Annales scientifiques de l'É.N.S.

L. Lesieur
R. Croisot

Sur les anneaux premiers noethériens à gauche

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 76, nº 3 (1959), p. 161-183
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1959_3_76_3_161_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 76, 1959, p. 161 à 183.

SUR LES
ANNEAUX PREMIERS NŒTHÉRIENS A GAUCHE

PAR MM. L. LESIEUR ET R. CROISOT.

INTRODUCTION. — Rappelons qu'un *anneau premier* est un anneau A dans lequel la condition $aAb = 0$ implique $a = 0$ ou $b = 0$. On sait que cette propriété est équivalente au fait que le produit de deux idéaux bilatères non nuls soit un idéal bilatère non nul ou encore au fait que le produit de deux idéaux à gauche non nuls soit un idéal à gauche non nul (*cf.* N. H. McCoy [11]). La notion d'*anneau d'intégrité*, c'est-à-dire d'anneau sans diviseurs de zéro (anneau tel que la condition $ab = 0$ implique $a = 0$ ou $b = 0$) est un cas particulier de celle d'anneau premier. Les deux notions coïncident dans le cas commutatif. Nous considérons naturellement le cas où l'anneau n'est pas nécessairement commutatif.

Un anneau A est dit *nœthérien à gauche* si l'ensemble de ses idéaux à gauche vérifie la condition maximale. Il est dit *artinien à gauche* si cet ensemble vérifie la condition minimale. On sait qu'un anneau avec élément unité qui est artinien à gauche est nœthérien à gauche (*cf.* N. Bourbaki [1], p. 72). C'est pourquoi nous examinons d'abord ce cas (§ 1). Le paragraphe 2 est consacré au cas d'un anneau d'intégrité et les paragraphes suivants concernent le cas d'un anneau nœthérien à gauche quelconque, Nous mettons en évidence certains idéaux à gauche que nous appelons *idéaux à gauche fermés* (*cf.* § 3). Un idéal à gauche fermé F est caractérisé par l'une ou l'autre des trois propriétés suivantes qui sont équivalentes dans un anneau premier nœthérien à gauche :

1° $\forall b \notin F$, $\exists x \in (b|$ avec $x \neq 0$ tel que $F \cap (x| = 0$;

2° F est un idéal à gauche maximal parmi ceux qui vérifient la relation $F \cap X = 0$, où X est un idéal à gauche fixé;

3° $ab \in F$, $b \notin F \Rightarrow a$ est diviseur de zéro à droite.

Les idéaux annulateurs à gauche sont des idéaux à gauche fermés particuliers. Nous montrons que l'ensemble de tous les idéaux à gauche fermés constitue un treillis géométrique de longueur finie qui permet l'étude des décompositions de l'idéal o comme intersection d'un nombre fini d'idéaux à gauche $\cap$-irréductibles (*cf.* § 4).

Dans un Mémoire récent, A. W. Goldie (*cf.* [7]) a étudié les anneaux premiers nœthériens à gauche et à droite. Pour cela, il a considéré les conditions suivantes :

($1l$) Chaque somme directe d'idéaux à gauche de A possède un nombre fini de composantes;

($2l$) L'ensemble des idéaux annulateurs à gauche vérifie la condition maximale

et les conditions symétriques ($1r$) et ($2r$). Afin de rattacher plus étroitement nos résultats à ceux de A. W. Goldie, nous faisons également usage de ces conditions. Les conditions ($1l$) et ($2l$) sont évidemment vérifiées dans un anneau nœthérien à gauche ([1]) ainsi que dans un anneau régulier à gauche (*cf.* P. Dubreil [4], p. 280).

Après avoir étudié quelques propriétés supplémentaires des idéaux à gauche fermés (*cf.* § 5), nous montrons que tout anneau premier satisfaisant aux conditions ($1l$) et ($2l$), en particulier *tout anneau premier* A *nœthérien à gauche est immersible dans un anneau de matrices à coefficients dans un corps* (non nécessairement commutatif), lequel anneau est l'*enveloppe injective* de A considéré comme A-module à gauche (*cf.* B. Eckmann et A. Schopf [6]) et est défini à un isomorphisme près relativement à A (*cf.* § 6).

1. Anneaux premiers artiniens a gauche avec élément unité. — La structure d'un anneau premier artinien à gauche avec élément unité est bien connue (*cf.* N. Jacobson [7], p, 39) : il est isomorphe à l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie n sur un corps K, c'est-à-dire *isomorphe à l'anneau* $M_n(K)$ *des matrices carrées d'ordre n à éléments dans* K. Cet anneau est donc *simple*, en ce sens qu'il n'admet pas d'autres idéaux bilatères que o et A. Donnons quelques propriétés des idéaux à gauche d'un tel anneau qui seront susceptibles de nous éclairer dans le cas nœthérien.

Propriété 1. — *Tout idéal à gauche d'un anneau premier artinien à gauche avec élément unité est* o-*premier à droite* ([2]).

D'après la définition donnée par L. Lesieur et R. Croisot [10], p. 97, l'idéal

([1]) Par contre, il existe des anneaux premiers non nœthériens à gauche vérifiant ces conditions, par exemple l'anneau commutatif $K[x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots]$ des polynomes à coefficients dans un corps K et à une infinité dénombrable de variables permutables $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

([2]) Les idéaux à gauche o-premiers à droite sont des cas particuliers d'idéaux primaires associés à l'idéal premier o, donc *a fortiori* des cas particuliers d'idéaux tertiaires (*cf.* L. Lesieur et R. Croisot [10]). La décomposition de l'idéal o comme intersection d'idéaux tertiaires, qui n'a qu'une seule composante, est insuffisante pour l'étude que nous faisons ici.

à gauche X est o-premier à droite si l'on a

$$aAb \subseteq X, \quad b \notin X \Rightarrow a = 0.$$

Supposons $a \neq 0$; l'anneau A étant simple, l'idéal bilatère (a) engendré par a est l'idéal impropre A. Il existe donc des éléments b_i et c_i tels qu'on ait, 1 désignant l'élément unité de A,

$$1 = \sum_{i=1}^{i=k} b_i a c_i, \qquad \text{d'où} \qquad b = \sum_{i=1}^{i=k} b_i a c_i b \in X,$$

ce qui contredit l'hypothèse.

Nous avons même pour tout idéal à gauche X une propriété plus forte :

Propriété 2. — *Pour tout $b \notin X$, il existe $v \in A$ tel que $X \cap Avb = 0$ avec $vb \neq 0$.* D'après la propriété 1, on a $0 = X^{\cdot}.Ab$, d'où

$$0 = \bigcap_{ab \notin X} X^{\cdot}.ab.$$

En vertu de la condition minimale, il existe $a_1, a_2, \ldots, a_n (n \geq 1)$ tels que

$$0 = \bigcap_{i=1}^{i=n} (X^{\cdot}.a_i b).$$

On peut supposer cette décomposition de o sans idéaux à gauche superflus, et écrire en particulier

$$0 = (X^{\cdot}.a_1 b) \cap Y, \qquad \text{avec} \quad Y \neq 0 \qquad (\text{dans le cas } n = 1, \text{ on prend } Y = A).$$

On en déduit

$$0 = X \cap Y a_1 b,$$

avec $Ya_1 b \neq 0$ car $Ya_1 b = 0$ entraînerait $Ya_1 b \subseteq X$, $Y \subseteq X^{\cdot}.a_1 b$ et $Y = 0$. En prenant $v = ya_1$ avec $ya_1 b \neq 0$, on satisfait à la propriété 2.

Enfin, la structure d'un anneau premier artinien à gauche avec élément unité A, rappelée plus haut, permet de donner celle de l'ensemble des idéaux à gauche de A :

Propriété 3. — *Les idéaux à gauche de* A *constituent un treillis modulaire complémenté irréductible de longueur finie n* (isomorphe au treillis des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension n sur un corps K).

En particulier, les *idéaux $\cap$-irréductibles de* A *sont les idéaux maximaux; l'idéal* o *est l'intersection de n idéaux maximaux; il est $\cap$-irréductible si et seulement si $n = 1$, c'est-à-dire lorsque* A *est un corps* (commutatif ou non).

2. Anneaux d'intégrité nœthériens a gauche. — Dans toute la suite, nous ne

supposons pas que les anneaux considérés possèdent un élément unité. Dans ce paragraphe 2, nous considérons un anneau A sans diviseurs de zéro auquel nous imposons la condition

(1 l) *Chaque somme directe d'idéaux à gauche* A *possède un nombre fini de composantes.*

THÉORÈME 1. — *Dans un anneau d'intégrité* A *vérifiant la condition* (1 l), *en particulier dans un anneau d'intégrité nœthérien à gauche, l'idéal* o *est* $\cap$*-irréductible à gauche et* A *admet un corps des quotients à gauche* ([3]).

Supposons, en effet, qu'on ait $X \cap Y = 0$, avec des idéaux à gauche X et Y distincts de o. On peut donc trouver $x \in X$ avec $x \neq 0$ et $y \in Y$ avec $y \neq 0$ tels que $(x| \cap (y| = 0$, où $(x|$ par exemple désigne l'idéal à gauche engendré par x.

Considérons les idéaux

$$I_n = (xy| + (xy^2| + \ldots + (xy^n|.$$

En vertu de la condition (1 l), il existe un entier n, qu'on peut supposer minimum, et des éléments $x' \in (x|$, $x'_1 \in (x|$, $x'_2 \in (x|$, ..., $x'_n \in (x|$ tels que

$$x' y^{n+1} = x'_1 y + x'_2 y + \ldots + x'_n y \neq 0,$$

d'où

$$(x' y^n - x'_2 y - \ldots - x'_n y^{n-1} - x'_1) y = 0. \tag{1}$$

L'élément $u = x' y^n - x'_2 y - \ldots - x'_n y^{n-1} - x'_1$ est non nul, car $u = 0$ entraînerait

$$x'_1 = x' y^n - x'_2 y - \ldots - x'_n y^{n-1} \in (x| \cap (y| = 0.$$

D'où

$$x' y^n = x'_2 y + \ldots + x'_n y^{n-1} \neq 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse de minimalité faite sur n. On déduit donc de (1) $y = 0$ puisque A est sans diviseurs de zéro, d'où une contradiction.

Le fait que o soit $\cap$-irréductible à gauche peut également s'exprimer par l'existence, pour tout couple (x, y) avec $x \neq 0, y \neq 0$, de a et b tels que $ax = by \neq 0$; il en résulte qu'un anneau d'intégrité nœthérien à gauche est régulier à gauche, donc qu'il admet un corps de quotients à gauche, c'est-à-dire que A peut être plongé dans un corps K, tout élément de K se mettant sous la forme $b^{-1}a$ avec $b \in A$, $a \in A$ (*cf.* P. Dubreil [4], p. 280).

La démonstration précédente donne en même temps la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 4. — A *étant un anneau vérifiant la condition* (1 l), *la relation*

$$(x| \cap (y| = 0$$

exige que x *et* y *soient des diviseurs de zéro à droite.*

([3]) Cette propriété est démontrée par A. W. Goldie (*cf.* [7]) d'une manière un peu différente. On adapte facilement le théorème 1 pour établir qu'un semi-groupe nœthérien à gauche admet un groupe des quotients à gauche.

EXEMPLE. — Soit K un corps commutatif. Considérons l'anneau des polynomes $K[x, y]$ à deux variables non permutables x et y et à coefficients dans K, avec la relation

$$xy - yx = x.$$

Ces polynomes forment un anneau d'intégrité nœthérien à gauche (et à droite) qui admet par suite un corps des quotients à gauche (et à droite).

Plus généralement, si L est une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps K, son algèbre enveloppante universelle A(L) est un anneau d'intégrité nœthérien à gauche (et à droite) qui admet par conséquent un corps des quotients à gauche (et à droite) (cf. *Théorie des algèbres de Lie* [3], p. 1-08).

3. CAS GÉNÉRAL : ANNEAUX PREMIERS NŒTHÉRIENS A GAUCHE QUELCONQUES. ÉTUDE DES IDÉAUX A GAUCHE FERMÉS. — Abordons maintenant le cas d'un anneau premier nœthérien à gauche le plus général. Nous nous proposons de rechercher des idéaux à gauche particuliers de A qui vont jouer le rôle que jouaient dans le cas artinien tous les idéaux à gauche. Ils doivent en particulier comprendre les composantes d'une décomposition de o comme intersection d'idéaux à gauche $\cap$-irréductibles; ils doivent former un treillis de longueur finie modulaire et complémenté, donc vérifier aussi la condition minimale. Ce rôle ne peut être tenu par les idéaux o-premiers à droite (*cf.* propriété 1), bien qu'une composante $\cap$-irréductible de o soit nécessairement un idéal o-premier à droite. En effet, dans l'exemple déjà cité de l'anneau des polynomes $K[x, y]$ avec $xy - yx = x$, les idéaux Ay^n sont tous o-premiers à droite et forment une chaîne descendante infinie, cependant que l'idéal o est $\cap$-irréductible. En fait, les idéaux intéressants dans cette théorie sont ceux qui vérifient la propriété 2, auxquels nous allons donner le nom d'idéaux fermés.

DÉFINITION. — On dit que l'idéal à gauche X est *fermé* lorsqu'il vérifie la propriété suivante :

$$\forall b \notin X, \qquad \exists x \in (b| \qquad \text{avec} \quad x \neq 0 \qquad \text{tel que} \quad X \cap (x| = 0.$$

PROPRIÉTÉ 5. — *Tout idéal à gauche fermé* X *d'un anneau premier* A *est* o-*premier à droite* [2].

Supposons $aAb \subseteq X$ et $b \notin X$. Il existe donc $x \in (b|$ avec $x \neq 0$ tel que $X \cap (x| = 0$. On a donc $aAx = 0$ d'où, A étant premier, $a = 0$ puisque $x \neq 0$.

PROPRIÉTÉ 6. — *Toute intersection d'idéaux à gauche fermés est un idéal à gauche fermé.*

Soit $I = \bigcap\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$ une intersection d'idéaux à gauche fermés X_α. Prenons $b \notin I$, il existe donc un indice α tel que $b \notin X_\alpha$. On en déduit $X_\alpha \cap (x| = 0$ pour un élément $x \in (b|$ avec $x \neq 0$, d'où $I \cap (x| = 0$. Par suite, l'idéal à gauche I est fermé.

Rappelons qu'on appelle *annulateur à gauche* d'un ensemble $S \subseteq A$ l'idéal à gauche formé par les éléments x tels que $xS = 0$. Nous noterons cet idéal à gauche $0^{\cdot}.S$. Remarquons que $0^{\cdot}.S$ est égal à $\bigcap_{s \in S} (0^{\cdot}.s.)$

Nous allons faire usage de la condition

($2l$) *L'ensemble des idéaux annulateurs à gauche vérifie la condition maximale* que nous supposons réalisée dans toute la suite de ce paragraphe.

Propriété 7. — *L'annulateur à gauche d'un ensemble quelconque* S *est un idéal à gauche fermé.*

D'après la propriété 6 et la remarque précédente, il suffit de le démontrer pour un annulateur de la forme $0^{\cdot}.s$, où $s \in A$. Nous utiliserons pour cela le lemme fondamental suivant :

Lemme. — *Étant donné* $b \neq 0$, *il existe un idéal à gauche* $C \neq 0$ *tel que*

$$(0^{\cdot}.b) \cap C = 0.$$

Considérons en effet un annulateur à gauche maximal de la forme $0^{\cdot}.a$, avec $a \neq 0$. A étant premier, il existe un élément t tel que $atb \neq 0$. Or on a

$$0^{\cdot}.a \subseteq 0^{\cdot}.atb.$$

Il en résulte $0^{\cdot}.a = 0^{\cdot}.atb$. Par suite, la relation $xatb = 0$ entraîne $xa = 0$. On ne peut avoir $Aat = 0$ puisque A est un anneau premier et que $atb \neq 0$ implique $at \neq 0$. On peut donc choisir $a' \in A$ tel que $a'at \neq 0$ et prendre $C = (a'at|$. On a bien, alors, en effet, $C \neq 0$ et $(0^{\cdot}.b) \cap C = 0$.

Appliquons le lemme à la démonstration de la propriété 6. Soit $b \notin 0^{\cdot}.s$; on a donc $bs \neq 0$ et il existe un idéal à gauche $C \neq 0$ tel que $(0^{\cdot}.bs) \cap C = 0$. Cet idéal C vérifie $Cbs \neq 0$ car $Cbs = 0$ entraînerait $C \subseteq 0^{\cdot}.bs$ et $C = 0$. Prenons $c \in C$ avec $cbs \neq 0$ et soit $x \in (0^{\cdot}.s) \cap (cb|$. On a $x = c'b$ avec $c' \in (c|$, d'où $c' \in (0^{\cdot}.bs) \cap C = 0$ et par suite $x = 0$ et $(0^{\cdot}.s) \cap (cb| = 0$. L'idéal $0^{\cdot}.s$ est bien fermé car de $cbs \neq 0$ résulte $cb \neq 0$.

Définition. — X étant un idéal à gauche quelconque, on appelle *fermeture* $\overline{X}$ de X le plus petit idéal à gauche fermé contenant X.

L'idéal à gauche $\overline{X}$ est l'intersection de tous les idéaux à gauche fermés contenant X (remarquons que A lui-même est un idéal à gauche fermé contenant X).

Propriété 8. — *La fermeture d'un idéal à gauche* X *est l'ensemble* $\overline{X}$ *des éléments* x *tels que*

$$x' \in (x| \quad \text{avec} \quad x' \neq 0 \Rightarrow X \cap (x'| \neq 0.$$

L'ensemble $\overline{X}$ contient X. Il est permis pour la multiplication à gauche.

Montrons qu'il est stable pour la soustraction. Soit $x \in \overline{X}$, $y \in \overline{X}$ et $z' \in (x-y|$ avec $z' \neq 0$. D'après le lemme, il existe un idéal $C \neq 0$ tel que $(0 \cdot . z') \cap C = 0$. Il en résulte $Cz' \neq 0$. Donc il existe $c \in C$ tel que $cz' \neq 0$. On a $z' = x' - y'$ avec $x' \in (x|$ et $y' \in (y|$ et $cx' \neq 0$ ou $cy' \neq 0$. Supposons $cx' \neq 0$. Comme $x \in \overline{X}$, on peut trouver $x'' \in (cx'| \cap X$ avec $x'' \neq 0$; x'' s'écrit $c_1 x'$ avec $c_1 \in (c|$. Si $c_1 y' = 0$, on a $0 \neq c_1(x'-y') \in X$. Si $c_1 y' \neq 0$, il existe $c_2 \in (c_1|$ avec $c_2 y' \in X$ et $c_2 y' \neq 0$, en vertu de $y \in \overline{X}$. On en déduit $c_2(x'-y') \in X$ avec $c_2(x'-y') \neq 0$, car $c_2(x'-y') = 0$ entraînerait $c_2 \in (0 \cdot . x' - y') \cap C = 0$, ce qui est impossible puisque $c_2 y' \neq 0$. On a donc $X \cap (x'-y'| \neq 0$ et par suite $x - y \in \overline{X}$.

Montrons que $\overline{X}$ *est fermé.* Sinon, il existerait $x \notin \overline{X}$ avec $X \cap (x'| \neq 0$ pour tout $x' \in (x|$ avec $x' \neq 0$, ce qui signifie $x \in \overline{X}$.

Enfin $\overline{X}$ *est contenu dans tout idéal à gauche fermé* F *contenant* X. Sinon il existerait $x \in \overline{X}$ avec $x \notin F$. Puisque F est fermé, cela implique l'existence de $x' \in (x|$ avec $x' \neq 0$ et $F \cap (x'| = 0$ d'où $X \cap (x'| = 0$ ce qui contredit $x \in \overline{X}$.

Remarque. — D'après B. Eckmann et A. Schopf (*cf.* [6], p. 77), X étant un idéal à gauche d'un anneau A, on appelle *extension essentielle* de X dans A un idéal à gauche I qui contient X et qui vérifie la condition

$$X \cap Y = 0, \qquad Y \subseteq I \Rightarrow Y = 0$$

dans laquelle Y désigne un idéal à gauche.

La propriété 8 montre que, pour tout idéal à gauche X, sa fermeture $\overline{X}$ est *extension essentielle maximum de* X dans A. D'abord $\overline{X}$ est extension essentielle de X car la condition

$$X \cap Y = 0, \qquad Y \subseteq \overline{X} \Rightarrow Y = 0$$

est vérifiée. En effet, si l'on avait $y \in Y$ avec $y \neq 0$, on aurait $y \in \overline{X}$ d'où $X \cap (y| \neq 0$, ce qui contredirait $X \cap Y = 0$. De plus, $\overline{X}$ est extension essentielle maximum de X car, pour toute extension essentielle I de X, on a $I \subseteq \overline{X}$. En effet, soit $u \in I$; pour tout $u' \in (u|$ avec $u' \neq 0$, on a $X \cap (u'| \neq 0$, ce qui établit $u \in \overline{X}$, d'où $I \subseteq \overline{X}$.

L'application $X \to \overline{X}$ d'un idéal à gauche quelconque dans sa fermeture est une application de fermeture et l'ensemble des idéaux fermés ordonné par inclusion constitue un treillis complet T (*Théorie des treillis* [5], p. 36) avec élément nul 0 et élément universel A.

La propriété 8 va nous permettre de démontrer que ce treillis est modulaire.

PROPRIÉTÉ 9. — *Le treillis* T *des idéaux à gauche fermés est modulaire.*

Désignons par $B \vee C$ le plus petit idéal à gauche fermé contenant les idéaux à gauche fermés B et C. On a

$$B \vee C = \overline{B + C}.$$

La modularité du treillis T s'exprime donc par la relation

$$X \supseteq B \Rightarrow X \cap \overline{(B + C)} = \overline{B + (X \cap C)},$$

les idéaux X, B et C étant supposés fermés. Il suffit de démontrer l'inclusion $X \cap \overline{(B + C)} \subseteq \overline{B + (X \cap C)}$. Soit donc $x \in X$, $x \in \overline{B + C}$. Pour tout $x' \neq 0$ avec $x' \in (x|$, on a $(B + C) \cap (x'| \neq 0$. Il existe par suite $x'' \in B + C$ avec $x'' \in (x'|$ et $x'' \neq 0$. On en déduit $x'' = b + c$ avec $b \in B$, $c \in C$, d'où $c = x'' - b \in X$ et $c \in X \cap C$, Donc

$$x'' \in B + (X \cap C), \qquad \text{d'où} \qquad [B + (X \cap C)] \cap (x'| \neq 0 \qquad \text{et} \qquad x \in \overline{B + (X \cap C)}.$$

Propriété 10. — *Soient deux idéaux à gauche* X *et* Y *tels qu'on ait* $X \cap Y = 0$. *On a aussi* $\overline{X} \cap Y = 0$. *Pour tout idéal à gauche* F *fermé et distinct de* A, *il existe un idéal à gauche fermé* $Z \neq 0$ *tel qu'on ait* $F \cap Z = 0$.

Supposons, en effet, qu'on ait $\overline{X} \cap Y \neq 0$ et soit $x \in \overline{X} \cap Y$ avec $x \neq 0$. D'après la propriété 8, on a $X \cap (x| \neq 0$, ce qui contredit $X \cap Y = 0$. Soit alors F un idéal à gauche fermé distinct de A. Puisqu'on a $F \neq A$, il existe $x \in A$ avec $x \notin F$, F étant fermé, on peut trouver un élément $x' \in (x|$ avec $x' \neq 0$ tel que $F \cap (x'| = 0$. On a alors $F \cap Z = 0$ avec $Z = \overline{(x'|} \neq 0$.

Pour continuer, nous avons besoin de la condition maximale dans le treillis T. Elle n'est pas assurée par la condition ($2\,l$) seulement comme le montre l'exemple de l'anneau des polynomes à deux variables non permutables à coefficients dans un corps. Mais elle est assurée par la condition ($1\,l$) d'après la propriété suivante.

Propriété 11. — *Si l'anneau premier* A *vérifie la condition* ($1\,l$), *le treillis* T *des idéaux à gauche fermés vérifie la condition maximale.*

En effet, supposons qu'il existe une chaîne strictement croissante infinie d'idéaux à gauche fermés de A, soit $F_1 < F_2 < \ldots < F_n < \ldots$. Choisissons, pour tout $i \geq 2$, $x_i \in F_i$ avec $x_i \notin F_{i-1}$. Puisque l'idéal à gauche F_{i-1} est fermé, il existe $y_i \in (x_i|$ avec $y_i \neq 0$ et $F_{i-1} \cap (y_i| = 0$; on a $F_{i-1} + (y_i| \subseteq F_i$. La somme $F_1 + (y_2| + \ldots + (y_n| + \ldots$ est alors une somme directe ayant une infinité de composantes, ce qui contredit la condition ($1\,l$).

Remarque. — Réciproquement, si l'anneau premier A vérifie la condition ($2\,l$) et la condition maximale sur les idéaux à gauche fermés, il vérifie la condition ($1\,l$).

En effet, si l'on a une somme directe ayant une infinité de composantes

$$(x_1| + (x_2| + \ldots + (x_n| + \ldots,$$

en posant $I_n = \overline{(x_1| + (x_2| + \ldots + (x_n|}$, on a $x_{n+1} \notin I_n$ d'après la propriété 8, d'où résulte

$$I_1 < I_2 < \ldots < I_n < \ldots.$$

THÉORÈME 2. — *Si l'anneau premier* A *vérifie les conditions* (1 *l*) *et* (2 *l*), *en particulier s'il est nœthérien à gauche, le treillis* T *de ses idéaux à gauche fermés est un treillis modulaire complémenté de longueur finie.*

En effet, soit $X \in T$; montrons que X admet un complément. Soit $X' \in T$ un idéal à gauche fermé maximal parmi ceux qui vérifient $X \cap X' = 0$. Supposons $X \vee X' \neq A$. D'après la propriété 10, il existerait $Y \in T$ tel que $Y \neq 0$ et $(X \vee X') \cap Y = 0$. On en déduirait

$$(X \vee X') \cap (X' \vee Y) = X' + [(X \vee X') \cap Y] = X';$$

d'où, en prenant l'intersection avec X, $X \cap (X' \vee Y) = 0$. Or, on a $X' \vee Y \supset X'$. Ceci contredit le fait que X' est maximal. On a donc bien $X \cap X' = 0$ et $X \vee X' = A$.

Le treillis T étant modulaire, complémenté, et vérifiant la condition de chaîne ascendante, est alors un treillis de longueur finie (propriété duale du théorème 4 de [5], *Théorie des treillis*, p. 257).

4. APPLICATIONS :

THÉORÈME 3. — *Si* A *est un anneau premier vérifiant les conditions* (1 *l*) *et* (2 *l*), *en particulier si* A *est un anneau nœthérien à gauche, pour que l'idéal* 0 *soit* $\cap$-*irréductible à gauche, il faut et il suffit que* A *soit un anneau d'intégrité.*

La condition est suffisante d'après le théorème 1. Elle est nécessaire car, de $ab = 0$ avec $a \neq 0$, $b \neq 0$, on déduirait $0^{\cdot}.b \neq 0$ d'où résulterait, d'après le lemme, l'existence de $C \neq 0$ avec $(0^{\cdot}.b) \cap C = 0$ contrairement à l'irréductibilité de 0.

On sait que les applications $X \to 0^{\cdot}.X$, $Y \to 0.^{\cdot}Y$ définissent une application biunivoque de l'ensemble des idéaux annulateurs à droite d'un anneau A sur l'ensemble des idéaux annulateurs à gauche de A et son application réciproque. Cette application est anti-isotone, le treillis des idéaux annulateurs à droite est dual du treillis des idéaux annulateurs à gauche. Par suite, la condition minimale sur l'un de ces treillis est équivalente à la condition maximale sur l'autre. Il en résulte la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 12. — *Si un anneau premier* A *vérifie les conditions* (1 *l*) *et* (2 *l*), *il vérifie la condition* (2 *r*). *De plus, tout annulateur à gauche* (*ou à droite*) *est intersection finie d'annulateurs à gauche* (*ou à droite*) *d'éléments de* A.

En effet, le treillis des idéaux à gauche fermés de A est alors de longueur finie. Il vérifie donc la condition minimale. Par suite, il en est de même du treillis des annulateurs à gauche puisque tout annulateur à gauche est un idéal à gauche fermé et le treillis des annulateurs à droite vérifie la condition maximale.

Le treillis des annulateurs à gauche, par exemple, vérifiant la condition minimale, on a, pour tout sous-ensemble S de A,

$$o\cdot .S = \bigcap_{i=1}^{n} o\cdot .s_i,$$

où les éléments s_i sont des éléments de S.

Appelons suivant A. W. Goldie, *idéal à gauche complément* un idéal à gauche pour lequel il existe un idéal à gauche Y tel qu'on ait $X \cap Y = o$ et

$$X \subseteq X', \qquad X' \cap Y = o \Rightarrow X = X'.$$

Théorème 4. — *Soit* A *un anneau premier vérifiant les conditions* (1 *l*) *et* (2 *l*). *Les idéaux à gauche fermés coïncident avec les idéaux à gauche compléments.*

Soit X un idéal à gauche complément et soit Y un idéal à gauche tel qu'on ait $X \cap Y = o$ et

$$X \subseteq X', \qquad X' \cap Y = o \Rightarrow X = X'.$$

D'après la propriété 10, on a $\overline{X} \cap Y = o$, d'où $X = \overline{X}$ et X est un idéal à gauche fermé.

Réciproquement, soit X un idéal à gauche fermé et soit Y le complément de X dans le treillis T. On a donc

$$X \cap Y = o \qquad \text{et} \qquad \overline{X + Y} = A.$$

Supposons qu'il existe un idéal à gauche $X' \supset X$ tel qu'on ait $X' \cap Y = o$. Choisissons X' maximal ayant cette propriété. D'après la première partie du théorème, X' est fermé ; d'ailleurs, il vérifie

$$X' \supset X, \qquad X' \cap Y = o \qquad \text{et évidemment} \quad \overline{X' + Y} = A.$$

Mais ceci contredit la modularité du treillis T. Par suite, X est un idéal à gauche complément.

Théorème 5. — *Soit* A *un anneau premier. Si* $o = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n$ *est une décomposition de l'idéal* o *comme intersection d'idéaux à gauche* $\cap$*-irréductibles sans idéaux superflus, les idéaux à gauche* X_i *sont des idéaux à gauche fermés maximaux* ([4]) *et l'invariant n de Kurosh-Ore est égal à la dimension du treillis* T *augmentée d'une unité. Réciproquement, tout idéal à gauche fermé maximal est une composante* $\cap$*-irréductible de l'idéal* o.

([4]) Nous entendons par idéal à gauche fermé maximal un idéal à gauche fermé distinct de A maximal parmi les idéaux à gauche fermés distincts de A.

Soit $o = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n$ une décomposition de l'idéal o comme intersection d'idéaux à gauche $\cap$-irréductibles sans idéaux superflus. Montrons que chacun des X_i, par exemple X_1, est un idéal à gauche fermé. On peut supposer $n > 1$; écrivons alors $o = X_1 \cap Y$ avec $Y \neq o$. X_1 étant $\cap$-irréductible à gauche, il est maximal parmi les idéaux X qui vérifient $o = X \cap Y$. ([9],p. 179). C'est donc un idéal à gauche complément et il est fermé d'après le théorème 4. Tout X_i est donc un idéal à gauche fermé. S'il n'était pas fermé maximal, il serait $\cap$-réductible dans le treillis T, ce qui est contraire à l'irréductibilité. On sait d'ailleurs que si la dimension du treillis T est d, o est l'intersection de $d+1$ éléments maximaux ([5], p. 261). Soit, finalement, F un idéal à gauche fermé maximal. On peut dans le treilllis T, écrire o comme intersection de $d+1$ idéaux à gauche fermés maximaux F_i sans idéaux superflus, F étant une des composantes de cette intersection. Montrons que tous les idéaux intervenant dans cette décomposition sont $\cap$-irréductibles et, par suite, composantes $\cap$-irréductibles de o. En effet, s'il n'en était pas ainsi, et si l'on avait $F_1 = X \cap Y$, par exemple, avec $X \supset F_1$ et $Y \supset F_1$, on aurait

$$X \cap Y \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n = o \qquad (n = d+1),$$

d'où résulterait, d'après la propriété 10,

$$\overline{X} \cap Y \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n = o,$$

soit $Y \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n = o$ (car on aurait $\overline{X} = A$), puis

$$\overline{Y} \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n = o,$$

soit $F_2 \cap \ldots \cap F_n = o$ (car on aurait $\overline{Y} = A$), ce qui est impossible.

Considérons maintenant les éléments $a \in A$ qui engendrent un idéal fermé égal à A; ils forment *un ensemble* E caractérisé par la propriété suivante :

$$(1) \qquad \forall x \neq o, \qquad \text{on a} \quad (a| \cap (x| \neq o.$$

Considérons également *l'ensemble* D′ des éléments qui ne sont pas diviseurs de zéro à droite et *l'ensemble* G′ des éléments qui ne sont pas diviseurs de zéro à gauche.

On a le théorème suivant :

Théorème 6. — *Si* A *est un anneau premier vérifiant la condition* $(2l)$, *on a* $E \subseteq D'$. *Si* A *est un anneau premier vérifiant les conditions* $(1l)$ *et* $(2l)$, *on a* $E = D' \subseteq G'$.

Supposons que l'anneau premier A vérifie la condition $(2l)$ et soit a un élément de E qui n'appartienne pas à D′. Cet élément est donc diviseur de zéro à droite et l'on a $o^{\cdot}.a \neq o$, c'est-à-dire

$$o \subset o^{\cdot}.a.$$

Nous allons établir, par récurrence sur l'entier positif n, l'inclusion stricte

$$o^{\cdot}.a^n \subset o^{\cdot}.a^{n+1},$$

ce qui contredira la condition ($2\,l$) et démontrera donc la première partie du théorème.

Il existe un élément $x_0 \neq o$ tel que $x_0 a = o$. D'après le lemme fondamental, il existe un idéal à gauche $C_0 \neq o$ tel que $(o^{\cdot}.x_0) \cap C_0 = o$. On doit avoir $C_0 x_0 \neq o$ ce qui permet de choisir un élément $c_0 \in C_0$ tel que $c_0 x_0 \neq o$. Puisque a appartient à E, on a $(a| \cap (c_0 x_0| \neq o$, d'où résulte l'existence de $a'_0 \neq o$ avec $a'_0 \in (a|$ et $a'_0 = c'_0 x_0$ avec $c'_0 \in (c_0|$. De $Aa'_0 \neq o$, qu'on déduit du fait que A est un anneau premier, résulte qu'on peut supposer que a'_0 est de la forme $y_0 a$. On a donc

$$y_0 a \neq o \qquad \text{et} \qquad y_0 a^2 = a'_0 a = c'_0 x_0 a = o,$$

ce qui établit l'inclusion

$$o^{\cdot}.a \subset o^{\cdot}.a^2.$$

Supposons qu'on ait alors $o^{\cdot}.a^n \subset o^{\cdot}.a^{n+1}$. Il existe un élément $x_n \neq o$ tel que $x_n a^n = o$ et $x_n a^{n+1} \neq o$. D'après le lemme fondamental, il existe un idéal à gauche C_n tel que $(o^{\cdot}.x_n a^n) \cap C_n = o$. On doit avoir $C_n x_n a^n \neq o$, ce qui permet de choisir un élément $c_n \in C_n$ tel que $c_n x_n a^n \neq o$. Puisque a appartient à E, on a $(a| \cap (c_n x_n| \neq o$; il en résulte l'existence de $a'_n \neq o$ avec $a'_n \in (a|$ et $a'_n = c'_n x_n$ avec $c'_n \in (c_n|$. De $Aa'_n \neq o$, résulte qu'on peut supposer a'_n de la forme $y_n a$. On a donc

$$y_n a^{n+2} = a'_n a^{n+1} = c'_n x_n a^{n+1} = o.$$

D'autre part, on n'a pas $y_n a^{n+1} = o$, c'est-à-dire $c'_n x_n a^n = o$ car on en déduirait $c'_n \in (o^{\cdot}.x_n a^n) \cap C_n = o$, d'où $a'_n = c'_n x_n = o$. On a donc bien

$$o^{\cdot}.a^{n+1} \subset o^{\cdot}.a^{n+2}.$$

Suppposons maintenant que l'anneau premier A vérifie aussi la condition ($1\,l$) et soit $d' \in D'$ avec $d' \notin E$. Il existerait $x \neq o$ tel que $(d'| \cap (x| = o$, et d' serait diviseur de zéro à droite d'après la propriété 4. On a donc $D' \subseteq E$, d'où $E = D'$. Supposons maintenant $a \in E$ avec $a \notin G'$. Alors a serait diviseur de zéro à gauche et il existerait $b \neq o$ tel que $ab = o$ d'où $a \in o^{\cdot}.b$ qui est un idéal à gauche fermé distinct de A et, par suite, $\overline{(a|} \subseteq o^{\cdot}.b$ ce qui contredit $a \in E$.

5. Autres propriétés des idéaux a gauche fermés. — Avant de poursuivre notre étude, nous donnons quelques propriétés supplémentaires des idéaux à gauche fermés et nous comparons nos résultats à ceux de A. W. Goldie.

Suivant A. W. Goldie, appelons *idéal à gauche uniforme* un idéal à gauche U tel que l'intersection de deux idéaux à gauche de A contenus dans U et distincts de o soit distincte de o quel que soit le choix de ces idéaux. Le lemme permet de démontrer la propriété suivante que A. W. Goldie démontre comme conséquence de la condition $(2r)$ [alors qu'elle va résulter ici de la condition $(2l)$].

Propriété 13. — *Dans un anneau premier* A *satisfaisant à la condition* $(2l)$, *si* U *est un idéal à gauche uniforme, la relation* $ux=0$ *avec* $u\in U$ *et* $u\neq 0$ *entraîne* $Ux=0$.

En effet, supposons qu'il existe $u'\in U$ avec $u'x\neq 0$. D'après le lemme, il existe un idéal à gauche $C\neq 0$ tel qu'on ait

$$(0\cdot.u'x)\cap C=0.$$

Il existe donc $c\in C$ avec $cu'x\neq 0$ puisque $Cu'x=0$ impliquerait $C=0$. On en déduit $cu'\neq 0$ et

$$(u|\cap(cu'|\neq 0$$

puisque U est uniforme. Soit $v\in(u|\cap(cu'|$ avec $v\neq 0$. De $ux=0$, résulte $vx=0$. Or v est de la forme $v=au'$ avec $a\in(c|$. On a donc

$$au'x=0 \qquad \text{et} \qquad a\in(0\cdot.u'x)\cap(c|\subseteq(0\cdot.u'x)\cap C=0,$$

ce qui contredit $v\neq 0$.

La propriété suivante est une généralisation de la propriété 7. Avant de l'énoncer, faisons une remarque qui nous sera utile plusieurs fois.

Remarque. — Pour tout élément $x\in A$, on a $\overline{Ax}=\overline{(x|}$. En effet, on a déjà $\overline{Ax}\subseteq\overline{(x|}$. Soit $u\in\overline{(x|}$. Pour tout $u'\in(u|$ avec $u'\neq 0$, on a $(u'|\cap(x|\neq 0$. Soit $v\in(u'|\cap(x|$ avec $v\neq 0$. L'anneau A étant premier, on a $Av\neq 0$. Choisissons a tel que av soit non nul. On a alors $av\in(u'|\cap Ax$ et $(u'|\cap Ax\neq 0$, ce qui établit $u\in\overline{Ax}$, d'où $\overline{(x|}\subseteq\overline{Ax}$ et l'égalité.

Propriété 14. — A *étant un anneau premier vérifiant la condition* $(2l)$, *si l'idéal à gauche* A *est fermé, il en est de même de l'idéal à gauche* $X\cdot.a$, *quel que soit* $a\in A$. *Pour* $a\in X$, *on a* $X\cdot.a=A$; *pour* $a\notin X$, *l'idéal à gauche* $X\cdot.a$ *est distinct de* A.

Soit, en effet, $x\notin X\cdot.a$, c'est-à-dire $xa\notin X$. Il existe donc, puisque X est fermé, $x'\in(x|$ avec $x'a\neq 0$ tel qu'on ait $X\cap(x'a|=0$. Choisissons, d'après le lemme, un idéal $C\neq 0$ satisfaisant à $(0\cdot.x'a)\cap C=0$. De $Cx'a\neq 0$, résulte l'existence de $c\in C$ avec $cx'a\neq 0$. Considérons l'idéal à gauche $Y=(X\cdot.a)\cap(cx'|$. Soit $y\in Y$. On a donc $y=c'x'$ avec $c'\in(c|$ et $ya\in X$ d'où $c'x'a\in X\cap(x'a|=0$. Par suite, on a $c'\in(0\cdot.x'a)\cap C=0$, d'où $y=0$ et $Y=0$, ce qui montre que l'idéal à gauche $X\cdot.a$ est fermé. Pour $a\in X$, on a évidemment $X\cdot.a=A$. Pour $a\notin X$, on ne peut avoir $Aa\subseteq X$ car on aurait, d'après la remarque précédente, $\overline{(a|}=\overline{Aa}\subseteq X$ et $a\in X$.

Précisons, dans un certain cas, la propriété 14.

PROPRIÉTÉ 15. — A *étant un anneau premier vérifiant les conditions* (1 l) *et* (2 l), *si l'idéal à gauche* X *est fermé maximal* ([4]), *pour tout élément a tel que* $a \notin X$, *l'idéal à gauche* $X^{\cdot}.a$ *est fermé maximal.*

D'après la propriété 14, il suffit de montrer que $X^{\cdot}.a$, qui est distinct de A, est maximal. Soit donc $X^{\cdot}.a \subset Y$, idéal à gauche fermé. On a $Ya \nsubseteq X$, d'où $\overline{X \vee Ya} = A$. Par suite, pour tout $x \neq 0$, on a $(X + Ya) \cap (x| \neq 0$. Montrons que ceci est incompatible avec $Y \neq A$. Soit, en effet, $y \notin Y$ et $y' \in (y|$ avec $y' \neq 0$ et $Y \cap (y'| = 0$, d'où résulte, en particulier, $y' \notin Y$ et par suite $y'a \notin X$ et $y'a \neq 0$. On a donc $(X + Ya) \cap (y'a| \neq 0$ et il existe $y'' \in (y'|$ satisfaisant à $y''a \neq 0$ et $y''a \in X + Ya$, c'est-à-dire que $y''a$ est de la forme $u + va$ avec $u \in X$, $v \in Y$. On en déduit

$$(y'' - v)a = u \in X \qquad \text{et} \qquad y'' - v \in X^{\cdot}.a \subset Y,$$

d'où

$$y'' \in Y \qquad \text{et} \qquad y'' \in Y \cap (y'| = 0,$$

ce qui contredit $y''a \neq 0$. On a donc $Y = A$ et $X^{\cdot}.a$ est un idéal à gauche fermé maximal.

PROPRIÉTÉ 16. — *Si l'anneau* A *vérifie la condition* (2 l) *et si* X *est un idéal à gauche uniforme, l'idéal à gauche* $\overline{X}$ *est uniforme.*

Soit, en effet, $x \in \overline{X}$, $y \in \overline{X}$ avec $x \neq 0$, $y \neq 0$. D'après la propriété 9, on a $X \cap (x| \neq 0$ et $X \cap (y| \neq 0$. Soit alors $x' \in (x| \cap X$ et $y' \in (y| \cap X$, avec $x' \neq 0$, $y' \neq 0$. Puisque X est uniforme, il en résulte $(x'| \cap (y'| \neq 0$ d'où $(x| \cap (y| \neq 0$ et $\overline{X}$ est uniforme.

A. W. Goldie appelle *idéaux à gauche fondamentaux* les idéaux à gauche uniformes maximaux.

THÉORÈME 7. — *Soit* A *un anneau premier vérifiant les conditions* (1 l) *et* (2 l). *Les idéaux à gauche fermés minimaux* ([5]) *coïncident avec les idéaux à gauche fondamentaux.*

Soit un idéal à gauche X fermé minimal et soit $x \in X$, $y \in X$ avec $x \neq 0$, $y \neq 0$. On a $\overline{(x|} = X$ et $y \in \overline{(x|}$ d'où résulte $(x| \cap (y| \neq 0$. Par suite, X est uniforme. De plus, X est uniforme maximal car, pour $z \notin X$, il existe $z' \in (z|$ avec $z' \neq 0$ et $X \cap (z'| = 0$ ce qui prouve qu'un idéal à gauche contenant proprement X ne peut être uniforme.

Réciproquement, supposons X uniforme maximal. D'après la propriété 16, $\overline{X}$ est uniforme d'où $X = \overline{X}$ et X est fermé. Si X n'était pas fermé minimal, il contiendrait proprement un idéal à gauche fermé minimal Y qui serait un

---

([5]) Nous entendons par idéal à gauche fermé minimal un idéal à gauche fermé distinct de o minimal parmi les idéaux à gauche fermés distincts de o.

idéal uniforme maximal d'après la première partie du théorème, ce qui constitue une contradiction.

Corollaire. — *Si l'idéal à gauche* X *est fermé minimal, quel que soit a, l'idéal à gauche* $\overline{\mathrm{X}a}$ *est l'idéal* o *ou un idéal à gauche fermé minimal.*

En effet, X est uniforme, donc $\mathrm{X}a$ est l'idéal o ou un idéal à gauche uniforme d'après le lemme 2.3 de A. W. Goldie [5] qui résulte de la propriété 13. Par suite, si l'on a $\mathrm{X}a \neq 0$, $\overline{\mathrm{X}a}$ est uniforme d'après la propriété 16 et, puisque c'est un idéal fermé, il est fermé minimal.

Remarques. — Il résulte du théorème 7 que le lemme 3.2 de A. W. Goldie est valable moyennant seulement les conditions ($1r$) et ($2r$).

De plus, il résulte du théorème 7 et de la propriété 10 que le théorème 6 de A. W. Goldie est valable moyennant les seules conditions ($1r$) et ($2r$). En effet, les sommes directes d'idéaux à gauche fondamentaux coïncident avec les sommes d'idéaux à gauche fermés minimaux dont l'union dans le treillis T est égale à A.

D'ailleurs, du théorème 4, résulte également que les lemmes 3.4, 3.5 et 3.7 de A. W. Goldie sont valables si les conditions ($1r$) et ($2r$) sont vérifiées.

Propriété 17. — *Soit* A *un anneau premier satisfaisant aux conditions* ($1l$) *et* ($2l$). *Si* X *est un idéal à gauche fermé minimal et x un élément non nul de* X, *l'idéal à gauche annulateur* $0 \cdot . x$ *est fermé maximal. Réciproquement, si l'idéal à gauche annulateur* $0 \cdot . x$ *est fermé maximal, l'idéal à gauche* $\overline{(x|}$ *est fermé minimal.*

Soit X idéal à gauche fermé minimal et $x \in \mathrm{X}$ avec $x \neq 0$. Supposons qu'il existe un idéal à gauche fermé I tel qu'on ait $0 \cdot . x \subset \mathrm{I} \subset \mathrm{A}$. Choisissons un élément $y \notin \mathrm{I}$. Puisque I est fermé, il existe $y' \in (y|$ avec $y' \neq 0$ et $\mathrm{I} \cap (y'| = 0$. On a $y'x \neq 0$ car, de $y'x = 0$, résulterait $y' \in 0 \cdot . x$, d'où $y' \in \mathrm{I}$ et $y' = 0$. Choisissons maintenant un élément $i \in \mathrm{I}$ avec $i \notin 0 \cdot . x$, c'est-à-dire $ix \neq 0$. Puisque X est un idéal à gauche uniforme, il existe un élément $z \neq 0$ tel qu'on ait $z \in (ix|$ et $z \in (y'x|$. Cet élément est de la forme $i'x$ avec $i' \in (i|$ et de la forme $y''x$ avec $y'' \in (y'|$. On a $i'x - y''x = 0$ d'où $i' - y'' \in 0 \cdot . x$ et, par suite, $i' - y'' \in \mathrm{I}$. Il en résulte $y'' \in \mathrm{I}$ et $y'' \in \mathrm{I} \cap (y'| = 0$, d'où $y'' = 0$, ce qui contredit $z \neq 0$.

Réciproquement, supposons que $0 \cdot . x$ soit un idéal à gauche fermé maximal. On a $x \neq 0$. Supposons qu'il existe un idéal à gauche fermé Y tel qu'on ait $0 \subset \mathrm{Y} \subset \overline{(x|}$. Puisque Y est fermé, il en est de même de $\mathrm{Y} \cdot . x$ d'après la propriété 8 et l'on a $0 \cdot . x = \mathrm{Y} \cdot . x$ ou $\mathrm{Y} \cdot . x = \mathrm{A}$. On ne peut avoir $0 \cdot . x = \mathrm{Y} \cdot . x$: en effet, choisissons $y \in \mathrm{Y}$ avec $y \neq 0$. De $y \in \overline{(x|}$, résulte $(x| \cap (y| \neq 0$. Soit $z \neq 0$ avec $z \in (x| \cap (y|$. Puisqu'on ne peut avoir $\mathrm{A}z = 0$, l'anneau A étant premier, choisissons a tel que az soit non nul. L'élément az est de la forme $a'x$ et l'on a $a'x = az \in (y| \subseteq Y$, d'où $a' \in Y^{\cdot}.x = A$, d'où $Ax \subseteq Y$ et, par suite, $\overline{Ax} \subseteq Y$. Pour obtenir une contradiction et achever la démonstration, il suffit d'appliquer la remarque précédant la propriété 13 qui montre qu'on a $\overline{Ax} = \overline{(x|}$.

Remarque. — La propriété précédente permet d'obtenir des idéaux annulateurs à gauche maximaux qui sont des idéaux à gauche fermés maximaux. L'exemple 2 du paragraphe 7 montrera qu'un idéal à gauche fermé maximal n'est pas nécessairement un annulateur à gauche.

Propriété 18. — *Soit* A *un anneau premier satisfaisant aux conditions* $(1l)$ *et* $(2l)$. X *étant un idéal à gauche de* A, *pour qu'il existe un idéal à gauche* $Y \neq 0$ *tel que* $X \cap Y = 0$, *il faut et il suffit que tous les éléments de* X *soient diviseurs de zéro à droite.*

La condition est nécessaire d'après la propriété 4. Montrons qu'elle est suffisante. Soit X un idéal à gauche dont tous les éléments sont diviseurs de zéro à droite; supposons qu'il n'existe pas d'idéal à gauche $Y \neq 0$ tel que $X \cap Y = 0$. Considérons une décomposition de o comme intersection d'idéaux à gauche fermés maximaux sans idéaux superflus :

$$0 = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n.$$

Posons

$$U_i = X \cap (X_1 \cap \ldots \cap X_{i-1} \cap X_{i+1} \cap \ldots \cap X_n) \neq 0.$$

L'idéal à gauche U_i étant contenu dans l'idéal à gauche fermé minimal

$$X_1 \cap \ldots \cap X_{i-1} \cap X_{i+1} \cap \ldots \cap X_n,$$

l'annulateur $0^{\cdot}.u_i$ est, pour tout $u_i \in U_i$ avec $u_i \neq 0$, d'après la propriété 17, un idéal à gauche fermé maximal. L'anneau A étant premier, on a $0^{\cdot}.U_i = 0$, d'où

$$0 = \bigcap_{j=1}^{j=n} (0^{\cdot}.u_{ij}),$$

les éléments u_{ij} étant convenablement choisis dans U_i.

Le treillis T des idéaux fermés étant modulaire complémenté et de longueur finie n (th. 2), et les idéaux $0^{\cdot}.u_{ij}$ étant tous maximaux dans ce treillis, on en déduit l'existence d'indices $j_1, j_2, \ldots, j_n$ tels que

$$0 = \bigcap_{i=1}^{n} (0^{\cdot}.u_{ij_i}).$$

Considérons l'élément $x = u_{1j_1} + u_{2j_2} + \ldots + u_{nj_n} \in X$. Montrons qu'il n'est pas diviseur de zéro à droite, ce qui constituera une contradiction. La relation $ax = 0$ entraîne, en effet

$$au_{1j_1} = -(au_{2j_2} + \ldots + au_{nj_n}) \in X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n = 0, \qquad \text{donc} \quad a \in 0 \cdot . u_{1j_1}.$$

De même, on établit

$$a \in 0 \cdot . u_{2j_2}, \qquad \ldots, \qquad a \in 0 \cdot . u_{nj_n}.$$

il en résulte

$$a \in \bigcap_{i=1}^{n} (0 \cdot . u_{ij_i}) = 0.$$

Remarque. — La propriété 18 étend le théorème 10 de A. W. Goldie, dont la démonstration utilise le fait qu'un idéal à gauche complément maximal est l'annulateur à gauche d'un élément, propriété qui n'est pas valable avec les seules hypothèses (1 *l*) et (2 *l*).

COROLLAIRE. — *L'anneau* A *possède au moins un élément non diviseur de zéro à droite.*

THÉORÈME 8. — *Soit* A *un anneau premier vérifiant les conditions* (1 *l*) *et* (2 *l*). *Pour que l'idéal à gauche* I *soit fermé, il faut et il suffit qu'il vérifie la condition suivante :*

$$(1) \qquad ab \in \mathrm{I}, \quad a \in \mathrm{D}' \Rightarrow b \in \mathrm{I},$$

D′ *désignant l'ensemble des éléments qui ne sont pas diviseurs de zéro à droite.*

La condition est nécessaire. Supposons I fermé avec $ab \in \mathrm{I}$, $a \in \mathrm{D}'$. Si l'on avait $b \notin \mathrm{I}$, l'idéal $\mathrm{I} \cdot . b$ serait fermé différent de A, d'après la propriété 14. Or il contiendrait l'élément $a \in \mathrm{D}' = \mathrm{E}$, d'après le théorème 6, ce qui est impossible.

La condition est suffisante. Supposons I non fermé vérifiant la condition (1). Soit b un élément de la fermeture $\bar{\mathrm{I}}$ de I n'appartenant pas à I. Montrons que la fermeture de $\mathrm{I} \cdot . b$ est égale à A. Sinon il existerait un élément $x \neq 0$ tel que $(\mathrm{I} \cdot . b) \cap (x| = 0$. En particulier, on aurait $xb \neq 0$ car $xb = 0$ impliquerait $x \in 0 \cdot . b \subseteq \mathrm{I} \cdot . b$. D'après la propriété 8, on aurait $\mathrm{I} \cap (xb| \neq 0$. Il existerait donc $x' \in (x|$ avec $0 \neq x'b \in \mathrm{I}$. Cela entraîne $x' \in (\mathrm{I} \cdot . b) \cap (x| = 0$, ce qui contredit $x'b \neq 0$. La fermeture de $\mathrm{I} \cdot . b$ étant égale à A, il résulte de la propriété 18 et de la propriété 10 que l'idéal $\mathrm{I} \cdot . b$ contient nécessairement un élément non diviseur de zéro à droite, contrairement à la condition (1).

6. IMMERSION D'UN ANNEAU PREMIER NŒTHÉRIEN A GAUCHE DANS UN ANNEAU DE MATRICES A COEFFICIENTS DANS UN CORPS :

PROPRIÉTÉ 19. — *Soit* A *un anneau premier satisfaisant aux conditions* (1 *l*) *et* (2 *l*). *Si* b *est un élément de* D′ (*c'est-à-dire non diviseur de zéro à droite*) *et* a *un élément quelconque de* A, *il existe* $a' \in \mathrm{A}$ *et* $b' \in \mathrm{D}'$ *tels que* $b'a = a'b$.

D'après le théorème 6, on a $D' = E$. Il en résulte que pour tout idéal à gauche $Y \neq 0$, on a $[(b|\cdot a] \cap Y \neq 0$. En effet, si l'idéal à gauche Ya est nul, on a $Ya \subseteq (b|$ d'où $Y = Y \cap [b|\cdot a] \neq 0$. Si l'idéal Ya est non nul, on a $(b| \cap Ya \neq 0$, puisque b est un élément de E. Il existe donc $t \neq 0$ tel que $t = ya \in (b|$ avec $y \in Y$. On en déduit $y \in (y|\cdot a$ avec $y \neq 0$. La propriété 18 montre alors l'existence d'un élément $b' \in D'$ tel que $b' \in (b|\cdot a$ d'où $b'a \in (b|$. On en déduit la propriété 19.

D'après le théorème 6, l'ensemble D' qui est évidemment multiplicativement fermé, est contenu dans G', donc est simplifiable à droite et à gauche dans A. La propriété 10 montre alors que l'anneau A peut être plongé dans un anneau de quotients à gauche Q(A) tel que tout élément de Q(A) soit de la forme $b^{-1}a$ avec $b \in D'$ et $a \in A$) (*cf.* P. Dubreil [8], p. 280). On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME 9. — *Un anneau premier* A *qui vérifie les conditions* ($1l$) *et* ($2l$) *possède un anneau de quotients à gauche* Q(A) *défini à un isomorphisme près relativement à* A.

Nous allons démontrer que Q(A) est aussi un anneau premier qui vérifie les conditions ($1l$) et ($2l$). On démontre d'abord comme A. W. Goldie (lemme 4.1) que l'anneau Q(A) est un anneau premier vérifiant la condition ($1l$), mais la démonstration de A. W. Goldie ne s'applique pas à la condition ($2l$). Pour établir cette condition, nous allons plus généralement étudier les idéaux à gauche de Q(A).

PROPRIÉTÉ 20. — *L'application* $Y \to X = Y \cap A$ *définit un isomorphisme entre le treillis des idéaux à gauche de* Q(A) *et le treillis des idéaux à gauche fermés de* A.

D'abord, pour tout idéal à gauche Y de Q(A), l'idéal à gauche $X = Y \cap A$ de A est fermé. En effet, si l'on a $ba \in X$ avec $b \in D'$, on a aussi $a = b^{-1}ba \in X$. Donc X est fermé d'après le théorème 8.

D'autre part, de $Y \cap A = Y' \cap A$, résulte $Y = Y'$ car $y \in Y$ entraîne l'existence de $a \in A$ et $b \in D'$ avec $y = b^{-1}a$, d'où résulte

$$a = bb^{-1}a \in Y \cap A = Y' \cap A \qquad \text{et} \qquad y \in Y'.$$

On a donc $Y \subseteq Y'$, et de même, $Y' \subseteq Y$. Par suite, l'application étudiée est injective.

Finalement, si X est un idéal à gauche fermé quelconque de A, l'ensemble des éléments de Q(A) de la forme $b^{-1}x$ avec $x \in X$ et $b \in D'$ constitue un idéal à gauche Y de Q(A); en effet, on a, quel que soit $x \in X$, $b \in D'$, $a' \in A$, $b' \in D'$,

$$b'^{-1}a'.b^{-1}x = (b''b')^{-1}(a''x)$$

avec $a'' \in A$, $b'' \in D'$ si ces éléments vérifient l'égalité $b''a' = a''b$; on a également, quel que soit $x, x' \in X$, $b, b' \in D'$,

$$b^{-1}x - b'^{-1}x' = b^{-1}b_1^{-1}\, b_1 x - b'^{-1}b_1'^{-1}\, b_1' x' = b^{-1}b_1^{-1}(b_1 x - b_1' x')$$

si l'on détermine $b_1, b_1' \in D'$ par l'égalité $b_1 b = b_1' b'$. De plus, l'idéal à gauche Y de Q(A) est tel qu'on ait $Y \cap A = X$ car la relation $b^{-1}x \in A$ avec $x \in X$, $b \in D'$ implique $b.b^{-1}x \in X$ d'où $b^{-1}x$, d'après le théorème 8, puisque X est fermé.

THÉORÈME 10. — A *étant un anneau premier vérifiant les conditions* (1 *l*) *et* (2 *l*), *l'anneau des quotients à gauche* Q(A) *est isomorphe à l'anneau des matrices carrées* $M_n(K)$ *d'ordre n sur un corps* K, *n étant l'invariant de Kurosh-Ore du treillis des idéaux à gauche fermés de* A.

En effet, on a déjà vu que Q(A) est un anneau premier. D'autre part, il possède un élément unité, et la propriété 20 nous montre qu'il vérifie la condition minimale sur les idéaux à gauche, cette condition étant vérifiée par le treillis T des idéaux à gauche fermés de A (th. 2). On est donc ramené au cas d'un anneau premier artinien à gauche avec élément unité, étudié au paragraphe 1.

COROLLAIRE. — *Le treillis* T *des idéaux à gauche fermés de* A *est un treillis géométrique irréductible.*

En définitive, on a établi le théorème suivant qui est une extension du théorème 13 de A. W. Goldie :

THÉORÈME 11. — *Un anneau premier* A *possède un anneau de quotients à gauche qui est un anneau de matrices carrées* $M_n(K)$ *sur un corps* K (*commutatif ou non*) *si et seulement si :*

1° A *vérifie la condition de chaîne ascendante sur les annulateurs à gauche.*

2° *Toute somme directe d'idéaux à gauche non nuls n'a qu'un nombre fini de termes.*

Le théorème d'immersion 10 montre que les conditions 1° et 2° sont suffisantes. On démontre qu'elles sont nécessaires comme A. W. Goldie (th. 13).

Donnons encore une propriété intéressante de Q(A).

THÉORÈME 12. — *L'anneau* Q(A) *des quotients à gauche de* A *est l'enveloppe injective* ([6]) *du* A-*module* A.

D'abord, Q(A) est une extension essentielle de A. En effet, soit M un

---

([6]) Sur la notion d'enveloppe injective, *voir* B. Eckmann et A. Schopf [6]. On sait que l'enveloppe injective d'un anneau A régulier à gauche est son corps des quotients à gauche [*Cf.* P. GABRIEL, *Objets injectifs dans les catégories abéliennes* (*Séminaire P. Dubreil, M.-L. Dubreil-Jacotin et C. Pisot*, 17, 1959], ce qui est un cas particulier de notre théorème 12.

A-module contenu dans $Q(A)$ et tel que $A \cap M = 0$. Soit x un élément de M; on a $x = b^{-1}a$ avec $a \in A$, $b \in D'$; il en résulte $bx = a \in A \cap M = 0$ d'où $a = 0$ et $x = 0$. On a donc bien $M = 0$.

D'autre part, $Q(A)$ est un A-module injectif. En effet, soit I un idéal à gauche de A et f un homomorphisme du A-module I dans le A-module $Q(A)$. Nous montrons qu'il existe un élément $b^{-1}a$ de $Q(A)$ tel que $f(i) = ib^{-1}a$ pour tout $i \in I$. Soit J l'idéal à gauche de $Q(A)$, ensemble des éléments de la forme $c^{-1}i$ avec $i \in I$ et $c \in D'$. Considérons l'application g de J dans $Q(A)$ définie par $g(c^{-1}i) = c^{-1}f(i)$. On vérifie que cette application est bien définie [elle ne dépend pas de l'expression d'un élément de $Q(A)$ sous la forme $c^{-1}i$] et qu'elle est un homomorphisme du $Q(A)$-module J dans le $Q(A)$-module $Q(A)$. Celui-ci étant injectif (*cf.* H. Cartan et S. Eilenberg, [2], p. 11), il existe $b^{-1}a \in Q(A)$ tel que $g(c^{-1}i) = c^{-1}ib^{-1}a$ pour tout élément $c^{-1}i \in J$. On en déduit immédiatement $f(i) = ib^{-1}a$ pour tout $i \in I$.

7. Exemples. — Les deux exemples suivants sont des exemples d'anneaux premiers vérifiant les conditions $(1l)$, $(2l)$ et $(2r)$ (ils vérifient la condition maximale sur les idéaux à gauche) sans vérifier la condition $(1r)$ (7). Dans l'exemple 1, on a un anneau sans diviseurs de zéro. Dans l'exemple 2, il existe des diviseurs de zéro.

Exemple 1. — Soit K le corps des nombres réels et $K(y)$ le corps des fractions rationnelles à coefficients dans K et à une variable y. L'application $\alpha : f(y) \to f(y^2)$ est un endomorphisme injectif de $K(y)$ qui n'est pas surjectif. Considérons les polynomes à coefficients dans $K(y)$ et à une variable x non permutable avec les coefficients et imposons les relations $xf(y) = f(y^2)x$. Nous définissons ainsi un anneau A dont les éléments peuvent se mettre d'une manière unique sous la forme

$$P(x) = f_n(y)x^n + f_{n-1}(y)x^{n-1} + \ldots + f_1(y)x + f_0(y)$$

avec n entier positif ou nul et $f_n(y) \neq 0$. L'anneau A n'a visiblement pas de diviseurs de zéro et est, par conséquent, premier.

Tout idéal à gauche de A est principal : il est, en effet, engendré par chacun de ses polynomes de degré minimum. Mais la condition $(1r)$ n'est pas vérifiée car la somme

$$(y^2x^2) + (y^4x^4) + \ldots + (y^{2m}x^{2m}) + \ldots$$

est directe; en effet, une égalité de la forme

$$y^{2^m}x^{2m}P_0(x) = y^2x^2P_1(x) + y^4x^4P_2(x) + \ldots + y^{2^{m-1}}x^{2(m-1)}P_{m-1}(x)$$

est impossible avec $P_0(x) \neq 0$; pour le voir, il suffit de considérer les coef-

(7) On trouve, dans H. Cartan et S. Eilenberg ([2] p. 16), un exemple d'anneau nœthérien à gauche et non nœthérien à droite, mais cet anneau n'est pas premier.

ficients du terme de degré maximum (en x) dans les deux membres qui seraient, si $P_0(x)$ commence par le terme $f_0(y)x^n$ [avec $f_0(y)\neq 0$)], $y^{2^m}f_0(y^{2^{2m}})$ et $y^2f_1(y^4)+y^4f_2(y^6)+\ldots+y^{2^{2(m-1)}}f_{m-1}(y^{2^{2(m-1)}})$ [si $f_i(y)x^{n+2(m-i)}$ est le terme en $x^{n+2(m-i)}$ du polynome $P_i(x)$]; or, ces deux coefficients ne peuvent être égaux sans qu'on ait $f_1=0$ et, de proche en proche, $f_2=0, \ldots, f_{m-1}=0$, d'où $f_0=0$, ce qui contredit l'hypothèse.

Exemple 2. — Considérons le corps $K(y)$ de l'exemple 1, puis l'ensemble des polynomes à une variable x non permutable avec les coefficients, ceux-ci étant les couples (f, g) avec $f\in K(y)$, $g\in K(y)$, les relations suivantes étant imposées :

$$x(f(y), g(y)) = (g(y^2), f(y^2))x.$$

On voit aisément qu'on obtient un anneau A dont les éléments se mettent d'une façon et d'une seule sous la forme des polynomes précédents

$$P(x) = (f_n(y), g_n(y))x^n + (f_{n-1}(y), g_{n-1}(y))x^{n-1} + \ldots + (f_0(y), g_0(y)).$$

L'anneau A est un anneau premier. En effet, si l'on a

$$P(x) = (f_n(y), g_n(y))x^n + \ldots, \qquad P'(x) = (f'_m(y), g'_m(y))x^m + \ldots,$$

avec $(f_n(y), g_n(y))\neq(0, 0)$, $(f'_m(y), g'_m(y))\neq(0, 0)$, on voit aisément que l'un ou l'autre au moins des produits $P(x)(1, 1)P'(x)$ et $(P(x)(1, 1)xP'(x)$ est différent de $(0, 0)$.

Les idéaux à gauche de A sont engendrés par un ou deux polynomes. Pour le voir, on considère un polynome $P_1(x)$ de degré minimum de l'idéal à gauche I étudié dont on peut supposer que le coefficient du terme de plus haut degré est $(0, 1)$,$(1, 0)$ ou $(1, 1)$. Dans le troisième cas, on a nécessairement $I=(P_1(x)|$. Dans les deux premiers cas, et si l'on a $I\supset(P_1(x)|$, I contient nécessairement des polynomes dont le coefficient du terme de plus haut degré est $(1, 1)$; si $P_2(x)$ est un de ces polynomes de degré minimum, on a $I=(P_1(x), P_2(x)|$.

Les idéaux à gauche fermés propres sont tous de la forme $I=(P_1(x)|$ où $P_1(x)$ est un polynome dont le coefficient du terme de plus haut degré est $(0, 1)$ ou $(1, 0)$. En effet, d'après le théorème 6, on a $D'=E$; par suite, tous les éléments de I, qui ne peuvent appartenir à E, ne peuvent appartenir à D' et sont des diviseurs de zéro à droite; or, il est facile de voir qu'un polynome dont le coefficient du terme de plus haut degré est $(1, 1)$ ne peut être diviseur de zéro (ni à droite, ni à gauche); donc I ne contient pas de polynomes de cette forme.

L'idéal $(0, 1)|$ est l'annulateur à gauche de l'élément $(1, 0)$. C'est donc un idéal fermé et cet idéal fermé est maximal. De même, l'idéal $((1, 0)|$ est un idéal fermé maximal. D'autre part, on a

$$\{(0, 0)\} = ((0, 1)|\cap((1, 0)|.$$

Donc, le treillis T est de dimension 1, deux idéaux fermés propres distincts sont toujours incomparables et tous les idéaux fermés propres sont maximaux.

On n'a pas ici $E = G'$. En effet, l'élément $(0, 1)x^2 + (0, y)x$, par exemple, est diviseur de zéro à droite, donc n'est pas élément de E [on a $(1, 0)[(0, 1)x^2 + (0, y)x] = (0, 0)$]; mais cet élément n'est pas diviseur de zéro à gauche car une relation telle que

$$[(0, 1)x^2 + (0, y)x][(f_n(y), 0)x^n + (f_{n-1}(y), g_{n-1}())x^{n-1} + \ldots] = (0, 0),$$

avec $f_n(y) \neq 0$, exigerait $g_{n-1}(y^4) + y f_n(y^2) = 0$, ce qui est impossible.

Finalement, l'idéal à gauche fermé engendré par l'élément $(0, 1)x^2 + (0, y)x$ est propre (d'ailleurs maximal) et n'est pas annulateur à gauche.

Donc, dans cet exemple, les ensembles $D' = E$ *et* G' *sont distincts et il existe un idéal à gauche fermé qui n'est pas annulateur à gauche.*

Exemple 3. — Soit C le corps des quotients à gauche de l'anneau A considéré à l'exemple 1 et soit $M_2(C)$ l'anneau des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans C. Le sous-anneau $M_2(A)$ de $M_2(C)$ admet $M_2(C)$ pour anneau de quotients à gauche. Par suite, d'après le théorème 11, $M_2(A)$ est un anneau premier vérifiant les conditions $(1l)$ et $(2l)$. Considérons deux éléments a et a' de A n'ayant pas de multiple commun à droite non nul, par exemple y^2x^2 et y^4x^4; l'élément

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & a' \end{pmatrix}$$

de $M_2(A)$ est diviseur de zéro à droite et n'est pas diviseur de zéro à gauche. Par suite, d'après le lemme 3.9 de A. W. Goldie et d'après notre propriété 12, l'anneau $M_2(A)$ ne vérifie pas la condition $(1r)$.

Remarquons que l'anneau de l'exemple 2 est isomorphe au sous-anneau de $M_2(A)$ engendré par les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} f(y) & 0 \\ 0 & g(y) \end{pmatrix}.$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] N. Bourbaki, *Algèbre*, chap. 8 : *Modules et anneaux semi-simples*, Paris, Hermann, 1958 (*Act. Scient. et ind.*, 1261; *Éléments de Mathématiques*, 23).

[2] H. Cartan et S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton, 1956.

[3] P. Cartier, *Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt* (*Séminaire Sophus-Lie*, t. 1, 1954-1955 : *Théorie des algèbres de Lie*, *Topologie des groupes de Lie*, exposé n° 1).

[4] P. Dubreil, *Algèbre* t. 1, 2e éd., Paris, Gauthier-Villars, 1954 (*Cahiers scientifiques*, 20).

[5] Mme M.-L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur et R. Croisot, *Leçons sur la théorie des treillis*,

des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques, Paris, Gauthier-Villars, 1953, *Cahiers scientifiques*, 21).

[6] B. Eckmann et A. Schopf, *Über injektive Moduln* (*Archiv. d. Math.*, t. 4, 1953, p. 75-78).

[7] A. W. Goldie, *The structure of prime rings with maximum condition* (*Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 44, 1958, p. 589-608).

[8] N. Jacobson, *Structure of rings*, Providence, American mathematical Society, 1956 (*Amer. Soc. Coll. Publ.* 37).

[9] L. Lesieur, *Sur les demi-groupes réticulés satisfaisant à une condition de chaîne* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 88, 1955, p. 161-193).

[10] L. Lesieur et R. Croisot, *Théorie nœthérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif*, I (*Colloque d'Algèbre supérieure*, 1956, Bruxelles); Louvain, Ceuterick, 1957 (Centre belge de Recherches mathématiques); p. 79-121.

[11] N. H. McCoy, *Prime ideals in general rings* (*Amer. J. Math.*, t. 71, 1949, p. 823-833).