ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

M. W. POGORZELSKI

Problème généralisé de Hilbert pour les arcs non fermés

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 75, nº 3 (1958), p. 201-222

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1958_3_75_3_201_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

PROBLÈME GÉNÉRALISÉ DE HILBERT POUR LES ARCS NON FERMÉS

PAR M. W. POGORZELSKI.

1. INTRODUCTION ET LES FORMULES PRINCIPALES. — Soit, dans le plan de la variable complexe, un ensemble de p arcs dirigés $\widehat{a_1 b_1}, \widehat{a_2 b_2}, \ldots, \widehat{a_p b_p}$ non fermés et sans points communs. Le problème de Hilbert pour les arcs non fermés, proposé et résolu par M. N. Mouskhelichvili [1], consiste en la détermination d'une fonction $\Phi(z)$ holomorphe dans le plan de la variable complexe ayant les coupures $\widehat{a_1 b_1}, \widehat{a_2 b_2}, \ldots, \widehat{a_p b_p}$, dont les valeurs limites

$$\Phi^+(t), \quad \Phi^-(t)$$

des deux côtés ([1]) de chaque coupure vérifiaient la relation linéaire donnée

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \tag{1}$$

en tout point t de l'ensemble

$$L = \sum_{\nu=1}^{p} \widehat{a_\nu b_\nu}$$

non coïncidant avec les extrémités a_ν et b_ν ($a_\nu \neq b_\nu$).

Les fonctions complexes $G(t)$ et $g(t)$ sont définies sur l'ensemble fermé L et vérifient une condition de Hölder. On admet que la fonction $G(t)$ est partout *différente de zéro* et que les arcs $\widehat{a_\nu b_\nu}$ admettent des tangentes continues. En outre, on demande que la fonction holomorphe cherchée $\Phi(z)$ ait en toute

([1]) On admet que les deux côtés, positif et négatif, de toute coupure sont en telle relation avec la direction positive de la coupure comme les demi-plans $\operatorname{Im}(z) > 0$ et $\operatorname{Im}(z) < 0$ avec la direction positive de l'axe réel.

extrémité $c_1, c_2, \ldots, c_{2p} (a_\nu$ ou $b_\nu)$ des arcs L une limitation de la forme

$$|\Phi(z)| < \frac{\mathrm{Cte}}{|z - c_j|^\theta} \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2p), \tag{2}$$

θ étant une constante réelle positive, non fixée, inférieure à l'unité ; on pose

$$c_{2\nu} = b_\nu, \qquad c_{2\nu-1} = a_\nu, \qquad \text{où} \quad \nu = 1, 2, \ldots, p.$$

D'après N. Mouskhelichvili, les extrémités c_ν sont dites *singulières*, si les valeurs correspondantes de la fonction $G(c_\nu)$ sont réelles et positives.

La solution $\Phi(z)$ du problème de Hilbert est dite de classe $h(c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q})$, si cette solution est bornée aux voisinages des extrémités non singulières distinguées $c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q}$ $(q \leqq 2p)$.

Soit la fonction

$$X(z) = \prod_{j=1}^{j=2p} (z - c_j)^{\lambda_j} e^{\Gamma(z)}, \tag{3}$$

où la fonction $\Gamma(z)$ est donnée par l'intégrale du type de Cauchy

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\log G(t)\, dt}{t - z}, \tag{4}$$

les branches continues du logarithme étant fixées arbitrairement sur tout arc $\widehat{a_j b_j}$.

On choisit les constantes entières λ_ν de façon que les conditions

$$-1 < \alpha_j + \lambda_j < 1 \tag{5}$$

soient vérifiées, les constantes α_j étant définies par les égalités

$$\alpha_j + i\beta_j = \mp \frac{1}{2\pi i} \log G(c_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2p), \tag{6}$$

le signe supérieur concerne l'origine $c_{2\nu-1} = a_\nu$ de l'arc et le signe inférieur, le cas $c_{2\nu} = b_\nu$. Aux extrémités non singulières distinguées $c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q}$ on choisit les entiers λ_j tels que $0 < \alpha_j + \lambda_j < 1$. Aux extrémités singulières, les conditions (5) donnent les valeurs uniques $\lambda_j = -\alpha_j$. Pour les autres extrémités non singulières, on choisit les λ_j tels que $-1 < \alpha_j + \lambda_j < 0$.

D'après N. Mouskhelichvili [1], la fonction (3) est dite solution *canonique* de classe $h(c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q})$ du problème homogène de Hilbert :

$$X^+(t) = G(t) X^-(t). \tag{7}$$

Cette fonction $X(z)$ est holomorphe à l'extérieur des coupures $\widehat{a_j b_j}$.

Nous signalons que les valeurs limites $X^\pm(t)$ correspondent aux deux côtés de tout arc $\widehat{a_\nu b_\nu}$ qui sont disposés par rapport à la direction de l'arc comme les demi-plans supérieur et inférieur du plan de la variable complexe par rapport à l'axe réel.

On peut montrer que la solution canonique $X(z)$, dans un voisinage suffisamment petit de tout point c_j, s'exprime par le produit

$$X(z) = \Omega_j(z)(z - c_j)^{\alpha_j+\lambda_j+i\beta_j}. \tag{7'}$$

Les fonctions $\Omega_j(z)$ $(j = 1, 2, \ldots, 2n)$ sont holomorphes aux voisinages des points c_j coupés par les arcs $\widehat{a_\nu b_\nu}$ et elles sont bornées au voisinage de toute extrémité c_j.

On voit que la fonction (7') est nulle en toute extrémité distinguée $c_{k_1}, \ldots, c_{k_q}$ et vérifie la condition (2) au voisinage des autres extrémités.

La somme réelle

$$\varkappa = -\sum_{j=1}^{2p} \lambda_j \tag{8}$$

est dite *indice* de la solution de classe $h(c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q})$.

Si l'ensemble des extrémités non singulières distinguées $(c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q})$ est *vide*, nous désignons par h_0 la classe, par $X_0(z)$ la solution canonique de cette classe. L'indice $\varkappa_0$ de cette classe est plus grand que les indices de l'autre classe $h(c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q})$, nous avons notamment

$$\varkappa = \varkappa_0 - q. \tag{9}$$

En outre, il est facile de voir que la solution canonique $X(z)$ de classe $h(c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q})$ est liée à la solution canonique $X_0(z)$ par la formule

$$X(z) = (z - c_{k_1})(z - c_{k_2}) \ldots (z - c_{k_q}) X_0(z). \tag{10}$$

En appliquant aux fonctions (3) et (4) les formules de Plemelj, on obtient, pour les valeurs limites au point $t \in L$ de la solution canonique de classe $h(c_1, \ldots, c_q)$, les formules suivantes :

$$X^+(t) = \sqrt{G(t)}\, X(t), \qquad X^-(t) = \frac{X(t)}{\sqrt{G(t)}}, \tag{11}$$

où

$$X(t) = \prod_{j=1}^{2p} (t - c_j)^{\gamma_j} e^{\Gamma(t)}, \tag{12}$$

les branches des fonctions $(t - c_j)^{\gamma_j}$ étant fixées pour tous les arcs $\widehat{a_j b_j}$ et $\Gamma(t)$ étant l'intégrale singulière de la forme (4), au sens de la valeur principale de Cauchy, au point intérieur $t \in L$. On peut montrer que la fonction (12) s'exprime de la façon suivante :

$$X(t) = \omega(t) \prod_{j=1}^{2p} (t - c_j)^{\gamma_j}, \tag{13}$$

où

$$\gamma_j = \alpha_j + i\beta_j + \lambda_j, \qquad \beta_j = \mp \operatorname{Im}\left[\frac{1}{2\pi i}\log G(c_j)\right] \tag{14}$$

(le signe supérieur pour $c_\nu = a_\nu$, inférieur pour $c_\nu = b_\nu$), $\omega(t)$ est une fonction bornée, *différente de zéro* sur L et vérifiant la condition de Hölder avec le même exposant que la fonction donnée $G(t)$. N. Mouskhelichvili [1] a démontré que toute solution de classe $h(c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q})$ du problème non homogène (1) de Hilbert est donnée par la formule

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)\,dt}{X^+(t)(t-z)} + X(z)P(z), \tag{15}$$

où $P(z)$ désigne une fonction entière arbitraire.

D'après la propriété

$$\lim_{z\to\infty} z^{\varkappa} X(z) = 1 \tag{16}$$

de la solution canonique, nous concluons que, si l'indice (8) de la solution est positif, alors la solution (15) s'annule à l'infini dans le cas où l'on choisit pour la fonction $P(z)$ un polynome arbitraire de degré $\varkappa - 1$ au plus. Dans le cas $\varkappa = 0$, cette propriété sera vérifiée, si l'on pose $P(z) = 0$. Si l'indice $\varkappa$ est négatif, la solution (15) s'annule à l'infini sous certaines conditions à vérifier pour la fonction donnée $g(t)$.

2. Énoncé du problème. — Nous posons le problème de la recherche d'une suite de fonctions $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \ldots, \Phi_n(z)$, holomorphes dans le domaine du plan de la variable complexe extérieur aux coupures disjointes aux tangentes continues

$$\widehat{a_1 b_1}, \quad \widehat{a_2 b_2}, \quad \ldots, \quad \widehat{a_p b_p} \qquad (a_\nu \neq b_\nu)$$

dont les valeurs limites $\Phi_\nu^+(t)$ et $\Phi_\nu^-(t)$ des deux côtés de chaque coupure vérifient le système de n relations non linéaires données

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi_\nu^+(t) = G_\nu(t)\,\Phi_\nu^-(t) + \lambda F_\nu[t, \Phi_1^+(t), \ldots, \Phi_n^+(t), \Phi_1^-(t), \ldots, \Phi_n^-(t)] \\ \qquad\qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \end{array}\right. \tag{17}$$

en tout point $t \in L$, excepté aux extrémités a_ν, b_ν des arcs.

On demande que toutes les fonctions $\Phi_\nu(z)$ soient *bornées* aux voisinages des extrémités distinguées non singulières

$$c_{k_1}, \quad c_{k_2}, \quad \ldots, \quad c_{k_q} \tag{18}$$

et que, pour les autres extrémités c_μ, elles vérifient des inégalités de la forme

$$|\Phi_\nu(z)| < \frac{\mathrm{Cte}}{|z - c_\mu|^{\theta}}, \tag{19}$$

θ étant une constante, non fixée, inférieure à l'unité.

On admet les hypothèses suivantes :

1° Les fonctions complexes $G_\nu(t)$ sont définies sur l'ensemble *fermé* L et vérifient une condition de Hölder

$$|G_\nu(t) - G_\nu(t_1)| \leqq k_G |t - t_1|^{h_G}, \tag{20}$$

k_G étant une constante positive et l'exposant h_G, une constante positive non supérieure à l'unité. On admet, en outre, que toutes les fonctions G_ν sont différentes de zéro.

2° Les fonctions complexes $F_\nu(t, u_1, u_2, \ldots, u_{2n})$ sont définies dans la région

$$t \in L, \qquad u_j \in \Pi \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2n), \tag{21}$$

Π désignant le plan entier de la variable complexe, où elles vérifient une condition de Hölder-Lipschitz de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} |F_\nu(t, u_1, \ldots, u_{2n}) - F_\nu(t', u'_1, \ldots, u'_{2n})| \\ < k_F\left[|t - t'|^{h_F} + \sum_{j=1}^{2n} |u_j - u'_j|\right] \qquad (k_F > 0,\ 0 < h_F \leqq 1) \end{array}\right. \tag{22}$$

et, en outre, l'inégalité

$$|F_\nu(t, u_1, \ldots, u_{2n})| < m_F \sum_{j=1}^{2n} |u_j|^r + m'_F, \tag{23}$$

où m_F, m'_F, r sont des constantes positives données, on a

$$0 \leqq r < 1.$$

3. Mise du problème en un système d'équations intégrales. — D'après la formule (15) de Mouskhelichvili, nous pouvons affirmer que la solution $\Phi_1(z), \ldots, \Phi_n(z)$ du problème proposé, si elle existe, vérifie le système d'équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi_\nu(z) = \dfrac{\lambda}{2\pi i} X_\nu(z) \displaystyle\int_L \frac{F_\nu[\tau, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \ldots, \varphi_{2n}(\tau)]}{X_\nu^+(\tau)(\tau - z)} d\tau + X_\nu(z) P_\nu(z) \\ \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \end{array}\right. \tag{24}$$

où $\varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{2n}(\tau)$ désignent les valeurs limites des fonctions (24) au point $\tau \in L$ des deux côtés des arcs $\widehat{a_1 b_1}, \ldots, \widehat{a_p b_p}$

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi_\nu(\tau) = \Phi_\nu^+(\tau) \\ \varphi_{n+\nu}(\tau) = \Phi_\nu^-(\tau) \end{array}\right. \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{25}$$

$X_\nu(z)$ est la solution canonique de classe $h(c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q})$ correspondant à la fonction $G_\nu(t)$; les $P_\nu(z)$ sont certaines fonctions entières.

En faisant tendre, dans les formules (24), le point z vers un point intérieur $t \in L$ et en appliquant les formules connues de Plemelj [dans l'hypothèse que les fonctions (25) sont de classe $\mathfrak{H}_\alpha^\mu(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$, (voir le paragraphe 4)], nous constatons que les fonctions limites (25) vérifient le système d'équations intégrales singulières

$$
(26)\quad \left\{
\begin{aligned}
\varphi_\nu(t) = {} & \frac{\lambda}{2} F_\nu[t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{2n}(t)] \\
& + \frac{\lambda}{2\pi i} X_\nu^+(t) \int_L \frac{F_\nu[\tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{2n}(\tau)]}{X_\nu^+(\tau)(\tau - t)} d\tau + X_\nu^+(t) P_\nu(t), \\
\varphi_{n+\nu}(t) = {} & - \frac{\lambda}{2} \frac{X_\nu^-(t)}{X_\nu^+(t)} F_\nu[t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{2n}(t)] \\
& + \frac{\lambda}{2\pi i} X_\nu^-(t) \int_L \frac{F_\nu[\tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{2n}(\tau)]}{X_\nu^+(\tau)(\tau - t)} d\tau + X_\nu^-(t) P_\nu(t) \\
& \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n);
\end{aligned}
\right.
$$

les intégrales ont le sens de la valeur principale de Cauchy. Nous étudierons le système d'équations (26), en y traitant les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n}$ comme des inconnues et en y substituant, à la place de $P_\nu(t)$, des fonctions entières arbitraires.

4. Propriétés d'une classe de fonctions définies sur des arcs non fermés. — Pour étudier le système (26), nous introduirons une classe de fonctions complexes, définies sur l'ensemble $L = \sum_\nu \widehat{a_\nu b_\nu}$, remarquable par ses propriétés importantes.

Définition 1. — Nous appelons classe $\mathfrak{H}_\alpha^\mu$ un ensemble de toutes les fonctions complexes $\varphi(t)$, définies et continues en tout point intérieur $t \in L$, qui vérifient l'inégalité

$$
(27)\qquad |\varphi(t)| < \frac{\text{Cte}}{\left[\prod_{\nu=1}^{p} |t - a_\nu| . |t - b_\nu|\right]^\alpha}
$$

et l'inégalité généralisée de Hölder suivante :

$$
(28)\qquad |\varphi(t) - \varphi(t_1)| < \frac{\text{Cte}\, |t - t_1|^\mu}{\left[\prod_{\nu=1}^{p} |t - a_\nu| . |t_1 - b_\nu|\right]^{\alpha+\mu}},
$$

où α et μ sont des constantes réelles fixées pour la classe considérée, vérifiant les conditions

$$
(29)\qquad 0 < \mu < 1, \qquad 0 \leqq \alpha < 1, \qquad \alpha + \mu < 1.
$$

Les constantes figurant aux numérateurs des expressions (27) et (28) sont positives mais non fixées, les points t et t_1 sont situés à l'intérieur du même arc arbitraire $\widehat{a_\gamma b_\gamma}$, mais on a toujours $t_1 \in \widehat{tb_\gamma}$.

THÉORÈME 1. — *Si la fonction* $\varphi(t)$ *est de classe* $\mathfrak{H}_\alpha^\mu$, *où* $\alpha > 0$, *alors la fonction* $\psi(t)$, *définie sur* L *par une transformation singulière de Cauchy*

$$\psi(t) = \int_{\mathrm{L}} \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau - t} \tag{30}$$

est aussi de classe $\mathfrak{H}_\alpha^\mu$.

Nous avons donné la démonstration de cette propriété importante dans notre travail [2] (¹). Nous signalons la conservation des paramètres de la classe dans la transformation (30).

THÉORÈME 2. — *La classe* $\mathfrak{H}_\alpha^\mu$ *est un sous-ensemble de la classe* $\mathfrak{H}_{\alpha_1}^{\mu_1}$

$$\mathfrak{H}_\alpha^\mu \subset \mathfrak{H}_{\alpha_1}^{\mu_1} \qquad (\alpha + \mu < 1,\ \alpha_1 + \mu_1 < 1)$$

si les paramètres de classes vérifient les inégalités

$$0 < \mu_1 \leqq \mu, \qquad 0 \leqq \alpha \leqq \alpha_1.$$

Démonstration. — La propriété est évidente si $0 \leqq \alpha \leqq \alpha_1$ et si le paramètre μ reste fixe. Pour étudier l'influence du changement de la valeur du paramètre μ, considérons sur tout arc $\widehat{a_\nu b_\nu}$ un couple d'arcs $\widehat{a_\nu \mathrm{T}'_\nu}$ et $\widehat{\mathrm{T}''_\nu b_\nu}$ n'ayant pas de points communs. Nous distinguerons les deux cas suivants : 1° $t \in \widehat{a_\gamma \mathrm{T}'_\gamma}$, $t_1 \in \widehat{\mathrm{T}''_\gamma b_\gamma}$, alors la distance $|t - t_1|$ admet une borne inférieure positive et, de la limitation (27) de la fonction $\varphi(t)$ elle-même, résulte qu'on peut choisir la constante positive K suffisamment grande, pour qu'on ait

$$|\varphi(t) - \varphi(t_1)| < \mathrm{K} \frac{|t - t_1|^{\mu_1}}{\left[\prod_{\nu=1}^{p} |t - a_\nu| . |t_1 - b_\nu|\right]^{\alpha + \mu_1}} \tag{31}$$

si $\mu_1 < \mu$, les distances $|t - a_\gamma|$ et $|t_1 - b_\gamma|$ étant arbitrairement petites ; 2° les points t et t_1 sont situés simultanément sur l'arc $\widehat{a_\gamma \mathrm{T}''_\gamma}$ ou bien sur l'arc $\widehat{\mathrm{T}'_\gamma b_\gamma}$; supposons par exemple,

$$t \in \widehat{a_\gamma \mathrm{T}''_\gamma}, \qquad t_1 \in \widehat{t\,\mathrm{T}''_\gamma} ;$$

dans ce cas si $|t - t_1| \leqq |t - a_\gamma|$, alors on a évidemment

$$\frac{|t - t_1|^\mu}{|t - a_\gamma|^\mu} \leqq \frac{|t - t_1|^{\mu_1}}{|t - a_\gamma|^{\mu_1}} \qquad \text{si} \quad \mu_1 < \mu$$

(¹) La démonstration donnée dans le travail cité est aussi vraie dans le cas actuel, où les tangentes ne sont que continues.

et la distance $|t_1 - b_\gamma|$ a une borne inférieure positive, donc l'inégalité (31) restera vraie, la constante K étant choisie suffisamment grande; il ne reste que le cas $|t - t_1| > |t - a_\gamma|$, mais alors l'inégalité (31) résulte directement de la limitation (27), K étant suffisamment grand. Le théorème 2 est donc démontré.

Définition 2. — Nous appelons classe $\mathfrak{H}_\alpha^\mu(c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q})$ l'ensemble de toutes les fonctions de classe $\mathfrak{H}_\alpha^\mu$ qui sont bornées aux voisinages des extrémités distinguées

$$c_{k_1} \quad c_{k_2}, \quad \ldots, \quad c_{k_q} \qquad (q \leqq 2p)$$

des arcs ($c_{2\nu} = b_\nu$, $c_{2\nu-1} = a_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, p$), et qui vérifient les deux inégalités suivantes :

$$|\varphi(t) < \frac{\mathrm{Cte}}{\prod_{\nu=1}^{p} |t - a_\nu|^{\theta_\nu \alpha} |t - b_\nu|^{\theta'_\nu \alpha}}, \tag{32}$$

$$|\varphi(t) - \varphi(t_1)| < \frac{\mathrm{Cte}\, |t - t_1|^\mu}{\prod_{\nu=1}^{p} |t - a_\nu|^{\theta_\nu \alpha + \mu} |t_1 - b_\nu|^{\theta'_\nu \alpha + \mu}} \qquad (t_1 \in \widehat{tb_\gamma}) \tag{33}$$

($\alpha + \mu < 1$), où $\theta_\nu = 0$, si a_ν coïncide avec l'une des extrémités $c_{k_1}, \ldots, c_{k_q}$ et $\theta_\nu = 1$ dans le cas contraire; θ'_ν admet des valeurs analogues relativement au point b_ν. Signalons que la fonction $\varphi(t)$, quoique bornée aux voisinages des extrémités $c_{k_1}, \ldots, c_{k_q}$, n'a pas nécessairement des limites en ces points.

THÉORÈME 3. — *Si la fonction $\varphi(\tau)$ est de classe $\mathfrak{H}_\alpha^\mu(c_{k_1}, \ldots c_{k_q})$, la fonction $\psi(t)$ transformée par la formule*

$$\psi(t) = \prod_{j=1}^{2p} (t - c_j)^{\gamma_j} \int_L \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\prod_{j=1}^{2p} (\tau - c_j)^{\gamma_j} (\tau - t)} \qquad (t \in L) \tag{34}$$

est de classe $\mathfrak{H}_\rho^\mu(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$; on admet que les constantes $\gamma_j = \gamma'_j + i\gamma''_j$ vérifient les inégalités

$$\left\{\begin{array}{lll} 0 < \gamma'_j < 1 & si & j = k_1, \ldots, k_q, \\ -1 < \gamma'_j \leqq 0 & si & j \neq k_1, \ldots, k_q, \\ \mu + \max|\gamma'_j| < 1 & si & j = 1, 2, \ldots, 2p, \end{array}\right. \tag{35}$$

enfin la constante ρ a les valeurs suivantes :

$$\left\{\begin{array}{llll} \rho = \alpha & si & \alpha > \beta = \max|\gamma'_j| & pour \quad j \neq k_1, \ldots, k_q, \\ \rho = \beta & si & \alpha < \beta. & \end{array}\right. \tag{35'}$$

Démonstration. — Pour démontrer le théorème, il suffit d'étudier l'intégrale

$$F_j(t) = \int_{c_j c_{j\pm 1}} \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{(\tau - c_j)^{\gamma_j} (\tau - t)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2p) \tag{36}$$

dans un voisinage suffisamment petit et fermé de l'extrémité c_j ne contenant pas des autres extrémités. Une branche continue de la fonction $(\tau - c_j)^{\gamma_j}$ étant choisie, nous appliquerons le théorème sur le module de l'intégrale et nous aurons l'inégalité (²)

$$|(\tau - c_j)^{-\gamma_j} - (\tau_1 - c_j)^{-\gamma_j}| < \text{Cte} \sup |\tau' - c_j|^{-\gamma_j'-1} |\tau - \tau_1|,$$

où la borne supérieure concerne les points τ' sur l'arc $\widehat{\tau\tau_1}$. Nous en déduirons les inégalités

$$\left|\frac{1}{(\tau - c_j)^{\gamma_j}} - \frac{1}{(\tau_1 - c_j)^{\gamma_j}}\right| < \begin{cases} \dfrac{\text{Cte}\,|\tau - \tau_1|^{\mu}}{|\tau - c_j|^{\gamma_j'+\mu}} & \text{si} \quad \gamma_j' + \mu > 0, \\ \dfrac{\text{Cte}\,|\tau - \tau_1|^{\mu}}{|\tau_1 - c_j|^{\gamma_j'+\mu}} & \text{si} \quad \gamma_j' + \mu < 0 \end{cases} \tag{37}$$

sous la supposition que $\tau \in \widehat{c_j\tau_1}$. Il en résulte que la fonction

$$\varphi^*(\tau) = \varphi(\tau)(\tau - c_j)^{-\gamma_j} \tag{38}$$

vérifie au voisinage du point c_j les inégalités

$$\begin{cases} |\varphi^*(\tau)| < \dfrac{\text{Cte}}{|\tau - c_j|^{\theta^j\alpha+\gamma_j'}}, \\ |\varphi^*(\tau) - \varphi^*(\tau_1)| < \dfrac{\text{Cte}\,|\tau - \tau_1|^{\mu}}{|\tau - c_j|^{\theta^j\alpha+\gamma_j'+\mu}}, \end{cases} \tag{38'}$$

si $\theta^j\alpha + \gamma_j' > 0$ ($\theta^j = 0$, si $j = k_1, \ldots, k_q$ et $\theta^j = 1$ dans le cas contraire). Nous en concluons, d'après le théorème 1, que la fonction (36) vérifie au voisinage de l'extrémité c_j les inégalités

$$\begin{cases} |F_j(t)| < \dfrac{\text{Cte}}{|t - c_j|^{\theta^j\alpha+\gamma_j'}}, \\ |F_j(t) - F_j(t_1)| < \dfrac{\text{Cte}\,|t - t_1|^{\mu}}{|t - c_j|^{\theta^j\alpha+\gamma_j'+\mu}} \end{cases} \tag{39}$$

sous la même hypothèse que $\alpha + \gamma_j' > 0$.

Dans le cas $\alpha + \gamma_j' < 0$, mais $\alpha + \gamma_j' + \mu > 0$ (ce qui n'a lieu que si $j \neq k_1, \ldots, k_q$), on applique le même raisonnement que dans la démonstration du théorème 1 et l'on conclut que la fonction $F_j(t)$ vérifie, au voisinage de l'extrémité c_j, les inégalités

$$\begin{cases} |F_j(t)| < \text{Cte}, \\ |F_j(t) - F_j(t_1)| < \dfrac{\text{Cte}\,|t - t_1|^{\mu}}{|t - c_j|^{\theta^j\alpha+\gamma_j'+\mu}}. \end{cases} \tag{40}$$

(²) On s'appuie ici, et dans la preuve du théorème suivant, sur la propriété qu'il existe une constante positive χ, inférieure à l'unité, telle que le rapport $\dfrac{|t_1 - t_2|}{s_{12}}$ vérifie les inégalités $0 < \chi \leq \dfrac{|t_1 - t_2|}{s_{12}} \leq 1$, t_1 et t_2 étant deux points arbitraires de l'arc $\widehat{ab}$ et s_{12} la longueur de la partie de cet arc qui joint les points t_1 et t_2.

Enfin, si $\alpha+\gamma'_j+\mu<0$, la fonction (38) tendant vers zéro, si $\tau\to c_j$, admet un coefficient de Hölder tendant aussi vers zéro et la fonction (36) vérifie la condition de Hölder avec un coefficient borné au voisinage du point c_j.

Les propriétés démontrées de la fonction (36) confirment l'affirmation du théorème 3, c'est-à-dire que la fonction transformée (34) est de classe $\mathfrak{H}^{\mu}_{\rho}$. Nous signalons encore que, d'après la transformation du théorème 1 (*voir* [2]), les inégalités concernant la fonction transformée (34) ont la forme

$$(41)\qquad |\psi(t)|<\frac{C_1M_\varphi+C_2k_\varphi}{\prod\limits_{\nu=1}^{p}|t-a_\nu|^{\theta_\nu\rho}|t-b_\nu|^{\theta'_\nu\rho}},$$

$$(42)\qquad |\psi(t)-\psi(t_1)|<\frac{(C'_1M_\varphi+C'_2k_\varphi)|t-t_1|^{\mu}}{\prod\limits_{\nu=1}^{p}|t-a_\nu|^{\theta_\nu\rho+\mu}|t_1-b_\nu|^{\theta'_\nu\rho+\mu}},$$

où M_φ et k_φ sont des constantes positives, figurant aux numérateurs des expressions correspondantes (32) et (33) concernant la fonction donnée $\varphi(t)$; les constantes positives C_1, C_2, C'_1, C'_2 ne dépendent pas de la fonction $\varphi(t)$.

THÉORÈME 4. — *Si la fonction* $\varphi(\tau)$ *est de classe* $\mathfrak{H}^{\mu}_{\alpha}(c_{k_1},\ldots,c_{k_q})$, *alors toute branche de la fonction analytique*

$$(43)\qquad \Phi(z)=\prod_{j=1}^{2p}(z-c_j)^{\gamma_j}\int_L\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\prod\limits_{j=1}^{2p}(\tau-c_j)^{\gamma_j}(\tau-z)}$$

(*les hypothèses précédentes concernant les constantes* γ_j *étant conservées*) *holomorphe au voisinage suffisamment petit de toute l'extrémité* c_j, *coupé par un arc correspondant* $\widehat{c_jc_{j\pm1}}$, *est bornée aux voisinages des extrémités distinguées* $c_{k_1},\ldots,c_{k_q}$ *et vérifie l'inégalité à singularité faible*

$$(44)\qquad |\Phi(z)|<\frac{\mathrm{Cte}}{|z-c_j|^{\rho}}$$

au voisinage de toute autre extrémité; le nombre $\rho<1$ *est défini par les formules* (35').

Démonstration. — Pour démontrer le théorème, il suffit d'étudier la fonction

$$(45)\qquad \Phi_c(z)=(z-c)^{\gamma}\int_{cc'}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-c)^{\gamma}(\tau-z)}$$

dans un voisinage suffisamment petit de l'extrémité c choisie arbitrairement parmi les extrémités $c_1, c_2, \ldots, c_{2p}$; on a désigné par c' la seconde extrémité de l'arc choisi. Nous avons désigné, en outre, par $\gamma=\gamma'+i\gamma''$ un des exposants $\gamma_j=\gamma'_j+i\gamma''_j$ qui correspond à l'extrémité c. On a donc $0<\gamma'<1$, si c appartient à l'ensemble des extrémités distinguées $c_{k_1}, \ldots, c_{k_q}$, et $-1 < \gamma' \leqq 0$, dans le cas contraire. Nous signalons que la fonction $\varphi(\tau)$, quoique bornée aux voisinages des extrémitées distinguées $c_{k_1}, \ldots, c_{k_q}$, n'a pas nécessairement des limites en ces points. Cette généralisation de nos hypothèses exige d'autres méthodes pour l'étude de l'intégrale de la forme (45), considérée aussi par N. I. Mouskhelichvili dans son Ouvrage [1].

Soit une demi-tangente cT_0 issue du point c, sur laquelle sont situées les projections orthogonales des points de l'arc $\widehat{cc'}$ au voisinage de l'extrémité c. Soient ensuite les deux demi-droites cT_1 et cT_2 situées des deux côtés de la tangente cT_0 et faisant avec elle le même angle *aigu*. Considérons un voisinage fermé V_c du point c, ne contenant pas le point c', de diamètre suffisamment petit pour que la perpendiculaire à la droite cT_0 issue de tout point $z \in V_c$, situé à l'intérieur de l'angle convexe entre cT_1 et cT_2 contenant cT_0, coupait la portion $\widehat{cv}$ de l'arc $\widehat{cc'}$ située dans V_c en un seul point t. On suppose, de plus, que le domaine V_c est suffisamment petit pour que la tangente en tout point de l'arc $\widehat{cv}$ fasse avec la tangente cT_0 un angle aigu plus petit que celui des demi-droites cT_1 et cT_0. Désignons par $\mathcal{E}_c$ l'ensemble de tous les points $z \neq t$, situés simultanément dans le voisinage V_c et à l'intérieur de l'angle convexe T_1cT_2, pour lesquels la longueur de l'arc correspondant $\widehat{ct}$ est inférieure à la moitié de la longueur de l'arc $\widehat{cv}$.

Pour étudier la fonction (45) au voisinage de l'extrémité c, supposons d'abord $z \in \mathcal{E}_c$ et décomposons l'intégrale (45) en somme

$$\Phi_c(z) = \Phi_c^{ct_0}(z) + \Phi_c^{t_0c'}(z) \tag{46}$$

des intégrales étendues aux arcs $\widehat{ct_0}$ et $\widehat{t_0c'}$, où t_0 est un point de l'arc $\widehat{cv}$ tel que les longueurs des arcs $\widehat{ct}$ et $\widehat{tt_0}$ soient égales.

Écrivons maintenant la première des intégrales (46) de la façon suivante :

$$\Phi_c^{ct_0}(z) = (z-c)^{\gamma} \int_{ct_0} \frac{(\tau-c)^{-\gamma}\varphi(\tau) - (t-c)^{-\gamma}\varphi(t)}{\tau - z}\, d\tau + \frac{(z-c)^{\gamma}}{(t-c)^{\gamma}}\varphi(t) \int_{ct_0} \frac{d\tau}{\tau - z} \tag{47}$$

et remarquons que le produit $(\tau - c)^{-\gamma}\varphi(\tau)$ vérifie les inégalités (38′). Nous en déduirons pour la première composante, $I^{ct_0}(z)$, de la somme (47) les limitations suivantes :

1° Dans le cas $\theta\alpha + \gamma' + \mu \geqq 0$,

$$\begin{aligned} |I^{ct_0}(z)| &< \mathrm{Cte}\,|z-c|^{\gamma'} \int_{ct} \frac{dl_\tau}{|\tau - c|^{\theta\alpha+\gamma'+\mu}\,|\tau - t|^{1-\mu}} \\ &\quad + \mathrm{Cte}\,|z-c|^{\gamma'} \int_{tt_0} \frac{dl_\tau}{|t-c|^{\theta\alpha+\gamma'+\mu}\,|\tau - t|^{1-\mu}}; \end{aligned}$$

2° Dans le cas $\theta\alpha + \gamma' + \mu < 0$,

$$\begin{aligned} |I^{ct_0}(z)| &< \mathrm{Cte}\,|z-c|^{\gamma'} \int_{ct} \frac{dl_\tau}{|t - c|^{\theta\alpha+\gamma'+\mu}\,|\tau - t|^{1-\mu}} \\ &\quad + \mathrm{Cte}\,|z-c|^{\gamma'} \int_{tt_0} \frac{dl_\tau}{|\tau-c|^{\theta\alpha+\gamma'+\mu}\,|\tau - t|^{1-\mu}}; \end{aligned}$$

signalons que $\theta = 0$, si c appartient à l'ensemble $c_{k_1}, \ldots, c_{k_q}$ (alors $0 < \gamma' < 1$) et $\theta = 1$ dans le cas contraire $(-1 < \gamma' \leqq 0)$. En remarquant maintenant que le rapport $\frac{|t-c|}{|z-c|}$ est borné, si $z \in \mathcal{E}_c$, nous déduirons dans les deux cas antérieurs l'inégalité

$$|\mathrm{I}^{c'l_0}(z)| < \frac{\mathrm{Cte}}{|z-c|^{\theta\rho_c}}; \tag{48}$$

où $\rho_c = |\gamma'|$ si $\alpha < |\gamma'|$ et $\rho_c = \alpha$ si $\alpha > |\gamma'|$.

La limitation de la seconde composante de la somme (47) est évidente, puisque l'intégrale qui y figure est bornée pour $z \in \mathcal{E}_c$ et nous obtenons pour l'intégrale (47) la limitation suivante :

$$|\Phi_c^{c'l_0}(z)| < \frac{\mathrm{Cte}}{|z-c|^{\theta\rho_c}}. \tag{49}$$

La limitation de la seconde composante de la somme (46) est plus aisée puisqu'elle n'exige pas de la décomposition (47). En désignant par s et σ les longueurs des arcs $\widehat{ct}$ et $\widehat{c\tau}$ et en tenant compte de l'inégalité $\frac{\sigma - s}{\sigma} \geqq \frac{1}{2}$, si $\sigma \geqq 2s$, nous aurons

$$\begin{aligned} |\Phi_c^{l_0c'}(z)| &< \mathrm{Cte}\,|z-c|^{\gamma'} \int_{l_0c'} \frac{dl_\tau}{|\tau - c|^{\theta\alpha+\gamma'}\,|\tau - t|} \\ &< \mathrm{Cte}\,|z-c|^{\gamma'} \int_{2s}^{|cc'|} \frac{d\sigma}{\sigma^{\theta\alpha+\gamma'+1}} < \frac{\mathrm{Cte}}{|z-c|^{\theta\rho_c}}. \end{aligned} \tag{50}$$

En réunissant les résultats (49) et (50), nous voyons que l'intégrale (45) vérifie l'inégalité

$$|\Phi_0(z)| < \frac{\mathrm{Cte}}{|z-c|^{\theta\rho_c}} \qquad \text{si} \quad z \in \mathcal{E}_c, \tag{51}$$

elle est donc bornée, si c appartient à l'ensemble $c_{k_1}, \ldots, c_{k_q}$. Il reste à étudier le cas, où le point z est situé dans le domaine $\mathcal{E}'_c$ commun au voisinage V_c et à l'angle concave limité par les demi-droites cT_1 et cT_2 (ne contenant pas la demi-tangente cT_0). On peut montrer par un calcul élémentaire que si le point $z \neq c$ est situé dans le domaine $\mathcal{E}'_c$ et le point τ à l'intérieur de l'arc $\widehat{cv}$, alors les trois distances $|z-c|$, $|z-\tau|$, $|\tau - c|$ vérifient l'inégalité

$$\frac{|\tau - z|}{|z-c| + |\tau - c|} \geqq \sin\frac{\vartheta}{2}, \tag{52}$$

où ϑ est la borne inférieure *positive* de la mesure de l'angle aigu que fait le vecteur $\tau - c$, pour $\tau \in \widehat{cv}$, avec les demi-droites cT_1 et cT_2. Il en résulte, pour la partie de l'intégrale (45) étendue à l'arc $\widehat{cv}$, dans le cas $z \in \mathcal{E}'_c$, l'inégalité

$$\begin{aligned} &\left|(z-c)^{\gamma} \int_{cv} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau - c)^{\gamma}(\tau - z)}\right| \\ &\quad < |z-c|^{\gamma'} \left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^{-1} \int_{cv} \frac{\mathrm{Cte}\,dl_\tau}{|\tau - c|^{\theta\alpha+\gamma'}[\,|z-c| + |\tau - c|\,]} < \frac{\mathrm{Cte}}{|z-c|^{\theta\rho_c}} \end{aligned} \tag{53}$$

si petit que soit $|z-c|$. En somme l'intégrale (45) vérifie l'inégalité

$$|\Phi_c(z)| < \frac{\mathrm{Cte}}{|z-c|^{\theta\rho_c}}$$

dans un voisinage suffisamment petit de l'extrémité c choisi arbitrairement. En conséquence, nous en déduirons l'affirmation du théorème 4.

5. Existence de la solution du problème. — Le système d'équations intégrales singulières (26) étant non résoluble par les méthodes de l'Analyse classique, nous donnerons la preuve d'existence de la solution de ce système par l'application du théorème topologique de J. Schauder [3] sur le point invariant d'une transformation (3) :

« Si, dans un espace linéaire, normé et complet (c'est-à-dire un espace de Banach), une transformation continue fait correspondre à un ensemble E de points, convexe et fermé, son sous-ensemble compact, alors il existe dans l'ensemble E au moins un point invariant de la transformation. »

Soit donc un espace fonctionnel Λ composé de tous les systèmes

$$[\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \ldots,\ \varphi_{2n}(t)]$$

de $2n$ fonctions complexes, définies dans l'ensemble des points intérieurs des arcs $L = \widehat{a_1 b_1} + \widehat{a_2 b_2} + \ldots + \widehat{a_p b_p}$, *continues* en tout point $t \in L$, distinct des extrémités a_ν, b_ν et vérifiant les inégalités

$$(54) \qquad |\varphi_\nu(t)| \leq \frac{\mathrm{Cte}}{\left[\prod_{c_j \in Z} |t-c_j|\right]^{A}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 2n),$$

les produits étant étendus à l'ensemble Z de toutes les extrémités c_j *différentes* des extrémités distinguées pour la classe $h(c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q})$. Les fonctions $\varphi_\nu(t)$ sont donc bornées au voisinage des extrémités $c_{k_1}, \ldots, c_{k_q}$. La constante qui figure dans le numérateur du membre droit de l'inégalité (54) prend, pour l'espace Λ, toutes les valeurs positives possibles, mais l'exposant constant positif A, fixé au dénominateur, a une valeur unique pour tout l'espace Λ choisie arbitrairement parmi les nombres inférieurs à l'unité, mais supérieurs à la plus grande des valeurs absolues

$$(55) \qquad \max_{j,\nu} |\alpha_j^\nu + \lambda_j^\nu| < A < 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

liés à la solution $X_\nu(z)$ de classe $h(c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q})$, l'indice variable j prenant

(3) C'est Gousseïnov dans le travail [4] qui, le premier, a appliqué la méthode topologique pour l'étude de l'équation intégrale singulière dans le cas particulier d'un segment de l'axe réel.

toutes les valeurs pour lesquelles les sommes $\alpha_j^\nu + \lambda_j^\nu$ sont *négatives* [*voir* (5), (7) et (7')], ou nulles.

On définit la somme des deux points de l'espace Λ par la formule

$$(56) \qquad [\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n}] + [\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_{2n}] = [\varphi_1 + \varphi'_1, \ldots, \varphi_{2n} + \varphi'_{2n}]$$

et le produit du point $[\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n}]$ par un nombre réel λ par la formule

$$(56') \qquad \lambda[\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n}] = [\lambda\varphi_1, \ldots, \lambda\varphi_{2n}].$$

Ensuite, on définit la norme du point $U = [\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n}]$ par la plus grande des bornes supérieures des produits

$$(57) \qquad \| U \| = \max_{1 \leqq \nu \leqq 2n} \sup_{t \in L} \left[\prod_{j=1}^{2p} | t - c_j |^{\theta^j A + \mu} | \varphi_\nu(t) | \right],$$

où $\theta^j = 0$, si c_j appartient à l'ensemble des extrémités distinguées $c_{k_1}, \ldots, c_{k_q}$ et $\theta^j = 1$, si $c_j \in Z$.

La constante positive μ dans la définition (57) est fixée arbitrairement de façon qu'on ait

$$(58) \qquad 0 < \mu + \tilde{A} < 1, \qquad \mu \leqq \min(h_G, h_F), \qquad (A + \mu) r \leqq A,$$

où les constantes r, h_G et h_F caractérisent les fonctions G_ν et F_ν dans les inégalités admises (20), (22) et (23), $\tilde{A}$ est le plus grand de tous les nombres $|\alpha_j^\nu + \lambda_j^\nu|$.

On définit la distance des deux points U et V de l'espace Λ, comme d'habitude, par la norme de la différence de ces points ;

$$(59) \qquad \delta(U, V) = \| U - V \|.$$

L'espace Λ est donc *linéaire* et *normé*; en outre, on voit qu'il est *complet*, puisque la condition de Cauchy est à la fois nécessaire et suffisante pour la convergence d'une suite de points de l'espace Λ, au sens de la norme (57).

L'espace Λ est, par conséquent, un espace de Banach.

Considérons maintenant dans l'espace Λ un ensemble E de tous les points $U = [\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n}]$ ayant les propriétés suivantes :

$$(60) \qquad \begin{cases} \| U \| \leqq \rho, \\ \displaystyle\prod_{j=1}^{p} | t - a_j |^{\theta_j A + \mu} | t_1 - b_j |^{\theta'_j A + \mu} | \varphi_\nu(t) - \varphi_\nu(t_1) | \leqq \varkappa | t - t_1 |^\mu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 2n), \end{cases}$$

où ρ et $\varkappa$ sont des nombres positifs fixés arbitrairement; $\theta_j = 0$ si le point a_j appartient à l'ensemble des extrémités distinguées $c_{k_1}, \ldots, c_{k_q}$ et $\theta_j = 1$ dans le cas contraire, θ'_j a des valeurs analogues relativement au point b_j. On suppose, comme d'habitude, que le point t_1 est situé sur l'arc $\widehat{tb_\gamma}$.

En accord avec la définition donnée précédemment, les fonctions $\varphi_\nu(t)$ liées avec l'ensemble E sont de classe $\mathfrak{H}_A^\mu(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$.

L'ensemble E est évidemment *fermé*, puisque le point limite d'une suite arbitraire de points, vérifiant les conditions (60), vérifie aussi ces conditions.

En outre, l'ensemble E est *convexe*; en effet, si les deux points U_1 et U_2 vérifient les conditions (60), alors leur combinaison linéaire $[\gamma U_1 + (1-\gamma) U_2]$ vérifie aussi ces conditions, lorsque γ varie de 0 à 1.

D'après la forme du système d'équations proposé (26), transformons l'ensemble E par les relations

$$(61)\quad \left\{\begin{aligned} \psi_\nu(t) &= \frac{1}{2}\lambda F_\nu[t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{2n}(t)] \\ &\quad + \frac{\lambda}{2\pi i} X_\nu^+(t) \int_L \frac{F_\nu[\tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{2n}(\tau)]}{X_\nu^+(\tau)(\tau - t)} d\tau + X_\nu^+(t) P_\nu(t), \\ \psi_{n+\nu}(t) &= -\frac{1}{2}\lambda F_\nu[t, \varphi_1(t), \ldots \varphi_{2n}(t)] \frac{X_\nu^-(t)}{X_\nu^+(t)} \\ &\quad + \frac{\lambda}{2\pi i} X_\nu^-(t) \int_L \frac{F_\nu[\tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{2n}(\tau)]}{X_\nu^+(\tau)(\tau - t)} d\tau + X_\nu^-(t) P_\nu(t) \\ &\qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right.$$

D'après les propriétés admises (22) et (23) des fonctions F_ν et les inégalités (60), les fonctions dans les intégrales (61) vérifient l'inégalité

$$(62)\qquad |F_\nu[\tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{2n}(\tau)]| < \frac{2nm_F \rho^r + m_F C}{\prod_{j=1}^{2p} |\tau - c_j|^{(\theta'_j A + \mu) r}},$$

où la constante C est une borne supérieure suivante :

$$(62')\qquad C = \sup_{t \in L} \left\{ \prod_{j=1}^{2p} |t - c_j|^{(\theta'_j A + \mu) r} \right\}$$

et vérifient les inégalités de Hölder suivantes :

$$(63)\qquad \begin{aligned} &|F_\nu[\tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{2n}(\tau)] - F_\nu[\tau_1, \varphi_1(\tau_1), \ldots, \varphi_{2n}(\tau_1)]| \\ &\quad < k_F \left[|\tau - \tau_1|^{h_F} + \frac{2n\varkappa |\tau - \tau_1|^\mu}{\prod_{j=1}^{p} |\tau - a_j|^{\theta_j A + \mu} |\tau_1 - b_j|^{\theta'_j A + \mu}} \right] \\ &\quad < \frac{k_F (C' + 2n\varkappa) |\tau - \tau_1|^\mu}{\prod_{j=1}^{p} |\tau - a_j|^{\theta_j A + \mu} |\tau_1 - b_j|^{\theta'_j A + \mu}}, \end{aligned}$$

où la constante positive C', ne dépendant que des arcs L, est la borne supérieure suivante :

$$(63')\qquad C' = \sup_{\tau, \tau_1 \in L} \left\{ |\tau - \tau_1|^{h_F - \mu} \prod_{j=1}^{p} |\tau - a_j|^{\theta_j A + \mu} |\tau_1 - b_j|^{\theta'_j A + \mu} \right\}.$$

Nous en concluons, en tenant compte des formules (11), (13) et du théorème 3, que les fonctions (61) sont définies et continues à l'intérieur des arcs L et qu'elles vérifient les inégalités de la forme

$$(64)\qquad |\psi_\nu(t)| \leqq \frac{|\lambda|\,C_1(2nm_F\rho^r + m'_F C) + |\lambda|\,C_2 k_F(C' + 2n\varkappa) + C_3 M_P}{\prod_{j=1}^{2p} |t - c_j|^{A\theta^j}},$$

$$(65)\qquad |\psi_\nu(t) - \psi_\nu(t_1)| \leqq \frac{|\lambda|\,C'_1(2nm_F\rho^r + m'_F C) + |\lambda|\,C'_2 k_F(C' + 2n\varkappa) + C'_3 M_P + C'_4 k_P}{\prod_{j=1}^{p} |t - a_j|^{\theta_j A + \mu}\,|t_1 - b_j|^{\theta'_j A + \mu}}\,|t - t_1|^\mu,$$

où les constantes C_1, C_2, C_3, C'_1, C'_2, C'_3, C'_4 sont positives et indépendantes des fonctions F_ν; M_P désigne une borne supérieure des fonctions $P_\nu(t)$ sur L et k_P est un coefficient de Hölder concernant les fonctions $P_\nu(t)$ sur L. La transformation (61) fait donc correspondre, à tout point $[\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n}]$ de l'ensemble E, un point $[\psi_1, \ldots, \psi_{2n}]$ de l'espace Λ et toutes ses composantes $\psi_\nu(t)$ sont aussi des fonctions de classe $\mathfrak{H}^\mu_A(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$, comme les fonctions $\varphi_\nu(t)$ pour l'ensemble E. En tenant compte des propriétés (64) et (65) de l'ensemble transformé E', nous pouvons affirmer que cet ensemble fera partie de l'ensemble E, si les constantes du problème vérifient les conditions suivantes :

$$(66)\qquad \begin{cases} |\lambda|\,C_1(2nm_F\rho^r + m'_F C) + |\lambda|\,C_2 k_F(C' + 2n\varkappa) + C_3 M_P \leqq \rho C_4^{-1}, \\ |\lambda|\,C'_1(2nm_F\rho^r + m'_F C) + |\lambda|\,C'_2 k_F(C' + 2n\varkappa) + C'_3 M_P + C'_4 k_P \leqq \varkappa, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(67)\qquad C_4 = \sup_{t \in L} \left[\prod_{j=1}^{p} |t - a_j|.|t - b_j| \right]^\mu.$$

Les constantes $\varkappa$ et ρ étant arbitraires, nous voyons que les inégalités (66) seront toujours vérifiées, si le module du paramètre λ est suffisamment petit.

Avant d'appliquer le théorème de Schauder, nous démontrerons encore les deux théorèmes suivants :

Théorème 5. — *La transformation de l'ensemble* E *par les relations* (61) *est continue dans l'espace* Λ.

Démonstration. — Soit une suite arbitraire $\{U_m\}$ de points $U_m = [\varphi_1^{(m)}, \ldots, \varphi_{2n}^{(m)}]$ de l'ensemble E, convergente vers un point $U = [\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n}]$ de cet ensemble au sens de la norme (57), c'est-à-dire qu'on a

$$(68)\qquad \delta(U_m, U) = \max_\nu \sup_L \left[\prod_{j=1}^{2p} |t - c_j|^{\theta^j A + \mu} |\varphi_\nu^{(m)}(t) - \varphi_\nu(t)| \right] \to 0.$$

Pour démontrer le théorème, il est nécessaire et suffisant de démontrer que la suite $\{U'_m\}$ de points $U'_m=[\psi_1^{(m)}, \ldots, \psi_{2n}^{(m)}]$, transformés par les relations (61), converge vers un point $U'=[\psi_1, \ldots, \psi_{2n}]$ qui correspond au point limite U par les relations (61). Étudions dans ce but la différence

$$(69)\qquad \psi_\nu^{(m)}(t)-\psi_\nu(t)=\frac{\lambda}{2}Y_\nu(t)F_\nu[t, \varphi_1^{(m)}(t), \ldots, \varphi_{2n}^{(m)}(t)] - \frac{\lambda}{2}Y_\nu(t)F_\nu[t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{2n}(t)]+I_\nu^{(m)}(t)-I_\nu(t),$$

où l'on a posé

$$(69')\qquad \begin{cases} I_\nu^{(m)}(t)=\dfrac{\lambda}{2\pi i}X_\nu^+(t)Y_\nu(t)\displaystyle\int_L \frac{F_\nu[\tau, \varphi_1^{(m)}(\tau), \ldots, \varphi_{2n}^{(m)}(\tau)]}{X_\nu^+(\tau)(\tau-t)}d\tau, \\ I_\nu(t)=\dfrac{\lambda}{2\pi i}X_\nu^+(t)Y_\nu(t)\displaystyle\int_L \frac{F_\nu[\tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{2n}(\tau)]}{X_\nu^+(\tau)(\tau-t)}d\tau; \end{cases}$$

en outre, on a

$$(69'')\qquad \begin{cases} X_\nu^+(t)=X_{\nu-n}^+(t), \qquad F_\nu=F_{\nu-n}, \qquad \text{si } \nu=n+1,\ n+2,\ \ldots,\ 2n, \\ Y_\nu(t)=\begin{cases} 1, & \text{si } \nu=1, 2, \ldots, n, \\ X_{\nu-n}^-(t)/X_{\nu-n}^+(t), & \text{si } \nu=n+1,\ n+2,\ \ldots,\ 2n. \end{cases} \end{cases}$$

L'étude de la première différence du membre droit de l'égalité (69) est immédiate. Nous aurons notamment, d'après l'hypothèse (22),

$$|F_\nu[t, \varphi_1^{(m)}(t), \ldots, \varphi_{2n}^{(m)}(t)]-F_\nu[t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{2n}(t)]|<k_F\sum_{\nu=1}^{m}|\varphi_\nu^{(m)}(t)-\varphi_\nu(t)|,$$

donc, d'après la convergence admise (68), nous constatons que

$$(70)\qquad \max_\nu \sup_{t\in L}\left\{\prod_{j=1}^{2p}|t-c_j|^{\theta_j\Lambda+\mu}|F_\nu[t, \varphi_1^{(m)}, \ldots, \varphi_{2n}^{(m)}]-F_\nu[t, \varphi_1, \ldots, \varphi_{2n}]|\right\}\to 0 \quad \text{si } m\to\infty.$$

Pour étudier la différence des intégrales (69′), considérons un arc l, portion d'un arc arbitraire $\widehat{a_\gamma b_\gamma}$ contenant le point t, dont l'une des extrémités l', l'' peut coïncider avec les extrémités a_γ ou b_γ. Sans restreindre la généralité, nous supposons que le point t soit situé au milieu de l'arc l, si cet arc avec ses extrémités l', l'' est situé à l'intérieur de l'arc $\widehat{a_\gamma b_\gamma}$, ou bien que la longueur de l'arc $\widehat{l't}$ est au plus égale à la longueur de l'arc $\widehat{tl''}$, si l'une des extrémités, par exemple l', coïncide avec l'extrémité a_γ ou b_γ. Décomposons maintenant les intégrales (69′) en sommes d'intégrales

$$(71)\qquad \begin{cases} I_\nu^{(m)}(t)=I_\nu^{(m)l}(t)+I_\nu^{m(L-l)}(t), \\ I_\nu(t)=I_\nu^l(t)+I_\nu^{L-l}(t) \end{cases}$$

étendues à l'arc l et à la partie extérieure $L-l$. Décomposons ensuite les intégrales $I_\nu^{(m)l}(t)$ de la façon suivante :

$$(72)\quad I_\nu^{(m)l}(t) = \frac{\lambda}{2\pi i} X_\nu^+(t)\, Y_\nu(t) \int_l \Big\{ F_\nu[\tau, \varphi_1^{(m)}(\tau), \ldots, \varphi_{2n}^{(m)}(\tau)]\, [X_\nu^+(\tau)]^{-1} - F_\nu[t, \varphi_1^{(m)}(t), \ldots, \varphi_{2n}^{(m)}(t)]\, [X_\nu^+(t)]^{-1} \Big\} \frac{d\tau}{\tau - t} + \frac{\lambda}{2\pi i} Y_\nu(t)\, F_\nu[t, \varphi_1^{(m)}(t), \ldots, \varphi_{2n}^{(m)}(t)] \int_l \frac{d\tau}{\tau - t}.$$

Le premier membre de cette somme, que nous désignons par $J_\nu^{(m)}(t)$, d'après les inégalités (62) et (63), admet les limitations suivantes :

$$(73)\quad |J_\nu^{(m)}(t)| < \mathrm{Cte}\, |X_\nu^+(t)| \left[\int_{l't} \frac{|\tau - t|^{\mu-1}\, dl\tau}{\prod_{j=1}^{p} |\tau - a_j|^{0_j A+\mu} |t - b_j|^{0'_j A+\mu}} + \int_{tl''} \frac{|\tau - t|^{\mu-1}\, dl\tau}{\prod_{j=1}^{p} |t - a_j|^{0_j A+\mu} |\tau - b_j|^{0'_j A+\mu}} \right].$$

Nous en concluons que, à tout nombre positif ε, on peut faire correspondre un nombre η_ε tel que, pour tout arc l sur L de longueur η_ε, l'inégalité

$$(74)\quad \max_\nu \sup_{t \in L} \left\{ \prod_{j=1}^{2p} |t - c_j|^{0_j A+\mu}\, |J_\nu^{(m)}(t)| \right\} < \frac{\varepsilon}{5}$$

soit vérifiée quel que soit m.

Le second membre de la somme (72), d'après l'inégalité (62), vérifie l'inégalité suivante :

$$(75)\quad \left| \frac{\lambda}{2\pi i} Y_\nu(t)\, F_\nu[t, \varphi_1^{(m)}(t), \ldots, \varphi_{2n}^{(m)}(t)] \int_l \frac{d\tau}{\tau - t} \right| < \frac{\mathrm{Cte}}{\prod_{i=1}^{2p} |t - c_j|^{0\,A}} \left| \log \frac{t - l'}{l'' - t} \right|.$$

Donc, tenant compte de la position du point t à l'intérieur de l'arc l, à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre positif η'_ε, tel que, pour tout arc l sur L de longueur η'_ε, l'inégalité

$$(76)\quad \max_\nu \sup_{t \in L} \left\{ \prod_{j=1}^{2p} |t - c_j|^{0^j A+\mu} \left| \frac{\lambda}{2\pi i} Y_\nu(t)\, F_\nu(t, \varphi_1^{(m)}, \ldots, \varphi_{2n}^{(m)}) \int_l \frac{d\tau}{\tau - t} \right| \right\} < \frac{\varepsilon}{5},$$

m étant arbitraire, sera vérifiée. Les inégalités analogues aux (74) et (76) sont vraies pour les fonctions $\varphi_\nu(t)$ concernant le point limite U. Si donc l'arc l contenant le point t a une longueur égale à la plus petite des valeurs η_ε et η'_ε, alors, pour toute position du point t à l'intérieur des arcs L, les inégalités

$$\max_{\nu} \sup_{t \in l} \left\{ \prod_{j=1}^{2p} |t - c_j|^{\theta_j \Lambda + \mu} |\mathrm{I}_{\nu}^{(m)l}(t)| \right\} < \frac{2\varepsilon}{5}, \tag{77}$$

$$\max_{\nu} \sup_{t \in l} \left\{ \prod_{j=1}^{2p} |t - c_j|^{\theta_j \Lambda + \mu} |\mathrm{I}_{\nu}^{l}(t)| \right\} < \frac{2\varepsilon}{5}, \tag{77'}$$

m étant arbitraire, sont vérifiées. Il reste à étudier la différence des seconds membres des sommes (71). Ces intégrales, étendues à la partie extérieure $\mathrm{L} - l$, sont régulières et leur différence, d'après la supposition (22), vérifie l'inégalité

$$|\mathrm{I}_{\nu}^{(m)\mathrm{L}-l}(t) - \mathrm{I}_{\nu}^{\mathrm{L}-l}(t)| < \frac{|\lambda|}{2\pi} |\mathrm{X}_{\nu}^{+}(t) \mathrm{Y}_{\nu}(t)| \int_{\mathrm{L}-l} \frac{k_{\mathrm{F}} \sum_{j=1}^{2n} |\varphi_j^{(m)}(\tau) - \varphi_j(\tau)| \, dl_{\tau}}{|\mathrm{X}_{\nu}^{+}(\tau)| . |\tau - t|}. \tag{78}$$

Remarquons maintenant que, d'après l'hypothèse sur la position du point t à l'intérieur de l'arc l, la distance $|\tau - t|$ pour $\tau \in \mathrm{L} - l$ admet une borne inférieure positive. Donc, la longueur de l'arc l étant fixée comme le plus petit des deux nombres η_{ε} et η'_{ε}, nous pouvons maintenant faire correspondre au nombre arbitraire $\varepsilon > 0$ un indice N_{ε} suffisamment grand, pour que la différence des intégrales étendues à l'ensemble $\mathrm{L} - l$ vérifie l'inégalité

$$\max_{\nu} \sup_{t \in \mathrm{L}} \left\{ \prod_{j=1}^{2p} |t - c_j|^{\theta_j \Lambda + \mu} |\mathrm{I}_{\nu}^{(m)\mathrm{L}-l}(t) - \mathrm{I}_{\nu}^{\mathrm{L}-l}(t)| \right\} < \frac{\varepsilon}{5} \qquad \text{si} \quad m > \mathrm{N}_{\varepsilon}. \tag{79}$$

En réunissant les inégalités (77) et (79), nous aurons

$$\max_{\nu} \sup_{t \in \mathrm{L}} \left\{ \prod_{j=1}^{2p} |t - c_j|^{\theta_j \Lambda + \mu} |\mathrm{I}_{\nu}^{(m)}(t) - \mathrm{I}_{\nu}(t)| \right\} < \varepsilon \qquad \text{si} \quad m > \mathrm{N}_{\varepsilon}, \tag{80}$$

d'où, en tenant compte de la propriété (70), on aura

$$\lim_{m \to \infty} \| \mathrm{U}'_m - \mathrm{U}' \| = 0,$$

ce qui établit le théorème 5.

THÉORÈME 6. — *L'ensemble* E' *transformé de l'ensemble* E *par les relations* (61), *est compact.*

Démonstration. — Conformément à la définition, l'ensemble E' est compact, si, de toute suite $\{\mathrm{V}_m\}$ de ses points,

$$\mathrm{V}_m = [\psi_1^{(m)}, \ldots, \psi_{2n}^{(m)}]$$

on peut extraire une suite partielle $\{\mathrm{V}_{k_m}\}$ convergente, Considérons donc sur tout arc $\widehat{a_\gamma b_\gamma}$ deux arcs $\widehat{a_\gamma t_\gamma}$ et $\widehat{t'_\gamma b_\gamma}$ de longueur suffisamment petite pour que l'inégalité suivante soit vérifiée ;

$$(82) \qquad \max_{(\nu)} \sup_{t \in L_0} \left\{ \prod_{j=1}^{2p} |t - c_j|^{\theta_j \Lambda + \mu} |\psi_\nu^{(m)}(t)| \right\} < \varepsilon$$

pour tous les termes d'une suite $\{V_m\}$ de points de l'ensemble E', arbitrairement choisie; on a désigné par L_0 l'ensemble de points de tous les arcs $\widehat{a_\gamma t_\gamma}$ et $\widehat{t'_\gamma b_\gamma}$.

Nous signalons qu'il est possible d'établir l'inégalité (82), grâce à la limitation (64), vérifiée par tous les points de l'ensemble E'.

Remarquons maintenant, que sur l'ensemble de points des arcs $\widehat{t_\gamma t'_\gamma}$, les fonctions $\psi_\nu^{(m)}(t)$ sont bornées et, d'après (65), vérifient la condition de Hölder

$$|\psi_\nu^{(m)}(t) - \psi_\nu^{(m)}(t_1)| < k_\psi |t - t_1|^\mu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 2n),$$

avec le même coefficient de Hölder k_ψ, quel que soit m. Donc les fonctions composantes des points de la suite $\{V_m\}$ sont *également continues* et *également bornées* sur l'ensemble des arcs $\widehat{t_\gamma t'_\gamma}$, par conséquent, d'après le théorème d'Arzelà, de toute suite fonctionnelle $\{\psi_\nu^{(m)}(t)\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, 2n)$, on peut extraire une suite partielle $\{\psi_{k_m}(t)\}$ uniformément convergente dans l'ensemble des arcs $\widehat{t_\gamma t'_\gamma}$. Il en résulte que, à tout nombre positif ε, on peut faire correspondre un indice N_ε, tel qu'on ait

$$(83) \qquad \max_{(\nu)} \sup_{t \in L - L_0} \left\{ \prod_{j=1}^{2p} |t - c_j|^{\theta_j \Lambda + \mu} |\psi_\nu^{k_m}(t) - \psi_\nu^{k_s}(t)| \right\} < \varepsilon \qquad \text{si} \quad m > N_\varepsilon, \qquad s < N_\varepsilon.$$

L'inégalité (82) étant vérifiée par tous les éléments de la suite $\{V_m\}$, nous en concluons que la suite $\{V_{k_m}\}$ de points

$$V_{k_m} = [\psi_1^{k_m}, \ldots, \psi_{2n}^{k_m}]$$

vérifie la condition de Cauchy

$$(84) \qquad \|V_{k_m} - V_{k_s}\| = \max_{(\nu)} \sup_{t \in L} \prod_{j=1}^{2p} |t - c_j|^{\theta_j \Lambda + \mu} |\psi_\nu^{k_m}(t) - \psi_\nu^{k_s}(t)| < \varepsilon \qquad (m, s > N_\varepsilon)$$

conformément à la définition de la norme (57).

Or, l'espace Λ est complet, donc la condition (84) de Cauchy est suffisante, pour que la suite des points $\{V_\nu^{k_m}\}$ soit convergente dans l'espace Λ, par conséquent l'ensemble transformé E' est *compact*.

Toutes les conditions du théorème cité de Schauder étant vérifiées, nous en concluons l'existence d'un point au moins $[\varphi_1^\star(t), \ldots, \varphi_{2n}^\star(t)]$ dans l'ensemble E invariant relativement à la transformation (61). Ce système de fonctions

$[\varphi_1^*(t), \ldots, \varphi_{2n}^*(t)]$, est une solution du système d'équations intégrales singulières (26). Les fonctions trouvées $\varphi_\nu^*(t)$ de classe $\mathfrak{H}_\lambda^\mu(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$ vérifient la condition de Hölder (65), donc, en substituant ces fonctions dans les membres de droite des formules (24), on obtient un système de fonctions $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \ldots,$ $\Phi_n(z)$, holomorphes dans le domaine extérieur aux coupures $\widehat{a_\gamma b_\gamma}$, dont les valeurs limites Φ_ν^+ et Φ_ν^-, d'après les formules de Plemelj et le système d'équations donné (26), vérifient le système d'équations donné (17) en tout point intérieur t des arcs L.

En outre, d'après le théorème 4, ces fonctions vérifient la condition de rester bornées au voisinage des extrémités distinguées $c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q}$ et la condition (19) pour les autres extrémités des arcs L. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème 7. — *Si les fonctions données* G_ν *et* F_ν *vérifient les conditions* (20), (22) *et* (23), *si en outre le module du paramètre* λ *est suffisamment petit pour que les conditions* (66) *soient satisfaites,* P_ν *étant des fonctions entières arbitrairement choisies, alors il existe des systèmes de fonctions*

$$\Phi_1(z), \quad \Phi_2(z), \quad \ldots, \quad \Phi_n(z)$$

holomorphes à l'extérieur des coupures L *dont les valeurs limites* Φ_ν^+ *et* Φ_ν^- *vérifient le système d'équations proposées* (17) *en tout point intérieur* $t \in L$ *et qui restent bornées au voisinage des extrémités distinguées* $c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q}$, *en vérifiant la condition* (19) *aux autres extrémités. Tous ces systèmes sont déterminés par les formules* (24), *où* $P(z)$ *sont les fonctions entières arbitraires et* $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_{2n}(t)$ *forment les solutions du système d'équations intégrales* (26).

En terminant, nous ferons encore l'analyse des conditions (66) d'existence de la solution du problème.

Nous avons déjà dit que ces conditions seront toujours satisfaites si $|\lambda|$ est suffisamment petit. Le choix des constantes positives ρ et $\varkappa$ étant arbitraire, il est naturel de profiter de cette circonstance et de choisir leurs valeurs, pour que l'intervalle permis pour la variation du paramètre λ soit le plus grand possible.

Écrivons donc les inégalités (66) sous la forme équivalente

$$(85) \qquad \left\{ \begin{aligned} |\lambda| &\leq \frac{\rho C_4^{-1} - C_3 M_P}{C_1(2nm_F\rho^r + m'_F C) + C_2 k_F (C' + 2n\varkappa)} \\ |\lambda| &\leq \frac{\varkappa - C'_3 M_P - C'_4 k_P}{C'_1(2nm_F\rho^r + m'_F C) + C'_2 k_F (C' + 2n\varkappa)} \end{aligned} \right.$$

sous la supposition que ρ et $\varkappa$ sont suffisamment grands pour qu'on ait

$$(85') \qquad \left\{ \begin{aligned} &\rho C_4^{-1} - C_3 M_P > 0, \\ &\varkappa - C'_3 M_P - C'_4 k_P > 0. \end{aligned} \right.$$

Si $\varkappa$ varie de la valeur $C'_3 M_P + C'_4 k_P$ à l'infini, ρ restant fixe, alors le premier membre droit (51) diminue vers zéro et le second membre augmente de zéro vers la valeur limite $[2nC'_2 k_F]^{-1}$. Donc la borne supérieure de $|\lambda|$ aura la plus grande valeur si nous choisissons pour $\varkappa$ une valeur $\varkappa_0$ vérifiant l'égalité

$$(86) \qquad \frac{\rho C_4^{-1} - C_3 M_P}{C_1(2nm_F\rho^r + m'_F C) + C_2 k_F(C' + 2n\varkappa_0)} = \frac{\varkappa_0 - C'_3 M_P - C'_4 k_P}{C'_1(2nm_F\rho^r + m'_F C) + C'_2 k_F(C' + 2n\varkappa_0)}.$$

Nous en calculons $\varkappa_0(\rho)$ et la valeur correspondante $\lambda_0(\rho)$ en fonction de ρ et nous prouverons, par un calcul élémentaire, que $\lambda_0(\rho)$ tend, en augmentant, vers la limite

$$(87) \qquad \lim_{\rho \to \infty} \lambda_0(\rho) = \frac{1}{2nC'_2 k_F}$$

si ρ tend vers l'infini. Par conséquent, si le paramètre λ vérifie la condition

$$(88) \qquad |\lambda| < \frac{1}{2nC'_2 k_F}$$

(qui est la limitation la plus avantageuse), alors, il existe des valeurs ρ, $\varkappa$ telles que les inégalités (66) soient satisfaites et notre problème admet les solutions, quelles que soient les fonctions entières $P_\nu(z)$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] N. I. Muskhelishvili, *Singular Integral Equations*, P. Noordhoff, N. V., Groningen-Holland, 1953.

[2] W. Pogorzelski, *Propriétés d'une intégrale singulière pour les arcs non fermés et leur application* (*Bulletin Acad. Pol. Sc.*, t. 6, nº 2, 1958, ou *J. Math. Mech.*, Bloomington, 1958, p. 7).

[3] J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen* (*Studia Mathematica*, 1930).

[4] A. I. Gousseïnov, *Sur une équation intégrale* (en russe) (*Izviestia A. N. S.S.S.R.*, t. 12, 1948, p. 193.