de champ (8.3). Par multiplication par $g_{\lambda\beta}g_{\alpha\mu}$, les équations de liaison prennent encore la forme

$$\partial_\rho g_{\lambda\mu} - L^\sigma_{\lambda\rho} g_{\sigma\mu} - L^\sigma_{\rho\mu} g_{\lambda\sigma} = 0. \tag{9.4}$$

Les quatre conditions qui expriment que le vecteur S_β est nul peuvent être remplacées par quatre autres portant sur le tenseur fondamental, qui sont

$$\partial_\rho \mathfrak{g}^{[\rho\beta]} = 0$$

[la démonstration utilise les deux contractions possible de (9.3) et essentiellement la condition dét $(l^{\alpha\beta}) \neq 0$].

Donc, chercher une connexion $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, fonction du tenseur fondamental et de ses dérivées satisfaisant au système (8.2), c'est chercher $L^\alpha_{\beta\gamma}$ solution de (9.4), les dérivées du tenseur fondamental étant supposées satisfaire aux quatre relations $\partial_\rho \mathfrak{g}^{[\rho\beta]} = 0$. Alors

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = L^\alpha_{\beta\gamma} - \frac{2}{3}\delta^\alpha_\beta \Sigma_\gamma$$

où Σ_γ est un vecteur covariant arbitraire.

Passons maintenant au système (8.3). Substituons encore la connexion $L^\alpha_{\beta\lambda}$ à la connexion initiale suivant (9.1). Soit $P_{\alpha\beta}$ le tenseur de Ricci de la connexion L; d'après (5.6) appliqué à l'une et l'autre connexion,

$$R_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} - \frac{2}{3}(\partial_\alpha \Sigma_\beta - \partial_\beta \Sigma_\alpha).$$

Nous adopterons dans la suite comme grandeurs déterminant le champ unitaire le tenseur fondamental $g_{\alpha\beta}$, la connexion linéaire arbitraire $L^\alpha_{\beta\gamma}$ et le vecteur covariant Σ_α. Les équations du champ sont

$$\partial_\rho g_{\lambda\mu} - L^\sigma_{\lambda\rho} g_{\sigma\mu} - L^\sigma_{\rho\mu} g_{\lambda\sigma} = 0, \tag{9.5}$$

$$\partial_\rho \mathfrak{g}_{[\rho\beta]} = 0, \tag{9.6}$$

$$P_{\alpha\beta} - \frac{2}{3}(\partial_\alpha \Sigma_\beta - \partial_\beta \Sigma_\alpha) = 0. \tag{9.7}$$

10. Forme tensorielle des équations du champ. — Nous allons mettre (9.5) et (9.6) sous forme tensorielle. Appelons D_ρ le symbole de dérivation covariante relatif à la connexion L

$$D_\rho g_{\lambda\mu} = \partial_\rho g_{\lambda\mu} - L^\sigma_{\lambda\rho} g_{\sigma\mu} - L^\sigma_{\mu\rho} g_{\lambda\sigma},$$

les équations (9.5) s'écrivent

$$D_\rho g_{\lambda\mu} + L^\sigma_{\mu\rho} g_{\lambda\sigma} - L^\sigma_{\rho\mu} g_{\lambda\sigma} = 0,$$

c'est-à-dire

$$D_\rho g_{\lambda\mu} = 2 S^\sigma_{\rho\mu} g_{\lambda\sigma}.$$

Considérons maintenant (9.6). Soit

$$\mathrm{H}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\sqrt{-g}\, m^{\gamma\delta}, \tag{10.2}$$

désignons par H la forme quadratique extérieure de composantes $\mathrm{H}_{\alpha\beta}$. Calculons la quantité $\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}\partial_\rho \mathrm{H}_{\alpha\beta}$ qui, lorsque σ prend les valeurs 0, 1, 2, 3 donne les quatre composantes strictes de la forme dH

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}\partial_\rho \mathrm{H}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_\rho(\sqrt{-g}\, m^{\gamma\delta}) = \partial_\rho(\sqrt{-g}\, m^{\rho\sigma});$$

les équations (9.6) s'écrivent donc

$$d\mathrm{H} = 0 \tag{10.3}$$

et entraînent l'existence locale d'un potentiel vecteur pour $\mathrm{H}_{\alpha\beta}$.

La forme (10.3) des équations du champ (9.6) donne une indication précieuse pour l'interprétation physique ultérieure.

11. Les identités de conservation. — Nous disposons d'exactement autant d'équations que d'inconnues, comme on a pu le constater par dénombrement des unes et des autres, à la fin du paragraphe 9. Puisque le choix du système de coordonnées permet de fixer quatre inconnues, c'est que nos équations ne sont pas indépendantes, mais vérifient identiquement quatre relations invariantes qu'on nomme identités de conservation; comme on a obtenu les équations du champ en annulant les variations d'une intégrale portant sur une densité scalaire, on peut appliquer, pour former ces identités, une méthode générale dont il serait trop long d'exposer ici le principe ([5]); nous nous contenterons de rappeler les résultats ;

1° Pour une connexion $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ et un tenseur $g_{\alpha\beta}$ satisfaisant à (8.2),

$$\partial_\lambda \mathfrak{M}^\lambda_\rho + \frac{1}{2}\mathrm{R}_{\alpha\beta}\,\partial_\rho \mathfrak{g}^{\alpha\beta} = 0, \tag{11.1}$$

avec

$$\mathfrak{M}^\lambda_\rho = \sqrt{|g|}\,\mathrm{M}^\lambda_\rho, \qquad \mathrm{H}^\lambda_\rho = \mathrm{L}^\lambda_\rho - \frac{1}{2}\delta^\lambda_\rho \mathrm{L}^\tau_\tau,$$

où l'on a posé

$$2\mathrm{L}^\lambda_\rho = \mathrm{R}_{\rho\sigma}g^{\lambda\sigma} + \mathrm{R}_{\sigma\rho}g^{\sigma\lambda};$$

2° De même, pour $\mathrm{L}^\gamma_{\alpha\beta}$ et $g_{\alpha\beta}$ satisfaisant à (9.5) et (9.6),

$$\partial_\lambda \mathcal{K}^\lambda_\rho + \frac{1}{2}\mathrm{P}_{\alpha\beta}\,\partial_\rho \mathfrak{g}^{\alpha\beta} = 0, \tag{11.2}$$

([5]) Lichnerowicz [21], p. 503-507.

avec

$$\mathcal{K}^{\lambda}_{\rho} = \sqrt{|g|}\, K^{\lambda}_{\rho}, \qquad K^{\lambda}_{\rho} = H^{\lambda}_{\rho} - \frac{1}{2}\delta^{\lambda}_{\rho} H^{\xi}_{\xi},$$

où l'on a posé

$$2\, H^{\lambda}_{\rho} = P_{\rho\sigma} g^{\lambda\sigma} + P_{\sigma\rho} g^{\sigma\lambda}. \tag{11.3}$$

Rappelons les identités de conservation en relativité générale : soit $a_{\alpha\beta}$ le tenseur métrique, $G_{\alpha\beta}$ le tenseur de Ricci de la variété riemannienne correspondante,

$$S^{\lambda}_{\rho} = G^{\lambda}_{\rho} - \frac{1}{2}\delta^{\lambda}_{\rho} G$$

est le tenseur d'Einstein qui satisfait identiquement à

$$\overset{a}{\nabla}_{\lambda} S^{\lambda}_{\rho} = 0, \tag{11.4}$$

où $\overset{a}{\nabla}$ est le symbole de différentiation absolue associé à la connexion riemannienne définie par le tenseur $a_{\alpha\beta}$. Il est facile de mettre (11.4) sous la forme

$$\partial_{\lambda}(S^{\lambda}_{\rho}\sqrt{-a}) + \frac{1}{2} G_{\alpha\beta}\, \partial_{\rho}(a^{\alpha\beta}\sqrt{-a}) = 0,$$

la comparaison avec (11.1) et (11.2) conduit à penser que M^{λ}_{ρ} ou K^{λ}_{ρ} doivent tenir un rôle analogue à celui du tenseur d'Einstein dans l'interprétation physique.

CHAPITRE III.

Connexions infinitésimales et théorie unitaire.

La théorie d'Einstein-Schrödinger, théorie à connexion affine : c'est l'expression souvent employée pour la distinguer d'autres théories unitaires, et en effet, nous allons montrer, dans cet essai de géométrisation, le rôle primordial joué par la notion de connexion infinitésimale.

Dans ce chapitre, nous nous efforcerons de réaliser une synthèse des données mathématiques de la théorie, et de parvenir ainsi à une meilleure compréhension des résultats acquis.

I. — Interprétation géométrique du système des équations de liaison.

Rappelons que nous avons désigné par là le système (9.3) reliant le tenseur fondamental et la connexion. M.-A. Tonnelat [27], puis indépendamment Hlavatý [18] par des méthodes un peu dfférentes, ont montré que ces équations, considérées comme aux inconnues $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$, admettaient une solution et une seule sur une variété V_4 satisfaisant aux hypothèses du paragraphe 6, sauf dans un cas exceptionnel. Donc, en général, (9.3) détermine univoquement la connexion linéaire $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ à partir du tenseur fondamental. Supposons un instant $g_{\alpha\beta}$ symétrique : la solution unique de (9.3) est évidemment constituée des coefficients de la connexion riemannienne associée à la métrique définie par $g_{\alpha\beta}$; alors, les équations de liaison expriment tout simplement que la différentielle absolue du tenseur métrique dans la connexion riemannienne associée est nulle; c'est encore traduire cette évidence que le transport d'un vecteur le long d'un chemin $x(t)$ de V_4 peut se faire en transportant ses composantes covariantes aussi bien que contravariantes, car

$$\frac{\overset{g}{\nabla} v_\beta}{dt} = 0$$

est strictement équivalente à

$$\frac{\overset{g}{\nabla}(g^{\alpha\beta} v_\beta)}{dt} = 0,$$

c'est cette dernière forme qui va se généraliser à un tenseur $g_{\alpha\beta}$ régulier, ne possédant aucune propriété de symétrie.

12. Une nouvelle forme du système des équations de liaison. — Réécrivons le système

$$\partial_\rho g^{\alpha\beta} + L^{\alpha}_{\sigma\rho} g^{\sigma\beta} + L^{\beta}_{\rho\sigma} g^{\alpha\sigma} = 0. \tag{12.1}$$

Considérons, sur V_4, un champ de vecteurs covariants v_β (de classe C^1, C^3 par morceaux). Multiplions les deux membres de (12.1) par v_β et faisons passer v_β sous le signe ∂_ρ au premier terme. Il vient

$$\partial_\rho(g^{\alpha\beta} v_\beta) + L^{\alpha}_{\sigma\rho} g^{\sigma\beta} v_\beta + L^{\beta}_{\rho\sigma} g^{\alpha\sigma} v_\beta - g^{\alpha\beta}\,\partial_\rho v_\beta = 0 \tag{12.2}$$

Après échange du nom des indices de sommation β et σ au troisième terme, on peut mettre $g^{\alpha\beta}$ en facteurs dans les deux derniers termes du premier membre; quant aux deux premiers termes, leur somme constitue la dérivée covariante, relativement à la connexion $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ du vecteur contravariant $g^{\alpha\beta} v_\beta$; (12.2) s'écrit

$$D_\rho(g^{\alpha\beta} v_\beta) - g^{\alpha\beta}(\partial_\rho v_\beta - L^{\sigma}_{\rho\beta} v_\sigma) = 0. \tag{12.3}$$

Introduisons la connexion linéaire dont les coefficients

$$\overline{L}^{\alpha}_{\beta\gamma} = L^{\alpha}_{\gamma\beta} \tag{12.4}$$

se déduisent de ceux de la connexion donnée par l'addition du tenseur deux fois covariant et une fois contravariant $2S^{\alpha}_{\gamma\beta}$. Dans la suite, et nous verrons la raison de cette terminologie au paragraphe 17, la connexion $\overline{\omega}$ de coefficients $\overline{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ donnés par (12.4) sera dite transposée par le principe d'hermiticité d'Einstein de la connexion ω de coefficients $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$. Si $\overline{D}_\rho$ est le symbole de dérivation covariante relatif à $\overline{\omega}$, (12.3) prend la forme

$$D_\rho(g^{\alpha\beta} v_\beta) - g^{\alpha\beta} \overline{D}_\rho v_\beta = 0. \tag{12.5}$$

Ce système est équivalent au système donné. Remarquons que ce système donné (12.1) est invariant par la transformation

$$g^{\alpha\beta} \to \overline{g}^{\alpha\beta} = g^{\beta\alpha},$$
$$L^{\alpha}_{\beta\gamma} \to \overline{L}^{\alpha}_{\beta\gamma} = L^{\alpha}_{\gamma\beta}.$$

En opérant cette transformation (12.5), il vient encore la forme équivalente

$$\overline{D}_\rho(g^{\beta\alpha} v_\beta) - g^{\beta\alpha} D_\rho v_\beta = 0. \tag{12.6}$$

13. Transport d'un vecteur covariant et d'un vecteur contravriant reliés par le tenseur fondamental. — Nous nous trouvons naturellement conduite à considérer l'isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\psi : \quad v \to u,$$

où $v \in T^*_x$ et $u \in T_x$, défini par

$$\begin{cases} u^\alpha = g^{\alpha\lambda} v_\lambda, \\ v_\beta = g_{\lambda\beta} u^\lambda. \end{cases} \tag{13.1}$$

De manière analogue, nous définissons

$$\overline{\psi} : \quad v \in T^*_x \to w \in T_x,$$

où

$$\begin{cases} w^\alpha = g^{\lambda\alpha} v_\lambda, \\ v_\beta = g_{\beta\lambda} w^\lambda. \end{cases} \tag{13.2}$$

Considérons maintenant un chemin quelconque de V_4, $x(t)(0 \leqq t \leqq 1)$ et donnons-nous arbitrairement un vecteur initial $v_\beta(0)$ au point $x(0) = x_0$. Transportons ce vecteur relativement à la connexion $\overline{\omega}$ le long du chemin $x(t)$; c'est dire que nous devons intégrer le système différentiel

$$\frac{\overline{D} v_\beta}{dt} = 0 \tag{13.3}$$

pour les valeurs initiales $v_\beta(0)$. Or, d'après (12.5), si (13.3) est vérifié,

$$\frac{D u^\alpha}{dt} = 0, \tag{13.4}$$

nous avons donc en même temps transporté le long de $x(t)$ relativement à ω le vecteur contravariant u associé à v par l'isomorphisme ψ. Réciproquement, si (13.3) entraîne (13.4) pour tout vecteur initial $v_\beta(0)$ et tout chemin $x(t)$, le tenseur fondamental et la connexion ω sont liés par le système (12.1). En effet, d'après (13.3),

$$\dot{x}^\rho(\partial_\rho v_\beta - L^\sigma_{\rho\beta} v_\sigma) = 0, \tag{13.5}$$

où nous avons posé $\dot{x}^\rho = \frac{dx^\rho}{dt}\cdot$ De même, (13.4) où u^α a été remplacé par sa valeur en fonction de v s'écrit

$$\dot{x}^\rho[\partial_\rho(g^{\alpha\beta} v_\beta) + L^\alpha_{\sigma\rho} g^{\sigma\beta} v_\beta] = 0. \tag{13.6}$$

Éliminons $\dot{x}^\rho \partial_\rho v_\beta$ entre (13.5) et (13.6); il vient

$$\dot{x}^\rho v_\beta(\partial_\rho g^{\alpha\beta} + L^\alpha_{\sigma\rho} g^{\sigma\beta} + L^\beta_{\rho\sigma} g^{\alpha\sigma}) = 0.$$

Ce système, vérifié quels que soient v_β et $\dot{x}^\rho$, n'est autre que (12.1).

Théorème. — *Sur la variété V_4 satisfaisant aux hypothèses de la théorie unitaire du champ, les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

1° *le tenseur fondamental et la connexion sont liés par le système*

$$\partial_\rho g^{\alpha\beta} + L^\alpha_{\sigma\rho} g^{\sigma\beta} + L^\beta_{\rho\sigma} g^{\alpha\sigma} = 0;$$

2° *si l'on transporte un vecteur covariant arbitraire le long d'un chemin quelconque relativement à la connexion $\overline{\omega}$, le vecteur contravariant qui lui correspond dans l'isomorphisme ψ : $v \to u$, $u^\alpha = g^{\alpha\beta} v_\beta$ est transporté le long de ce chemin relativement à ω.*

On obtient un énoncé analogue en remplaçant ω par $\overline{\omega}$, ψ par $\overline{\psi}$.

14. Une relation entre les groupes d'holonomie des deux connexions linéaires ω et $\overline{\omega}$. — Soient Ψ_x et $\overline{\Psi}_x$ les groupes d'holonomie homogènes en x des connexions ω et $\overline{\omega}$. Prenons pour chemin $x(t)$ un lacet en $x[x(0) = x(1) = x]$ et prenons un repère arbitraire en x, soit $R^x(0)$. Le transport le long de $x(t)$ relativement à $\overline{\omega}$ fait correspondre à $R^x(0)$ le repère $R^x(1)$ tel que

$$R^x(1) = R^x(0)(\overline{A})^{-1},$$

où $\overline{A}$ est, d'après les définitions du paragraphe 3, la matrice représentative de l'élément de $\overline{\Psi}$ induit par $x(t)$. Donnons-nous un vecteur covariant $v(0)$ en x et transportons-le le long de $x(t)$; après transport, on a un vecteur $v(1)$ en x; les composantes de $v(1)$ relativement à $R^x(1)$ sont les mêmes que celles de $v(0)$ relativement à $R^x(0)$, ce que nous écrivons

$$v(1)_{R^x(1)} = v(0)_{R^x(0)}.$$

Mais, v étant covariant,

$$v(0)_{R^x(1)} = v(0)_{R^x(0)}(\overline{A})^{-1}$$

en rapportant $v(0)$ et $v(1)$ au même repère, puis supprimant l'indice du repère, il vient

$$v(0) = v(1)(\overline{A})^{-1}. \tag{14.1}$$

Cherchons la relation qui lie les transformés par ψ_x de $v(0)$ et de $v(1)$, soient $u(0)$ et $u(1)$. Nous avons pour ces transformés, d'après (13.1) dans un repère quelconque,

$$u^\alpha(0) = g^{\alpha\beta} v_\beta(0),$$
$$v_\lambda(1) = g_{\rho\lambda} u^\rho(1)$$

et dans le même repère (14.1) s'écrit

$$v_\beta(0) = v_\lambda(1)[(\overline{A})^{-1}]^\lambda_\beta.$$

Il vient

$$u^\alpha(0) = g^{\alpha\beta} g_{\rho\lambda}[(\overline{A})^{-1}]^\lambda_\beta u^\rho(1). \tag{14.2}$$

D'autre part, tandis que nous transportions v le long de $x(t)$ relativement à $\overline{\omega}$, u subissait un transport relativement à ω; comme c'est un vecteur contravariant, et par un calcul analogue à celui qui mène (14.1)

$$u^\alpha(0) = A^\alpha_\rho u^\rho(1), \tag{14.3}$$

la comparaison de (14.2) et (14.3), vraies quel que soit $u(1)$, donne

$$A^\alpha_\rho = g^{\alpha\beta} g_{\rho\lambda}[(\overline{A})^{-1}]^\lambda_\beta$$

ou, sous une forme plus agréable, en remplaçant A par $\overline{A}$, $g^{\alpha\beta}$ par $\overline{g}^{\alpha\beta}$, nous obtenons en tout point x de V_4 la relation

$$\overline{A}^\alpha_\beta = g^{\sigma\alpha}(A^{-1})^\rho_\sigma g_{\rho\beta}. \tag{14.4}$$

Cette loi, qui associe à un élément de Ψ_x un élément de $\overline{\Psi}_x$, est un antiisomorphisme entre les deux groupes d'holonomie.

15. Connexions linéaires associées par l'intermédiaire d'un tenseur régulier. — Sous la forme (10.1) et en isolant le tenseur de torsion, les équations de liaison sont

$$2S^\alpha_{\gamma\beta} = g^{\lambda\alpha} D_\gamma g_{\lambda\beta},$$

c'est-à-dire

$$\overline{L}^\alpha_{\beta\gamma} = L^\alpha_{\beta\gamma} + g^{\lambda\alpha} D_\gamma g_{\lambda\beta};$$

plus généralement, si deux connexions linéaires ω et $\omega^\star$ sont telles que leurs formes locales diffèrent du tenseur $g^{\lambda\alpha} Dg_{\lambda\beta}$ de type adjoint, où D est le symbole de différentiation absolue relatif à ω et où $g_{\alpha\beta}$ est un tenseur régulier, nous dirons qu'*elles sont associées par l'intermédiaire de* $g_{\alpha\beta}$. Les équations de liaison expriment que ω et $\overline{\omega}$ sont associées par l'intermédiaire de $g_{\alpha\beta}$; par la suite, la définition (12.4) de $\overline{\omega}$ à partir de ω n'intervient plus; les résultats des paragraphes 13 et 14 peuvent donc se généraliser ainsi :

THÉORÈME. — *Sur une variété différentiable* V_4 *munie d'un champ de tenseurs* $g_{\alpha\beta}$ *partout réguliers et d'une connexion linéaire* ω, *on considère la connexion* $\omega^\star$ *telle que*

$$\overset{\star}{\omega}{}^{\alpha}_{\beta} = \omega^{\alpha}_{\beta} + g^{\lambda\alpha}\, D g_{\lambda\beta},$$

où D *est le symbole de différentiation absolue relatif à* ω. *Si l'on transporte un vecteur covariant arbitraire le long d'un chemin quelconque relativement à* $\omega^\star$, *le vecteur contravariant qui lui correspond dans l'isomorphisme* $\psi : v \to u$, $u^\alpha = g^{\alpha\beta} v_\beta$, *est transporté le long de ce chemin relativement à* ω.

COROLLAIRE. — $g_{\alpha\beta}$ *établit sur* Ψ_x *et* $\Psi^\star_x$, *groupes d'holonomie en* x *des deux connexions* ω *et* $\omega^\star$, *un antiisomorphisme naturel.*

16. LES TENSEURS DE COURBURE DE DEUX CONNEXIONS LINÉAIRES ASSOCIÉES PAR L'INTERMÉDIAIRE D'UN TENSEUR RÉGULIER DEUX FOIS COVARIANT. — Nous savons [6] qu'en tout point x de V_4, pour tout couple de vecteurs v et w, le tenseur $\Omega_x(v, w)$ définit un élément de l'algèbre de Lie du groupe d'holonomie homogène local ; cette algèbre de Lie est même engendrée par transport en x des $\Omega_y(v, w)$, où y est un point d'un voisinage déterminé de x, le long de chemins arbitraires. Le corollaire du paragraphe 15 conduit donc à penser qu'il existe une relation simple entre les tenseurs de courbure $P^{\alpha}_{\beta\lambda\mu}$ et $\overset{\star}{P}{}^{\alpha}_{\beta\lambda\mu}$ des connexions ω et $\omega^\star$, relation que nous allons obtenir par un calcul élémentaire. Posons

$$\overset{\star}{L}{}^{\alpha}_{\beta\gamma} = L^{\alpha}_{\beta\gamma} + t^{\alpha}_{\beta\gamma}, \tag{16.1}$$

où

$$t^{\alpha}_{\beta\gamma} = g^{\sigma\alpha}\, D_\gamma g_{\sigma\beta} = -g_{\sigma\beta}\, D_\gamma g^{\sigma\alpha}. \tag{16.2}$$

Si nous remplaçons $\overset{\star}{L}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ par son expression (16.1) dans la formule (5.5) appliquée à $\overset{\star}{P}{}^{\alpha}_{\beta\lambda\mu}$, il vient

$$\overset{\star}{P}{}^{\alpha}_{\beta\lambda\mu} = P^{\alpha}_{\beta\lambda\mu} - 2S_{\lambda\mu}{}^{\rho}\, t^{\alpha}_{\beta\rho} + D_\lambda t^{\alpha}_{\beta\mu} - D_\mu t^{\alpha}_{\beta\lambda} + t^{\alpha}_{\rho\lambda} t^{\rho}_{\beta\mu} - t^{\alpha}_{\rho\mu} t^{\rho}_{\beta\lambda}. \tag{16.3}$$

Utilisons maintenant la définition (16.2) pour calculer la quantité

$$D_\lambda t^{\alpha}_{\beta\mu} + t^{\alpha}_{\rho\lambda} t^{\rho}_{\beta\mu} = D_\lambda(g^{\sigma\alpha} D_\mu g_{\sigma\beta}) - (g_{\sigma\rho} D_\lambda g^{\sigma\alpha})(g^{\nu\rho} D_\mu g_{\nu\beta}) = g^{\sigma\alpha} D_\lambda D_\mu g_{\sigma\beta}.$$

De même, par échange de λ et μ,

$$D_\mu t^{\alpha}_{\beta\lambda} + t^{\alpha}_{\rho\mu} t^{\rho}_{\beta\lambda} = g^{\sigma\alpha} D_\mu D_\lambda g_{\sigma\beta}.$$

La différence de ces deux quantités représente les quatre derniers termes

[6] Lichnerowicz [6], chap. III.

de (16.3). Servons-nous des identités de Ricci (5.8)

$$g^{\sigma\alpha}(D_\lambda D_\mu g_{\sigma\beta} - D_\mu D_\lambda g_{\sigma\beta}) = g^{\sigma\alpha}(- P^{\rho}_{\sigma\lambda\mu} g_{\rho\beta} - P^{\rho}_{\beta\lambda\mu} g_{\sigma\rho} + 2 S^{\rho}_{\lambda\mu} D_\rho g_{\sigma\beta})$$
$$= - g^{\sigma\alpha} P^{\rho}_{\sigma\lambda\mu} g_{\rho\beta} - P^{\alpha}_{\beta\lambda\mu} + 2 S^{\rho}_{\lambda\mu} t^{\alpha}_{\beta\rho}.$$

Il reste, pour (16.3),

$$\overset{*}{P}{}^{\alpha}_{\beta\lambda\mu} = - g^{\sigma\alpha} P^{\rho}_{\sigma\lambda\mu} g_{\rho\beta}; \tag{16.4}$$

en multipliant les deux membres par $v^\lambda w^\mu$, où v et ω sont deux vecteurs quelconques, on obtient, au point x,

$$\overset{*}{\Omega}{}^{\alpha}_{\beta} = - g^{\sigma\alpha} \Omega^{\rho}_{\sigma} g_{\rho\beta}$$

qui est la formule attendue, d'après (14.4).

17. Application aux connexions ω et $\overline{\omega}$. Le principe d'hermiticité d'Einstein. — Dans tout ce qui suit, la barre surmontant un tenseur qui ne dépend que des cofficients d'une connexion linéaire signifie qu'il faut prendre ce tenseur relativement à la connexion transposée. Si deux connexions associées par l'intermédiaire de $g_{\alpha\beta}$ sont en plus transposées par le principe d'hermiticité d'Einstein, c'est-à-dire si le système des équations de liaison est satisfait, nous avons les identités

$$\overline{P}{}^{\alpha}_{\beta\lambda\mu} = - g^{\sigma\alpha} P^{\rho}_{\sigma\lambda\mu} g_{\rho\beta} \tag{17.1}$$

déjà connues sous le nom de conditions d'intégrabilité. Schrödinger et Bose [17] les ont obtenues en dérivant (12.1) et en écrivaut que $\partial_{\rho\sigma} g^{\alpha\beta} = \partial_{\sigma\rho} g^{\alpha\beta}$; après les considérations des paragraphes précédents, la forme du résultat n'apparaît plus miraculeuse. Les identités (17.1) permettent d'obtenir rapidement des résultats qui nécessitent autrement quelques calculs.

a. Contractons (17.1) en α et β; il vient immédiatement, d'après la définition (5.7),

$$\overline{V}_{\lambda\mu} = - V_{\lambda\mu} \tag{17.2}$$

qui est déjà vraie pour deux connexions associées; si nous ajoutons que les deux connexions sont transposées et que leur vecteur covariant de torsion est nul, $L^{\sigma}_{\sigma\rho} = \overline{L}^{\sigma}_{\rho\sigma} = L^{\sigma}_{\sigma\rho}$ comme nous l'avons vu au paragraphe 9, et

$$V_{\lambda\mu} = \partial_\lambda L^{\rho}_{\rho\mu} - \partial_\mu L^{\rho}_{\rho\lambda} = \partial_\lambda \overline{L}^{\rho}_{\rho\mu} - \partial_\mu \overline{L}^{\rho}_{\rho\lambda} = \overline{V}_{\lambda\mu}; \tag{17.3}$$

de (17.2) et (17.3), il suit $V_{\lambda\mu} = 0$ et

$$\partial_\lambda L^{\rho}_{\rho\mu} = \partial_\mu L^{\rho}_{\rho\lambda}. \tag{17.4}$$

b. Comparons $P_{\lambda\mu}$ et $\overline{P}_{\mu\lambda}$. Reprenons pour cela la formule (5.6),

$$P_{\lambda\mu} = \partial_\rho L^{\rho}_{\lambda\mu} - \partial_\mu L^{\rho}_{\lambda\rho} + L^{\rho}_{\sigma\rho} L^{\sigma}_{\lambda\mu} - L^{\rho}_{\sigma\mu} L^{\sigma}_{\lambda\sigma},$$
$$\overline{P}_{\mu\lambda} = \partial_\rho \overline{L}^{\rho}_{\mu\lambda} - \partial_\lambda \overline{L}^{\rho}_{\mu\rho} + \overline{L}^{\rho}_{\sigma\rho} \overline{L}^{\sigma}_{\mu\lambda} - \overline{L}^{\rho}_{\sigma\lambda} \overline{L}^{\sigma}_{\mu\rho},$$

toujours dans l'hypothèse du vecteur covariant de torsion nul, les seconds membres sont identiques par colonnes, sauf à la deuxième colonne où l'égalité résulte de (17.4). Donc

$$P_{\lambda\mu} = \overline{P}_{\mu\lambda} \tag{17.5}$$

Einstein avait proposé d'appeler hermitienne par rapport à deux indices une grandeur qui, dépendant du tenseur fondamental et d'une connexion linéaire, reste invariante par l'échange des deux indices et l'échange simultané de $g_{\alpha\beta}$ en $\overline{g}_{\alpha\beta}$ et de la connexion en sa transposée. Ainsi nous avons démontré que $P_{\lambda\mu}$ est hermitien au sens d'Einstein. Comme

$$\Sigma_\alpha = -\overline{\Sigma}_\alpha, \tag{17.6}$$

nous avons aussi démontré le théorème suivant :

Théorème. — *Si* $(g_{\alpha\beta}, L^{\gamma}_{\alpha\beta}, \Sigma_\alpha)$ *définissent une solution des équations de champ* (9.5), (9.6), (9.7), *il en est de même de* $(\overline{g}_{\alpha\beta}, \overline{L}_{\alpha\beta}, \overline{\Sigma}_\alpha)$.

En effet, nous l'avons déjà vérifié pour (9.5); pour (9.6) il est évident et pour (9.7) il résulte de (17.5) et (17.6).

c. Contractons (17.1) en α et λ

$$\overline{P}_{\beta\alpha} = -g^{\sigma\lambda} P^{\rho}_{\sigma\lambda\alpha} g_{\rho\beta}$$

et tenant compte de (17.5), nous obtenons une relation intéressante entre le tenseur de Ricci et le tenseur de courbure de la connexion ω à vecteur covariant de torsion nul

$$P_{\alpha\beta} + g^{\sigma\lambda} P^{\rho}_{\sigma\lambda\alpha} g_{\rho\beta} = 0.$$

II. — L'espace fibré des corepères affines.

I. Cattaneo-Gasparini a étudié récemment des connexions linéaires associées par l'intermédiaire d'un tenseur régulier de type (1, 1) désigné par Φ^{α}_{β} ; les coefficients de l'une se déduisent de ceux de l'autre par addition d'un tenseur formé à partir de Φ^{α}_{β} exactement comme (16.2) l'est à partir de $g_{\alpha\beta}$ ([1], p. 150, § 3). Soient ω et ω' ces deux connexions

$$\omega'^{\alpha}_{\beta} = \omega^{\alpha}_{\beta} + \Psi^{\alpha}_{\rho} D\Phi^{\rho}_{\beta},$$

où D est le symbole de différentiation absolue relatif à ω et où Ψ^{α}_{β} est tel que

$$\Psi^{\alpha}_{\rho}\Phi^{\rho}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta};$$

Φ^{α}_{β} définit un automorphisme T_x; la liaison entre les deux connexions ω et ω' peut s'interpréter exactement comme nous l'avons fait pour ω et $\omega^\star$: le transport d'un vecteur relativement à une des connexions suivi de l'automorphisme Φ

donne le même résultat que l'automorphisme Φ suivi du transport par rapport à l'autre connexion; on en déduit pour les tenseurs de courbure une relation de même forme que (16.4). Il faut maintenant voir comment M^me^ Cattaneo a été conduite à considérer des connexions ainsi associées par l'intermédiaire d'un tenseur régulier, alors que l'association analogue nous a été fournie directement par le principe variationnel. C'est en étudiant les connexions infinitésimales sur l'espace fibré des repères affines, ou connexions affines, qui induisent la même connexion linéaire ω sur $E(V_n)$ que M^me^ Cattaneo a introduit (7) (1956) le tenseur mixte régulier qui caractérise chacune d'elles à partir de la connexion linéaire; l'étude des géodésiques d'une telle connexion amène à considérer la connexion ω'. Sur notre variété V_4 le tenseur régulier $g_{\alpha\beta}$ doit donc aussi caractériser une connexion infinitésimale sur un espace fibré convenable à partir de la connexion linéaire $L^\alpha_{\alpha\beta}$; $g_{\alpha\beta}$ est associé à 1-forme à valeurs vectorielles covariantes et Φ^α_β à 1-forme à valeurs vectorielles contravariantes: ce qui suit correspond par dualité à l'étude de M^me^ Cattaneo.

18. Corepères affines et connexion affine. — Considérons une variété différentiable V_n; le dual T^*_x de T_x est un espace vectoriel qui admet une structure naturelle d'espace affine : une forme de T^*_x définit un point; un repère Σ de cet espace, ou corepère affine d'origine φ sera constitué par l'ensemble de la forme φ, élément de T^*_x et d'une base Θ de T^*_x. Nous noterons Σ comme la matrice à 1 ligne et $(n+1)$ colonnes

$$\Sigma=(\varphi, \Theta), \qquad \text{où} \quad \Theta=(\theta^\alpha) \qquad (\alpha=1, 2, \ldots, n).$$

Soit un autre corepère affine au même point x,

$$\Sigma'=(\varphi', \Theta'), \qquad \text{où} \quad \Theta'=(\theta^{\beta'}).$$

Si $A=(A^\alpha_{\beta'})$ est la matrice de passage de Θ' à Θ et si $\psi=\varphi'-\varphi$ a pour composantes ψ_α par rapport à Θ, les formules de changement de repère

$$\begin{aligned}\varphi' &= \varphi+\psi_\alpha\theta^\alpha,\\ \Theta &= A\,\Theta'\end{aligned}$$

se traduisent par la relation matricielle unique

$$\Sigma'=B\,\Sigma,$$

où B est la matrice $(n+1)\times(n+1)$:

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \psi_\alpha & A^{\beta'}_\alpha\end{pmatrix}$$

l'ensemble des matrices B constitue un groupe de Lie pour la multiplication,

---

(7) *Voir* [3].

soit Γ, qui n'est autre que le groupe affine; tout corepère linéaire au point x, peut être identifié au corepère affine

$$\Sigma = (o, \Theta)$$

sur de tels corepères affines d'origine o opèrent les matrices de la forme

$$(18.1) \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_{\alpha}^{\beta'} \end{pmatrix}$$

dont l'ensemble est le sous-groupe γ de Γ, antiisomorphe au groupe linéaire dans l'antiisomorphisme qui fait correspondre à B la matrice $A = (A_{\beta'}^{\alpha})$ du groupe linéaire; dans cette correspondance, l'élément $dB\,\overline{B}^1$ de l'algèbre de Lie de γ s'identifie à l'élément $-\overline{A}^1\,dA$ de l'algèbre de Lie du groupe linéaire. La réunion $\mathcal{E}^\star(V_n)$ des corepères Σ relatifs aux différents points x de V_n constitue une variété différentiable : si (x^α) sont les coordonnées locales de x, un élément Σ_x aura pour coordonnées (x^α), et la matrice B qui le définit par rapport au corepère naturel des coordonnées locales. Γ opère différentiablement sur $\mathcal{E}^\star(V_n)$ *à gauche* en transformant un corepère en x en un corepère au même point x : $\mathcal{E}^\star(V_n)$ est donc un espace fibré principal différentiable, de base $V_{n'}$ et de groupe structural Γ, l'espace fibré des corepères affines. Chaque fibre, ensemble des corepères affines en x, admet pour sous-variété l'ensemble des corepères linéaires en x qui s'identifie par dualité à la fibre de $E(V_n)$ au-dessus de x. Notons que toutes les formules générales rappelées dans le chapitre I ayant été établies pour un groupe structural opérant à droite, il faudra les transcrire pour les appliquer ici.

Définition. — Nous appellerons *connexion coaffine* sur V_n une connexion infinitésimale sur $\mathcal{E}^\star(V_n)$,

Dans chaque voisinage U, muni de corepères affines, d'un recouvrement de V_n, nous nous donnons une telle connexion par une 1-forme locale π_U à valeurs dans l'algèbre de Lie de Γ. Voyons quelle forme ont les éléments de l'algèbre de Lie de Γ; ils sont encore représentés par des matrices $(n+1)\times(n+1)$ et par dérivation, on constate que ces matrices ont leur première ligne constituée uniquement de zéros .

$$(18.2) \qquad \pi_U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_U & \varpi_U \end{pmatrix};$$

p_U est une matrice à une colonne et n lignes, ϖ_U une matrice $n \times n$, les éléments de ces matrices étant des 1-formes différentielles linéaires. Pour $x \in U \cap V$, les voisinages U et V étant munis respectivement des sections locales Σ^V et Σ^U telles que

$$\Sigma^V = B_U^V \Sigma^U,$$

les formes π_U et π_V doivent satisfaire à la condition de cohérence déduite de (2.4)

$$\pi_V = B_U^V \pi_U \overset{-1V}{B_U} + dB_U^V \overset{-1V}{B_U}, \tag{18.3}$$

où

$$B_U^V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \psi_U^V & \overset{-1U}{A_V} \end{pmatrix}, \tag{18.4}$$

ψ_U^V est la matrice à une colonne représentant la forme $\varphi_V - \varphi_U$ (φ_U et φ_V origines respectivement des corepères Σ^U et Σ^V) par rapport à Σ^U.

19. Connexion coaffine associée a une connexion linéaire. — 1° Soit une connexion linéaire définie, pour un recouvrement dont les voisinages sont munis de repères d'origine x, par les matrices ω_U à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe linéaire; à cette section locale de $E(V_n)$, nous pouvons associer de manière naturelle une section locale de $\mathcal{E}^\star(V_n)$: au repère R_U nous faisons correspondre son dual Θ^U qui s'identifie au corepère affine $\Sigma^U = (0, \Theta^U)$. Alors la matrice

$$\pi_U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\omega_U \end{pmatrix} \tag{19.1}$$

à valeurs dans l'algèbre de Lie de γ, définit, pour cette section locale de $\mathcal{E}^\star(V_n)$, une connexion coaffine; en effet, pour $x \in U \cap V$, les formes locales ω_U et ω_V satisfont par hypothèse à

$$\omega_V = \overset{-1U}{A_V} \omega_U A_V^U + \overset{-1U}{A_V} dA_V^U \qquad \text{pour} \quad R_V = A_V^U R_U. \tag{19.2}$$

Il s'ensuit que la condition de cohérence (18.3) est vérifiée pour des matrices B_U^V de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overset{-1U}{A_V} \end{pmatrix},$$

donc pour $\Sigma^V = B_U^V \Sigma^U$, où Σ^V et Σ^U correspondent à R_U et R_V comme il a été indiqué,

2° Soit un voisinage U muni de corepères affines Σ_U d'origine o et un voisinage V muni de corepères affines d'origine φ dont nous désignons par φ_U les composantes dans le repère Σ^U; Σ^V se déduit de Σ^U par la multiplication par

$$B_U^V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varphi_U & A_U^V \end{pmatrix},$$

la condition de cohérence nous donne la forme des matrices π_V pour les repères Σ^V à partir de (19.1)

$$\overset{-1V}{B_U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_V & A^U_V \end{pmatrix}, \qquad dB^V_U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d\varphi_U & dA^V_U \end{pmatrix},$$

$$B^V_U \pi_U \overset{-1V}{B_U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varphi_U & A^V_U \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\omega_U \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_V & A^U_V \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\varphi_U \omega_U A^U_V & -\overset{-1U}{A_V}\omega_U A^U_V \end{pmatrix},$$

$$dB^V_U \overset{-1V}{B_U} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d\varphi_U & dA^V_U \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_V & A^U_V \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d\varphi_U A^U_V & dA^V_U A^U_V \end{pmatrix},$$

par addition

$$\pi_V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (d\varphi_U - \varphi_U \omega_U) A^U_V & -(\overset{-1U}{A_V}\omega_U A^U_V + \overset{-1U}{A_V} dA^U_V) \end{pmatrix},$$

d'après (5.4) et (19.2) et si D est le symbole de différentiation absolue par rapport à la connexion linéaire ω,

$$\pi_V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D\varphi_V & -\omega_V \end{pmatrix},$$

ω_V correspond à la section locale de $E(V_n)$ au-dessus de V déduite de la section de $\mathcal{E}^\star(V_n)$ donnée en prenant pour chaque x la classe du repère Σ^V modulo l'origine.

3° Nous sommes maintenant en mesure de caractériser la forme π de la connexion coaffine la plus générale (18.2) telle que $\varpi_U = -\omega_U$, la connexion linéaire ω étant donnée. Nous dirons qu'une telle connexion coaffine est associée à ω, ou encore qu'elle induit la connexion linéaire ω. Sur un voisinage U, muni de corepères affines d'origine φ_U, nous disposons d'une connexion coaffine particulière induisant la connexion linéaire ω

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D\varphi_U & -\omega_U \end{pmatrix}. \tag{19.3}$$

Nous en déduisons une connexion coaffine quelconque par addition d'une 1-forme matricielle $(n+1)\times(n+1)$ de type adjoint; pour que cette addition n'altère pas le terme $-\omega_U$, cette 1-forme doit être représentée par une matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \zeta_U & 0 \end{pmatrix}$$

et la condition imposée au type fournit la relation

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \zeta_V & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \psi^V_U & A^V_U \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \zeta_U & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\psi^U_V A^U_V & A^U_V \end{pmatrix}$$

qui se réduit à

$$\zeta_V = A_V^U \zeta_U.$$

Ceci signifie que ζ définit une 1-forme vectorielle covariante sur $E(V_n)$. Sous une autre forme, si les ζ_α sont les composantes de ζ et (θ^α) le corepère pour la section locale considérée, on a

$$\zeta_\alpha = g_{\alpha\beta}\theta^\beta, \tag{19.4}$$

où les coefficients $g_{\alpha\beta}$ sont *les composantes d'un tenseur*. Nous obtenons le résultat suivant : la connexion coaffine la plus générale induisant la connexion linéaire ω est définie, pour une certaine section locale de $\mathcal{E}^\star(V_n)$ par la forme locale

$$\pi_U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_U & -\omega_U \end{pmatrix}, \qquad \text{avec} \quad p_U = D\varphi_U + \zeta_U, \tag{19.5}$$

où D est le symbole de différentiation absolue relatif à ω, φ est l'origine du corepère affine de la section locale au-dessus de U et ζ est une 1-forme vectorielle covariante sur $E(V_n)$. Il y a donc correspondance biunivoque entre les connexions coaffines sur V_n et les couples $(g_{\alpha\beta}, L^\alpha_{\beta\gamma})$ composés d'une connexion linéaire et d'un champ de tenseurs deux fois covariants sur V_n. La connexion coaffine est dite *régulière* si le tenseur $g_{\alpha\beta}$ est régulier.

20. Géodésiques d'une connexion coaffine. — Pour définir ce que nous entendrons par géodésique d'une connexion coaffine, il faut d'abord revenir à la notion de développement telle que nous l'avons exposé au paragraphe 3 et en faire l'application à la connexion infinitésimale que nous considérons, connexion π du type (19.5). Soit un chemin $x(t)$ de $V_n (0 \leqq t \leqq 1)$ et un chemin quelconque $\Sigma(t)$ de $\mathcal{E}^\star(V_n)$ au-dessus de $x(t)$. Pour que le chemin $\Sigma'(t)$ au-dessus de $x(t)$ soit horizontal, il faut et il suffit que, si

$$\Sigma'(t) = \overset{-1}{B}(t)\,\Sigma(t)$$

on ait le long de $\Sigma(t)$

$$dB\,\overset{-1}{B} = \pi_\Sigma(d\Sigma) \tag{20.1}$$

la solution de (20.1) telle que B(0) soit la matrice identité est le développement de $\Sigma(t)$ sur le groupe Γ à partir de l'identité. Mais nous pouvons représenter le groupe Γ sur la fibre $T^\star_{x_0}$ à partir du corepère affine $\Sigma(0)$ en x_0 :

à la matrice $B(t)$ correspond dans cette représentation le corepère en x_0

$$\Sigma'_{x_0}(t) = B(t)\,\Sigma(0), \qquad \text{où} \quad \Sigma'_{x_0} = (\varphi'_{x_0}, \Theta'_{x_0}). \tag{20.2}$$

Nous définissons alors le développement de $\Sigma(t)$ sur $T^\star_{x_0}$ par la solution de la transformée de (20.1) par (20.2), soit

$$d\Sigma'_{x_0} = \pi_\Sigma(\Sigma)\,\Sigma'_{x_0}, \tag{20.3}$$

avec comme conditions initiales $\Sigma'_{x_0}(o) = \Sigma(o)$. Nous choisirons un chemin $\Sigma(t)$ tel que l'origine de chacun de ses repères soit o

$$\Sigma(t) = (o, \Theta(t)).$$

Nous avons donc, si la connexion coaffine considérée est définie par les formes ζ et ω,

$$\pi_\Sigma(d\Sigma) = \begin{pmatrix} o & o \\ \zeta_\Theta(d\Theta) & -\omega_\Theta(d\Theta) \end{pmatrix}.$$

(20.3) se décompose comme suit :

$$\text{(20.4)} \qquad \begin{cases} d\varphi'_{x_0} = \zeta_\Theta(d\Theta)\,\Theta'_{x_0}, \\ d\Theta'_{x_0} = -\,\omega_\Theta(d\Theta)\,\Theta'_{x_0} \end{cases}$$

On montre exactement comme dans le cas affine, que le chemin de $T^\star_{x_0}$ défini par $\varphi'_{x_0}(t)$ ne dépend que de $x(t)$ et non pas du chemin $\Sigma(t)$ choisi dans $\mathcal{E}^\star(V_n)$. Alors nous pouvons supprimer dans (20.4) tout ce qui se rapporte à $\Sigma(t)$. Nous supprimons aussi les accents et l'indice x_0, et nous avons, sous forme condensée, les « formules du repère mobile »

$$\text{(20.5)} \qquad d\varphi = \zeta\Theta,$$

$$\text{(20.6)} \qquad d\Theta = -\,\omega\Theta.$$

Par définition, $x(t)$ sera un arc géodésique pour la connexion coaffine (ζ, ω), si le chemin de $T^\star_{x_0}$ défini par $\varphi(t)$ solution du système (20.5), (20.6) est un segment de droite. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'il existe un scalaire $\lambda(t)$ tel que

$$\text{(20.7)} \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \lambda(t)\frac{d\varphi}{dt}.$$

Or, d'après (20.5),

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\zeta}{dt}\Theta.$$

Soit (w^α) le vecteur vitesse du chemin $x(t)$ par rapport à la famille de corepères à partir desquels on fait le développement

$$w^\alpha = \frac{\theta^\alpha}{dt},$$

d'après (19.4) et (13.2) $\frac{\zeta}{dt}$ est la matrice à une colonne représentant le vecteur covariant qui correspond au vecteur vitesse dans l'isomorphisme $\overline{\Psi}$. Soit $v = \frac{\zeta}{dt}$

$$v_\beta = g_{\beta\alpha} w^\alpha.$$

Nous avons alors

$$\frac{d\varphi}{dt} = v\Theta;$$

dérivons une seconde fois en tenant compte de (20.6),

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \left(\frac{dv}{dt} - v\frac{\omega}{dt}\right)\Theta = \frac{Dv}{dt}\Theta.$$

Donc, pour que le chemin $x(t)$ soit un arc géodésique de la connexion coaffine (ζ, ω), il faut et il suffit qu'il existe un scalaire $\lambda(t)$ tel que

$$\frac{Dv}{dl} = \lambda v, \tag{20.8}$$

où v est le vecteur covariant associé au vecteur vitesse du chemin $x(t)$ dans l'isomorphisme $\overline{\Psi}$.

21. La variété fondamentale V_4, variété a connexion affine. — Au paragraphe 6, nous nous donnions sur une variété différentiable deux êtres géométriques distincts : un champ de tenseurs réguliers à deux indices de même type et une connexion linéaire. Les conclusions du paragraphe 19 nous permettent de fondre ces deux éléments en un seul : une connexion coaffine régulière sur V_4. Dans ce nouveau langage, voyons de quelle manière le principe variationnel va particulariser la connexion coaffine, du moins dans son expression partielle (9.5).

Soit C un arc géodésique de la connexion coaffine (ζ, ω), paramétré par t; avec les notations du paragraphe précédent, le vecteur v associé au vecteur vitesse de C par $\overline{\Psi}$ satisfait à (20.8); mais on peut trouver un paramètre s tel que (20.8) s'écrive

$$\frac{Dv}{ds} = 0.$$

Appliquons alors le théorème du paragraphe 15; v étant invariant par transport relativement à ω le long de C, le vecteur vitesse w est invariant par transport le long de C relativement à $\omega^\star$, associée à ω par l'intermédiaire de $g_{\alpha\beta}$. C est donc aussi un arc géodésique pour la connexion linéaire $\omega^\star$; si maintenant les équations (9.5) sont supposées satisfaites, $\omega^\star$ n'est autre que $\overline{\omega}$, transposée de ω par le principe d'herміticité d'Einstein. Ceci nous permet de géométriser et de condenser les prémisses de la théorie exposées au chapitre II.

En théorie d'Einstein-Schrödinger, on se donne sur une variété différentiable V_4 une connexion coaffine régulière qui sera dite fondamentale. La connexion coaffine fondamentale doit avoir mêmes géodésiques que la connexion linéaire transposée de la connexion linéaire qu'elle induit. Cette connexion linéaire induite a un vecteur covariant de torsion nul et son tenseur de Ricci $P_{\alpha\beta}$ satisfait à

$$P_{\alpha\beta} = \frac{2}{3}(\partial_\alpha \Sigma_\beta - \partial_\beta \Sigma_\alpha),$$

où Σ_α est un vecteur covariant arbitraire.

DEUXIÈME PARTIE.

LE PROBLÈME DE CAUCHY POUR LES ÉQUATIONS DU CHAMP.

CHAPITRE IV.

LES COORDONNÉES ISOTHERMES.

En relativité générale, une étude directe du problème de Cauchy, problème de l'intégration des équations d'Einstein, mène à conclure que la gravitation se propage par ondes, comme la lumière. L'introduction d'un système particulier de coordonnées permet de mettre en évidence ce caractère sous une forme familière et de simplifier tous les problèmes d'intégration et d'approximations; ce privilège et ce succès des coordonnées isothermes, longtemps appelées intrinsèques, s'explique par l'identité des caractéristiques et bicaractéristiques des équations qui les déterminent et des équations d'Einstein. Soit $a_{\lambda\mu}$ le tenseur métrique de la variété espace-temps riemannienne de la relativité générale; considérons l'équation de Laplace-Beltrami, où g est la fonction inconnue [8]

$$\Delta_2 g \equiv a^{\lambda\mu}\left(\partial_{\lambda\mu} g - \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\} \partial_\rho g\right) = 0.$$

Un système de coordonnées locales (x^ρ) est dit isotherme si les quatre familles de surfaces $x^\rho = \text{Cte}$ satisfont à l'équation ci-dessus, c'est-à-dire si

$$f^\rho \equiv -a^{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\} = 0.$$

Nous allons exposer le calcul classique des composantes du tenseur de Ricci $G_{\alpha\beta}$ en fonction des f^ρ par une méthode qui se généralise en théorie unitaire.

22. L'EXPRESSION DU TENSEUR DE RICCI EN GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE. — Pour un vecteur contravariant quelconque, les identités de Ricci s'écrivent

$$(22.1) \qquad \nabla_\lambda \nabla_\mu v^\alpha - \Delta_\mu \nabla_\lambda v^\alpha = G^\alpha_{\rho,\lambda\mu} v^\rho,$$

∇ désigne toujours le symbole de différentiation absolue dans la connexion

(8) La notation $\left\{ \begin{matrix} \rho \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\}$ désigne les symboles de Christoffel relatifs au tenseur métrique $a_{\lambda\mu}$.

riemannienne $\left\{ {\rho \atop \lambda\mu} \right\}$. $G^{\alpha}_{\beta,\lambda\mu}$ est le tenseur de courbure de cette même connexion. Appliquons les identités (22.1) à $a^{\alpha\underline{\beta}}$, où l'indice souligné désigne un indice « mort » sur lequel ne portera pas l'opération de dérivation covariante

$$\nabla_\lambda \nabla_\mu a^{\alpha\underline{\beta}} - \nabla_\mu \nabla_\lambda a^{\alpha\underline{\beta}} = G^{\alpha}_{\rho,\lambda\mu} a^{\rho\beta}.$$

Contractons en α et λ de manière à faire apparaître le tenseur de Ricci au deuxième membre

$$\nabla_\lambda \nabla_\mu a^{\lambda\underline{\beta}} - \nabla_\mu \nabla_\lambda a^{\lambda\underline{\beta}} = G_{\rho\mu} a^{\rho\beta}. \tag{22.2}$$

Calculons $\nabla_\mu a^{\lambda\underline{\beta}}$; comme le tenseur métrique est à dérivée covariante nulle dans la connexion riemannienne associée,

$$\nabla_\mu a^{\lambda\underline{\beta}} = \partial_\mu a^{\lambda\underline{\beta}} + \left\{ {\lambda \atop \alpha\mu} \right\} a^{\alpha\underline{\beta}} = -\left\{ {\underline{\beta} \atop \alpha\mu} \right\} a^{\lambda\alpha}$$

par contraction, on en déduit $\nabla_\lambda a^{\lambda\underline{\beta}}$

$$\nabla_\lambda a^{\lambda\underline{\beta}} = -\left\{ {\underline{\beta} \atop \alpha\lambda} \right\} a^{\lambda\alpha} = f^{\underline{\beta}};$$

(22.2), après multiplication par $a_{\lambda\beta}$, s'écrit alors

$$\begin{aligned} G_{\lambda\mu} = &- a_{\lambda\beta}\, \partial_\rho \left[\left\{ {\beta \atop \alpha\mu} \right\} a^{\rho\alpha} \right] \\ &- a_{\lambda\beta}\, \partial_\mu f^\beta - a_{\lambda\beta} \left\{ {\rho \atop \sigma\rho} \right\} \left\{ {\beta \atop \alpha\mu} \right\} a^{\sigma\alpha} + a_{\lambda\beta} \left\{ {\sigma \atop \mu\rho} \right\} \left\{ {\beta \atop \alpha\sigma} \right\} a^{\rho\alpha}. \end{aligned} \tag{22.3}$$

Transformons le premier terme du second membre

$$- a_{\lambda\beta}\, \partial_\rho \left[\left\{ {\beta \atop \alpha\mu} \right\} a^{\rho\alpha} \right] = - a^{\rho\alpha}\, \partial_\rho \left[\left\{ {\beta \atop \alpha\mu} \right\} a_{\lambda\beta} \right] + \left\{ {\beta \atop \alpha\mu} \right\} a^{\rho\alpha}\, \partial_\rho a_{\lambda\beta} - a_{\lambda\beta}\, \partial_\rho a^{\rho\alpha} \left\{ {\beta \atop \alpha\mu} \right\};$$

reportons cette expression dans (22.3) et remarquons que $-\left\{ {\beta \atop \alpha\mu} \right\} a_{\lambda\beta}$ se trouve facteur de

$$\partial_\rho a^{\rho\alpha} + \left\{ {\rho \atop \sigma\rho} \right\} a^{\sigma\alpha} = -\left\{ {\alpha \atop \sigma\rho} \right\} a^{\rho\sigma} = f^\alpha,$$

on obtient

$$\begin{aligned} G_{\lambda\mu} = &- a^{\rho\alpha}\, \partial_\rho \left[\left\{ {\beta \atop \alpha\mu} \right\} a_{\lambda\beta} \right] - a_{\lambda\beta}\, \partial_\mu f^\beta - a_{\lambda\beta} \left\{ {\beta \atop \alpha\mu} \right\} f^\alpha \\ &+ a_{\lambda\beta} \left\{ {\sigma \atop \mu\rho} \right\} \left\{ {\beta \atop \alpha\sigma} \right\} a^{\rho\alpha} + a^{\rho\alpha} \left\{ {\beta \atop \alpha\mu} \right\} \partial_\rho a_{\lambda\beta}, \end{aligned} \tag{22.4}$$

échangeons λ et μ, nous obtenons, en vertu de la symétrie de $G_{\lambda\mu}$, une autre expression de $G_{\lambda\mu}$ que nous ajoutons à la première. En tenant compte encore une fois de

$$\partial_\alpha a_{\lambda\mu} = \left\{ {\beta \atop \lambda\alpha} \right\} a_{\mu\beta} + \left\{ {\beta \atop \mu\alpha} \right\} a_{\lambda\beta},$$

il vient

$$(22.5)\qquad 2G_{\lambda\mu} \equiv -a^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta}a_{\lambda\mu} - a_{\lambda\beta}\,\partial_{\mu}f^{\beta} - a_{\mu\beta}\,\partial_{\lambda}f^{\beta} - f^{\alpha}\,\partial_{\alpha}a_{\lambda\mu} + 2L_{\lambda\mu},$$

avec

$$(22.6)\qquad 2L_{\lambda\mu} \equiv a^{\rho\alpha}\left[\left\{ {\beta \atop \alpha\mu} \right\}\partial_{\rho}a_{\lambda\beta} + \left\{ {\beta \atop \alpha\lambda} \right\}\partial_{\rho}a_{\mu\beta} + a_{\lambda\beta}\left\{ {\sigma \atop \mu\rho} \right\}\left\{ {\beta \atop \alpha\sigma} \right\} + a_{\mu\beta}\left\{ {\sigma \atop \lambda\rho} \right\}\left\{ {\beta \atop \alpha\sigma} \right\}\right].$$

On retrouve facilement la forme de Lanczos (⁹) à partir de l'expression (22.6) de $2L_{\lambda\mu}$. Si nous désignons par le signe $\sim$ une convergence modulo des fonctions additives du tenseur $a_{\lambda\mu}$ et de ses dérivées *premières*, nous avons

$$(22.7)\qquad 2G_{\lambda\mu} \sim -a^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta}a_{\lambda\mu} - a_{\lambda\beta}\,\partial_{\mu}f^{\beta} - a_{\mu\beta}\,\partial_{\lambda}f^{\beta}.$$

23. Extension a l'espace a connexion linéaire de la théorie du champ unifié. — En théorie d'Einstein-Schrödinger, une analyse directe du problème de Cauchy a été faite par A. Lichnerowicz [21] et fournit les caractéristiques; nous verrons au chapitre V que les hypersurfaces $f(x^{\alpha}) = 0$ d'un premier groupe de caractéristiques satisfont à

$$(23.1)\qquad g^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha}f\,\partial_{\beta}f \equiv l^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha}f\,\partial_{\beta}f = 0$$

et si nous appelons isotherme, comme l'a proposé M.-A. Tonnelat, un système de coordonnées locales dans lequel

$$(23.2)\qquad F^{\rho} \equiv -g^{\alpha\beta}L^{\rho}_{\alpha\beta} = 0,$$

nous avons une interprétation géométrique des nouvelles surfaces coordonnées analogue à celle que nous avons rappelée dans l'introduction de ce chapitre : l'équation qui généralise celle de Laplace-Beltrami

$$(23.3)\qquad \Delta'_2 f \equiv D_{\alpha}(g^{\alpha\beta}\,\partial_{\beta}f) = 0,$$

admet pour caractéristiques les solutions de (23.1). Nous pouvons espérer qu'il s'en suivra certaines simplifications. Mais les second et troisième groupes de caractéristiques des équations de champ est absent de (23.3); il paraît peu probable qu'on puisse trouver en théorie unitaire des surfaces coordonnées aussi privilégiées qu'en relativité générale; alors que $f^{\rho} = 0$ entraînent, d'après (22.7),

$$2G_{\lambda\mu} \sim -a^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta}a_{\lambda\mu},$$

nous verrons que les systèmes « isothermes » (23.2) ne séparent pas complètement les dérivées secondes dans les équations de champ (9.7). Reprenons le calcul précédent; dans l'espace à connexion linéaire $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$, les identités de Ricci (5.8) pour un vecteur contravariant, sont

$$D_{\lambda}D_{\mu}v^{\alpha} - D_{\mu}D_{\lambda}v^{\alpha} = P^{\alpha}_{\rho\lambda\mu}v^{\rho} + 2S^{\rho}_{\lambda\mu}D_{\rho}v^{\alpha}.$$

(⁹) *Voir* [9], p. 147.

Appliquées à $g^{\alpha\underline{\beta}}$ et après contraction en α et λ elles donnent

$$\mathrm{D}_\lambda \mathrm{D}_\mu g^{\lambda\underline{\beta}} - \mathrm{D}_\mu \mathrm{D}_\lambda g^{\lambda\underline{\beta}} = \mathrm{P}_{\rho\mu} g^{\rho\beta} + 2\,\mathrm{S}^{\rho}_{\lambda\mu}\, \mathrm{D}_\rho g^{\lambda\underline{\beta}}. \tag{23.4}$$

Chaque fois que, au paragraphe 22, nous avons utilisé la condition exprimant que le tenseur métrique est à dérivée covariante nulle dans la connexion riemannienne associée à ce tenseur, nous utiliserons ici les relations de liaison (9.3) ou (9.4). Ainsi

$$\mathrm{D}_\mu g^{\lambda\underline{\beta}} = \partial_\mu g^{\lambda\underline{\beta}} + \mathrm{L}^{\lambda}_{\alpha\mu} g^{\alpha\underline{\beta}} = -\,\mathrm{L}^{\underline{\beta}}_{\mu\alpha} g^{\lambda\alpha},$$
$$\mathrm{D}_\lambda g^{\lambda\underline{\beta}} = -\,\mathrm{L}^{\underline{\beta}}_{\lambda\alpha} g^{\lambda\alpha} = \mathrm{F}^{\underline{\beta}}.$$

Explicitons maintenant (23.4),

$$\mathrm{P}_{\rho\mu} g^{\rho\beta} - 2\,\mathrm{S}^{\rho}_{\lambda\mu} \mathrm{L}^{\beta}_{\rho\alpha} g^{\lambda\alpha} = -\,\partial_\rho\left(\mathrm{L}^{\beta}_{\mu\alpha} g^{\rho\alpha}\right) - \partial_\mu \mathrm{F}^\beta - \mathrm{L}^{\rho}_{\sigma\rho} \mathrm{L}^{\beta}_{\mu\alpha} g^{\sigma\alpha} + \mathrm{L}^{\sigma}_{\mu\rho} \mathrm{L}^{\beta}_{\sigma\alpha} g^{\rho\alpha}, \tag{23.5}$$

remarquons d'abord que les derniers termes de chaque membre se groupent en un seul après échange du nom des indices pour le premier, par exemple,

$$2\,\mathrm{S}^{\sigma}_{\rho\mu} \mathrm{L}^{\beta}_{\sigma\alpha} g^{\rho\alpha} + \mathrm{L}^{\sigma}_{\mu\rho} \mathrm{L}^{\beta}_{\sigma\alpha} g^{\rho\alpha} = \mathrm{L}^{\sigma}_{\rho\mu} \mathrm{L}^{\beta}_{\sigma\alpha} g^{\rho\alpha};$$

(23.5) s'écrit plus simplement

$$\mathrm{P}_{\rho\mu} g^{\rho\beta} = -\,\partial_\rho\left(\mathrm{L}^{\beta}_{\mu\alpha} g^{\rho\alpha}\right) - \partial_\mu \mathrm{F}^\beta - \mathrm{L}^{\rho}_{\sigma\rho} \mathrm{L}^{\beta}_{\mu\alpha} g^{\sigma\alpha} + \mathrm{L}^{\sigma}_{\rho\mu} \mathrm{L}^{\beta}_{\sigma\alpha} g^{\rho\alpha}. \tag{23.6}$$

Multiplions les deux membres par $g_{\beta\lambda}$ et faisons sur le premier terme du deuxième membre l'opération effectuée au paragraphe 22 qui consiste à faire sortir $g^{\rho\alpha}$ du ∂_ρ et à y faire rentrer $g_{\beta\lambda}$

$$-\,g_{\beta\lambda}\, \partial_\rho\left(\mathrm{L}^{\beta}_{\mu\alpha} g^{\rho\alpha}\right) = -\,g^{\rho\alpha}\, \partial_\rho\left(\mathrm{L}^{\beta}_{\mu\alpha} g_{\beta\lambda}\right) + g^{\rho\alpha} \mathrm{L}^{\beta}_{\mu\alpha}\, \partial_\rho g_{\beta\lambda} - g_{\beta\lambda} \mathrm{L}^{\beta}_{\mu\alpha}\, \partial_\rho g^{\rho\alpha};$$

comme précédemment se présente le groupement

$$\mathrm{L}^{\beta}_{\mu\alpha} g_{\beta\lambda}\left(\partial_\rho g^{\rho\alpha} + \mathrm{S}^{\rho}_{\sigma\rho} g^{\sigma\alpha}\right) = \mathrm{L}^{\beta}_{\mu\alpha} g_{\beta\lambda} \mathrm{F}^\alpha.$$

Il vient donc pour (23.6)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{\rho\mu} g^{\rho\beta} g_{\beta\lambda} = & -\,g^{\rho\alpha}\, \partial_\rho\left(\mathrm{L}^{\beta}_{\mu\alpha} g_{\beta\lambda}\right) - g_{\beta\lambda}\, \partial_\mu \mathrm{F}^\beta \\ & - g_{\beta\lambda} \mathrm{L}^{\beta}_{\mu\alpha} \mathrm{F}^\alpha + g_{\beta\lambda} \mathrm{L}^{\sigma}_{\rho\mu} \mathrm{L}^{\beta}_{\sigma\alpha} g^{\rho\alpha} + g^{\rho\alpha} \mathrm{L}^{\beta}_{\mu\alpha}\, \partial_\rho g_{\beta\lambda}, \end{aligned} \tag{23.7}$$

cette formule est une conséquence des identités de Ricci jointes aux équations de liaison. Or nous savons que ces dernières sont invariantes par la transformation

$$g^{\alpha\beta} \to \overline{g}^{\alpha\beta} = g^{\beta\alpha},$$
$$\mathrm{L}^{\alpha}_{\beta\gamma} \to \overline{\mathrm{L}}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \mathrm{L}^{\alpha}_{\gamma\beta},$$

laquelle entraîne, d'après (17.5),

$$\mathrm{P}_{\alpha\beta} \to \overline{\mathrm{P}}_{\alpha\beta} = \mathrm{P}_{\beta\alpha}.$$

Quant aux identités de Ricci (23.4), si nous leur faisons subir cette transformation, elles restent identités de Ricci (appliquées à $g^{\underline{\beta\lambda}}$). Nous déduisons donc de (23.7) la formule, vraie dans les mêmes conditions,

$$\text{(23.8)} \qquad \begin{aligned} P_{\mu\rho} g^{\beta\rho} g_{\lambda\beta} = &- g^{\alpha\rho}\, \partial_\rho (L^{\beta}_{\alpha\mu} g_{\lambda\beta}) - g_{\lambda\beta}\, \partial_\mu F^\beta \\ &- g_{\lambda\beta} L^{\beta}_{\alpha\mu} F^\alpha + g_{\lambda\beta} L^{\sigma}_{\mu\rho} L^{\beta}_{\alpha\sigma} g^{\alpha\rho} + g^{\alpha\rho} L^{\beta}_{\alpha\mu}\, \partial_\rho g_{\lambda\beta}. \end{aligned}$$

D'autre part, échangeons λ et μ dans (23.7),

$$\text{(23.9)} \qquad \begin{aligned} P_{\rho\lambda} g^{\rho\beta} g_{\beta\mu} = &- g^{\rho\alpha}\, \partial_\rho (L^{\beta}_{\lambda\alpha} g_{\beta\mu}) - g_{\beta\mu}\, \partial_\lambda F^\beta \\ &- g_{\beta\mu} L^{\beta}_{\lambda\alpha} F^\alpha + g_{\beta\mu} L^{\sigma}_{\rho\lambda} L^{\beta}_{\sigma\alpha} g^{\rho\alpha} + g^{\rho\alpha} L^{\beta}_{\lambda\alpha}\, \partial_\rho g_{\beta\mu} \end{aligned}$$

ajoutons enfin membre à membre (23.8) et (23.9) en tenant compte de

$$\partial_\alpha g_{\lambda\mu} = L^{\beta}_{\lambda\alpha} g_{\beta\mu} + L^{\beta}_{\alpha\mu} g_{\lambda\beta}.$$

Dans la première colonne au deuxième membre, il faut scinder $g^{\rho\alpha}$ en partie symétrique et partie antisymétrique. Il vient

$$\text{(23.10)} \qquad \begin{aligned} P_{\rho\lambda} g^{\rho\beta} g_{\beta\mu} + P_{\mu\rho} g^{\beta\rho} g_{\lambda\beta} = &- l^{\alpha\beta}\, \partial_{\alpha\beta} g_{\lambda\mu} - 2 m^{\alpha\rho}\, \partial_\rho (L^{\beta}_{\alpha\mu} g_{\lambda\beta}) \\ &- g_{\lambda\beta}\, \partial_\mu F^\beta - g_{\beta\mu}\, \partial_\lambda F^\beta - F^\alpha\, \partial_\alpha g_{\lambda\mu} + 2\Lambda_{\lambda\mu}, \end{aligned}$$

avec

$$\text{(23.11)} \qquad 2\Lambda_{\lambda\mu} = g^{\alpha\rho} L^{\beta}_{\alpha\mu}\, \partial_\rho g_{\lambda\beta} + g^{\rho\alpha} L^{\beta}_{\lambda\alpha}\, \partial_\rho g_{\beta\mu} + g_{\lambda\beta} L^{\sigma}_{\mu\rho} L^{\beta}_{\alpha\sigma} g^{\alpha\rho} + g_{\beta\mu} L^{\sigma}_{\rho\lambda} L^{\beta}_{\sigma\alpha} g^{\rho\alpha};$$

(23.10) et (23.11) fournissent une généralisation satisfaisante de (22.5) et (22.6). C'est une identité si l'on suppose les coefficients $L^{\alpha}_{\gamma\beta}$ remplacés par la solution unique des équations de liaison. Nous nommerons par la suite (23.10) « la formule fondamentale ».

24. Quelques remarques sur la fonction fondamentale. — 1° L'allure du premier membre n'est pas inattendue : nous avons déjà un exemple de ces sortes de formes polaires avec les identités de conservation. Transformons-le en introduisant le tenseur défini par (11.3), soit

$$\text{(24.1)} \qquad 2 H^{\beta}_{\lambda} = P_{\lambda\rho} g^{\beta\rho} + P_{\rho\lambda} g^{\rho\beta}.$$

Multiplions les deux membres de (24.1) par $g_{\beta\mu}$,

$$2 H^{\rho}_{\lambda} g_{\rho\mu} = P_{\lambda\mu} + P_{\rho\lambda} g^{\rho\beta} g_{\beta\mu}.$$

De même, en remplaçant λ par μ dans (24.1) et en multipliant les deux membres par $g_{\lambda\beta}$,

$$2 H^{\rho}_{\mu} g_{\lambda\rho} = P_{\mu\rho} g^{\beta\rho} g_{\lambda\beta} + P_{\lambda\mu}.$$

En ajoutant membre à membre, il vient

$$\text{(24.2)} \qquad P_{\rho\lambda} g^{\rho\beta} g_{\beta\mu} + P_{\mu\rho} g^{\beta\rho} g_{\lambda\beta} = 2 [H^{\rho}_{\lambda} g_{\rho\mu} + H^{\rho}_{\mu} g_{\lambda\rho} - P_{\lambda\mu}].$$

2° Les termes du second membre comprenant F^ρ sont formellement les mêmes qu'en géométrie riemannienne; nous allons voir qu'il existe un tenseur symétrique déduit du tenseur fondamental tel que les f^ρ qui lui correspondent soient proportionnels à F^ρ. Considérons les équations de liaison après une contraction

$$\partial_\rho g^{\rho\alpha} + L^\rho_{\sigma\rho} g^{\sigma\alpha} + L^\alpha_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma} = 0.$$

Donc, d'après (8.1) qui donne une expression de $L^\rho_{\sigma\rho}$,

$$F^\alpha = \partial_\rho g^{\rho\alpha} + \frac{\partial_\rho \sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}} g^{\rho\alpha} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\rho (g^{\rho\alpha} \sqrt{|g|});$$

or, d'après les équations de champ (9.6),

$$\partial_\rho (g^{[\rho\alpha]} \sqrt{|g|}) = 0,$$

d'où

$$F^\alpha = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\rho (l^{\rho\alpha} \sqrt{|g|}). \tag{24.3}$$

Considérons le tenseur symétrique

$$a_{\lambda\mu} = \sqrt{\frac{g}{l}}\, l_{\lambda\mu},$$

$a = \text{dét}(\alpha_{\lambda\mu}) = \frac{g^2}{l}$, et le tenseur associé est tel que

$$\sqrt{|a|}\, a^{\lambda\mu} = \sqrt{|g|}\, l^{\lambda\mu},$$

on déduit alors de (24.3)

$$F^\alpha = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\rho (\sqrt{|a|}\, a^{\rho\alpha}) = \sqrt{\frac{a}{g}} f^\alpha, \qquad \text{où} \quad f^\alpha = - a^{\rho\sigma} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \sigma\rho \end{Bmatrix}.$$

Donc on peut douer V_4 d'une structure de variété riemannienne de manière qu'un système de coordonnées locales isotherme au sens de la métrique introduite soit en même temps isotherme relativement à la connexion linéaire $L^\alpha_{\beta\gamma}$. Ce résultat à été démontré pour la première fois par Pham Tan Hoang [25].

3° Au second membre, le dalembertien ordinaire $l^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} g_{\lambda\mu}$ et tous les termes de $\Lambda_{\lambda\mu}$ correspondent de manière naturelle aux termes du second membre de (22.5), mais nous avons un terme supplémentaire auquel il est difficile de donner une forme définitive, qui contient des dérivées secondes du tenseur fondamental. Introduisons le tenseur de courbure pour absorber ces dérivées secondes

$$\begin{aligned} -2m^{\alpha\rho} \partial_\rho (L^\beta_{\alpha\mu} g_{\lambda\beta}) &= 2m^{\alpha\rho} \partial_\rho (L^\beta_{\lambda\alpha} g_{\beta\mu}) \\ &= 2m^{\alpha\rho} g_{\beta\mu} (\partial_\rho L^\beta_{\lambda\alpha} + L^\beta_{\sigma\rho} L^\sigma_{\lambda\alpha}) + 2m^{\alpha\rho} L^\beta_{\lambda\alpha} \partial_\rho g_{\beta\mu} + 2m^{\alpha\rho} g_{\beta\mu} L^\beta_{\sigma\alpha} L^\sigma_{\lambda\rho}; \end{aligned}$$

au premier terme du second membre, nous avons fait apparaître une somme qui, antisymétrisée en α et ρ n'est autre que le tenseur de courbure $P^{\beta}_{\lambda\rho\alpha}$. Si nous posons

$$\Omega^{\alpha}_{\beta}(t) = \frac{1}{2} P^{\alpha}_{\beta\lambda\mu} t^{\lambda\mu},$$

où $t^{\lambda\mu}$ est un tenseur antisymétrique contravariant, nous avons

$$(24.4) \quad -2m^{\alpha\rho}\,\partial_\rho\left(L^{\beta}_{\alpha\mu} g_{\lambda\beta}\right) = -2\Omega^{\beta}_{\lambda}(m) g_{\beta\mu} + 2m^{\alpha\rho} L^{\beta}_{\lambda\alpha}\,\partial_\rho g_{\beta\mu} + 2m^{\alpha\rho} g_{\beta\mu} L^{\beta}_{\sigma\alpha} L^{\sigma}_{\lambda\rho},$$

tous les termes de cette égalité sont hermitiens en λ et μ au sens d'Einstein : pour le premier membre c'est évident; pour le terme en Ω, cela résulte de la formule (17.1), c'est donc vrai pour les deux derniers termes. Il vient, en mettant en évidence cette hermiticité,

$$\begin{aligned} -2m^{\alpha\rho}\,\partial_\rho\left(L^{\beta}_{\alpha\mu} g_{\lambda\beta}\right) = &-\Omega^{\beta}_{\lambda}(m) g_{\beta\mu} - \overline{\Omega}^{\beta}_{\mu}(m) g_{\lambda\beta} + m^{\alpha\rho} L^{\beta}_{\lambda\alpha}\,\partial_\rho g_{\beta\mu} \\ &+ m^{\rho\alpha} L^{\beta}_{\alpha\mu}\,\partial_\rho g_{\lambda\beta} + m^{\alpha\rho} g_{\beta\mu} L^{\beta}_{\alpha\sigma} L^{\sigma}_{\lambda\rho} + m^{\rho\alpha} g_{\lambda\beta} L^{\beta}_{\alpha\sigma} L^{\sigma}_{\rho\mu}, \end{aligned}$$

avec notre notation de congruence et dans un système de coordonnées où $F^{\rho} = 0$, nous avons donc

$$2H^{\rho}_{\lambda} g_{\rho\mu} + 2H^{\rho}_{\mu} g_{\lambda\rho} - 2P_{\lambda\mu} \sim -l^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta} g_{\lambda\mu} - \Omega^{\beta}_{\lambda}(m) g_{\beta\mu} - \overline{\Omega}^{\beta}_{\mu}(m) g_{\lambda\beta},$$

la formule complète étant

$$\begin{aligned} (24.5) \quad 2H^{\rho}_{\lambda} g_{\rho\mu} + 2H^{\rho}_{\mu} g_{\lambda\rho} - 2P_{\lambda\mu} = &-l^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta} g_{\lambda\mu} - \Omega^{\beta}_{\lambda}(m) g_{\beta\mu} - \overline{\Omega}^{\beta}_{\mu}(m) g_{\lambda\beta} \\ &- g_{\lambda\beta}\,\partial_\mu F^{\beta} - g_{\beta\mu}\,\partial_\lambda F^{\beta} - F^{\alpha}\,\partial_\alpha g_{\lambda\mu} + 2\Lambda'_{\lambda\mu}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} 2\Lambda'_{\lambda\mu} = l^{\alpha\rho}\big[& L^{\beta}_{\lambda\alpha}\,\partial_\rho g_{\beta\mu} + L^{\beta}_{\alpha\mu}\,\partial_\rho g_{\lambda\beta} + L^{\sigma}_{\lambda\rho} L^{\beta}_{\sigma\alpha} g_{\beta\mu} + L^{\sigma}_{\rho\mu} L^{\beta}_{\alpha\sigma} g_{\lambda\beta} \\ &+ 2S^{\sigma}_{\rho\lambda} L^{\beta}_{\sigma\alpha} g_{\beta\mu} g^{\rho\alpha} + 2S^{\sigma}_{\mu\rho} L^{\beta}_{\alpha\sigma}\, g_{\lambda\beta} g^{\alpha\rho}\big], \end{aligned}$$

cette nouvelle forme a l'intérêt de rendre tensoriel le terme supplémentaire. Nous utiliserons notre formule fondamentale au prochain chapitre et surtout dans l'interprétation physique de la troisième partie.

CHAPITRE V.

Conditions générales d'existence des solutions.

C'est seulement en 1950 que Y. Fourès [12] a montré l'existence et l'unicité dans le cas non analytique des solutions du système des équations d'Einstein de la relativité générale satisfaisant à des conditions initiales bien déterminées. La théorie unitaire n'en est pas encore au stade où l'on peut espérer résoudre complètement un tel problème pour le système des équations du champ; néanmoins on pourra étendre ou généraliser bien des résultats donnés par l'analyse du problème de Cauchy en relativité générale; rappelons brièvement ceux-ci dans le cas extérieur. Avec les notations du paragraphe 11, étant donné sur une hypersurface S les potentiels de gravitation $a_{\lambda\mu}$ et leurs dérivées premières, le problème consiste à déterminer en dehors de S les potentiels supposés satisfaire aux équations

$$G_{\alpha\beta} = 0.$$

Pour une étude élémentaire locale, on cherche à déterminer les dérivées successives des $a_{\lambda\mu}$ sur une hypersurface S représentée par l'équation $x^0 = 0$, en fonction des « données de Cauchy », valeurs sur S de $a_{\lambda\mu}$ et $\partial_0 a_{\lambda\mu}$. Mettons en évidence les dérivées secondes des potentiels; seules les dérivées secondes d'indice 2 sont inconnues (on appelle indice d'une dérivée de $a_{\lambda\mu}$ le nombre de fois que 0 figure sous le signe ∂); on trouve que le système $G_{\alpha\beta} = 0$ est équivalent, au voisinage de S, et si $a^{00} \neq 0$ au système ([10])

$$G_{ij} \simeq -\frac{1}{2} a^{00} \partial_{00} a_{ij} = 0,$$

$$S^0_\lambda \simeq 0 = 0,$$

où le signe $\simeq$ désigne une congruence modulo des fonctions additives des données de Cauchy et de leurs dérivées premières par rapport aux x^k. Ce nouveau système détermine $\partial_{00} a_{ij}$ sur S à condition que $a^{00} \neq 0$; les $\partial_{00} a_{0\lambda}$ n'interviennent pas : nous dirons que ce sont des dérivées secondes non significatives (dont les discontinuités n'ont pas de sens physique); au contraire, dire que $\partial_{00} a_{ij}$ n'est pas définie pour $a^{00} = 0$, c'est dire qu'elle admet une discontinuité de type de Hadamard à la traversée d'une hypersurface S qui, si son équation locale est $f(x^\alpha) = 0$ satisfait à

$$\Delta_1 f \equiv a^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f = 0,$$

donc est tangente au cône élémentaire au point considéré; de telles hypersurfaces reçoivent le nom de variétés caractéristiques, car, à partir de l'une d'elles, le problème posé est indéterminé; les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre $\Delta_1 f = 0$ s'appellent bicaractéristiques des équations d'Einstein : ce sont les géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne considérée. Enfin on constate que le système des équations d'Einstein est en involution, ce qui entraîne une séparation du problème posé en problème des conditions initiales : recherches de données de Cauchy satisfaisant à $S^0_\lambda = 0$ et problème de l'évolution dans le temps : intégration du système $G_{ij} = 0$ pour ces données de Cauchy.

En théorie unitaire, nous allons d'abord reprendre l'étude de Lichnerowicz [21], qui nous conduira à résoudre un problème algébrique de système

---

([10]) i, j et tout indice latin $= 1, 2, 3$.

linéaire, à la suite de quoi les variétés caractéristiques des équations du champ seront complètement déterminées.

I. — Analyse du système des équations du champ.

25. Le choix des données de Cauchy et les théorèmes préliminaires. — Si nous écartons dans ce chapitre le cas exceptionnel (11) où les équations de liaison ne déterminent pas la connexion en fonction du tenseur fondamental, nous pouvons prendre pour $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ les fonctions de $g_{\lambda\mu}$ et de leurs dérivées premières définies par la solution unique de (9.5); ainsi nous n'aurons plus à considérer comme grandeurs de champ que les $g_{\lambda\mu}$ et le vecteur covariant Σ_α, et comme équations du champ

$$\partial_\rho \mathfrak{g}^{[\rho\beta]} = 0, \tag{25.1}$$

$$P_{\alpha\beta} - \frac{2}{3}(\partial_\alpha \Sigma_\beta - \partial_\beta \Sigma_\alpha) = 0, \tag{25.2}$$

l'expression de $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ en fonction du tenseur fondamental et de ses dérivées premières est d'une telle complication qu'elle ne permet pas de mettre en évidence les dérivées secondes dans (25.2); notre formule fondamentale nous y aidera (sans être du tout indispensable) et surtout deux théorèmes qui évitent les calculs explicites.

Nous nous posons donc le problème local suivant : étant donné sur une hypersurface S les composantes du tenseur fondamental et leurs dérivées premières ainsi que les composantes du vecteur covariant Σ_α, déterminer au voisinage de S le tenseur fondamental et le vecteur Σ_α supposés satisfaire aux équations (25.1) et (25.2). Nous devons choisir les données de Cauchy de manière à utiliser les relations (25.1); définissons localement S par $x^0 = 0$; le calcul montre que, au voisinage de S et si $g^{00} \neq 0$ dans ce système de coordonnées locales, la donnée de $g_{\lambda\mu}$ est équivalente à la donnée des quantités g_{ij}, $\mathfrak{g}^{[0i]}$, $\mathfrak{g}^{(0\lambda)}$. Nous supposons donc désormais remplie la condition $g^{00} \neq 0$ (l'utilisation des densités tensorielles a cet inconvénient d'obliger à la poser d'emblée, masquant ainsi les points précis où elle intervient). Les $\partial_0 \mathfrak{g}^{[0i]}$ s'exprimant d'après (25.1) en fonction des $\partial_k \mathfrak{g}^{[ki]}$, nous prendrons pour données de Cauchy les valeurs sur S de

$$g_{ij}, \quad \mathfrak{g}^{[0i]}, \quad \mathfrak{g}^{(0\lambda)}, \quad \partial_0 g_{ij}, \quad \partial_0 \mathfrak{g}^{(0\lambda)}, \quad \Sigma_\alpha.$$

Alors considérons le changement de coordonnées

$$x^{\lambda'} = x^\lambda + \frac{(x^0)^3}{6}[\varphi^{(\lambda)}(x^i) + \varepsilon^\lambda] \tag{25.3}$$

---

(11) Ce cas est celui où l'on a simultanément $k = 0$, $g = 2h$ d'après [18] et [27]; or pour l'interprétation physique on se place en général dans des conditions où g est voisin de h.

($\lambda = \lambda'$ numériquement, $\varepsilon^\lambda \to 0$ quand $x^0 \to 0$). Un calcul simple (le même qu'en relativité générale) montre que S est conservée point par point, de même que les valeurs des données de Cauchy et les $\partial_{00} g_{ij}$; un calcul un peu plus long, à cause de l'intervention de $\sqrt{|g|}$, prouve que les $\partial_{00} \mathfrak{g}^{[0i]}$ sont également conservés tandis qu'on peut donner des valeurs arbitraires sur S aux $\partial_{00} \mathfrak{g}^{(0\lambda)}$ en agissant sur les fonctions $\varphi^{(\lambda)}$: les $\partial_{00} \mathfrak{g}^{(0\lambda)}$ sont des dérivées secondes non significatives. C'est le premier théorème préliminaire qui admet un corollaire immédiat; dans le changement de coordonnées (25.3) on a sur S

$$P_{\alpha'\beta'} = P_{\alpha\beta},$$

c'est donc que pour toute connexion linéaire $L^\alpha_{\beta\gamma}$ solution des équations de liaison, le tenseur de Ricci est indépendant des dérivées d'indice $2\partial_{00} \mathfrak{g}^{(0\lambda)}$.

Le deuxième théorème préliminaire concerne les K^0_λ que nous avons définis au paragraphe 11, 2°; *a priori*, les K^0_λ contiennent, comme les $P_{\alpha\beta}$, des dérivées d'indice 2. Mais, d'après les identités de conservation (11.2),

$$\partial_0 \mathcal{K}^0_\lambda = -\partial_i \mathcal{K}^i_\lambda - \frac{1}{2} P_{\alpha\beta} \partial_\lambda \mathfrak{g}^{\alpha\beta}$$

et les $\partial_0 \mathcal{K}^0_\lambda$ ne contiennent toujours que des dérivées d'indice 2; c'est dire que $\mathcal{K}^0_\lambda$ ne contient que des dérivées d'indice 1 et, par suite, sont calculables sur S à partir des données de Cauchy relatives au tenseur fondamental.

Enfin, on démontre que le système (25.2) est équivalent au voisinage de S au système suivant :

$$P_{ij} - \frac{2}{3}(\partial_i \Sigma_j - \partial_j \Sigma_i) = 0, \tag{25.4)$_a$}$$

$$P_{[i0]} - \frac{2}{3}(\partial_i \Sigma_0 - \partial_0 \Sigma_i) = 0, \tag{25.4)$_b$}$$

$$M^0_\lambda \equiv K^0_\lambda + \Phi^0_\lambda(\partial_i S_\lambda, g^{\alpha\beta}) = 0 \tag{25.5}$$

(M^0_λ a été défini au paragraphe 11, 1°). Au total, le système (25.1)-(25.2) se décompose en deux systèmes; l'un est constitué de conditions que doivent nécessairement remplir les données de Cauchy : c'est (25.5) auquel on adjoint (25.1), où $\beta = 0$, soit

$$\partial_k \mathfrak{g}^{[k0]} = 0, \tag{25.6}$$

l'autre devra être intégré pour de telles données de Cauchy : c'est (25.4) et

$$\partial_\rho \mathfrak{g}^{[\rho i]} = 0; \tag{25.7}$$

le problème initial se trouve ramené à ces deux problèmes distincts, de conditions initiales et d'intégration d'un système tronqué, car on établit, à l'aide d'une part des identités de conservation, d'autre part des identités $\partial_{\rho\sigma} \mathfrak{g}^{[\rho\sigma]} = 0$ que si une solution ($g_{\lambda\mu}$, Σ_α) de (25.4), (25.7) satisfait *sur* S à (25.5) et (25.6), elle y satisfait aussi *au voisinage de* S.

26. Intégration des équations du champ. — Soit une solution de (25.4), (25.7) pour des données de Cauchy satisfaisant à (25.5) et (25.6); cherchons à déterminer les valeurs sur S des dérivées successives du tenseur fondamental et du vecteur covariant Σ^α. Les équations (25.7) fournissent immédiatement les valeurs sur S des $\partial_0 \mathfrak{g}^{[0i]}$, donc aussi des $\partial_{00}\mathfrak{g}^{[0i]}$ en fonction des données de Cauchy et de leurs dérivées premières par rapport aux x^k; les $\partial_{00}\mathfrak{g}^{(0\lambda)}$ ne figurent dans aucune équation d'après le premier théorème préliminaire. Reste à calculer $\partial_{00}g_{ij}$, car, une fois ce calcul fait, $P_{[i0]}$ est connu sur S et les équations $(25.4)_b$ fournissent les $\partial_0\Sigma_i$; $\partial_0\Sigma_0$ pourra être déduit d'une condition auxiliaire invariante à imposer au vecteur Σ_α. Pour calculer $\partial_{00}g_{ij}$, utilisons notre formule fondamentale (23.10), avec $\lambda = i$, $\mu = j$. Avec la notation de congruence définie dans l'introduction de ce chapitre, elle donne

$$(26.1)\qquad P_{\rho i}g^{\rho\beta}g_{\beta j} + P_{j\rho}g^{\beta\rho}g_{i\beta} \simeq -l^{00}\,\partial_{00}g_{ij} + 2m^{0h}\,\partial_0 L^k_{hj}g_{ik} + 2m^{0h}\,\partial_0 L^0_{hj}g_{i0}.$$

Les équations $(25.4)_a$ nous donnent les valeurs de P_{ij} sur S; et *elles nous donnent aussi les valeurs des* $\partial_0 L^0_{ij}$ *sur* S, car d'après l'expression (5.6) des composantes du tenseur de Ricci en fonction des coefficients de la connexion, où nous ne retenons que les termes qui peuvent contenir des dérivées d'indice 2 du tenseur fondamental, il vient

$$P_{ij} \simeq \partial_0 L^0_{ij}.$$

Pour tirer $\partial_{00}g_{ij}$ de (26.1), il nous reste donc à montrer qu'on peut calculer sur S les P_{0i} et P_{i0} qui figurent au premier membre et les $\partial_0 L^h_{ik}$ qui figurent au deuxième membre; ce que nous allons faire en prouvant que ces quantités ne dépendent que des $\partial_0 L^0_{ij}$ modulo des fonctions additives des données de Cauchy et de leurs dérivées premières par rapport aux x^k.

a. Calcul des $\partial_0 L^h_{ik}$. — D'après les relations de liaison, qui sont supposées vérifiées comme nous l'avons dit au début du paragraphe 25,

$$\partial_k g_{ij} = L^h_{ik}g_{hj} + L^h_{kj}g_{ih} + L^0_{ik}g_{0j} + L^0_{kj}g_{i0},$$

dérivons par rapport à x^0

$$\partial_{0k}g_{ij} \simeq \partial_0 L^h_{ik}g_{hj} + \partial_0 L^h_{kj}g_{ih} + \partial_0 L^0_{ik}g_{0j} + \partial_0 L^0_{kj}g_{i0},$$

soit

$$(26.2)\qquad \partial_0 L^h_{ik}g_{hj} + \partial_0 L^h_{kj}g_{ih} \simeq T_{ikj},$$

où T_{ikj} est une combinaison linéaire des $\partial_0 L^0_{rs}$; nous avons à résoudre ce système aux inconnues $\partial_0 L^k_{ik}$ sur une variété V_3, les coefficients des inconnues étant g_{ij} tels que $\text{dét}(g_{ij}) = gg^{00} \neq 0$; du point de vue algébrique (26.2) a la même forme que (9.5); il est à présumer, et nous admettrons pour l'instant, que les résultats obtenus pour quatre dimensions sont valables pour trois, c'est-à-dire que sauf dans un cas exceptionnel, le système (26.2) admet une solution et une seule; la démonstration détaillée de ce résultat fera l'objet de la deuxième partie de ce chapitre. De (26.2) on déduit donc

$$\partial_0 L^h_{ik} \simeq T'^h_{ik}, \tag{26.3}$$

où la lettre T′ a la même signification que T dans (26.2).

b. Calcul de P_{0i} et P_{i0}. — La formule (5.6) nous donne encore

$$P_{i0} \simeq \partial_0 L^0_{i0} - \partial_0 L^\alpha_{i\alpha} = -\partial_0 L^h_{ih},$$
$$P_{0i} \simeq \partial_0 L^0_{0i};$$

par contraction de (26.3) en h et k, on voit que P_{i0} dépend linéairement des $\partial_0 L^0_{rs}$. Quant à P_{0i}, remarquons que

$$L^0_{0i} = L^\alpha_{\alpha i} - L^h_{hi}.$$

Or $L^\alpha_{\alpha i}$ n'est autre que γ_i, (8.1) qui ne contient que des dérivées d'indice 0 du tenseur fondamental, d'où l'on déduit que

$$\partial_0 L^\alpha_{\alpha i} \simeq 0$$

et le résultat cherché est aussi acquis pour P_{i0}.

Donc on peut tirer $\partial_{00} g_{ij}$ de (26.1) à condition que $l^{00} \neq 0$, qui est une conséquence de $g^{00} \neq 0$, et sauf dans le cas exceptionnel signalé au *a*.

Nous avons obtenu le résultat suivant : à la traversée de $S(x^0 = 0)$ les dérivées secondes $\partial_{00} g_{ij}$ et $\partial_{00} \mathfrak{g}^{[0i]}$ sont continues, de même que $\partial_0 \Sigma_0$ et $\partial_0 \Sigma_i$ sous réserve que :

1° $g^{00} \neq 0$;
2° le système (26.2) soit inversible.

Par dérivation par rapport à x^0 de (25.4), (25.7), de la condition auxiliaire et de la formule fondamentale, on peut calculer sur S les dérivées successives du tenseur fondamental et du vecteur covariant Σ_α dans les mêmes conditions. Dans le cas trop particulier où les données de Cauchy sont analytiques, le théorème de Cauchy-Kowalewska conclut à l'existence et à l'unicité de la solution des équations du champ sous les réserves faites. Il est permis de penser que les méthodes de Y. Fourès pourraient s'étendre aux cas non analytiques.

II. — Détermination complète des variétés caractéristiques.

Les dérivées secondes d'indice 2 ne sont pas déterminées par des données de Cauchy relatives à une hypersurface S qui ne satisfait pas aux conditions 1° et 2° du paragraphe 26; il peut exister une infinité de solutions des équations du champ ayant un contact du premier ordre le long d'une telle hypersurface; ce sont ces propriétés qu'on traduit en appelant caractéristiques les hypersurfaces exceptionnelles. Donc une hypersurface d'équation $x^0 = 0$ sera une variété caractéristique des équations du champ unitaire si $g^{00}=0$ ou si le système

$$\partial_k g_{ij} = L^h_{ik} g_{hj} + L^h_{kj} g_{ih}, \qquad \text{avec } \det(g_{ij}) \neq 0$$

n'admet pas une solution unique; nous devons préciser ce deuxième cas exceptionnel; si $\det(h_{ij}) \neq 0$, les méthodes de Mme Tonnelat ou de Hlavatý sont applicables, mais les calculs effectifs n'ont été faits que dans le cas de quatre dimensions, et les résultats dépendent *a priori* de cette dimension : nous allons rappeler les formules générales et diriger les calculs de manière à trouver le plus rapidement possible le discriminant du système, qui nous intéresse seul ici. Dans le cas où $\det(h_{ij})=0$, nous prouverons que le système est impossible ou indéterminé en exhibant trois équations en général incompatibles.

27. Formules générales de résolution pour le système des équations de liaison. — Dans ce paragraphe, nous utiliserons des indices grecs bien que ceux-ci puissent parcourir un ensemble fini quelconque d'entiers $1, \ldots, n$.

Étant donné sur V_n le champ de tenseurs $g_{\lambda\mu}$ tel que

$$\det[g_{(\lambda\mu)}] = \det(h_{\lambda\mu}) \neq 0,$$

soit à résoudre le système aux inconnues $L^\alpha_{\beta\gamma}$

$$\partial_\rho g_{\lambda\mu} = L^\sigma_{\lambda\rho} g_{\sigma\mu} + L^\sigma_{\rho\mu} g_{\lambda\sigma}. \tag{27.1}$$

Il est naturel de prendre la partie symétrique de (27.1),

$$\partial_\rho h_{\lambda\mu} = L^\sigma_{(\lambda\rho)} h_{\sigma\mu} + L^\sigma_{(\rho\mu)} h_{\lambda\sigma} + S^\sigma_{\lambda\rho} k_{\sigma\mu} + S^\sigma_{\rho\mu} k_{\lambda\sigma}$$

et de former la combinaison qui conduit aux symboles de Christoffel

$$\frac{1}{2}(\partial_\lambda h_{\mu\rho} + \partial_\mu h_{\rho\lambda} - \partial_\rho h_{\lambda\mu}) = [\lambda\mu, \rho]_h,$$

on obtient ainsi

$$[\lambda\mu, \rho]_h = L^\sigma_{(\lambda\mu)} h_{\sigma\rho} + S^\sigma_{\lambda\rho} k_{\mu\sigma} + S^\sigma_{\rho\mu} k_{\sigma\lambda}$$

ou encore

$$L^\sigma_{(\lambda\mu)} = \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\}_h + h^{\sigma\rho}(S^\alpha_{\rho\lambda} k_{\mu\alpha} + S^\alpha_{\rho\mu} k_{\lambda\alpha}).$$

Nous poserons désormais

$$U^\sigma_{\lambda\mu} = h^{\sigma\rho}(S^\alpha_{\rho\lambda} k_{\mu\alpha} + S^\alpha_{\rho\mu} k_{\lambda\alpha}), \qquad \text{où} \quad U^\sigma_{\lambda\mu} = U^\sigma_{\mu\lambda}. \tag{27.2}$$

Ainsi les coefficients de la connexion inconnue sont la somme des coefficients de la connexion riemannienne relative au tenseur symétrique $h_{\alpha\beta}$, du tenseur de torsion et du tenseur symétrique à trois indices défini par (27.2). Nous allons substituer ces deux derniers aux inconnues $L^\alpha_{\beta\gamma}$. Cherchons l'autre système des relations qui les lient à partir de la forme tensorielle (10.1) de (27.1), soit

$$(27.3)\qquad D_\rho g_{\lambda\mu} = 2 S^{\alpha}_{\rho\mu} g_{\lambda\alpha}.$$

Explicitons la dérivée covariante du premier nombre en y faisant apparaître $\overset{h}{\nabla}_\rho$ suivant la décomposition indiquée des coefficients $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$. Comme $\overset{h}{\nabla}_\rho h_{\lambda\mu} = 0$, il vient

$$\overset{h}{\nabla}_\rho k_{\lambda\mu} - (U^{\alpha}_{\lambda\rho} + S^{\alpha}_{\lambda\rho}) g_{\alpha\mu} - (U^{\alpha}_{\mu\rho} + S^{\alpha}_{\mu\rho}) g_{\lambda\alpha} = 2 S^{\alpha}_{\rho\mu} g_{\lambda\alpha}$$

et, après une simplification,

$$(27.4)\qquad \overset{h}{\nabla}_\rho k_{\lambda\mu} - U^{\alpha}_{\lambda\rho} g_{\alpha\mu} - U^{\alpha}_{\mu\rho} g_{\lambda\alpha} = S^{\alpha}_{\rho\mu} g_{\lambda\alpha} + S^{\alpha}_{\lambda\rho} g_{\alpha\mu}.$$

Permutons circulairement (27.4) deux fois

$$\overset{h}{\nabla}_\lambda k_{\mu\rho} - U^{\alpha}_{\mu\lambda} g_{\alpha\rho} - U^{\alpha}_{\rho\lambda} g_{\mu\alpha} = S^{\alpha}_{\lambda\rho} g_{\mu\alpha} + S^{\alpha}_{\mu\lambda} g_{\alpha\rho},$$
$$\overset{h}{\nabla}_\mu k_{\rho\lambda} - U^{\alpha}_{\rho\mu} g_{\alpha\lambda} - U^{\alpha}_{\lambda\mu} g_{\rho\alpha} = S^{\alpha}_{\mu\lambda} g_{\rho\alpha} + S^{\alpha}_{\rho\mu} g_{\alpha\lambda}$$

et retranchons de (27.4) ces deux nouvelles équations. Il apparaît une combinaison des $\overset{h}{\nabla}_\alpha k_{\beta\gamma}$ analogue à celle des symboles de Christoffel. Nous poserons, suivant Hlavatý,

$$K_{\lambda\mu\rho} = \overset{h}{\nabla}_\lambda k_{\rho\mu} + \overset{h}{\nabla}_\mu k_{\lambda\rho} + \overset{h}{\nabla}_\rho k_{\lambda\mu} \qquad (K_{\lambda\mu\rho} = -K_{\mu\lambda\rho});$$

après réduction dans chaque membre, il vient

$$(27.5)\qquad K_{\lambda\mu\rho} + 2 U^{\alpha}_{\rho\lambda} k_{\mu\alpha} + 2 U^{\alpha}_{\rho\mu} k_{\alpha\lambda} + 2 U^{\alpha}_{\lambda\mu} h_{\alpha\rho} = 2 S^{\alpha}_{\lambda\mu} h_{\alpha\rho} + 2 S^{\alpha}_{\rho\lambda} k_{\mu\alpha} + 2 S^{\alpha}_{\rho\mu} k_{\lambda\alpha};$$

en tenant compte de (27.2) on constate que le dernier terme du premier membre et les deux derniers termes du second membre disparaissent. Nous obtenons le système

$$(17.6)\qquad \begin{cases} U^{\sigma}_{\lambda\mu} = h^{\sigma\rho}(S^{\alpha}_{\rho\lambda} k_{\mu\alpha} + S^{\alpha}_{\rho\mu} k_{\lambda\alpha}), \\ 2 S^{\alpha}_{\lambda\mu} h_{\alpha\rho} = K_{\lambda\mu\rho} + 2 U^{\alpha}_{\rho\lambda} k_{\mu\alpha} + 2 U^{\alpha}_{\rho\mu} k_{\alpha\lambda} \end{cases}$$

équivalant au système proposé pourvu que $\text{dét}(h_{\lambda\mu}) \neq 0$. L'emploi d'un système de coordonnées particulier simplifiera suffisamment ces équations pour que $U^{\rho}_{\lambda\mu}$ s'élimine aisément et qu'il reste un système linéaire aux inconnues $S_{\lambda\mu}$ $\left[\text{au nombre de } \frac{n^2(n-1)}{2} \text{ au lieu de } n^3 \text{ coefficients } L^{\alpha}_{\beta\gamma}\right]$.

28. Le cas de trois dimensions. — Les coefficients g_{ij} du système (26.2) ne sont pas les composantes d'un tenseur, ce qui n'empêche nullement que du point de vue algébrique les formules précédentes soient valables en chaque point à condition que $\text{dét}(h_{ij}) \neq 0$. Dans ce cas, nous allons réduire la matrice g_{ij} à une forme canonique. Remarquons que $\text{dét}(k_{ij}) = 0$ comme déterminant symétrique gauche d'ordre impair; il existe donc un vecteur u

(et un seul, sans quoi g_{ij} serait symétrique) tel que

$$k_{ij} u^j = 0.$$

Prenons un repère e_1, e_2, e_3 tel que $u = e_3$ et e_1 et e_2 orthogonaux (au sens de h_{ij}) entre eux et à e_3. Ce choix de repère entraîne

$$h_{ij} = 0 \quad \text{pour } i \neq j, \qquad k_{13} = k_{23} = 0.$$

Prenons $k_{12} = -k_{21} = a$ et nous avons

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} h_{11} & a & 0 \\ -a & h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & h_{33} \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} \text{dét}(g_{ij}) = (h_{11} \times h_{22} + a^2) h_{33}, \\ \text{dét}(h_{ij}) = h_{11} h_{22} h_{33}, \end{array}$$

l'utilisation d'une forme réduite est spécialement avantageuse en dimension 3 parce qu'il n'y en a qu'une, ce qui n'est déjà plus vrai en dimension 4. Reprenons maintenant le système (27.6)

$$(28.1) \qquad 2 S'_{ijk} = K_{ijk} + 2 U^l_{ki} k_{jl} + 2 U^l_{kj} k_{li},$$

$$(28.2) \qquad U^l_{ij} = h^{lk} (S^m_{ki} k_{jm} + S^m_{kj} k_{im}),$$

où nous avons posé, pour simplifier l'écriture,

$$S^l_{ij} h_{lk} = S'_{ijk}, \qquad \text{où} \quad S'_{ijk} = -S'_{jik}.$$

Explicitons les équations en les groupant suivant le degré de simplification apporté par le choix du repère; a et b désignent des indices qui ne pourront prendre que les valeurs 1 et 2 :

1° $i = k = 3$, $j = a$; d'après (28.2), $U^a_{33} = 0$. Il n'y a plus de termes en U dans (28.1),

$$2 S'_{3a3} = K_{3a3};$$

2° $j = 3$, $i = k = a$; il reste un terme en U, $2 U^b_{a3} k_{ba}$, mais $K_{a3a} = 0$. Toutes les équations qui suivent sont sans sommation en a et b ($a \neq b$),

$$2 S'_{a3a} = -2 a^2 (h^{bb})^2 S'_{b3b};$$

3° $j = 3$, $i = a$, $k = b$; un terme en U subsiste comme au 2°, mais $K_{a3b} \neq 0$,

$$2 S'_{a3b} = K_{a3b} + 2 a^2 h^{11} h^{22} S'_{b3a};$$

4° Si l'indice 3 ne peut figurer qu'à la place de k, avec $i = 1$, $j = 2$, les deux groupes de termes en U sont représentés dans (28.1)

$$2 S'_{12k} = K_{12k} - 2 a^2 h^{11} h^{22} (S'_{k21} - S'_{k12}).$$

Le système proposé se sépare. Les équations du 1° sont tout résolues ; au 2° nous avons un système homogène de deux équations aux inconnues S'_{131}

et S'_{232}, de déterminant

$$\Delta^1 = (1 + a^2 h^{11} h^{22})(1 - a^2 h^{11} h^{22}).$$

Si $k = 1$ ou 2, au 4°, les deux équations correspondantes ne contiennent chacune qu'une inconnue. Leur déterminant est le même

$$\Delta^2 = 1 + a^2 h^{11} h^{22}.$$

Enfin, l'équation du 4° où $k = 3$ et les deux équations du 3° constituent un système aux inconnues S'_{123}, S'_{231}, S'_{312}, dont le déterminant est

$$\Delta^3 = (1 + a^2 h^{11} h^{22})(1 - a^2 h^{11} h^{22}) = \Delta^1.$$

Au total, l'existence et l'unicité de la solution seront garanties par

$$(1 + a^2 h^{11} h^{22})(1 - a^2 h^{11} h^{22}) \neq 0, \tag{28.3}$$

or

$$1 + a^2 h^{11} h^{22} = \text{dét}(g_{ij})/\text{dét}(h_{ij}),$$
$$1 - a^2 h^{11} h^{22} = 2 - \text{dét}(g_{ij})/\text{dét}(h_{ij}).$$

Donc la condition (28.3) s'écrit

$$\text{dét}(g_{ij})[2\,\text{dét}(h_{ij}) - \text{dét}(g_{ij})] \neq 0,$$

c'est-à-dire seulement

$$2\,\text{dét}(h_{ij}) - \text{dét}(g_{ij}) \neq 0. \tag{28.4}$$

Le calcul que nous venons d'indiquer est identiquement celui fait par Hlavatý [18] dans le cas de quatre variables sur une des formes réduites possibles de $g_{\lambda\mu}$. A cette occasion nous constatons que les calculs sont les mêmes quelle que soit la dimension de la variété V_n envisagée pourvu que la 2-forme associée à $k_{\lambda\mu}$ soit de rang 2.

29. Le cas particulier où le déterminant des $g_{(ij)}$ est nul. — Nous allons montrer que ce cas particulier est un cas singulier pour le système

$$\partial_k g_{ij} = L^h_{ik} g_{hj} + L^h_{kj} g_{ih}. \tag{29.1}$$

Prenons d'abord comme précédemment la forme canonique de la matrice g_{ij}. Du moment que

$$\text{dét}(h_{ij}) = 0,$$
$$\text{dét}(k_{ij}) = 0,$$

il existe deux vecteurs u et v non nuls et distincts [parce que $\text{dét}(g_{ij}) \neq 0$] tels que

$$h_{ij} u^j = 0,$$
$$k_{ij} v^j = 0.$$

Prenons $u = e_1$ et $v = e_2$. Il vient

$$h_{11} = h_{12} = h_{13} = 0, \qquad k_{12} = k_{32} = 0.$$

Choisissons e_3 de manière à annuler h_{23} et posons $k_{13} = - k_{31} = a$, Alors

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & a \\ -a & 0 & h_{33} \end{pmatrix} \qquad \text{dét}(g_{ij}) = a^2 h_{22} \neq 0.$$

Nous allons extraire du système (29.1) les trois équations telles que i, j, k prennent les valeurs 1, 2, 2 :

1° pour $k = 1$, $i = j = 2$,

$$\partial_1 h_{22} = L^2_{21} h_{22} + L^2_{12} h_{22}; \tag{29.2}$$

2° pour $k = 2$, $i = 1$, $j = 2$,

$$0 = L^2_{12} h_{22} + L^3_{22} a; \tag{29.3}$$

3° pour $k = i = 2$, $j = 1$,

$$0 = - L^3_{22} a + L^2_{21} h_{22}, \tag{29.4}$$

ajoutons (29.3) et (29.4); nous obtenons l'équation

$$L^2_{12} + L^2_{21} = 0$$

qui contredit (29.2)

$$L^2_{12} + L^2_{21} = \frac{\partial_1 h_{22}}{h_{22}},$$

si $\partial_1 h_{22} \neq 0$ il y a impossibilité; si $\partial_1 h_{22} = 0$, il y a indétermination; de toutes manières, (29.1) n'est pas inversible.

30. Les trois groupes de variétés caractéristiques. — A la condition initiale $g^{00} \neq 0$, nous venons de voir que l'inversibilité du système (26.2) ajoute les deux conditions :

$$2\, \text{dét}(h_{ij}) - \text{dét}(g_{ij}) \neq 0, \qquad \text{dét}(h_{ij}) = 0.$$

Mettons-les sous une forme plus agréable en rappelant que

$$\text{dét}(h_{ij}) = g g^{00}, \qquad \text{dét}(h_{ij}) = h h^{00}$$

et rassemblons les résultats obtenus : une hypersurface S, localement représentée par $x^0 = 0$, est variété caractéristique des équations du champ unitaire si les composantes du tenseur fondamental au point considéré satisfont à l'une des trois conditions

$$g^{00} = 0, \qquad 2 h h^{00} - g g^{00} = 0, \qquad h^{00} = 0.$$

Si S est localement représentée au point x par $f(x^\alpha) = 0$, elle satisfait à l'une des trois équations aux dérivées partielles

$$l^{\alpha\beta}\, \partial_\alpha f\, \partial_\beta f = 0, \tag{30.1}$$

$$\gamma^{\alpha\beta}\, \partial_\alpha f\, \partial_\beta f = 0, \qquad \text{où} \quad \gamma^{\alpha\beta} = \left(\frac{2h}{g}\right) h^{\alpha\beta} - l^{\alpha\beta}, \tag{30.2}$$

$$h^{\alpha\beta}\, \partial_\alpha f\, \partial_\beta f = 0. \tag{30.3}$$

Dans nos hypothèses, (30.1) et (30.3) sont les équations tangentielles de deux cônes convexes de sommet x; quant à (30.2), nous ne pouvons pas l'interpréter géométriquement avant d'avoir étudié le tenseur $\gamma^{\alpha\beta}$.

CHAPITRE VI.

LES ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES ATTACHÉS A CHAQUE POINT DE V_4.

En chaque point de V_4 nous avons un tenseur $g_{\alpha\beta}$ satisfaisant aux hypothèses précisées au paragraphe 6; mais il y a plus : les équations du champ (9.5), (9.6), (9.7) affectent chaque point du système de leurs variétés caractéristiques (30.1), (30.2), (30.3); les équations de ces variétés sont exprimées en fonctions des tenseurs déduits de $g_{\alpha\beta}$ et du tenseur associé par symétrisation et antisymétrisation; pour les étudier, nous aurons besoin des relations entre ces tenseurs, leurs associés et les déterminants de leurs matrices, relations que nous allons d'abord rappeler [27], [29]. Nous indiquerons le détail des calculs en les transposant dans nos notations.

I. — **Étude algébrique des relations qui lient les tenseurs dérivés du tenseur fondamental.**

31. RELATIONS TENSORIELLES A DEUX INDICES. — Nos hypothèses sur le tenseur $g_{\alpha\beta}$ assurent l'existence de $h^{\alpha\beta}$, $l_{\alpha\beta}$(§ 6). Pour pouvoir utiliser les écritures $k^{\alpha\beta}$, $m_{\alpha\beta}$ nous ferons provisoirement les hypothèses supplémentaires dét$(k_{\alpha\beta})\neq 0$ et dét$(m^{\alpha\beta})\neq 0$.

1° *Coefficient d'un élément dans le développement du déterminant d'une matrice d'ordre 4, somme de deux matrices.* — Calculons le coefficient $aa^{\alpha\beta}$ de l'élément $a_{\alpha\beta}$ dans un déterminant a où

$$a_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} + c_{\alpha\beta},$$

les $b_{\alpha\beta}$ et $c_{\alpha\beta}$ ne possédant aucune propriété de symétrie; $aa^{\alpha\beta}$ est un déterminant d'ordre 3 qui se décompose comme suit en une somme de huit déterminants :

— 1 déterminant ne contenant que des b, égal à $bb^{\alpha\beta}$; soit B ce déterminant;
— 1 déterminant ne contenant que des c, égal à $cc^{\alpha\beta}$; soit C ce déterminant;
— 3 déterminants avec deux colonnes de b et une de c; soit S leur somme;
— 3 déterminants avec deux colonnes de c et une de b; soit S' leur somme

Il suffit de calculer S; S' s'en déduira par échange de b et de c,

$$S = c_{\rho\sigma} \times \text{coefficient de } b_{\rho\sigma} \text{ dans le développement de B},$$

$$S = c_{\rho\sigma} \times \frac{\partial(bb^{\alpha\beta})}{\partial b_{\rho\sigma}} = c_{\rho\sigma}(bb^{\rho\sigma})b^{\alpha\beta} + c_{\rho\sigma}b\frac{\partial b^{\alpha\beta}}{\partial b_{\rho\sigma}}.$$

D'après une formule classique,

$$\frac{\partial h^{\alpha\beta}}{\partial b_{\rho\sigma}} = - b^{\alpha\mu} b^{\lambda\beta} \frac{\partial b_{\lambda\mu}}{\partial b_{\rho\sigma}} = - b^{\alpha\sigma} b^{\rho\beta}.$$

Donc

$$S = b b^{\rho\sigma} b^{\alpha\beta} c_{\rho\sigma} - b b^{\alpha\sigma} b^{\rho\beta} c_{\rho\sigma}.$$

On en déduit l'expression cherchée

$$a a^{\alpha\beta} = b b^{\alpha\beta} + c c^{\alpha\beta} + b b^{\rho\sigma} b^{\alpha\beta} c_{\rho\sigma} - b b^{\alpha\sigma} b^{\rho\beta} c_{\rho\sigma} + c c^{\rho\sigma} c^{\alpha\beta} b_{\rho\sigma} - c c^{\alpha\sigma} c^{\rho\beta} b_{\rho\sigma}.$$

Cette formule, appliquée à la décomposition canonique

$$g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + k_{\alpha\beta},$$

se simplifie : le 3ᵉ et le 5ᵉ terme du 2ᵉ membre disparaissent par suite des propriétés de symétrie

$$g g^{\alpha\beta} = h h^{\alpha\beta} + k k^{\alpha\beta} + h h^{\alpha\rho} h^{\beta\sigma} k_{\rho\sigma} + k k^{\alpha\rho} k^{\beta\sigma} h_{\rho\sigma},$$

partant de $g^{\alpha\beta} = l^{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta}$, nous en déduirons la relation analogue

$$\frac{g_{\alpha\beta}}{g} = \frac{l_{\alpha\beta}}{l} + \frac{m_{\alpha\beta}}{m} + \frac{1}{l} l_{\alpha\rho} l_{\beta\sigma} m^{\rho\sigma} + \frac{1}{m} m_{\alpha\rho} m_{\beta\sigma} l^{\rho\sigma}.$$

Partie symétrique et partie antisymétrique se séparent aisément et nous obtenons les quatre formules :

$$l^{\alpha\beta} = \frac{h}{g} h^{\alpha\beta} + \frac{k}{g} k^{\alpha\rho} k^{\beta\sigma} h_{\rho\sigma}, \tag{31.1}$$

$$m^{\alpha\beta} = \frac{k}{g} k^{\alpha\beta} + \frac{h}{g} h^{\alpha\rho} h^{\beta\sigma} k_{\rho\sigma}, \tag{31.2}$$

$$h_{\alpha\beta} = \frac{g}{l} l_{\alpha\beta} + \frac{g}{m} m_{\alpha\rho} m_{\beta\sigma} l^{\rho\sigma}, \tag{31.3}$$

$$k_{\alpha\beta} = \frac{g}{m} m_{\alpha\beta} + \frac{g}{l} l_{\alpha\rho} l_{\beta\sigma} m^{\rho\sigma}. \tag{31.4}$$

2° *Les quatre formules inverses.* — Partons de la définition

$$g_{\alpha\sigma} g^{\alpha\beta} = g_{\sigma\alpha} g^{\beta\alpha} = \delta^{\beta}_{\sigma}$$

qui s'écrit, avec nos notations,

$$\delta^{\beta}_{\sigma} = h_{\alpha\sigma}(l^{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta}) + k_{\alpha\sigma}(l^{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta}),$$
$$\delta^{\beta}_{\sigma} = h_{\sigma\alpha}(l^{\beta\alpha} + m^{\beta\alpha}) + k_{\sigma\alpha}(l^{\beta\alpha} + m^{\beta\alpha}).$$

Ce système est équivalent au suivant, obtenu par addition et soustraction

$$\delta^{\beta}_{\sigma} = h_{\alpha\sigma} l^{\alpha\beta} + k_{\alpha\sigma} m^{\alpha\beta}, \tag{31.5}$$

$$0 = h_{\alpha\sigma} m^{\alpha\beta} + k_{\alpha\sigma} l^{\alpha\beta}, \tag{31.6}$$

Éliminons, par exemple, $m^{\alpha\beta}$ en multipliant la deuxième ligne par $h^{\mu\sigma}$,

$$m^{\mu\beta} = - k_{\alpha\sigma} l^{\alpha\beta} h^{\mu\sigma}.$$

Reportons cette valeur de $m^{\mu\beta}$ dans la première ligne avec changement du nom des indices de sommation

$$\delta_\sigma^\beta = h_{\alpha\sigma} l^{\alpha\beta} - k_{\mu\sigma} l^{\alpha\beta} h^{\mu\lambda} k_{\alpha\lambda},$$
$$\delta_\sigma^\beta = l^{\alpha\beta}(h_{\alpha\sigma} - k_{\alpha\lambda} k_{\mu\sigma} h^{\mu\lambda}),$$

ce qui signifie, par définition,

$$l_{\alpha\sigma} = h_{\alpha\sigma} + k_{\alpha\lambda} k_{\sigma\mu} h^{\lambda\mu}$$

et en y joignant les trois formules analogues,

$$(31.1') \qquad l_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + k_{\alpha\rho} k_{\beta\sigma} h^{\rho\sigma},$$
$$(31.2') \qquad m_{\alpha\beta} = k_{\alpha\beta} + h_{\alpha\rho} k_{\beta\sigma} k^{\rho\sigma},$$
$$(31.3') \qquad h^{\alpha\beta} = l^{\alpha\beta} + m^{\alpha\rho} m^{\beta\sigma} l_{\rho\sigma},$$
$$(31.4') \qquad k^{\alpha\beta} = m^{\alpha\beta} + l^{\alpha\rho} l^{\beta\sigma} m_{\rho\sigma},$$

3° *Formules conséquences des deux premiers groupes.* — Considérons les formules (31.1) et (31.1').

$$l^{\alpha\mu} = \frac{h}{g} h^{\alpha\mu} + \frac{k}{g} k^{\alpha\rho} k^{\mu\sigma} h_{\rho\sigma},$$
$$l_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + k_{\alpha\rho} k_{\beta\sigma} h^{\rho\sigma}.$$

Multiplions membre à membre,

$$\delta_\beta^\mu = \frac{h}{g}\delta_\beta^\mu + \frac{k}{g} k^{\alpha\rho} k^{\mu\sigma} h_{\rho\sigma} h_{\alpha\beta} + \frac{h}{g} h^{\alpha\mu} h^{\rho\sigma} k_{\alpha\rho} k_{\beta\sigma} + \frac{k}{g}\delta_\beta^\mu,$$

on obtient la formule

$$(31.7) \qquad k k^{\alpha\rho} k^{\mu\sigma} h_{\rho\sigma} h_{\alpha\beta} + h h^{\alpha\mu} h^{\rho\sigma} k_{\alpha\rho} k_{\beta\sigma} = \delta_\beta^\mu (g - h - k).$$

32. Relations scalaires entre les déterminants g, l, h, m, k; le cas où $k = 0$. — 1° *Relations entre les déterminants.* — Rappelons d'abord la formule classique (12)

$$(32.1) \qquad g = h + k + \frac{h}{2} k_{\alpha\rho} k_{\beta\sigma} h^{\alpha\beta} h^{\rho\sigma}.$$

Compte tenu de cette formule, la contraction de (31.7) en β et μ donne

$$(32.2) \qquad k k^{\alpha\rho} k^{\beta\sigma} h_{\rho\sigma} h_{\alpha\beta} = h h^{\alpha\beta} h^{\rho\sigma} k_{\alpha\rho} k_{\beta\sigma} = 2(g - h - k),$$

---

(12) Pour la démonstration de cette formule, *voir* Lichnerowicz, *Les théories relatives de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris, 1954, p. 257 et Schrödinger [26].

d'où l'on peut déduire une relation analogue en l et m,

$$\frac{1}{m} m_{\alpha\rho} m_{\beta\sigma} l^{\rho\sigma} l^{\alpha\beta} = 2\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{l} - \frac{1}{m}\right). \tag{32.2'}$$

Multiplions maintenant (31.1) par (31.3) en croisant

$$4\frac{g}{l} + \frac{g}{m} m_{\alpha\rho} m_{\beta\sigma} l^{\rho\sigma} l^{\alpha\beta} = 4\frac{h}{g} + \frac{k}{g} k^{\alpha\rho} k^{\beta\sigma} h_{\rho\sigma} h_{\alpha\beta}$$

et, d'après (32.2) et (32.2'), il vient

$$(g^2 - lh)\, m = (g^2 - mk)\, l. \tag{32.3}$$

Reprenons alors (31.6),

$$m^{\beta\alpha} h_{\alpha\sigma} = l^{\beta\alpha} k_{\alpha\sigma},$$

chacun des deux nombres peut être considéré comme l'élément d'une matrice produit de deux matrices; en passant aux déterminants

$$\text{dét}(m^{\alpha\beta})\, \text{dét}(h_{\alpha\beta}) = \text{dét}(l^{\alpha\beta})\, \text{dét}(k_{\alpha\beta}).$$

Cette relation montre que, dans nos hypothèses, les cas particuliers

$$\text{dét}(k_{\alpha\beta}) = 0, \qquad \text{dét}(m^{\alpha\beta}) = 0$$

ne peuvent se produire que simultanément; nous considérerons donc désormais que lorsque k est nul, $\frac{1}{m}$ est nul aussi, et nous avons *dans tous les cas* $\frac{h}{m} = \frac{k}{l}$, soit

$$lh = mk,$$

ce qui donne, pour (32.3),

$$(g^2 - lh)(m - l) = 0,$$

l étant négatif par hypothèse, et m positif puisque symétrique gauche d'ordre pair, m est certainement différent de l. Donc

$$g^2 = lh = mk. \tag{32.4}$$

2° *Le cas* $k = 0$. — Rappelons des formules classiques concernant un déterminant symétrique gauche d'ordre pair

$$\varepsilon\sqrt{k} = \frac{1}{8} \varepsilon^{\sigma\mu\rho\sigma} k_{\mu\nu} k_{\rho\sigma}, \qquad \text{où} \quad \varepsilon = \pm 1,$$

si $k \neq 0$, $k^{\mu\nu}$ a un sens et

$$k^{\mu\nu} = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{k}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_{\rho\sigma}, \qquad k_{\mu\nu} = \frac{\varepsilon\sqrt{k}}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^{\rho\sigma}, \tag{32.5}$$

si $k = 0$, nous conviendrons d'attribuer à l'expression $\sqrt{k}\, k^{\mu\nu}$ la valeur qu'elle a dans le cas général, soit $\frac{\varepsilon}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_{\rho\sigma}$. Avec cette convention, une formule comme (31.1), établie dans le cas général, et qui conserve un sens dans le cas particulier puisqu'elle ne fait intervenir $k^{\mu\nu}$ que sous la forme $\sqrt{k}\,k^{\mu\nu}$, est toujours vraie. De même, les formules

$$\varepsilon'\sqrt{m} = \frac{1}{8}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} m_{\mu\nu} m_{\rho\sigma}, \qquad \text{où} \quad \varepsilon' = \pm 1,$$

$$(32.6) \qquad m^{\mu\nu} = \frac{\varepsilon'}{2\sqrt{m}}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} m_{\rho\sigma}, \qquad m_{\mu\nu} = \frac{\varepsilon'\sqrt{m}}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} m^{\rho\sigma}$$

conduiront à attribuer un sens à l'expression $\frac{m_{\mu\nu}}{\sqrt{m}}$, dans tous les cas une formule comme (31.4′) doit être modifiée pour être toujours correcte : il suffit de multiplier les deux membres par la même quantité, le premier membre par $\sqrt{k}$, le second par $-\frac{g}{\sqrt{m}}$. Désormais, lorsque des raisonnements de ce genre permettront de rendre valables pour $k = 0$ des résultats obtenus dans le cas général, nous ne mentionnerons pas le cas particulier. Pour terminer, remarquons que ε et ε' ne sont pas indépendants, Multipliant (31.2) par $k_{\alpha\beta}$, (31.4′) par $m_{\alpha\beta}$, et tenant compte de (32.2) et (32.2′), il vient

$$(32.7) \qquad m^{\alpha\beta} k_{\alpha\beta} = 2\,\frac{g - h + k}{g}, \qquad m_{\alpha\beta} k^{\alpha\beta} = 2\,\frac{g - h + k}{k}.$$

D'autre part, d'après (32.6) et (32.5),

$$m^{\alpha\beta} k_{\alpha\beta} = \left(\frac{\varepsilon'}{2\sqrt{m}}\,\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} m_{\rho\sigma}\right)\left(\frac{\varepsilon\sqrt{k}}{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} k^{\mu\nu}\right),$$

$$(32.8) \qquad m^{\alpha\beta} k_{\alpha\beta} = \varepsilon\varepsilon'\,\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}\, m_{\rho\sigma} k^{\rho\sigma},$$

la comparaison avec (32.7) fournit

$$\sqrt{m}\,\sqrt{k} = \varepsilon\varepsilon' g,$$

on en conclut que ε et ε' sont de signes contraires.

II. — Les trois cônes caractéristiques.

La nature de l'enveloppe d'une hypersurface S d'équation $f(x^\alpha) = 0$ telle que

$$\gamma^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha f\,\partial^\beta f = 0, \qquad \text{avec} \quad \gamma^{\alpha\beta} = \frac{2h}{g}\,h^{\alpha\beta} - l^{\alpha\beta},$$

la position relative de cette enveloppe et des deux cônes associés aux tenseurs $h_{\alpha\beta}$ et $l_{\alpha\beta}$: voici les questions essentielles que nous avons à résoudre; nous ferons d'abord une étude approchée, dans les conditions qui paraissent les plus propices à l'interprétation physique; les renseignements qu'elle fournit permettent d'abréger l'étude complète qui suivra.

33. Étude approchée préliminaire. — Plaçons-nous dans une région de V_4 où le tenseur fondamental satisfasse aux conditions suivantes, que nous nommerons désormais, pour la commodité du langage, « *hypothèse* A » : $k_{\alpha\beta}$ est petit devant $h_{\alpha\beta}$, ce que nous noterons, ε étant l'infiniment petit principal,

$$k_{\alpha\beta} = o(\varepsilon),$$
$$h_{\alpha\beta} = o(1),$$

les formules (32.1), et (31.1) montrent que, dans ce cas,

$$g = h + o(\varepsilon^2),$$
$$l^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} + o(\varepsilon^2),$$

donc

$$\gamma^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} + o(\varepsilon^2).$$

Ceci prouve que, dans les limites que nous nous sommes fixées, la matrice $(\gamma^{\alpha\beta})$ est inversible, et que la forme quadratique $\gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$ est non dégénérée de type hyperbolique normal; une variété caractéristique des équations du champ est donc tangente, en un point x de la région considérée, à l'un des trois cônes voisins de sommet x

$$\mathrm{C}_l : \quad l_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = 0,$$
$$\mathrm{C}_h : \quad h_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = 0,$$
$$\mathrm{C}_\gamma : \quad \gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = 0.$$

Toujours dans l'hypothèse A, nous allons placer l'un par rapport à l'autre les cônes C_l et C_γ. Considérons, en un point x, les variétés caractéristiques solutions de (30.2); le vecteur v, de composantes

$$v^\alpha = l^{\alpha\beta}\, \partial_\beta f$$

définit la direction conjuguée, par rapport à C_l du plan tangent en x à une telle variété; le lieu de v est un cône de sommet x d'équation

$$\varphi(v) \equiv \left(\frac{2h}{g}\, h^{\alpha\beta} - l^{\alpha\beta}\right) l_{\lambda\alpha}\, v^\lambda\, l_{\mu\beta}\, v^\mu.$$

Dans cette équation, exprimons $h^{\alpha\beta}$ en fonction de $l^{\lambda\mu}$ et $m^{\lambda\mu}$ suivant la formule (31.3′),

$$\varphi(v) \equiv \left[\left(\frac{2h}{g} - 1\right) l^{\alpha\beta} + \frac{2h}{g}\, m^{\alpha\rho}\, m^{\beta\sigma}\, l_{\rho\sigma}\right] l_{\lambda\alpha}\, l_{\mu\beta}\, v^\lambda\, v^\mu = 0,$$

soit

$$\varphi(v) \equiv \left[\left(\frac{2h}{g} - 1\right) l_{\lambda\mu} + \frac{2h}{g}\, f^\rho_\lambda\, f^\sigma_\mu\, l_{\rho\sigma}\right] v^\lambda\, v^\mu = 0, \tag{33.1}$$

où nous avons posé $f^\rho_\lambda = m^{\alpha\rho}\, l_{\alpha\lambda}$. Appelons C'_γ ce cône lieu de v, qui est le conjugué de C_γ par rapport à C_l. Soit maintenant w un vecteur de C_l

$$l_{\lambda\mu}\, w^\lambda\, w^\mu = 0, \tag{33.2}$$

les $u^\rho = f^\rho_\lambda w^\lambda$ sont les composantes d'un vecteur u conjugué de w par rapport à C_l; en effet, par suite de l'antisymétrie de $m^{\alpha\beta}$,

$$l_{\rho\sigma} w^\sigma u^\rho = l_{\rho\sigma} w^\sigma f^\rho_\lambda w^\lambda = m^{\alpha\rho} l_{\alpha\lambda} l_{\rho\sigma} w^\sigma w^\lambda = 0,$$

mais u, conjugué d'une génératrice de C_l par rapport à C_l est dans le plan tangent à C_l le long de cette génératrice, c'est-à-dire extérieur à C_l; on en déduit

$$l_{\rho\sigma} u^\rho u^\sigma = l_{\rho\sigma} f^\rho_\lambda f^\sigma_\mu w^\lambda w^\mu \leqq 0; \tag{33.3}$$

de (33.1), (33.2) et (33.3) on déduit

$$\varphi(w) \leqq 0,$$

toute génératrice de C_l est extérieure à C'_γ, donc intérieure à C_γ; nous avons obtenu le résultat partiel suivant : *C_l est tout entier à l'intérieur de C_γ lorsque $g_{\alpha\beta}$ est peu différent de sa partie symétrique $h_{\alpha\beta}$.*

34. Inversion de la matrice $\gamma^{\alpha\beta}$. — Afin de poursuivre, il faut calculer $\gamma_{\alpha\beta}$, tenseur associé de

$$\gamma^{\alpha\beta} = \frac{2h}{g} h^{\alpha\beta} - l^{\alpha\beta}. \tag{34.1}$$

Pour cela nous utiliserons la formule (31.7),

$$kk^{\alpha\rho} k^{\mu\sigma} h_{\rho\sigma} h_{\alpha\beta} + hh^{\alpha\mu} h^{\rho\sigma} k_{\alpha\rho} k_{\beta\sigma} = \delta^\mu_\beta (g - h - k) \tag{31.7}$$

dans laquelle nous exprimerons les deux premiers termes du premier membre en fonction linéaire de $\gamma^{\alpha\mu}$. D'après (34.1) et (31.1),

$$\gamma^{\alpha\mu} = \frac{h}{g} h^{\alpha\mu} - \frac{k}{g} k^{\alpha\rho} k^{\mu\sigma} h_{\rho\sigma}, \tag{34.2}$$

on en tire une expression de $kk^{\alpha\rho} k^{\mu\sigma} h_{\rho\sigma}$ qui donne

$$kk^{\alpha\rho} k^{\mu\sigma} h_{\rho\sigma} h_{\alpha\beta} = (hh^{\alpha\mu} - g\gamma^{\alpha\mu}) h_{\alpha\beta} = h\delta^\mu_\beta - g\gamma^{\alpha\mu} h_{\alpha\beta}.$$

Dans le second terme du premier membre de (31.7), remplaçons $hh^{\alpha\mu}$ par sa valeur tirée de (34.2),

$$hh^{\alpha\mu} h^{\rho\sigma} k_{\alpha\rho} k_{\beta\sigma} = (g\gamma^{\alpha\mu} + kk^{\alpha\gamma} k^{\mu\delta} h_{\gamma\delta}) h^{\rho\sigma} k_{\alpha\rho} k_{\beta\sigma} = g\gamma^{\alpha\mu} h^{\rho\sigma} k_{\alpha\rho} k_{\beta\sigma} + k\delta^\mu_\beta;$$

(31.7) s'écrit alors

$$g\gamma^{\alpha\mu}(h_{\alpha\beta} - k_{\alpha\rho} k_{\beta\sigma} h^{\rho\sigma}) = \delta^\mu_\beta (2h + 2k - g)$$

à la condition que $2h + 2k - g$ soit non nul, ceci exprime que

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{g}{2h + 2k - g} (h_{\alpha\beta} - h^{\rho\sigma} k_{\alpha\rho} k_{\beta\sigma}),$$

la formule (31.1′) permet de donner une autre forme à cette expression

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{g}{2h + 2k - g}(2h_{\alpha\beta} - l_{\alpha\beta}). \tag{34.3}$$

Nous poserons désormais, pour $2h + 2k - g \neq 0$,

$$\frac{g}{2h + 2k - g} = \frac{1}{F^2},$$

cette notation se justifiera par la suite. Le calcul de $\gamma = \text{dét}(\gamma_{\alpha\beta})$ n'est pas difficile; on trouve

$$\gamma = \frac{g^2}{h F^4}.$$

Remarquons que le cas exceptionnel

$$g = 2h, \qquad k = 0$$

de la résolution des équations de liaison est aussi un cas où l'inversion de $\gamma^{\alpha\beta}$ est impossible.

35. Vecteurs propres de C_l par rapport a C_γ. — Nous supposerons $F^2 \neq 0$ et nous cherchons les directions conjuguées communes aux deux cônes. D'après (34.3), il vient

$$F^2 l^{\alpha\lambda}\gamma_{\alpha\rho} = l^{\alpha\lambda}(2h_{\alpha\rho} - l_{\alpha\rho})$$

ou encore, en remplaçant $l^{\alpha\lambda}h_{\alpha\rho}$ par sa valeur tirée de (31.5),

$$F^2 l^{\alpha\lambda}\gamma_{\alpha\rho} = \delta^\lambda_\rho - 2m^{\alpha\lambda}k_{\alpha\rho}. \tag{35.1}$$

Désignons l'opérateur linéaire $m^{\alpha\lambda}k_{\alpha\rho}$ par le symbole $\mathcal{F}^\lambda_\rho$. La formule (35.1) montre que tout vecteur propre de $\mathcal{F}$ est un vecteur propre de C_l par rapport à C_γ et inversement. En effet, les égalités

$$\mathcal{F}^\lambda_\rho v^\rho = s v^\lambda$$

jointes à (35.1), dont on multiplie les deux membres par v^ρ, entraînent

$$\gamma_{\alpha\rho}v^\rho = S l_{\alpha\rho}v^\rho, \qquad \text{avec} \quad S = \frac{1 - 2s}{F^2}$$

et réciproquement puisque $l \neq 0$. Nous avons donc remplacé le problème par celui de la recherche des valeurs propres et vecteurs propres de l'opérateur $\mathcal{F}$. Ces valeurs propres s sont les racines de l'équation

$$\Phi(s) \equiv \text{dét}[k_{\rho\nu}m^{\lambda\nu} - s\delta^\lambda_\rho] = 0,$$

multiplions les deux membres par $m = \text{dét}(m_{\lambda\alpha})$

$$m\,\Phi(s) \equiv \text{dét}[k_{\rho\alpha} - s m_{\rho\alpha}] = 0,$$

le déterminant écrit au premier membre de l'équation est symétrique gauche d'ordre 4, donc égal à un carré parfait, Nous allons appliquer les formules du paragraphe (32.2); les valeurs propres distinctes de $\mathcal{F}$ sont les solutions de

$$\frac{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{8}(k_{\mu\nu} - s m_{\mu\nu})(k_{\rho\sigma} - s m_{\rho\sigma}) = 0$$

et, en effectuant le produit,

$$\varepsilon\sqrt{k} + s^2\varepsilon'\sqrt{m} - \frac{s}{4}(\varepsilon'\sqrt{m}\, m^{\rho\sigma}k_{\rho\sigma} + \varepsilon\sqrt{k}\, k^{\rho\sigma}m_{\rho\sigma}) = 0.$$

Dans la parenthèse, les deux termes sont égaux d'après (32.8), et (32.7) nous donne leur valeur commune

$$\varepsilon\sqrt{k} + s^2\varepsilon'\sqrt{m} - \frac{s\varepsilon}{\sqrt{k}}(g - h + k) = 0,$$

enfin nous savons que $\varepsilon\varepsilon' g = \sqrt{m}\sqrt{k}$. D'où l'équation aux valeurs propres

$$\chi(s) \equiv s^2 g - s(g - h + k) + k = 0,$$

son discriminant est $(g - h - k)^2 - 4hk$, somme de deux termes positifs, donc nécessairement positif ou nul. Le cas de la racine double (nulle) exige qu'on ait simultanément

$$g = h, \qquad k = 0;$$

lorsqu'il a deux racines distinctes, l'une est négative, soit s_0, l'autre est positive, soit s_1 [toutes deux $o(\varepsilon)$ dans l'hypothèse A]. Nous avons obtenu le résultat suivant : l'équation $\Phi(s) = 0$ a en général deux racines doubles, l'opérateur $\mathcal{F}$ a deux 2- plans de vecteurs propres, sauf cas exceptionnel où il n'a qu'un 3-plan de vecteurs propres, les cônes C_l et C_γ sont bitangents ou exceptionnellement ont un contact d'ordre 4.

36. — Nature de C_γ et position relative des deux cônes C_l et C_γ. — L'étude précédente nous oblige à distinguer deux cas, suivant la classe algébrique de $g_{\alpha\beta}$ (13).

1° *Cas général.* — L'équation $\chi(s) = 0$ a deux racines distinctes; l'un des 2-plans de vecteurs propres coupe C_l et C_γ; dans ce 2-plan prenons un vecteur e_0 intérieur à C_l, le vecteur e_1 aura la direction conjuguée dans le même 2-plan propre, et l'on complète par deux vecteurs conjugués e_2 et e_3 appartenant à l'autre 2-plan propre; normons ces quatre vecteurs de manière que dans le repère qu'ils constituent l'équation de C_l soit

$$C_l : \quad (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0,$$

(13) Hlavatý [19].

étudions le signe des valeurs propres S_0 et S_1 correspondant à s_0 et s_1 par

$$S = \frac{1-2s}{F^2}.$$

Comme $\chi\left(\frac{1}{2}\right) = 2h + 2k - g$, $g\chi\left(\frac{1}{2}\right)$ est du signe de F^2,

a. $F^2 > 0$. — Nous avons la disposition suivante :

$$s_0 < 0 < s_1 < \frac{1}{2},$$

d'où

$$0 < S_1 < S_0;$$

nous ignorons à laquelle des valeurs propres appartient le vecteur e_0 ; cependant, comme elles sont toutes deux positives, nous sommes sûrs que C_γ, comme C_l, est un cône convexe, et comme elles sont toujours rangées dans le même ordre tant que $F^2 > 0$, nous sommes sûrs aussi que l'un des cônes est constamment intérieur à l'autre dans les mêmes conditions; or nous avons vu que sous l'hypothèse A c'est C_l qui est intérieur à C_γ alors que $F^2 = 1 + o(\varepsilon^2) > 0$; il en est donc toujours ainsi, et l'équation de C_γ est

$$C_\gamma: \quad S_0[(x_0)^2 - (x^1)^2] - S_1[(x^2)^2 + (x^3)^2] = 0.$$

b. $F^2 = 0$. — Dans le repère du paragraphe *a* et tant que F^2 n'est pas nul,

$$\gamma^{00} = \gamma^{11} = \frac{1}{S_0}, \qquad \gamma^{22} = \gamma^{33} = \frac{1}{S_1},$$

si $F^2 \to 0$ par valeurs positives, s_1 tend vers $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{S_1}$ a une vraie valeur tandis que $\frac{1}{S_0}$ tend vers 0 avec F^2; à la limite

$$\gamma^{00} = \gamma^{11} = 0.$$

Une hypersurface satisfaisant à (30.2) est donc telle que

$$(\partial_2 f)^2 + (\partial_3 f)^2 = 0$$

les plans tangents aux variétés caractéristiques $\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha f \partial_\beta f = 0$ tournent autour du 2-plan $x^0 = x^1 = 0$: C_γ est dégénéré tangentiellement en un 2-plan extérieur à C_l.

c. $F^2 < 0$. — La disposition des s est

$$s_0 < \frac{1}{2} < s_1,$$

donc

$$S_0 < 0 < S^1,$$

que S_0 soit la valeur propre correspondant au 2-plan qui coupe C_l ou à l'autre, le résultat est le même ; C_γ est bien un cône convexe, mais contenant e_1 à son intérieur : les deux cônes sont extérieurs l'un à l'autre.

2° $g=h$ et $k=0$. — Dans ce cas $F^2=1$ et C_γ existe toujours. Cherchons une forme réduite pour le tenseur $g_{\alpha\beta}$; la 2-forme de composantes $k_{\alpha\beta}$ est de rang 2; prenons pour vecteur e_3 un vecteur propre de $k_{\alpha\beta}$ correspondant à une valeur propre nulle : alors $k_{03}=k_{13}=k_{23}=0$; complétons par trois vecteurs orthogonaux à e_3 et orthogonaux entre eux au sens de $h_{\alpha\beta}$; dans un tel repère,

$$g_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} h_{00} & k_{01} & k_{02} & 0 \\ -k_{01} & h_{11} & k_{12} & 0 \\ -k_{02} & -k_{12} & h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{33} \end{pmatrix},$$

ces composantes de $g_{\alpha\beta}$ doivent satisfaire à la condition qui exprime, d'après (32.1), que $g=h$ et $k=0$

$$k_{\alpha\rho}k_{\beta\sigma}h^{\alpha\beta}h^{\rho\sigma}=0,$$

soit

(**36.1**) $$(k_{01})^2h^{00}h^{11}+(k_{02})^2h^{00}h^{22}+(k_{12})^2h^{11}h^{22}=0.$$

Dans le 3-plan orthogonal à e_3, puisque dét $(k_{uv})=0$ $(u, v=0, 1, 2)$, il existe un vecteur w non nul tel que

(**36.2**) $$k_{uv}w^v=0.$$

Dans ce 3-plan, nous choisirons e_2 perpendiculaire à w de sorte que $w^2=0$ et que, d'après (36.2),

$$k_{01}=0;$$

la condition (36.1) devient

(**36.3**) $$(k_{02})^2h^{00}+(k_{12})^2h_{11}=0$$

compatible avec la signature hyperbolique normale de $h_{\alpha\beta}(h^{00}>0,\ h^{11}<0)$. Normons maintenant les quatre vecteurs du repère et posons, d'après (36.3),

$$(k_{02})^2=(k_{12})^2=\gamma^2.$$

Alors

$$g_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \varepsilon\gamma & 0 \\ 0 & -1 & \gamma & 0 \\ -\varepsilon\gamma & -\gamma & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

à l'aide des formules

$$\gamma_{\alpha\beta}=2h_{\alpha\beta}-l_{\alpha\beta}, \qquad l_{\alpha\beta}=h_{\alpha\beta}+k_{\alpha\rho}k_{\beta\sigma}h^{\rho\sigma},$$

écrivons les équations de C_l et C_γ

$$C_l:\quad (1-\gamma^2)(x^0)^2-(1+\gamma^2)(x^1)^2-2\varepsilon\gamma^2x^0x^1-(x^2)^2-(x^3)^2=0,$$
$$C_\gamma:\quad (1+\gamma^2)(x^0)^2-(1-\gamma^2)(x^1)^2+2\varepsilon\gamma^2x^0x^1-(x^2)^2-(x^3)^2=0,$$

le changement de repère $x^1 = x^1 - \varepsilon x^0$ permet l'étude au voisinage de la génératrice commune

$$C_l : \quad -(1+\gamma^2)(X^1)^2 + 2\varepsilon x^0 X^1 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0,$$
$$C_\gamma : \quad (\gamma^2 - 1)(X^1)^2 + 2\varepsilon x^0 X^1 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0,$$

la signature de $\gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$ est toujours hyperbolique normale, C_γ est toujours un cône convexe et contient C_l à son intérieur.

37. Résultats et remarques. — Il nous reste à préciser la position de C_h par rapport aux deux autres cônes, ce qui sera très simple avec les renseignements dont nous disposons; de (31.5),

$$i^{\alpha\beta} h_{\alpha\sigma} = \delta^\beta_\sigma - k_{\alpha\sigma} m^{\alpha\beta},$$

il résulte

$$h_{\alpha\rho} v^\rho = S' l_{\alpha\rho} v^\rho, \qquad \text{avec} \quad S' = 1 - s,$$

où v est vecteur propre de l'opérateur $\mathcal{F}$ et s racine de

$$\chi(s) \equiv s^2 g - s(g - h + k) + k = 0,$$

$g\chi(1) = gh > 0$, ce qui entraîne $S'_0 > S'_1 > 0$: C_h contient toujours C_l. D'autre part, C_h fait partie du faisceau linéaire (ponctuel ou tangentiel) défini par C_l et C_γ

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{F^2}(2h_{\alpha\beta} - l_{\alpha\beta}) \qquad \text{pour} \quad F^2 \neq 0, \qquad \frac{1}{F^2} = \frac{g}{2h + 2k - g}; \tag{37.1}$$

prenons un vecteur l sur C_h

$$h_{\alpha\beta} l^\alpha l^\beta = 0, \qquad l_{\alpha\beta} l^\alpha l^\beta \leqq 0,$$

$F^2 > 0$ entraîne d'après (37.1),

$$\gamma_{\alpha\beta} l^\alpha l^\beta \geqq 0$$

et C_γ contient C_h aussi bien dans le cas général que dans le cas singulier tandis que pour $F^2 < 0$ les deux cônes emboîtés C_h et C_l sont dans la région extérieure à C_γ.

En résumé, dans la région de V_4 où $2h + 2k - g < 0$, les trois cônes convexes C_γ, C_h et C_l sont emboîtés, bitangents ou surosculateurs, C_γ à l'extérieur et C_l à l'intérieur. Si $2h + 2k - g = 0$, C_γ est dégénéré tangentiellement en un 2-plan extérieur aux cônes bitangents C_l et C_h. Aux points où $2h + 2k - g > 0$, C_γ est un cône convexe bitangent extérieurement à C_h, lequel contient toujours C_l à son intérieur.

La condition $2h + 2k - g < 0$ est une limitation du module des composantes $k_{\alpha\beta}$ par rapport aux $h_{\alpha\beta}$. Admettons cette limitation et revenons aux trois équations aux dérivées partielles (30.1), (30.2), (30.3); leurs caractéristiques, ou bicaractéristiques des équations du champ unitaire, sont les géodésiques de longueur nulle des trois ds^2 de type hyperbolique normal correspondants; en un point x le conoïde caractéristique a trois nappes distinctes : celle qui est engendrée par les géodésiques de longueur nulle de

$$ds_{\gamma}^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

enveloppe les deux autres. Prenons le point x dans le voisinage d'une hypersurface S portant des données de Cauchy : des formules de Kirchoff, généralisées par M^me^ Fourès en relativité générale, font prévoir que les valeurs des fonctions inconnues au point x dépendent des données de Cauchy de la région de S intérieure au conoïde caractéristique de sommet x, par conséquent intérieure au conoïde engendré par les caractéristiques de

$$\gamma^{\alpha\beta}\, \partial_\alpha f\, \partial_\beta = 0$$

$\gamma_{\alpha\beta}$ semble donc jouer un rôle prépondérant parmi les trois tenseurs symétriques $h_{\alpha\beta}$, $l_{\alpha\beta}$, $\gamma_{\alpha\beta}$. En termes de fronts d'onde et de rayons, une interprétation « relativiste » exige que le cône C_γ, dont les génératrices définissent la plus grande vitesse, soit identifié au cône de lumière, tandis que les variétés caractéristiques solutions de (30.1) et (30.3) seraient des fronts d'onde orientés dans le temps. Il faut cependant noter que $\gamma_{\alpha\beta}$ et $h_{\alpha\beta}$ sont apparus de manière assez mystérieuse alors que le tenseur $l_{\alpha\beta}$ intervient constamment et pas seulement à propos du problème de Cauchy; on ignore d'ailleurs complètement au terme de cette étude, la part qui revient à chacune des trois conditions $g^{00} = 0$, $\gamma^{00} = 0$, $h^{00} = 0$ dans les discontinuités des fonctions inconnues à la traversée de l'hypersurface d'équation $x^0 = 0$.

TROISIÈME PARTIE.

INTERPRÉTATION PHYSIQUE.

CHAPITRE VII.

SURFACES D'ONDES GRAVITATIONNELLES ET ÉLECTROMAGNÉTIQUES.

38. LE SCHÉMA FLUIDE-CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE. — En relativité générale, on représente un milieu continu par un domaine d'une variété riemannienne de tenseur métrique $a_{\alpha\beta}$; dans les théories qui nous intéressent ici, les sources d'énergie de ce milieu sont décrites par un champ

de tenseurs $T_{\alpha\beta}$, et le tenseur métrique est lié au tenseur d'impulsion-énergie $T_{\alpha\beta}$ par les équations d'Einstein dites « du cas intérieur »

$$S_{\alpha\beta} = \chi\, T_{\alpha\beta}. \tag{38.1}$$

Si la forme quadratique $T(x) = T_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta$ est définie positive, $T_{\alpha\beta}$ admet relativement à $a_{\alpha\beta}$ un vecteur propre réel orienté dans le temps. Ce vecteur propre définit en chaque point du fluide le vecteur vitesse unitaire u. On appelle repère propre un repère orthonormé $V^{(\alpha)}$ constitué de vecteurs propres de $T_{\alpha\beta}$, où $V^{(0)} = u$. En fonction de ces vecteurs, $T_{\alpha\beta}$ a l'expression suivante :

$$T_{\alpha\beta} = \rho\, u_\alpha u_\beta - \pi_{\alpha\beta}, \qquad \text{avec} \quad \pi_{\alpha\beta} = \sum_{i,k} \pi_{ik} V^{(i)}_\alpha V^{(k)}_\beta, \tag{38.2}$$

ρ est la densité propre du fluide, $\pi_{\alpha\beta}$ est le tenseur des pressions partielles, dont les composantes, négligeables devant ρ, sont homogènes à $\frac{1}{c^2}$ (c, vitesse de la lumière), ce que nous indiquerons en posant $\pi_{\alpha\beta} = \frac{\mu_{\alpha\beta}}{c^2}$. En chaque point de la variété, le repère propre définit un temps et un espace associés qu'on peut identifier à l'espace temps de Minkowski à l'aide de la métrique euclidienne osculatrice, ce qui permettra le passage des grandeurs physiques aux tenseurs sur la variété.

Supposons maintenant que le domaine étudié contienne, en plus d'une énergie provenant de la matière et des pressions, une distribution électromagnétique; les phénomènes électromatiques seront représentés par deux tenseurs antisymétriques $H_{\alpha\beta}$ et $K_{\alpha\beta}$ définis de la manière suivante par l'intermédiaire du repère propre (les composantes dans ce repère sont notées par des indices accentués) :

$$(H_{\lambda'\mu'}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & E_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (K_{\lambda'\mu'}) = \begin{pmatrix} 0 & D_1 & D_2 & D_3 \\ -D_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ -D_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ -D_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix},$$

nous introduirons également le vecteur courant

$$(J_{\lambda'}) = (\delta, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3),$$

où les lettres désignent respectivement :

E_i, le champ électrique;
B_i, l'induction magnétique;
δ, la densité de charge;
H_i, le champ magnétique;
D_i, l'induction électrique;
Γ, le courant de conduction.

Toutes ces grandeurs sont déduites des grandeurs microscopiques de la théorie des électrons de Lorentz par la formation de moyennes; elles sont liées par les relations

$$D = \lambda E, \qquad B = \mu H, \qquad \Gamma = \sigma E, \tag{38.3}$$

λ, μ, σ sont des scalaires désignant respectivement le pouvoir diélectrique, la perméabilité magnétique et la conductivité électrique du milieu. $H_{\alpha\beta}$ et $K_{\alpha\beta}$ seront dits, le premier : tenseur champ électrique-induction magnétique, le second : tenseur induction électrique-champ magnétique (par abus de langage, champ et induction). Dans le repère propre, les équations de Maxwell se traduisent par les deux groupes d'équations tensorielles

$$\overset{a'}{\nabla}_{\lambda'} K^{\lambda'\mu'} = J^{\mu'},$$
$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\lambda'\mu'\nu'\rho'}\overset{a'}{\nabla}_{\lambda'} H_{\mu'\nu'} = 0.$$

Donc en repère quelconque, $H_{\alpha\beta}$ et $K_{\alpha\beta}$ satisfont aux deux groupes d'équations invariantes :

$$\overset{a}{\nabla}_{\alpha} K^{\alpha\beta} = J^{\beta},$$
$$\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}\overset{a}{\nabla}_{\alpha} H_{\beta\gamma} = 0,$$

$\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est l'élément de volume de la variété. Toujours par la considération du repère propre, on est amené aux identifications suivantes :

$$J_{\alpha} = \delta u_{\alpha} + \Gamma_{\alpha}, \qquad \text{où} \quad \Gamma_{\alpha} = \sigma E_{\alpha}, \tag{a}$$

le vecteur courant est somme d'un courant de convection δu et du courant de conduction Γ qui lui est orthogonal,

$$\begin{cases} H_{\alpha\beta}\, u^{\alpha} = E_{\beta}, & \overset{\star}{H}_{\alpha\beta}\, u^{\alpha} = B_{\beta}; \\ K_{\alpha\beta}\, u^{\alpha} = D_{\beta}, & \overset{\star}{K}_{\alpha\beta}\, u^{\alpha} = H_{\beta}; \end{cases} \tag{b}$$

$\overset{\star}{H}{}^{\alpha\beta}$ et $\overset{\star}{K}{}^{\alpha\beta}$, sont les tenseurs adjoints aux tenseurs $H_{\alpha\beta}$ et $K_{\alpha\beta}$ par l'intermédiaire du tenseur métrique. Cette identification permet de traduire les équations (38.3) en langage tensoriel

$$K_{\alpha\beta}\, u^{\alpha} = \lambda\, H_{\alpha\beta}\, u^{\alpha},$$
$$\mu\, \overset{\star}{K}_{\alpha\beta}\, u^{\alpha} = \overset{\star}{H}_{\alpha\beta}\, u^{\alpha}$$

à l'aide de ces formules, on peut exprimer $K_{\alpha\beta}$ en fonction de $H_{\alpha\beta}$. On trouve

$$K_{\rho\beta} = \frac{1}{\mu} H_{\rho\beta} + \frac{1 - \lambda\mu}{\mu}(H_{\sigma\rho}\, u^{\sigma} u_{\beta} - H_{\sigma\beta}\, u^{\sigma} u^{\rho}). \tag{38.4}$$

Dans ces conditions, le tensenr impulsion-énergie responsable de la description des phénomènes électromagnétiques sera celui de la relativité restreinte,

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi c^2}\left[\frac{1}{4}a_{\alpha\beta}H_{\lambda\mu}K^{\lambda\mu} - \frac{1}{2}(K_{\lambda\alpha}H^{\lambda}{}_{\beta} + K_{\lambda\beta}H^{\lambda}{}_{\alpha})\right] \tag{38.5}$$

Dans une théorie « naïve » de l'électromagnétisme, on se contente d'ajouter $\tau_{\alpha\beta}$ à $T_{\alpha\beta}$ [éq. (38.2)] pour former le second membre des équations d'Einstein dans le cas « fluide-champ électromagnétique », soit

$$S_{\alpha\beta} = \chi(T_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta}), \tag{38.6}$$

ce qui ne peut évidemment constituer qu'une première approximation. L'étude de la structure du système des équations de champ pour un schéma fluide-champ électromagnétique a été faite par Pham Mau Quan [15]; elle conduit à des résultats fort intéressants que nous allons brièvement exposer. Prenons les équations de champ (38.6) et les équations de Maxwell sous la forme

$$D_\beta \equiv a^{\alpha\rho}\overset{a}{\nabla}_\alpha K_{\rho\beta} = J_\beta, \tag{38.7}$$

$$E^\delta \equiv \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}\overset{a}{\nabla}_\alpha H_{\beta\gamma} = 0, \tag{38.8}$$

avec

$$J_\beta = \delta u_\beta + \sigma u^\alpha H_{\alpha\beta}, \qquad a_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = 1.$$

$K_{\alpha\beta}$ et $H_{\alpha\beta}$ sont liés par les formules (38.4). Sans faire une étude complète du problème de Cauchy pour ces équations, nous allons montrer comment la considération des deux tenseurs champ et induction non proportionnels $H_{\alpha\beta}$ et $K_{\alpha\beta}$ conduit à des variétés caractéristiques pour les équations de Maxwell distinctes des surfaces d'ondes gravitationnelles, lesquelles ont pour équation $f(x^\alpha) = 0$, où f est solution de

$$a^{\alpha\beta}\partial_\alpha f \partial_\beta f = 0.$$

Nous nous donnons sur une hypersurface $S(x^0 = 0)$ $a_{\alpha\beta}$, $\partial_0 a_{\alpha\beta}$ et $H_{\alpha\beta}$; c'est dire que ces quantités sont continues à la traversée de l'hyper-surface (rappelons que $a_{\alpha\beta}$ est de classe C^1, C^3 par morceaux, et $H_{\alpha\beta}$ de classe C^0, C^2 par morceaux). On montre qu'on peut calculer u^α, puis δ, en fonction de ces données : le vecteur courant J_β est donc continu à la traversée de S, et c'est là un point important pour la suite. Alors le calcul des $\partial_0 u^\alpha$ fait intervenir des hypersurfaces exceptionnelles généralisant les fronts d'onde de l'hydrodynamique classique que nous laisserons de côté ici. Dans cette situation, nous allons commencer le calcul des dérivées obliques $\partial_0 H_{\alpha\beta}$. La lettre Φ désignera dans la suite de ce chapitre une fonction de grandeurs continues à la traversée de S. En remplaçant dans (38.7) $K_{\rho\beta}$ par sa valeur (38.4), il vient

$$D_\beta \equiv \frac{1}{\mu}[a^{\alpha\rho} - (1-\lambda\mu)u^\alpha u^\rho]\overset{a}{\nabla}_\alpha H_{\rho\beta} + \frac{1-\lambda\mu}{\mu}a^{\alpha\rho}u^\sigma u_\beta \overset{a}{\nabla}_\alpha H_{\sigma\rho} + \Phi_\beta = 0 \tag{38.9}$$

(λ. μ et σ sont supposés constants en première approximation). Posons

$$\overline{a}^{\alpha\rho} = a^{\alpha\rho} - (1 - \lambda\mu)\, u^\alpha u^\rho.$$

Par multiplication contractée de (38.9) par u^β, on obtient

$$a^{\alpha\rho} u^\sigma \overset{a}{\nabla}_\alpha H_{\rho\sigma} = \Phi$$

et en reportant dans (38.9),

$$D_\beta \equiv \frac{1}{\mu} \overline{a}^{\alpha\rho} \overset{a}{\nabla}_\alpha H_{\rho\beta} + \Phi_\beta = 0.$$

Le calcul se termine facilement : on constate que seuls les $\partial_0 H_{0i}$ sont susceptibles de discontinuités à la traversée de S, et ceci dans le cas où $\overline{a}^{00} = 0$. Nous appellerons surfaces d'ondes électromagnétiques les variétés caractéristiques des équations de Maxwell; d'après ce qui précède, elles sont solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$\overline{a}^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f \equiv [a^{\alpha\beta} - (1 - \lambda\mu)\, u^\alpha u^\beta]\, \partial_\alpha f \partial_\beta f = 0.$$

Deux cônes caractéristiques sont ainsi définis en chaque point de la variété; si $1 - \lambda\mu \leqq 0$, le cône

$$\overline{a}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = 0$$

est intérieur au cône

$$a_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = 0.$$

Les équations de Maxwell peuvent s'exprimer directement dans la métrique $\overline{a}_{\alpha\beta}$ et les rayons électromagnétiques sont les géodésiques de longueur nulle de cette nouvelle métrique; on peut en déduire un théorème qui est la généralisation relativiste du principe de Fermat [15]. Notons enfin la forme simple que prennent les équations qui lient $H_{\alpha\beta}$ et $K_{\alpha\beta}$ grâce à l'introduction de $\overline{a}^{\alpha\beta}$. On vérifie que, d'après (38.4),

$$K^{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu} H_{\rho\sigma} [a^{\rho\alpha} - (1 - \lambda\mu)\, u^\rho u^\alpha]\, [a^{\sigma\beta} - (1 - \lambda\mu)\, u^\sigma u^\beta],$$

c'est-à-dire

$$K^{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu} \overline{a}^{\rho\alpha} \overline{a}^{\sigma\beta} H_{\rho\sigma}. \tag{38.10}$$

En théorie unitaire, nous disposons d'équations de champ que nous voudrions identifier au système (38.6), (38.7), (38.8) : les idées générales que nous venons de rappeler nous guideront pour poser les hypothèses, forcément arbitraires, permettant d'exhiber de manière satisfaisante un champ et une induction fonctions du tenseur fondamental.

39. Hypothèses d'identification de certaines fonctions de $g^{[\alpha\beta]}$ et $g_{[\alpha\beta]}$ à un champ et à une induction. — Le tenseur fondamental satisfait aux équations de

champ (25.1) et (25.2) que nous réécrivons, pour plus de commodité,

$$\partial_\rho \mathfrak{g}^{[\rho\beta]} = 0, \tag{39.1}$$

$$P_{(\alpha\beta)} = 0, \tag{39.2}$$

$$P_{[\alpha\beta]} = \frac{2}{3}(\partial_\alpha \Sigma_\beta - \partial_\beta \Sigma_\alpha) \tag{39.3}$$

et aux identités (24,5) que nous écrirons en coordonnées isothermes

$$2 H_\lambda^\rho g_{\rho\mu} + 2 H_\mu^\rho g_{\lambda\rho} - 2 P_{\lambda\mu} \equiv - l^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} g_{\lambda\mu} - 2 \Omega_\lambda^\beta (m) g_{\beta\mu} + 2 \Lambda'_{\lambda\mu},$$

en conséquence de (39,2) et, d'après la définition (11.3) de H_λ^ρ, ces identités deviennent

$$2 P_{[\lambda\sigma]} m^{\rho\sigma} g_{\rho\mu} + 2 P_{[\mu\sigma]} m^{\rho\sigma} g_{\lambda\rho} - 2 P_{[\lambda\mu]} = - l^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} g_{\lambda\mu} - 2 \Omega_\lambda^\beta (m) g_{\beta\mu} + 2 \Lambda'_{\lambda\mu}. \tag{39.4}$$

Nous montrerons au chapitre VIII (§ 43) qu'on peut substituer (39.4) à (39,2), tout au moins dans les hypothèses A. Nous allons aussi remplacer (39.3) par ce qu'on obtient en dérivant (39.4) par rapport à x^ν et en permutant circulairement; cette opération fait disparaître $P_{[\lambda\mu]}$, car (39.3) entraîne

$$\partial_\gamma P_{[\alpha\beta]} + \partial_\alpha P_{[\beta\gamma]} + \partial_\beta P_{[\gamma\alpha]} = 0. \tag{39.5}$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \varepsilon^{\lambda\mu\nu\delta} \Big[\partial_\nu (l^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} k_{\lambda\mu}) + \partial_\nu \big[\Omega_\lambda^\beta (m) g_{\beta\mu} - \Omega_\mu^\beta (m) g_{\beta\lambda} \big] \\ + 2 \partial_\nu (P_{[\lambda\sigma]} m^{\rho\sigma} k_{\rho\mu} + P_{[\mu\sigma]} m^{\rho\sigma} k_{\lambda\rho}) \Big] = \varepsilon^{\lambda\mu\nu\delta} \partial_\nu \Lambda'_{\lambda\mu}. \end{aligned} \tag{39.6}$$

Nous partirons du système (39.1), (39.4), (39.6), équivalent dans les hypothèses A à (39.1), (39.2), (39.5), et plus faible que le système initial puisqu'il n'entraîne que l'existence locale d'un potentiel vecteur pour $P_{[\alpha\beta]}$, et nous ferons les hypothèses suivantes :

1° La fonction $H_{\alpha\beta}$ des potentiels est telle que (39.1) s'identifie aux équations de Maxwell

$$E^\delta \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\alpha H_{\beta\gamma} = 0;$$

2° Les fonctions $K^{\alpha\beta}$ et J^β des potentiels sont tels que la forme généralisée

$$D^\delta \equiv D_\nu K^{\nu\delta} = J^\delta$$

du deuxième groupe d'équations de Maxwell s'identifie à (39.6);
l'ordre des dérivations partielles dans J^δ *étant inférieur à l'ordre des dérivations partielles dans* $D_\nu K^{\nu\delta}$. Ceci revient à dire que $\partial_\nu K^{\nu\delta}$ s'identifie au premier membre de (39.6) à un facteur scalaire près et modulo des fonctions additives des dérivées jusqu'à l'ordre 2 inclus : de cette manière, si les potentiels et leurs dérivées jusqu'à l'ordre 2 compris sont supposés continus à la traversée

d'une hypersurface S, le vecteur courant J sera automatiquement continu à la traversée de cette hypersurface, *quelle qu'elle soit* alors qu'une fonction du champ par l'intermédiaire de dérivées troisièmes pourra subir une discontinuité à la traversée de certaines hypersurfaces exceptionnelles, de l'une des trois familles que nous avons dit.

40. La forme pseudo-volume. Un laplacien généralisé. — L'hypothèse I entraîne immédiatement, d'après le paragraphe 10,

$$H_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\sqrt{-g}\, m^{\gamma\delta}; \tag{40.1}$$

la forme H, de composantes $H_{\alpha\beta}$, se déduit du tenseur antisymétrique contravariant $g^{[\alpha\beta]}$ par l'intermédiaire d'un opérateur adjoint généralisé, le pseudo-volume étant la forme η de composantes

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\sqrt{-g}$$

qui est à dérivée covariante nulle dans la connexion L aussi bien que dans la connexion $\overline{L}$ puisque

$$L^{\sigma}_{\sigma\rho} = L^{\sigma}_{\rho\sigma} = \frac{\partial_\rho\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}.$$

Posons

$$K^{\nu\delta} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^{\lambda\mu\nu\delta}}{\sqrt{-g}}N_{\lambda\mu}, \tag{40.2}$$

où $N_{\lambda\mu}$ doit être un tenseur. Comme $\frac{\varepsilon^{\lambda\mu\nu\delta}}{\sqrt{-g}}$ est aussi à dérivée covariante nulle,

$$D_\nu K^{\nu\delta} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^{\lambda\mu\nu\delta}}{\sqrt{-g}}D_\nu N_{\lambda\mu},$$

divisons les deux membres de (39.6) par $\sqrt{-g}$; l'hypothèse 2° nous fait écrire

$$N_{\lambda\mu} = l^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}k_{\lambda\mu} + \Omega^{\beta}_{\lambda}(m)g_{\beta\mu} - \Omega^{\beta}_{\mu}(m)g_{\beta\lambda} + 2(P_{[\lambda\sigma]}m^{\rho\sigma}k_{\rho\mu} + P_{[\mu\sigma]}m^{\rho\sigma}k_{\lambda\rho}) + \Phi_{\lambda\mu}, \tag{40.3}$$

où $\Phi_{\lambda\mu}$ est indéterminé et ne contient que des dérivées premières des potentiels. Il faudrait maintenant trouver une fonction *invariante* des potentiels, contenant comme dérivées secondes exactement celles qui figurent au deuxième membre de (40.3) (compte tenu de la condition d'isothermie); nous n'avons pas réussi à résoudre ce problème; nous sommes donc obligés de faire des hypothèses de champ faible et de raisonner en première approximation. Supposons donc que $h_{\alpha\beta}$ admettent des développements limités à partir des potentiels minkowskiens suivant les puissances de $\frac{1}{c}$ les $k_{\alpha\beta}$ étant toujours petits devant $h_{\alpha\beta}$; nous posons alors

$$N'_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}(g^{\alpha\rho}D_\rho D_\alpha k_{\lambda\mu} - g^{\rho\alpha}\overline{D}_\rho\overline{D}_\alpha k_{\mu\lambda}) = -\underset{+-}{\Delta}k_{\lambda\mu}. \tag{40.4}$$

Dans les hypothèses de champ faible que nous venons de faire, $N'_{\lambda\mu}$ et $N_{\lambda\mu}$ ont même partie principale. Le laplacien généralisé $\underset{+-}{\Delta}$ défini par (40.3) conserve les caractères antisymétriques et antihermitiques (au sens du paragraphe 17); il commute avec le tenseur $\dfrac{\varepsilon^{\lambda\mu\alpha\beta}}{\sqrt{-g}}$ et il est invariant. Il vient, d'après (40.2),

$$K'^{\nu\delta} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^{\lambda\mu\nu\delta}}{\sqrt{-g}} N'_{\lambda\mu} = \underset{+-}{\Delta}\left[-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^{\lambda\mu\nu\delta}}{\sqrt{-g}} k_{\lambda\mu}\right]; \tag{40.5}$$

$K'^{\nu\delta}$ est une induction qui satisfait en première approximation et dans des hypothèses de champ faible à la condition 2° que nous nous sommes imposée.

41. Les relations qui lient le champ et l'induction; le tenseur de Maxwell. — De (40.1), on tire

$$m^{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta}}{\sqrt{-g}} H_{\alpha\beta};$$

d'autre part, les formules (32.6) montrent que (40.1) est équivalente à

$$H_{\alpha\beta} = \varepsilon\sqrt{-\frac{k}{g}}\, m_{\alpha\beta},$$

nous pourrons donc exprimer $k_{\lambda\mu}$ en fonction de $H_{\alpha\beta}$, d'après (31.4),

$$k_{\lambda\mu} = \frac{k}{g} m_{\lambda\mu} + \frac{h}{g} l_{\lambda\rho} l_{\mu\sigma} m^{\rho\sigma},$$

remarquons que le terme $\dfrac{k}{g} m_{\lambda\mu}$ est petit devant $\dfrac{h}{g} l_{\lambda\rho} l_{\mu\sigma} m^{\rho\sigma}$ et que dans les conditions d'approximation où nous sommes, nous pourrions ne pas tenir compte; mais il est plus commode d'écrire des égalités que des équivalences, et il est intéressant de montrer que $R'^{\nu\delta}$ s'exprime facilement et rigoureusement en fonction de $H_{\alpha\beta}$. Il vient

$$k_{\lambda\mu} = -\varepsilon\sqrt{-\frac{k}{g}}\, H_{\lambda\mu} + \frac{1}{2}\frac{h}{g} l_{\lambda\rho} l_{\mu\sigma} \frac{\varepsilon^{\rho\sigma\gamma\delta}}{\sqrt{-g}} H_{\gamma\delta}. \tag{41.1}$$

Appliquons à $l_{\alpha\beta}$ une formule qui fait passer du mineur d'un déterminant au mineur complémentaire de l'adjoint

$$\varepsilon^{\rho\sigma\gamma\delta} l_{\lambda\rho} l_{\mu\sigma} = l\, \varepsilon_{\rho\sigma\lambda\mu} l^{\rho\gamma} l^{\sigma\delta}$$

et reportons l'expression (41.1) de $k_{\lambda\mu}$ dans (40.5). Il vient

$$K'^{\alpha\beta} = \underset{+-}{\Delta} l^{\alpha\lambda} l^{\beta\mu} H_{\lambda\mu} + \underset{+-}{\Delta} \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^{\lambda\mu\alpha\beta}}{\sqrt{-g}} \varepsilon\sqrt{-\frac{K}{g}}\, H_{\lambda\mu} \tag{41.2}$$

le terme principal $\underset{+-}{\Delta} l^{\alpha\lambda} l^{\beta\mu} H_{\lambda\mu}$ est fort satisfaisant : comparées à (39.7), ces relations nous confirment dans la conjecture que le cône C_l joue le rôle d'enveloppe des surfaces d'ondes électromagnétiques en un point en première approximation. De même, à partir de (40.1) et (40.5), le calcul du tenseur de Maxwell symétrisé

$$4\pi c^2 \tau_{\lambda\mu} = \frac{1}{4}\gamma_{\lambda\mu}\,\mathrm{H}_{\alpha\beta}\,\mathrm{K}'^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(\gamma_{\lambda\rho}\,\mathrm{K}'^{\sigma\rho}\,\mathrm{H}_{\sigma\mu} + \gamma_{\mu\rho}\,\mathrm{K}'^{\sigma\rho}\,\mathrm{H}_{\sigma\lambda})$$

en fonction du tenseur fondamental, va se faire sans aucune difficulté et indépendamment du tenseur métrique $\gamma_{\lambda\mu}$ qui serait seulement choisi comme tel en raison des considérations du paragraphe 37,

$$\mathrm{H}_{\alpha\beta}\,\mathrm{K}'^{\alpha\beta} = -m^{\alpha\beta} \underset{+-}{\Delta} k_{\alpha\beta},$$

$$\mathrm{K}'^{\sigma\rho}\,\mathrm{H}_{\sigma\mu} = -m^{\alpha\beta} \underset{+-}{\Delta}\left[\frac{1}{4}\varepsilon_{\sigma\mu\alpha\beta}\,\varepsilon^{\sigma\rho\lambda\nu}\,k_{\lambda\nu}\right] = -\frac{1}{2}\delta^{\rho}_{\mu}\,m^{\alpha\beta} \underset{+-}{\Delta} k_{\alpha\beta} + m^{\rho\nu} \underset{+-}{\Delta} k_{\mu\sigma},$$

$$\gamma_{\lambda\rho}\,\mathrm{K}'^{\sigma\rho}\,\mathrm{H}_{\sigma\mu} = -\frac{1}{2}\gamma_{\lambda\mu}\,m^{\alpha\beta} \underset{+-}{\Delta} k_{\alpha\beta} + \gamma_{\lambda\rho}\,m^{\rho\sigma} \underset{+-}{\Delta} k_{\mu\sigma},$$

Nous obtenons

$$4\pi c^2 \tau_{\lambda\mu} = \frac{1}{4}\gamma_{\lambda\mu}\,m^{\alpha\beta} \underset{+-}{\Delta} k_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(\gamma_{\lambda\rho}\,m^{\rho\sigma} \underset{+-}{\Delta} k_{\mu\sigma} + \gamma_{\mu\rho}\,m^{\rho\sigma} \underset{+-}{\Delta} k_{\lambda\sigma}).$$

Nous verrons au chapitre VIII que ce tenseur figure en première approximation parmi les termes du tenseur d'impulsion-énergie qu'on extraira de (39.4).

CHAPITRE VIII.

Le tenseur d'impulsion-énergie.

Le principal intérêt des calculs que nous allons faire ici réside dans la formation naturelle d'équations de champs équivalentes à (9.7) grâce à la formule fondamentale (24.5); sans aucune hypothèse d'approximation nous allons mettre en évidence le tenseur électrodynamique trouvé par M. A. Tonnelat en 1955 [28]. Dans des hypothèses de champ faible, nous montrerons qu'il y a accord avec l'interprétation proposée au chapitre VII; toujours dans ces hypothèses de champ faible, nous exhiberons un tenseur d'impulsion-énergie qui, outre le tenseur électrodynamique, comprend des tenseurs indépendants de la métrique choisie. Nous ferons les calculs en coordonnées isothermes dont nous admettons la compatibilité avec les hypothèses de champ faible (la démonstration repose sur le théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème de Cauchy à partir d'une hypersurface non exceptionnelle).

42. Une autre forme de l'identité fondamentale. — Dans (24.5) introduisons le tenseur mixte

$$\mathrm{K}^{\lambda}_{\rho} = \mathrm{H}^{\lambda}_{\rho} - \frac{1}{2}\delta^{\lambda}_{\rho}\,\mathrm{H}^{\tau}_{\tau},$$

où H^λ_ρ est défini par (11.3). Pour cela, il suffira de retrancher aux deux membres de (24.5) la quantité $g_{\lambda\mu} H^\tau_\tau = g_{\lambda\mu} P_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$, ce qui fournira pour le premier membre

$$(2 H^\rho_\lambda - \delta^\rho_\lambda H^\tau_\tau) g_{\rho\mu} + (2 H^\rho_\mu - \delta^\rho_\mu H^\tau_\tau) g_{\lambda\rho} - (2 P_{\lambda\mu} - g_{\lambda\mu} P_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}),$$

c'est-à-dire

$$2 K^\rho_\lambda g_{\rho\mu} + 2 K^\rho_\mu g_{\lambda\rho} - (2 P_{\lambda\mu} - g_{\lambda\mu} P_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}).$$

Pour ce qui est du second membre, nous allons d'abord calculer $H^\tau_\tau \equiv P_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$ en contractant β et μ dans (23.6)

$$P_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = - \partial_\rho (\gamma_\alpha g^{\rho\alpha}) - \partial_\alpha F^\alpha - \gamma_\sigma \gamma_\alpha g^{\sigma\alpha} + L^\sigma_{\rho\beta} L^\beta_{\sigma\alpha} g^{\rho\alpha}$$

ou encore, comme $F^\alpha = \partial_\rho g^{\rho\alpha} + \gamma_\rho g^{\rho\alpha}$,

$$P_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = - l^{\alpha\beta} \partial_\beta \gamma_\alpha - \gamma_\alpha F^\alpha - \partial_\alpha F^\alpha + L^\sigma_{\rho\beta} L^\beta_{\sigma\alpha} g^{\rho\alpha},$$

$L^\gamma_{\alpha\beta}$ étant toujours considéré comme remplacé par la solution unique de (9.5), nous avons les identités, équivalentes à (24.5),

$$\begin{aligned}(42.1)\qquad & 2 K^\rho_\lambda g_{\rho\mu} + 2 K^\rho_\mu g_{\lambda\rho} - 2 (P_{\lambda\mu} - g_{\lambda\mu} P_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}) + \Omega^\beta_\lambda(m) g_{\beta\mu} + \overline{\Omega}^\beta_\mu(m) g_{\lambda\beta} \\ & \equiv - l^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} g_{\lambda\mu} + l^{\alpha\beta} g_{\lambda\mu} \partial_\alpha \gamma_\beta - g_{\lambda\beta} \partial_\mu F^\beta - g_{\beta\mu} \partial_\lambda F^\beta \\ & \quad + g_{\lambda\mu} \partial_\alpha F^\alpha - F^\alpha \partial_\alpha g_{\lambda\mu} + g_{\lambda\mu} \gamma_\alpha F^\alpha + 2 \Lambda'_{\lambda\mu} - g_{\lambda\mu} L^\sigma_{\rho\beta} L^\beta_{\sigma\alpha} g^{\rho\alpha},\end{aligned}$$

on peut grouper les deux premiers termes du second membre sous une forme plus élégante : en effet, un calcul élémentaire montre que

$$- \sqrt{-g}\, l^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} \frac{g_{\lambda\mu}}{\sqrt{-g}} = - l^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} g_{\lambda\mu} + l^{\alpha\beta} g_{\lambda\mu} \partial_\alpha \gamma_\beta + 2 l^{\alpha\beta} \gamma_\alpha \partial_\beta g_{\lambda\mu} - l^{\alpha\beta} g_{\lambda\mu} \gamma_\alpha \gamma_\beta.$$

Il vient donc enfin l'expression

$$\begin{aligned}(42.2)\qquad & 2 K^\rho_\lambda g_{\rho\mu} + 2 K^\rho_\mu g_{\lambda\rho} - 2 (P_{\lambda\mu} - g_{\lambda\mu} P_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}) + \Omega^\beta_\lambda(m) g_{\beta\mu} + \overline{\Omega}^\beta_\mu(m) g_{\lambda\beta} \\ & \equiv - \sqrt{-g}\, l^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} \frac{g_{\lambda\mu}}{\sqrt{-g}} - g_{\lambda\beta} \partial_\mu F^\beta - g_{\beta\mu} \partial_\lambda F^\beta + g_{\lambda\mu} \partial_\alpha F^\alpha \\ & \quad - F^\alpha \partial_\alpha g_{\lambda\rho} + g_{\lambda\mu} \gamma_\alpha F^\alpha + 2 \Lambda'_{\lambda\mu} - g_{\lambda\mu} L^\sigma_{\rho\beta} L^\beta_{\sigma\alpha} g^{\rho\alpha} \\ & \quad - 2 l^{\alpha\beta} \gamma_\alpha \partial_\beta g_{\lambda\mu} - l^{\alpha\beta} g_{\lambda\mu} \gamma_\alpha \gamma_\beta ;\end{aligned}$$

le second membre de (42.2) est un tenseur puisque le premier l'est; *soit* $2\Sigma_{\lambda\mu}$ *ce tenseur*.

43. Le nouveau système des équations de champ et le tenseur d'impulsion-énergie. — Nous allons utiliser les identités (42.2) pour remplacer le système,

$$(43.1)\qquad P_{(\alpha\beta)} = 0,$$

$$(43.2)\qquad P_{[\alpha\beta]} = \frac{2}{3} (\partial_\alpha \Sigma_\beta - \partial_\beta \Sigma_\alpha)$$

par un système équivalent. Comme

$$H^{\rho}_{\lambda} \equiv P_{(\lambda\sigma)} l^{\rho\sigma} + P_{[\lambda\sigma]} m^{\rho\sigma},$$

les identités (42.2) fournissent, comme conséquence de (43.1),

$$(43.3) \qquad P_{[\lambda\sigma]} m^{\rho\sigma} g_{\rho\mu} + P_{[\mu\sigma]} m^{\rho\sigma} g_{\lambda\rho} - P_{[\lambda\mu]} - \frac{g_{\lambda\mu}}{2} P_{[\alpha\beta]} m^{\alpha\beta} + \Omega^{\beta}_{\lambda}(m) g_{\beta\mu} = \Sigma_{\lambda\mu}.$$

Réciproquement, (43.3) jointe à (42.2) entraîne

$$(43.4) \qquad P_{(\lambda\sigma)} l^{\rho\sigma} g_{\rho\mu} + P_{(\mu\sigma)} l^{\rho\sigma} g_{\lambda\rho} - P_{(\lambda\mu)} - \frac{g_{\lambda\mu}}{2} P_{(\alpha\beta)} l^{\alpha\beta} = 0,$$

en multipliant les deux membres par $g^{\lambda\mu}$, on obtient

$$P_{(\alpha\beta)} l^{\alpha\beta} = 0$$

et, par conséquent, (43.4) devient

$$P_{(\lambda\sigma)} l^{\rho\sigma} g_{\rho\mu} + P_{(\mu\sigma)} l^{\rho\sigma} g_{\lambda\rho} - P_{(\lambda\mu)} = 0,$$

multiplions maintenant par $g^{\lambda\alpha} g^{\beta\mu}$; il vient après calcul

$$P_{(\lambda\mu}[l^{\alpha\lambda} l^{\beta\mu} + m^{\alpha\lambda} m^{\beta\mu}] = 0.$$

Soit $A^{(\alpha\beta)(\lambda\mu)}$ l'élément de matrice à dix lignes et dix colonnes qui figure entre crochets; dans les hypothèses A, et ceci suffira largement pour l'utilisation que nous ferons de (43.3), il est immédiat de constater que $\text{dét}(A^{(\alpha\beta)(\lambda\mu)}) \neq 0$ et donc $P_{(\lambda\mu)} = 0$. Nous avons donc remplacé le système (43.1), (43.2) par (43.2), (43.3). Soit $a_{\lambda\mu}$ un tenseur symétrique quelconque et $S_{\lambda\mu}(a)$ le tenseur d'Einstein correspondant; directement, ou d'après (42.2) où l'on supposerait g_{α} symétrique,

$$(43.5) \qquad \begin{aligned} 2S_{\lambda\mu}(a) \equiv & -\sqrt{-a}\, a^{\alpha\beta}\, \partial_{\alpha\beta} \frac{a_{\lambda\mu}}{\sqrt{-a}} - a_{\lambda\beta}\, \partial_{\mu} f^{\beta} - a_{\mu\beta}\, \partial_{\lambda} f^{\beta} + a_{\lambda\mu}\, \partial_{\alpha} f^{\alpha} \\ & - f^{\alpha}\, \partial_{\alpha} a_{\lambda\mu} + a_{\lambda\mu} \left\{ {\sigma \atop \sigma\alpha} \right\} f^{\alpha} + 2L_{\lambda\mu} - a_{\lambda\mu} \left\{ {\sigma \atop \rho\beta} \right\} \left\{ {\beta \atop \sigma\alpha} \right\} a^{\rho\alpha} \\ & - 2a^{\alpha\beta} \left\{ {\sigma \atop \alpha\sigma} \right\} \partial_{\beta} a_{\lambda\mu} - a^{\alpha\beta} a_{\lambda\mu} \left\{ {\sigma \atop \alpha\sigma} \right\} \left\{ {\rho \atop \beta\rho} \right\}. \end{aligned}$$

Nous poserons

$$(43.6) \qquad \Sigma_{\lambda\mu} = S_{\lambda\mu}(a) - \Phi_{\lambda\mu}(a).$$

Décomposons alors (43.3) en sa partie symétrique et sa partie antisymétrique et joignons-y les équations (43.2). Nous avons le système des équations du champ

$$(43.7) \qquad \begin{aligned} S_{\lambda\mu}(a) = & P_{[\lambda\sigma]} m^{\rho\sigma} h_{\rho\mu} + P_{[\mu\sigma]} m^{\rho\sigma} h_{\lambda\rho} - \frac{h_{\lambda\mu}}{2} P_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta} \\ & + \frac{1}{2} (\Omega^{\beta}_{\lambda} g_{\beta\mu} + \Omega^{\beta}_{\mu} g_{\beta\lambda}) + \Phi_{(\lambda\mu)}(a), \end{aligned}$$

$$(43.8)\qquad \mathrm{P}_{[\lambda\mu]} - \mathrm{P}_{[\lambda\sigma]} m^{\rho\sigma} k_{\rho\mu} - \mathrm{P}_{[\mu\sigma]} m^{\rho\sigma} k_{\lambda\rho} + \frac{k_{\lambda\mu}}{2} \mathrm{P}_{\alpha\beta} m^{\alpha\beta}$$
$$- \frac{1}{2}\left(\Omega^{\beta}_{\lambda} g_{\beta\mu} - \Omega^{\beta}_{\mu} g_{\beta\lambda}\right) - \Phi_{[\lambda\mu]}(a) = 0,$$
$$(43.9)\qquad \mathrm{P}_{\alpha\beta} = \frac{2}{3}(\partial_\alpha \Sigma_\beta - \partial_\beta \Sigma_\alpha).$$

Nous avons mis en évidence dans (43.7) un tenseur d'impulsion-énergie dans lequel seul $\Phi_{(\lambda\mu)}(a)$ dépend *a priori* du tenseur métrique choisi. Posons

$$(43.10)\qquad \mathfrak{T}_{\lambda\mu} = \mathrm{P}_{[\lambda\sigma]} m^{\rho\sigma} h_{\rho\mu} + \mathrm{P}_{[\mu\sigma]} m^{\rho\sigma} h_{\lambda\rho} - \frac{h_{\lambda\mu}}{2} \mathrm{P}_{\alpha\beta} m^{\alpha\beta},$$

$\mathfrak{T}_{\lambda\mu}$ sera nommé tenseur électrodynamique; ce nom n'est justifié pour l'instant que par sa forme qui rappelle celle du tenseur de Maxwell de la théorie provisoire (38.5).

44. Hypothèses de champ faible. — Afin d'expliciter les équations précédentes, nous allons admettre pour les composantes de $g_{\alpha\beta}$ des développements limités suivant les puissances de $\frac{1}{c^2}$ dont les premiers termes sont les potentiels de Minkowski en ce qui concerne les $h_{\alpha\beta}$ et restent à choisir pour $k_{\alpha\beta}$ (en relativité générale on emploie le mot « quasi-galiléen » pour désigner un champ faible qui admet en plus un comportement asymptotique euclidien dont il ne peut pas être question ici).

1° Choix des développements limités. — Dans un schéma matière champ électromagnétique, le tenseur d'impulsion-énergie utilisé en relativité générale s'écrit, comme nous l'avons noté au paragraphe 38,

$$(44.1)\qquad \Theta_{\alpha\beta} = \mathrm{T}_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta} = u_\alpha u_\beta - \frac{\mu_{\alpha\beta}}{c^2}$$
$$+ \frac{1}{4\pi c^2}\left[\frac{1}{4} a_{\alpha\beta} \mathrm{H}_{\lambda\mu} \mathrm{K}^{\lambda\mu} - \frac{1}{2}\left(\mathrm{K}_{\lambda\alpha} \mathrm{H}^{\lambda}_{\beta} + \mathrm{K}_{\lambda\beta} \mathrm{H}^{\lambda}_{\alpha}\right)\right],$$

le ds^2 de Minkowski étant $c^2(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$, u_0 a pour partie principale c et les u_i sont en $\frac{1}{c}$. Des raisons de cohérence des ordres de grandeur de chacun des deux membres des équations du champ (38.6) conduisent à prendre $\chi = o\left(\frac{1}{c^2}\right)$ [14]. Donc pour le second membre nous avons d'après (44.1),

$$(44.2)\qquad \chi\Theta_{00} = o(1), \qquad \chi\Theta_{0i} = o\left(\frac{1}{c^2}\right), \qquad \chi\Theta_{ij} = o\left(\frac{1}{c^4}\right).$$

Dans un schéma électromagnétique pur, ou du moins sans densité de matière

(14) F. Hennequin, [29] *Thèse*, Paris, 1956, p. 38.

$(\rho = 0)$

$$\chi\Theta_{00} = 0\left(\frac{1}{c^2}\right), \qquad \chi\Theta_{0i} = 0\left(\frac{1}{c^4}\right), \qquad \chi\Theta_{ij} = 0\left(\frac{1}{c^4}\right). \tag{44.3}$$

Dans le cas (44.2), chaque fois qu'on remplace un indice zéro par un indice i, on passe à l'ordre supérieur, tandis que dans le cas (44.3), $\chi\Theta_{00}$ est seul d'ordre inférieur aux autres composantes. On constate facilement que le tenseur d'impulsion-énergie écrit au second membre de (43.7) se comporte comme (44.3) quel que soit l'ordre choisi pour $k_{\lambda\mu}$; pour avoir exactement $0\left(\frac{1}{c^2}\right)$, $0\left(\frac{1}{c^4}\right)$, $0\left(\frac{1}{c^4}\right)$ au second membre de (43.7), nous prendrons

$$k_{\lambda\mu} = \frac{\beta_{\lambda\mu}}{c^2}.$$

En théorie du champ unifié d'Eintein-Schrödinger, nous serions donc bien dans un cas « unitaire extérieur », extension du schéma électromagnétique pur de la relativité générale. Nous ferons désormais l'hypothèse que le tenseur $a_{\alpha\beta}$ choisi a même partie principale que $h_{\alpha\beta}$; les parties principales des $h_{\alpha\beta}$ sont celles des potentiels de Minkowski; l'ordre des termes suivants du développement nous est imposé par la raison que $S_{\lambda\mu}(a)$ doit avoir même ordre que le second membre dans (43.7) : donc ce sera $\frac{1}{c^2}$ pour les indices 00, $\frac{1}{c^4}$ pour les indices $0i$ et $\frac{1}{c^4}$ pour les indices ij. Il vient

$$h_{00} = c^2 - \frac{2V_{00}}{c^2} + 0\left(\frac{1}{c^4}\right), \qquad h_{0i} = \frac{V_{0i}}{c^4} + 0\left(\frac{1}{c^6}\right), \qquad h_{ij} = -\delta_{ij} + \frac{V_{ij}}{c^4} + 0\left(\frac{1}{c^6}\right),$$

on en déduit

$$h = -c^2 + \frac{2V_{00}}{c^2} + \frac{V_{pp}}{c^2} + 0\left(\frac{1}{c^6}\right), \qquad \text{avec} \quad V_{pp} = V_{11} + V_{22} + V_{33}$$

et

$$h^{00} = \frac{1}{c^2} + \frac{2V_{00}}{c^6} + 0\left(\frac{1}{c^{10}}\right), \qquad h^{0i} = 0\left(\frac{1}{c^6}\right), \qquad h^{ij} = -\delta_{ij} - \frac{V_{ij}}{c^4} + 0\left(\frac{1}{c^8}\right).$$

D'autre part,

$$k_{0i} = \frac{\beta_{0i}}{c^2} + 0\left(\frac{1}{c^6}\right), \qquad m^{0i} = -\frac{\beta_{0i}}{c^4} + 0\left(\frac{1}{c^8}\right),$$
$$k_{ij} = \frac{\beta_{ij}}{c^2} + 0\left(\frac{1}{c^6}\right), \qquad m^{ij} = \frac{\beta_{ij}}{c^2} + 0\left(\frac{1}{c^6}\right)$$

et

$$g = -c^2 + \frac{2V_{00}}{c^2} + \frac{V_{pp}}{c^2} - \frac{\beta_{kl}\beta_{kl}}{2c^2} + 0\left(\frac{1}{c^6}\right).$$

Pour abréger le langage, nous nommerons cet ensemble de conditions imposées au tenseur fondamental : hypothèse B.

2° *Conséquences.* — *a. Ordre de grandeur des coefficients de la connexion.* — Nous avons vu au paragraphe 27 que

$$L^{\rho}_{\lambda\mu} = \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\}_h + S^{\rho}_{\lambda\mu} + U^{\rho}_{\lambda\mu},$$

$S^{\rho}_{\lambda\mu}$ et $U^{\rho}_{\lambda\mu}$ sont définis par le système (27.6). Les développements B entraînent que

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ 00 \end{matrix} \right\}_h = o\left(\frac{1}{c^2}\right), \qquad \left\{ \begin{matrix} 0 \\ ij \end{matrix} \right\}_h = o\left(\frac{1}{c^6}\right), \qquad \text{tous les autres} = o\left(\frac{1}{c^4}\right),$$

$$2S^{0}_{\lambda\mu} = \frac{1}{c^2}K_{\lambda\mu 0} + o\left(\frac{1}{c^8}\right) = o\left(\frac{1}{c^4}\right),$$

$$2S^{i}_{\lambda\mu} = -K_{\lambda\mu i} + o\left(\frac{1}{c^6}\right) = o\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

On rappelle que

$$K_{\lambda\mu\nu} = \nabla_\lambda k_{\nu\mu} + \nabla_\mu k_{\lambda\nu} + \nabla_\nu k_{\lambda\mu},$$

$U^{\rho}_{\lambda\mu}$ est d'ordre $\frac{1}{c^4}$ au moins,

$$\gamma_\alpha = L^{\sigma}_{\sigma\alpha} = o\left(\frac{1}{c^4}\right), \qquad \text{car} \quad S^{\sigma}_{\sigma\alpha} = 0.$$

b. Le terme en Ω *dans* (43.7) *et* (43.8) : Reportons-nous à (24.4); les deux derniers termes du deuxième membre sont au moins d'ordre $\left(\frac{1}{c^6}\right)$. Donc, en partie principale,

$$2m^{\alpha\rho}\,\partial\rho\left(L^{\beta}_{\alpha\mu}g_{\lambda\beta}\right) = 2\Omega^{\beta}_{\lambda}(m)g_{\beta\mu},$$

Ceci prouve que dans l'expression de $\Phi_{(\lambda\mu)}(a)$ dans (43.7) on peut remplacer $\Lambda'_{\lambda\mu}$ par $\Lambda_{\lambda\mu}$ [défini par (23.11)] sans rien changer à la partie principale du tenseur d'impulsion-énergie; d'autre part, l'examen de $L^{\beta}_{\alpha\mu}g_{\lambda\beta}$ montre que sa partie symétrique est d'ordre $\frac{1}{c^2}$ et sa partie antisymétrique d'ordre $\frac{1}{c^4}$: donc dans (43.8) le terme en Ω disparaît de la partie principale où ne subsiste que $P_{\lambda\mu}$ et $\Phi_{[\lambda\mu]}(a) = -\Sigma_{[\lambda\mu]}$.

c. La forme simple de (43.8) : Un examen rapide de $\Sigma_{\lambda\mu}$ défini par le deuxième membre de (42.2) montre que, dans l'hypothèse B,

$$-\Sigma_{[\lambda\mu]} = \frac{1}{2}l^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta}k_{\lambda\mu} + o\left(\frac{1}{c^6}\right).$$

Nous désignerons par le symbole Δ l'opposé du dalembertien ordinaire formé à partir du tenseur $l^{\alpha\beta}$, soit $-l^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta}$. Alors

$$\Delta k_{\lambda\mu} = -l^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta}k_{\lambda\mu},$$

(43.8) s'écrit donc

$$P_{[\lambda\mu]} = -\frac{1}{2}\Delta k_{\lambda\mu} + o\left(\frac{1}{c^6}\right). \tag{44.4}$$

Signalons une conséquence immédiate de (43.9) sur les $\beta_{\lambda\mu}$; les (43.9) entraînent

$$\partial_\lambda P_{[\mu\nu]} + \partial_\mu P_{[\nu\lambda]} + \partial_\nu P_{[\lambda\mu]} = 0$$

et, à cause de (44.4),

$$(44.5) \qquad \beta_{\lambda\mu\nu} = 0, \qquad \text{avec} \quad \beta_{\lambda\mu\nu} = \partial_\lambda \beta_{\mu\nu} + \partial_\mu \beta_{\nu\lambda} + \partial_\nu \beta_{\lambda\mu}.$$

Si l'on se donne arbitrairement le vecteur covariant Σ_α par son développement $\left(\text{dont le premier terme doit être en } \frac{1}{c^2}\right)$ (43.9) jointes à (44.4) définissent $\beta_{\lambda\mu}$ comme solution d'une équation $\Delta f = g$, où Δ a pour partie principale le laplacien elliptique à trois dimensions; (43.7) fournissent alors V_{00}, V_{0i} et V_{ij}; ces valeurs, reportées dans (43.8), donnent le terme suivant du développement de $k_{\lambda\mu}$ qui sera d'ordre $\frac{1}{c^6}$ et ainsi de suite par approximations successives. Ce n'est pas dans ce but que nous poursuivrons les calculs; nous essaierons plutôt d'interpréter les différents termes du tenseur d'impulsion-énergie dont nous allons mettre en évidence la partie principale suivant les développements indiqués.

45. Les équations approchées en coordonnées isothermes. — Désormais, les coefficients $V_{\lambda\mu}$ et $\beta_{\lambda\mu}$ des développements B sont supposés liés par les quatre conditions

$$(45.1) \qquad F^\alpha \equiv - g^{\rho\sigma} L^\alpha_{\rho\sigma} = 0,$$

nous allons donner une expression simple [15] de F^α en fonction des tenseurs $l^{\beta\alpha}$, $h_{\alpha\beta}$, $m^{\alpha\beta}$, $k_{\alpha\beta}$. Reprenons le système (27.6),

$$(45.2) \qquad U^\sigma_{\lambda\mu} = h^{\sigma\rho}(S^\alpha_{\rho\lambda} k_{\mu\alpha} + S^\alpha_{\rho\mu} k_{\lambda\alpha}),$$

$$(45.3) \qquad 2 S^\alpha_{\lambda\mu} h_{\alpha\rho} = K_{\lambda\mu\alpha} + 2 U^\alpha_{\rho\mu} k_{\alpha\lambda},$$

remplaçons dans (45.1) $L^\alpha_{\rho\sigma}$ par $\left\{ {\alpha \atop \rho\sigma} \right\}_h + S^\alpha_{\rho\sigma} + U^\alpha_{\rho\sigma}$. Il vient

$$F^\alpha h_{\alpha\beta} \equiv l^{\rho\sigma}[\rho\sigma, \beta]_h + l^{\rho\sigma}(S^\alpha_{\beta\rho} k_{\sigma\alpha} + S^\alpha_{\beta\sigma} k_{\rho\alpha}) + m^{\rho\sigma} S^\alpha_{\sigma\sigma} h_{\alpha\beta}.$$

or, d'après (31.6),

$$l^{\rho\sigma} k_{\sigma\alpha} = m^{\rho\sigma} h_{\sigma\alpha}.$$

Donc

$$F^\alpha h_{\alpha\beta} \equiv l^{\rho\sigma}[\rho\sigma, \beta]_h + m^{\rho\sigma}(S^\alpha_{\beta\rho} h_{\sigma\alpha} + S^\alpha_{\sigma\beta} h_{\rho\alpha} + S^\alpha_{\rho\sigma} h_{\alpha\beta}).$$

Permutons circulairement (45.3) pour avoir une autre expression de cette dernière parenthèse

$$2 S^\alpha_{\lambda\mu} h_{\alpha\rho} + 2 S^\alpha_{\mu\rho} h_{\alpha\lambda} + 2 S^\alpha_{\rho\lambda} h_{\alpha\mu} = K_{\lambda\mu\rho} + K_{\mu\rho\lambda} + K_{\rho\lambda\mu} = -(\partial_\lambda k_{\mu\rho} + \partial_\mu k_{\rho\lambda} + \partial_\rho k_{\lambda\mu}),$$

[15] M. A. Tonnelat [29], p. 141.

nous noterons $\varphi_{\lambda\mu\rho}$ cette permutation circulaire des $\partial_\lambda k_{\mu\rho}$. Alors,

$$F^\alpha h_{\alpha\beta} \equiv l^{\rho\sigma}[\rho\sigma, \beta]_h - \frac{1}{2} m^{\rho\sigma}\varphi_{\beta\rho\sigma}.$$

Nous avons vu que $\Delta\beta_{\lambda\mu\nu} = 0$. En munissant V_4 d'une structure de variété riemannienne, on pourrait faire des hypothèses sur le comportement à l'infini des $k_{\lambda\mu}$ et l'on déduirait que $\beta_{\lambda\mu\nu} = 0$; la condition d'isothermie au sens unitaire se réduirait en première approximation à

$$h^{\rho\sigma}[\rho\sigma, \beta]_h = 0,$$

c'est-à-dire à la condition d'isothermie au sens de $h_{\alpha\beta}$.

Rappelons que $F^\alpha = 0$ est équivalent à $f^\alpha_a = 0$ rigoureusement, si

$$a_{\lambda\mu} = \sqrt{\frac{h}{g}}\, l_{\lambda\mu}.$$

Nous nous proposons d'écrire les équations (43.7) en première approximation, en coordonnées isothermes; nous prendrons $a_{\lambda\mu} = \sqrt{\frac{h}{g}}\, l_{\lambda\mu}$ de manière à expliciter $\Phi_{(\lambda\mu)}(a)$ avec le maximum de simplicité. D'après (43.6),

$$\Phi_{(\lambda\mu)}(a) = S_{\lambda\mu}(a) - \Sigma_{(\lambda\mu)};$$

1° D'après (43.5) et dans le système de coordonnées où nous nous sommes placés,

$$2S_{\lambda\mu}(a) = -\sqrt{-a}\, a^{\alpha\beta}\, \partial_{\alpha\beta} \frac{a_{\lambda\mu}}{\sqrt{-a}} + o\left(\frac{1}{c^6}\right);$$

2° D'après (42.2), dans le système de coordonnées où nous nous sommes placés, et rigoureusement

$$2\Sigma_{\lambda\mu} = -\sqrt{-g}\, l^{\alpha\beta}\, \partial_{\alpha\beta}\frac{g_{\lambda\mu}}{\sqrt{-g}} - 2l^{\alpha\beta}\gamma_\alpha\, \partial_\beta g_{\lambda\mu} - l^{\alpha\beta} g_{\lambda\mu}\gamma_\alpha\gamma_\beta - 2\Lambda'_{\lambda\mu} - g_{\lambda\mu} L^\sigma_{\rho\beta} L^\beta_{\sigma\alpha} g^{\rho\alpha},$$

prenons la partie symétrique et utilisons le remarques du paragraphe 44 au 2°

$$\begin{aligned}2\Sigma_{(\lambda\mu)} = {} & -\sqrt{-g}\, l^{\alpha\beta}\, \partial_{\alpha\beta}\frac{h_{\lambda\mu}}{\sqrt{-g}} + l^{\alpha\rho}(S^\sigma_{\mu\rho} S^\beta_{\alpha\sigma} h_{\lambda\beta} + S^\sigma_{\rho\lambda} S^\beta_{\sigma\alpha} h_{\beta\mu} - h_{\lambda\mu} S^\sigma_{\rho\beta} S^\beta_{\sigma\alpha}) \\ & + l^{\alpha\rho}(S^\beta_{\alpha\mu}\, \partial_\rho k_{\lambda\beta} + S^\beta_{\lambda\alpha}\, \partial_\rho k_{\beta\mu}) + \left\{\begin{array}{l} o\left(\frac{1}{c^6}\right), \\ o\left(\frac{1}{c^8}\right), \end{array}\right.\end{aligned}$$

les termes complémentaires sont d'ordre $\frac{1}{c^6}$ pour Σ_{00} et $\frac{1}{c^8}$ pour $\Sigma_{(0i)}$ et $\Sigma_{(ij)}$; nous écrirons simplement $+ o\left(\frac{1}{c^6}\right)$ dans la suite. Il ne nous reste plus qu'à calculer la différence

$$-\sqrt{-a}\,a^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta}\frac{a_{\lambda\mu}}{\sqrt{-a}}+\sqrt{-g}\,l^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta}\frac{h_{\lambda\mu}}{\sqrt{-g}}.$$

Pour faire ce calcul, nous conviendrons que le signe $=$ représente l'égalité des parties principales des deux membres suivant les développements B

$$h=g+\frac{\beta^2}{c^2},\qquad \text{où}\quad \beta^2=\frac{\beta_{kl}\beta_{kl}}{2}.$$

Donc

$$\sqrt{\frac{h}{g}}=1-\frac{\beta^2}{2c^4},\qquad \sqrt{-g}=\sqrt{-h}\left(1+\frac{\beta^2}{2c^4}\right);$$

reportons-nous à (31.1'),

$$l_{\lambda\mu}=h_{\lambda\mu}+k_{\lambda\rho}k_{\mu\sigma}h^{\rho\sigma},$$

$$a_{\lambda\mu}=\sqrt{\frac{h}{g}}\,l_{\lambda\mu}=\left(1-\frac{\beta^2}{2c^4}\right)(h_{\lambda\mu}+k_{\lambda\rho}k_{\mu\sigma}h^{\rho\sigma})=h_{\lambda\mu}-h_{\lambda\mu}\frac{\beta^2}{2c^4}-\frac{\beta_{\lambda l}\beta_{\mu l}}{c^4}.$$

Comme $a=h$, la différence proposée devient

$$(a_{\lambda\mu}-h_{\lambda\mu})+h_{\lambda\mu}\,\Delta\frac{\sqrt{-g}-\sqrt{-h}}{\sqrt{-h}}=\Delta\left(-h_{\lambda\mu}\frac{\beta^2}{2c^4}-\frac{\beta_{\lambda l}\beta_{\mu l}}{c^4}\right)$$
$$+\Delta\left(h_{\lambda\mu}\frac{\beta^2}{2c^4}\right)=\Delta(k_{\lambda\rho}k_{\mu\sigma}h^{\rho\sigma}),$$

D'où les équations approchées cherchées,

$$S_{\lambda\mu}(a)=\mathfrak{T}_{\lambda\mu}+\frac{1}{2}\left[\Omega^{\beta}_{\lambda}(m)g_{\beta\mu}+\Omega^{\beta}_{\mu}(m)g_{\beta\lambda}\right]+\frac{1}{2}l^{\alpha\rho}S^{\beta}_{\alpha\sigma}(S^{\sigma}_{\rho\mu}h_{\lambda\beta}+S^{\sigma}_{\rho\lambda}h_{\beta\mu}-h_{\lambda\mu}S^{\sigma}_{\rho\beta})$$
$$+l^{\alpha\rho}(S^{\beta}_{\alpha\mu}\,\partial_{\rho}k_{\beta\lambda}+S^{\beta}_{\alpha\lambda}\,\partial_{\rho}k_{\beta\mu})+\frac{1}{2}\Delta(k_{\lambda\rho}k_{\mu\sigma}h^{\rho\sigma})+o\left(\frac{1}{c^6}\right);$$

en ce qui concerne les termes en Ω on trouve que

$$\frac{1}{2}\left[\Omega^{\beta}_{\lambda}(m)g_{\beta\mu}+\Omega^{\beta}_{\mu}(m)g_{\beta\lambda}\right]=\frac{1}{2}m^{\alpha\rho}(\partial_{\lambda\rho}k_{\mu\alpha}+\partial_{\mu\rho}k_{\lambda\alpha})+o\left(\frac{1}{c^6}\right),$$

mais cette nouvelle expression ne paraît pas présenter d'intérêt.

A part le dernier, tous les termes du tenseur d'impulsion-énergie mis en évidence sont indépendants du choix du tenseur métrique. Puisque nous avons des raisons de donner la préférence à $\gamma_{\alpha\beta}$ du point de vue interprétation physique, nous allons écrire l'expression de $S_{\lambda\mu}(\bar{\gamma})$ où $\bar{\gamma}_{\alpha\beta}$ est le produit de $\gamma_{\alpha\beta}$ par un scalaire. Soit

$$\bar{\gamma}^{\alpha\beta}=\frac{1}{F^2}\sqrt{\frac{g}{h}}\left(\frac{2h}{g}h^{\alpha\beta}-l^{\alpha\beta}\right)=\frac{1}{F^2}\sqrt{\frac{g}{h}}\,\gamma^{\alpha\beta},$$

$$\sqrt{-\bar{\gamma}}=F^2\sqrt{-h},\qquad \bar{\gamma}^{\alpha\beta}=\sqrt{\frac{h}{g}}(2h_{\alpha\beta}-l_{\alpha\beta}),$$

le facteur scalaire a été choisi de manière que

$$F^2 f^{\alpha}_{(\gamma)} \equiv \frac{h}{g} f^{\alpha}_{(b)} - f^{\alpha}_{(a)}, \qquad \text{avec} \quad b_{\lambda\mu} = \sqrt{\frac{h}{g}}\, h_{\lambda\mu},$$

les coordonnées sont isothermes relativement à $a_{\lambda\mu} = \sqrt{\frac{h}{g}}\, l_{\lambda\mu}$, Elles le sont aussi en première approximation relativement à $h_{\lambda\mu}$. Il vient

$$f^{\alpha}_{(\bar\gamma)} = -\frac{1}{2}\partial^{\alpha}\frac{h-g}{g},$$

Ceci avec la même convention que précédemment concernant le signe $=$. Alors

$$\begin{aligned}2S_{\lambda\mu}(\bar\gamma) &= -\sqrt{-\bar\gamma}\,\bar\gamma^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta}\frac{\bar\gamma_{\lambda\mu}}{\sqrt{-\bar\gamma}} - \bar\gamma_{\lambda\beta}\,\partial_{\mu} f^{\beta}_{(\bar\gamma)} - \bar\gamma_{\mu\beta}\,\partial_{\lambda} f^{\beta}_{(\bar\gamma)} + \bar\gamma_{\lambda\mu}\,\partial_{\alpha} f^{\alpha}_{(\bar\gamma)} \\ &= -\sqrt{-\bar\gamma}\,\bar\gamma^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta}\frac{\bar\gamma_{\lambda\mu}}{\sqrt{-\bar\gamma}} + \partial_{\lambda\mu}\frac{h-g}{g} + \frac{1}{2}h_{\lambda\mu}\Delta\frac{h-g}{g},\end{aligned}$$

le calcul de la différence

$$-\sqrt{\bar\gamma}\,\bar\gamma^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta}\frac{\bar\gamma_{\lambda\mu}}{\sqrt{-\gamma}} + \sqrt{-a}\,a^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta}\frac{a_{\lambda\mu}}{\sqrt{-a}}$$

s'effectue sans difficulté et l'on obtient

$$\begin{aligned}S_{\lambda\mu}(\bar\gamma) &= P_{[\lambda\sigma]}m^{\rho\sigma}h_{\rho\mu} + P_{[\mu\sigma]}m^{\rho\sigma}h_{\lambda\rho} - \frac{h_{\lambda\mu}}{2}P_{[\alpha\beta]}m^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\left[\Omega^{\beta}_{\lambda}(m)g_{\beta\mu} + \Omega^{\beta}_{\mu}(m)g_{\beta\lambda}\right] \\ &+ \frac{1}{2}l^{\alpha\rho}S^{\beta}_{\alpha\sigma}\left(S^{\sigma}_{\rho\mu}h_{\lambda\beta} + S^{\sigma}_{\rho\lambda}h_{\beta\mu} - h_{\lambda\mu}S^{\sigma}_{\rho\beta}\right) + l^{\alpha\rho}\left(S^{\beta}_{\alpha\mu}\,\partial_{\rho}k_{\beta\lambda} + S^{\beta}_{\alpha\lambda}\,\partial_{\rho}k_{\beta\mu}\right) \\ &- \Delta\left(k_{\lambda\rho}k_{\mu\sigma}h^{\rho\sigma} + \frac{3}{4}\frac{g-h}{g}h_{\lambda\mu}\right) + \frac{1}{2}\partial_{\lambda\mu}\frac{h-g}{g} + o\left(\frac{1}{c^6}\right).\end{aligned}$$

Le tenseur électrodynamique sera étudié au paragraphe suivant; le tenseur

$$l^{\alpha\rho}S^{\beta}_{\alpha\sigma}\left(S^{\sigma}_{\rho\mu}h_{\lambda\beta} + S^{\sigma}_{\rho\lambda}h_{\beta\mu} - h_{\lambda\mu}S^{\sigma}_{\rho\beta}\right)$$

se comporte comme $\mathcal{C}_{\lambda\mu}$ du point de vue des ordres de grandeur respectifs pour les indices oo, oi et ij. Puisque, en première approximation, dans les hypothèses B, et compte tenu de (44.5),

$$S^{\beta}_{\alpha\sigma}h_{\lambda\beta} = \frac{1}{2}K_{\alpha\sigma\lambda} = \partial_{\lambda}k_{\alpha\sigma},$$

nous pouvons encore l'écrire

$$(45.4) \qquad \frac{1}{2}l^{\alpha\rho}l^{\sigma\nu}\left(\partial_{\lambda}k_{\alpha\sigma}\,\partial_{\nu}k_{\rho\mu} + \partial_{\mu}k_{\alpha\sigma}\,\partial_{\nu}k_{\rho\lambda} - h^{\beta\gamma}h_{\lambda\mu}\,\partial_{\nu}k_{\rho\beta}\,\partial_{\gamma}k_{\alpha\sigma}\right).$$

Au contraire, les tenseurs

$$\frac{1}{2}\left[\Omega^{\beta}_{\lambda}(m)g_{\beta\mu} + \Omega^{\beta}_{\mu}(m)g_{\beta\lambda}\right] \quad \text{et} \quad S^{\beta}_{\alpha\mu}\,\partial_{\rho}k_{\beta\lambda} + S^{\beta}_{\alpha\lambda}\,\partial_{\rho}k_{\beta\mu}$$

se comportent comme le tenseur des pressions partielles $\frac{\mu_{\alpha\beta}}{c^2}$.

46. Le tenseur électrodynamique comparé au tenseur de Maxwell de la théorie « naïve ». — Nous avons proposé au paragraphe 41 une interprétation comportant un tenseur champ et un tenseur induction non proportionnels $H_{\alpha\beta}$ et $K'^{\alpha\beta}$

$$H_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \sqrt{-g}\, m^{\gamma\delta}, \tag{46.1}$$

$$K'^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon^{\lambda\mu\alpha\beta}}{\sqrt{-g}} \underset{+-}{\Delta} k_{\lambda\mu} \tag{46.2}$$

satisfaisant du fait des équations du champ unifié à deux groupes d'équations de Maxwell; le calcul du tenseur de Maxwell symétrisé à partir des expressions (46.1) et (46.2) a été fait au paragraphe 41; il conduit à

$$4\pi c^2 \tau_{\lambda\mu} = \frac{1}{4} \gamma_{\lambda\mu} m^{\alpha\beta} \underset{+-}{\Delta} k_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} (\gamma_{\lambda\rho} m^{\rho\sigma} \underset{+-}{\Delta} k_{\mu\sigma} + \gamma_{\mu\rho} m^{\rho\sigma} \underset{+-}{\Delta} k_{\lambda\sigma}).$$

Rappelons que

$$\underset{+-}{\Delta} = -\frac{1}{2} (g^{\alpha\rho} D_\rho D_\alpha - g^{\rho\alpha} \overline{D}_\rho \overline{D}_\alpha),$$

dans les hypothèses B, la partie principale de $\underset{+-}{\Delta} k_{\lambda\mu}$ n'est autre que

$$\Delta k_{\lambda\mu} = -l^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} k_{\lambda\mu},$$

et compte tenu de (44.4),

$$4\pi c^2 \tau_{\lambda\mu} = \mathfrak{T}_{\lambda\mu} + o\left(\frac{1}{c^6}\right);$$

faisons encore une remarque sur le vecteur courant défini par

$$D_\nu K'^{\nu\delta} = J'^{\delta}.$$

D'après (46.2), la partie principale de J'^{δ} serait

$$-\frac{1}{2} \frac{\varepsilon^{\lambda\mu\nu\delta}}{\sqrt{-g}} \Delta \beta_{\lambda\mu\nu} = 0.$$

Dans les hypothèses que nous avons faites, le vecteur courant de la théorie « naïve » serait un infiniment petit d'ordre supérieur au champ et à l'induction.

BIBLIOGRAPHIE.

I. — *Espaces fibrés et connexions infinitésimales.*

[1] Allamigeon, *C. R. Acad. Sc.*, t. 246, 1958, p. 220.
[2] Cartan, *Séminaire H. Cartan*, t. 2, 1949-1950.
[3] Cattaneo-Gasparini, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, t. 10, 1956, p. 119.
[4] Cattaneo-Gasparini, *Rend. Accad. Lincei*, t. 22, 1957, p. 146.

[5] EHRESMANN, *Colloque de Topologie*, Bruxelles, 1950, p. 29-55.
[6] LICHNEROWICZ, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Cremonese, Rome 1955.
[7] MAURER-TISON, *C. R. Acad. Sc.*, t. 245, 1957, p. 995; *ibid.*, t. 246, 1958, p. 38; *ibid.*, t. 246, 1958, p. 240.
[8] NOMIZU, *Lie groups and differential geometry* (*Math. Soc. Japan*, 1956).

II. — *Relativité générale.*

[9] CHAZY, *La théorie de la Relativité et la Mécanique céleste* (Gauthier-Villars, 1928-1930).
[10] DARMOIS, *Les équations de la gravitation einsteinienne* (*Mém. Sc. math.*, fasc. 25, 1927).
[11] DEBEVER, *Les espaces de l'électromagnétisme* (*Colloque de Géométrie différentielle*, Louvain, 1951, p. 217-233)
[12] FOURÈS-BRUHAT, *Acta Math.*, t. 88, 1952, p. 141-225.
[13] HENNEQUIN, *C. R. Acad. Sc.*, t. 239, 1954, p. 1464.
[14] LICHNEROWICZ, *Cours du Collège de France*, 1952-1953 (multigraphié).
[15] PHAM MAU QUAN, *C. R. Acad. Sc.*, t. 240, 1955, p. 598 et 733; *ibid.*, t. 242, 1956, p. 465; *ibid.*, t. 242, 1956, p. 875.

III. — *Théorie unitaire du champ d'Einstein.*

[16] BORN et INFELD, *Fondements de la nouvelle théorie du champ* (*Proc. Roy. Soc.*, A, t. 144, 1934, p. 425).
[17] BOSE, *J. Phys. Rad.*, t. 14, 1953, p. 645.
[17 bis] EINSTEIN, *The meaning of Relativity*, 1950 et 1953 (Appendice à la 4e édition).
[18] HLAVATÝ, *J. Rat. Mech. Anal.*, t. 2, 1953, p. 2-52.
[19] HLAVATÝ et SÁENZ, *J. Rat. Mech. Anal.*, t. 2, 1953, p. 523-536.
[20] KICHENASSAMY, *C. R. Acad. Sc.*, t. 244, 1957, p. 168.
[21] LICHNEROWICZ, *Compatibilité des équations de la théorie unitaire du champ d'Einstein* (*J. Rat. Mech.*, t. 3, 1954, p. 487-521).
[22] MAURER-TISON, *C. R. Acad. Sc.*, t. 242, 1956, p. 1127; *ibid.*, t. 242, 1956, p. 3042; *ibid.*, t. 243, 1956, p. 1196.
[23] MAVRIDES, *C. R. Acad. Sc.*, t. 238, 1954, p. 1566; *ibid.*, t. 239, 1954, p. 637.
[24] PAPAPETROU et SCHRÖDINGER, *The point-charge in the non-symetric field theory* (*Nature*, t. 168, n° 4262, 1951, p. 40.
[25] PHAM TAN HOANG, *C. R. Acad. Sc.*, t. 241, 1955, p. 1919.
[26] SCHRÖDINGER, *Proc. Roy. Ir. Acad.*, t. 50 A, 1945, p. 143, et 223; *ibid.*, t. 51, 1946, p. 41; *ibid.*, t. 51 A, 1947, p. 163; *ibid.*, t. 51, 1948, p. 205 et t. 52, 1948, p. 1; *ibid.*, t. 51 A, 1948, p. 6.
[27] TONNELAT, *J. Phys. Rad.*, t. 12, 1951, p. 81-88.
[28] TONNELAT, *C. R. Acad. Sc.*, t. 241, 1955, p. 168.

N. B. Cette bibliographie est évidemment très incomplète : nous n'avons voulu citer que les travaux auxquels se rattachent immédiatement les problèmes que nous avons traités; en particulier, on ne trouvera rien dans cette liste sur les solutions à symétrie sphérique ni sur les équations du mouvement. Nous renvoyons pour plus d'information à l'un ou à l'autre des deux livres récents que voici, dont les bibliographies sont pratiquement exhaustives :

[29] M. A. Tonnelat, *La théorie du champ unifié d'Einstein et quelques-uns de ses développements*, Gauthier-Villars, Paris, 1955.

[30] V. Hlavatý, *Geometry of Einstein's unified field theory*, P. Noordhoff, Groningen, Hollande.