ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PAUL MONTEL

Sur quelques équations aux différences mêlées

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 65 (1948), p. 337-353

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1948_3_65__337_0>

SUR
QUELQUES ÉQUATIONS
AUX DIFFÉRENCES MÊLÉES

PAR M. PAUL MONTEL.

1. Le théorème de Jacobi sur l'impossibilité de l'existence d'une fonction analytique non constante admettant trois périodes indépendantes a été étendu dans différentes directions [1]. Les résultats les plus complets ainsi obtenus s'expriment dans les théorèmes suivants :

Toute fonction continue d'une variable réelle x qui vérifie les équations

$$\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\ldots\Delta_{h_n}[f]=0,$$
$$\Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\ldots\Delta_{k_n}[f]=0,$$

dans lesquelles tous les rapports $\frac{h_i}{k_j}$ sont irrationnels, est un polynome de degré $n-1$ au plus.

Toute fonction analytique d'une variable complexe z qui vérifie les équations

$$\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\ldots\Delta_{h_n}[f]=0,$$
$$\Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\ldots\Delta_{k_n}[f]=0,$$
$$\Delta_{l_1}\Delta_{l_2}\ldots\Delta_{l_n}[f]=0,$$

dans lesquelles tous les systèmes (h_i, k_j, l_s) de trois accroissements sont indépendants, est un polynome de degré $n-1$ au plus.

La notation $\Delta_h[f(x)]$ ou $\Delta_h[f]$ désigne l'accroissement $f(x+h)-f(x)$ et la notation $\Delta_h\Delta_{h'}[f]$ désigne l'expression

$$\Delta_h[\Delta_{h'}(f)]=\Delta_{h'}[\Delta_h(f)],$$

(1) PAUL MONTEL, *Sur quelques extensions d'un théorème de Jacobi* (*Prace Matematyczno-Fizycne*, t. XLIV, 1936, p. 315-329); *Sur un système d'équations fonctionnelles* (*Annales de la Société Polonaise de mathématiques*, t. XXI, 1948, p. 99-106).

et de même

$$\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\ldots\Delta_{h_m}[f]=\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\ldots\Delta_{h_{m-1}}[\Delta_{h_m}(f)];$$

le résultat de l'opération ne dépend d'ailleurs pas de l'ordre dans lequel on place les accroissements.

Lorsque certains des rapports $\frac{h_i}{k_j}$ sont rationnels et certains des systèmes (h_i, k_j, l_s) sont dépendants, il serait intéressant de déterminer la nature des fonctions f qui satisfont aux équations précédentes.

Je me propose maintenant d'examiner le cas des fonctions de plusieurs variables en introduisant les différences de ces fonctions pour des accroissements simultanés donnés aux variables. Nous obtiendrons des résultats semblables aux précédents en ce sens que toutes les solutions sont des polynomes, mais différents en ce que les degrés de ces polynomes peuvent dépasser $n-1$. Les polynomes de degré inférieur ou égal à $n-1$ vérifient toute équation aux différences finies du type précédent. Lorsque le degré dépasse $n-1$, les polynomes doivent satisfaire à des conditions que nous étudierons.

2. Rappelons d'abord certains résultats concernant les corps de périodes constitués à partir de périodes fondamentales.

Soient, dans un plan, trois périodes h, k, l, représentées par trois vecteurs issus d'un point O pris comme origine; le corps de périodes est constitué par l'ensemble des vecteurs $mh+nk+pl$, issus de l'origine, m, n, p désignant des entiers positifs, négatifs ou nuls. Les extrémités de ces vecteurs autres que O, s'appellent les points-périodes. Les différents corps de périodes sont caractérisés par l'existence de périodes infinitésimales, c'est-à-dire de vecteurs périodes dont la longueur est inférieure à tout nombre positif ε arbitrairement petit.

Si, quel que soit ε, il existe deux périodes de grandeurs inférieures à ε et non situées sur la même droite, on peut couvrir le plan par un réseau de parallélogrammes égaux dont les côtés sont égaux à ces deux périodes. Tout point du plan est à une distance inférieure à 2ε d'un point-période; comme ε est arbitraire, tout point du plan est un point d'accumulation de points-périodes. L'ensemble de ces points-périodes est partout dense dans le plan. On dit que les périodes h, k, l sont *indépendantes*.

Si, à partir d'une valeur de ε, toutes les périodes de grandeur inférieure à ε sont portées par la même droite, on voit aussitôt que l'ensemble des points-périodes est partout dense sur un faisceau de droites équidistantes qui peut se réduire à une droite unique. On est dans le premier cas pour $h=1$, $k=\sqrt{2}$, $l=i$ et dans le second, pour $h=1$, $k=\sqrt{2}$, $l=\sqrt{3}$. On dit alors que les périodes sont *semi-dépendantes*.

Enfin, s'il n'y a pas de périodes infinitésimales, les points-périodes sont répartis aux sommets d'un réseau de parallélogrammes. On dit que les périodes sont *dépendantes*.

On peut retrouver autrement ces résultats. Il existe des nombres réels non tous nuls μ, μ', μ'' vérifiant l'égalité

$$\mu h + \mu' k + \mu'' l = 0.$$

Ces nombres sont déterminés à un facteur près sauf dans le cas où les périodes forment trois vecteurs superposés. Ils peuvent être liés par des relations linéaires à coefficients entiers, m, n, p,

$$m\mu + n\mu' + p\mu'' = 0.$$

S'il y a entre μ, μ', μ'' deux telles relations distinctes, ces nombres sont proportionnels à des entiers et les périodes sont dépendantes.

S'il y a une seule relation, on en déduit

$$\mu(ph - ml) + \mu'(pk - nl) = 0.$$

Les périodes $ph - ml$, $pk - nl$, sont sur la même droite (D); le rapport $\frac{\mu'}{\mu}$ est irrationnel, sinon les périodes h, k, l seraient dépendantes et μ, μ', μ'' liés par deux relations linéaires à coefficients entiers. Les points-périodes sont partout denses sur la droite (D), et par suite, sur toute parallèle à (D) menée par un point-période non situé sur (D). Je dis que ces parallèles forment un faisceau de droites équidistantes. Posons

$$ph - ml = p\omega_1, \qquad pk - nl = p\omega_2; \qquad l = p\omega_3;$$

d'où

$$h = \omega_1 + m\omega_3, \qquad k = \omega_2 + n\omega_3, \qquad l = p\omega_3.$$

Donc le corps de périodes déduit de h, k, l appartient au corps déduit de ω_1, ω_2, ω_3. Ces dernières sont semi-dépendantes; il en est donc de même de h, k, l.

Enfin, s'il n'y a entre μ, μ', μ'' aucune relation linéaire à coefficients entiers, les périodes sont indépendantes.

Examinons encore le cas de cinq périodes h, k, l, u, v, représentées par des vecteurs issus de l'origine dans l'espace à quatre dimensions. S'il n'y a pas de période infinitésimale, les cinq périodes sont dépendantes, et les points-périodes forment un réseau de parallélépipèdoïdes dans l'espace à quatre dimensions.

Supposons qu'il existe des périodes infiniment petites; s'il y en a quatre non situées dans une variété linéaire ou hyperplan, l'ensemble des points-périodes est partout dense dans l'espace : les périodes sont indépendantes.

Si, à partir d'une certaine valeur de ε, les périodes sont situées dans un même hyperplan, variété à trois dimensions, les points-périodes sont partout denses sur un système d'hyperplans parallèles et équidistants. Nous dirons que les périodes sont semi-dépendantes d'ordre trois.

Si, à partir d'une certaine valeur de ε, les périodes sont situées dans deux mêmes hyperplans à trois dimensions, c'est-à-dire dans une variété linéaire à deux dimensions, les points-périodes sont partout denses sur un système de variétés linéaires à deux dimensions, de plans parallèles, menés par les sommets d'un réseau de parallélogrammes. Les périodes sont dites semi-dépendantes d'ordre deux.

Si, au-dessous d'une certaine valeur de ε, les périodes infinitésimales sont alignées sur une même variété linéaire à une dimension, sur une même droite, les points-périodes sont partout denses sur un ensemble de droites parallèles menées par les sommets d'un réseau de parallélipipèdes à trois dimensions. Les périodes sont dites semi-dépendantes d'ordre un.

Retrouvons ces résultats par le calcul. On peut toujours trouver cinq nombres réels μ, μ', μ'', μ''', μ'''' vérifiant l'égalité géométrique

$$\mu h + \mu' k + \mu'' l + \mu''' u + \mu'''' v = 0.$$

S'il existe entre les μ une relation linéaire à coefficients entiers

$$m\mu + n\mu' + p\mu'' + q\mu''' + r\mu'''' = 0,$$

on en déduit

$$\mu(rh - mv) + \mu'(rk - nv) + \mu''(rl - pv) + \mu'''(ru - qv) = 0,$$

et, par un raisonnement semblable à celui du plan, on en conclut que les cinq périodes sont semi-dépendantes d'ordre 3.

De même, s'il y a entre les μ deux ou trois relations linéaires distinctes à coefficients entiers, les périodes sont semi-dépendantes d'ordres deux ou un. S'il y a quatre relations, elles sont dépendantes. S'il y en a aucune, elles sont indépendantes.

Pour donner des exemples de ces différents cas, prenons pour les quatre premières périodes les vecteurs-unités portés par les axes de coordonnées Ox, Oy, Oz, Ot. Si la dernière période a pour composantes $1, 1, 1, \sqrt{2}$, les périodes sont indépendantes; si ces composantes sont $0, 1, 1, \sqrt{2}$, elles sont semi-dépendantes d'ordre trois; pour la période $0, 0, 1, \sqrt{2}$, elles sont semi-dépendantes d'ordre deux; pour la période $0, 0, 0, \sqrt{2}$, semi-dépendantes d'ordre un; pour la période $1, 1, 1, 1$, elles sont dépendantes.

3. Soit $f(x, y)$, une fonction continue de deux variables réelles x, y et h, k, l, trois vecteurs définis dans un système de coordonnées rectangulaires x, y par,

$$h = \eta + i\eta', \qquad k = \varkappa + i\varkappa', \qquad l = \lambda + i\lambda'.$$

Posons

$$\begin{aligned}
\Delta_h[f] &= f(x+\eta, y+\eta') - f(x, y),\\
\Delta_k[f] &= f(x+\varkappa, y+\varkappa') - f(x, y),\\
\Delta_l[f] &= f(x+\lambda, y+\lambda') - f(x, y).
\end{aligned}$$

Cherchons d'abord quelles sont les fonctions $f(x, y)$ vérifiant le système

$$\Delta_h[f] = 0, \qquad \Delta_k[f] = 0, \qquad \Delta_l[f] = 0.$$

On déduit de ces équations

$$\Delta_{mh+nk+pl}[f] = f(x + m\eta + n\varkappa + p\lambda,\, y + m\eta' + n\varkappa' + p\lambda') - f(x, y) = 0,$$

m, n, p, étant des entiers. Si les périodes sont indépendantes, on peut choisir m, n, p, de façon que le vecteur $mh + nk + pl$, d'origine O soit aussi voisin qu'on le veut du vecteur $x_0 - x + i(y_0 - y)$; donc, puisque $f(x, y)$ est continue, on a

$$f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

et $f(x, y)$ est une constante.

Si les périodes sont semi-dépendantes, le même raisonnement prouve que $f(x, y)$ est constante sur un faisceau de droites parallèles dont on peut toujours écrire l'équation sous la forme

$$ax + by = q,$$

q désignant un entier; $f(x, y)$ est alors de la forme $\varphi(ax + by)$, $\varphi(t)$ désignant une fonction continue de période *un*.

Enfin, si les périodes sont dépendantes, $f(x, y)$ est une fonction doublement périodique.

Nous nous bornerons dans la suite au cas de périodes indépendantes.

Avec cette hypothèse, considérons encore le système

$$\Delta_h[f] = C', \qquad \Delta_k[f] = C'', \qquad \Delta_l[f] = C''',$$

C', C'', C''' désignant des constantes. Calculons les constantes A et B par les équations

$$\begin{aligned} A\eta + B\eta' &= C', \\ A\varkappa + B\varkappa' &= C'' \end{aligned}$$

et posons

$$\begin{gathered} g(x, y) = f(x, y) - Ax - By, \\ C''' - A\lambda - B\lambda' = \gamma. \end{gathered}$$

On a

$$\Delta_{mh+nk+pl}[g] = p\gamma,$$

et, si la période $mh + nk + pl$ est infiniment petite, on voit que $p\gamma$ doit être nul, donc $\gamma = 0$. Alors g est une constante C et

$$f(x, y) = Ax + By + C.$$

Les constantes données doivent vérifier la condition

$$\begin{vmatrix} C' & \eta & \eta' \\ C'' & \varkappa & \varkappa' \\ C''' & \lambda & \lambda' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C' & \eta & \overline{\eta'} \\ C'' & \varkappa & \overline{\varkappa'} \\ C''' & \lambda & \overline{\lambda'} \end{vmatrix} = 0,$$

$\bar{u}$ désignant le conjugué de u. Si deux des constantes, C′, C″, par exemple, sont nulles, la troisième C‴ est nulle et la fonction $f(x, y)$ se réduit à une constante.

On peut traiter le même système par une autre méthode qui nous sera utile. Soit $f_1(x, y) = \Delta_u[f]$, u désignant un vecteur arbitraire; on a évidemment

$$\Delta_h[f_1] = 0, \qquad \Delta_k[f_1] = 0, \qquad \Delta_l[f_1] = 0,$$

donc f_1 est une constante et $\Delta_u^2[f]$ est nul quel que soit u. On sait que $f(x, y)$ est alors un polynome du premier degré.

Plus généralement, si une fonction $f(x, y)$ vérifie, quels que soient les vecteurs $u, v, w, \ldots$, l'équation

$$\Delta_u \Delta_v \Delta_w \ldots [f] = 0,$$

cette fonction est un polynome. En effet, en laissant y fixe et supposant $u, v, w, \ldots$ réels, on en conclut que $f(x, y)$ est un polynome en x, quel que soit y [1]. C'est aussi un polynome en y, quel que soit x; c'est donc un polynome en x, y.

4. Considérons maintenant le système d'équations aux différences finies relatives à la fonction $f(x, y)$ continue des variables réelles x, y,

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \ldots \Delta_{h_n}[f] = 0, \\ \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \ldots \Delta_{k_n}[f] = 0, \\ \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \ldots \Delta_{l_n}[f] = 0, \end{cases}$$

dans lesquelles les périodes h_i, k_j, l_s $(i, j, s = 1, 2, \ldots, n)$ sont indépendantes. Je dis que toute solution de ce système est un polynome.

La proposition a été établie pour $n = 1$. Supposons-la vraie jusqu'à la valeur $n - 1$ et montrons qu'elle est vraie pour la valeur n. Soit

$$\varphi(x, y) = \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \ldots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \ldots \Delta_{k_{n-1}} \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \ldots \Delta_{l_{n-1}}.$$

On a

$$\Delta_{h_n}[\varphi] = \Delta_{k_n}[\varphi] = \Delta_{l_n}[\varphi] = 0,$$

et, comme les périodes h_n, k_n, l_n sont indépendantes, φ est une constante. On a donc

$$\begin{aligned} &\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \ldots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \ldots \Delta_{k_{n-1}} \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \ldots \Delta_{l_{n-2}} \Delta_{l_{n-1}} = \text{const.}, \\ &\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \ldots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \ldots \Delta_{k_{n-1}} \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \ldots \Delta_{l_{n-2}} \Delta_{h_n} \;\; = 0, \\ &\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \ldots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \ldots \Delta_{k_{n-1}} \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \ldots \Delta_{l_{n-2}} \Delta_{k_n} \;\; = 0. \end{aligned}$$

Comme les périodes h_n, k_n, l_{n-1} sont indépendantes, la constante est nulle, et l'on peut écrire

$$\begin{aligned} &\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \ldots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \ldots \Delta_{k_{n-1}} \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \ldots \Delta_{l_{n-3}} \Delta_{l_{n-2}} = \text{const.}, \\ &\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \ldots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \ldots \Delta_{k_{n-1}} \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \ldots \Delta_{l_{n-3}} \Delta_{h_n} \;\; = 0, \\ &\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \ldots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \ldots \Delta_{k_{n-1}} \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \ldots \Delta_{l_{n-3}} \Delta_{k_n} \;\; = 0. \end{aligned}$$

[1] Cf. *Sur un système d'équations fonctionnelles, etc.* [p. 337, note [1]].

De la même manière, on voit que la constante est nulle et que

$$\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\ldots\Delta_{h_{n-1}}\Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\ldots\Delta_{k_{n-1}}\Delta_{l_1}\Delta_{l_2}\ldots\Delta_{l_{n-3}} = \text{const.}$$

En continuant ainsi, on arrive à établir l'égalité

$$\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\ldots\Delta_{h_{n-1}}\Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\ldots\Delta_{k_{n-2}}\Delta_{k_{n-1}} = \text{const.}$$

On aurait de même

$$\begin{array}{l}\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\ldots\Delta_{h_{n-1}}\Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\ldots\Delta_{k_{n-2}}\Delta_{l_1}\Delta_{l_2}\ldots\Delta_{l_{n-1}} = 0,\\ \Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\ldots\Delta_{h_{n-1}}\Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\ldots\Delta_{k_{n-2}}\Delta_{l_1}\Delta_{l_2}\ldots\Delta_{l_{n-2}} = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,\\ \Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\ldots\Delta_{h_{n-1}}\Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\ldots\Delta_{k_{n-2}}\Delta_{l_1} = \text{const.}\end{array}$$

Groupons les équations

$$\begin{array}{ll}\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\ldots\Delta_{h_{n-1}}\Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\ldots\Delta_{k_{n-2}}\Delta_{k_{n-1}} & = \text{const.},\\ \Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\ldots\Delta_{h_{n-1}}\Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\ldots\Delta_{k_{n-2}}\Delta_{h_n} & = 0,\\ \Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\ldots\Delta_{h_{n-1}}\Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\ldots\Delta_{k_{n-2}}\Delta_{l_1} & = \text{const.}\end{array}$$

En remplaçant f par $f_1 = \Delta_{u_1}f$, u_1 désignant un vecteur arbitraire, on voit que f_1 vérifie les mêmes équations, avec des valeurs nulles pour les constantes. On en déduit

$$\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\ldots\Delta_{h_{n-1}}\Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\ldots\Delta_{k_{n-3}}\Delta_{k_{n-2}}[f_1] = \text{const.}$$

En recommençant la même suite d'opérations à partir de

$$\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\ldots\Delta_{h_{n-1}}\Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\ldots\Delta_{k_{n-3}}\Delta_{l_1}\Delta_{l_2}\ldots\Delta_{l_{n-1}}[f_1]$$

et en remplaçant f_1 par $f_2 = \Delta_{u_2}[f_1] = \Delta_{u_1}\Delta_{u_2}[f]$, on obtient finalement

$$\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\ldots\Delta_{h_{n-1}}\Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\ldots\Delta_{k_{n-3}}[f_2] = \text{const.}$$

On continue ainsi en remplaçant k_{n-3} successivement par $k_{n-4}, \ldots, k_2, k_1$ et l'on obtient pour

$$f_{n-1} = \Delta_{u_1}\Delta_{u_2}\ldots\Delta_{u_{n-1}}[f],$$

l'équation

$$\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\ldots\Delta_{h_{n-1}}[f_{n-1}] = \text{C}.$$

On aurait de même

$$\begin{array}{l}\Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\ldots\Delta_{k_{n-1}}[f_{n-1}] = \text{C}',\\ \Delta_{l_1}\Delta_{l_2}\ldots\Delta_{l_{n-1}}[f_{n-1}] = \text{C}''.\end{array}$$

Introduisons $f_n = \Delta_{u_n}[f_{n-1}] = \Delta_{u_1}\Delta_{u_2}\ldots\Delta_{u_n}[f]$, les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ étant arbitraires; f_n doit vérifier le système

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l}\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\ldots\Delta_{h_{n-1}}[f_n] = 0,\\ \Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\ldots\Delta_{k_{n-1}}[f_n] = 0,\\ \Delta_{l_1}\Delta_{l_2}\ldots\Delta_{l_{n-1}}[f_n] = 0.\end{array}\right.$$

Par hypothèse, f_n est un polynome entier; par conséquent une différence de f_n, d'ordre assez élevé, est nulle quels que soient les accroissements; il en est donc de même de f dont f_n est une différence d'ordre n; par conséquent, f est un polynome.

Soient α_n le degré d'une solution du système (1) et α_{n-1}, le degré d'une solution du système (2). On a

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + n$$

de même,

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1} &= \alpha_{n-2} + (n-1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_2 &= \alpha_1 + 2, \\ \alpha_1 &= 0. \end{aligned}$$

Donc, en ajoutant, $\alpha_n = \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$.

On a ainsi une limitation du degré des solutions de (1). Il est d'autre part évident que tout polynome de degré inférieur à n vérifie toute équation obtenue en égalant à zéro une différence d'ordre n.

La démonstration précédente, qui repose sur un raisonnement par récurrence, fait intervenir, pour passer de $n-1$ à n, l'hypothèse que les périodes h_n, k_i, l_j $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ sont indépendantes. On voit donc que l'hypothèse que tous les groupes de périodes h_i, k_j, l_s sont indépendants est intégralement utilisée, quand on passe de 1 à n.

On voit d'ailleurs directement que si l'un des groupes h_i, k_j, l_s n'était pas indépendant, le système (1) admettrait des solutions autres que des polynomes. Les accroissements étant permutables, on peut supposer que les périodes non indépendantes soient h_n, k_n, l_n. Il existe alors des fonctions périodiques $f(x, y)$ admettant ces périodes et, puisque

$$\Delta_{h_n} = \Delta_{k_n} = \Delta_{l_n} = 0,$$

ces fonctions vérifient le système (1).

Tout polynome de degré inférieur à n vérifie ce système. Les polynomes de degré égal ou supérieur à n qui en sont des solutions doivent vérifier des conditions que nous allons expliciter.

Nous pourrons d'ailleurs nous borner aux polynomes homogènes. Soit en effet $f(x, y)$, un polynome quelconque de degré m, on peut l'écrire, en groupant les termes homogènes,

$$f(x, y) = \varphi_m(x, y) + \varphi_{m-1}(x, y) + \ldots + \varphi_2(x, y) + \varphi_1(x, y) + \varphi_0,$$

les φ désignant des polynomes homogènes,

$$f(\rho x, \rho y) = \rho^m \varphi_m + \rho^{m-1} \varphi_{m-1} + \ldots + \rho\varphi_1 + \varphi_0,$$

est une solution, quel que soit ρ. On en déduit aussitôt que φ_m, φ_{m-1}, ... sont des solutions, et réciproquement.

5. Proposons-nous de déterminer la forme des polynomes qui satisfont à une équation

$$\Delta^{(n)}_{(h)}[f] = \Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\ldots\Delta_{h_n}[f] = 0. \tag{2}$$

D'abord, un polynome arbitraire de degré inférieur ou égal à $n-1$ vérifie l'équation. Soit $P(x, y)$, un polynome de degré $m = n+p$ $(p \geqq 0)$, que nous pourrons supposer homogène, satisfaisant à l'équation. Désignons par α_j la pente sur l'axe imaginaire du vecteur $h_j = \eta_j + i\eta'_j$, $\alpha_j = \frac{\eta_j}{\eta'_j}$. Le polynome $P \equiv (x - \alpha_j y)^m$ vérifie l'équation (2). On a, en effet,

$$\begin{gathered}
\Delta_{h_1} P \equiv (\eta_1 - \alpha_j \eta'_1) P_1, \\
\Delta_{h_1}\Delta_{h_2} P \equiv (\eta_1 - \alpha_j \eta'_1)(\eta_2 - \alpha_j \eta'_2) P_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\ldots\Delta_{h_j} P \equiv (\eta_1 - \alpha_j \eta'_1)(\eta_2 - \alpha_j \eta'_2)\ldots(\eta_j - \alpha_j \eta'_j) P_i \equiv 0.
\end{gathered}$$

Par conséquent, le polynome

$$P \equiv a_1(x-\alpha_1 y)^m + a_2(x-\alpha_2 y)^m + \ldots + a_n(x-\alpha_n y)^m \tag{3}$$

vérifie, quelles que soient les constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, l'équation (2). Remarquons qu'on peut supposer finis tous les α_j. S'ils ne sont pas distincts, si par exemple, $\alpha_1 = \alpha_2$, on pourra remplacer le second terme par $a_2 y(x-\alpha_1 y)^{m-1}$, comme on le vérifie aisément. Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, on pourra remplacer le troisième terme par $a_3 y^2(x-\alpha_1 y)^{m-2}$, etc.

Réciproquement, je dis que tout polynome P, homogène et de degré m, qui vérifie l'équation (2) est de la forme (3), ou de celle qui s'en déduit lorsque les α_j ne sont pas tous différents.

En effet, supposons pour simplifier que les α_j soient différents. Le polynome f peut toujours se mettre sous la forme

$$f \equiv a_1(x-\alpha_1 y)^m + \ldots + a_n(x-\alpha_n y)^m + y^n(C^p_m b_0 x^p + C^{p-1}_m b_1 x^{p-1} y + \ldots + b_p y^p)$$

En identifiant ce polynome avec

$$f(x, y) \equiv A_0 x^m + C^1_m A_1 x^{m-1} y + \ldots + C^q_m A_q x^{m-q} y^q + \ldots + A_m y^m,$$

les C^q_m désignant les coefficients du binome, on obtient les équations

$$\left\{\begin{array}{llllll}
 & a_1 & + a_2 & + \ldots + a_n & = A_0, \\
 & a_1\alpha_1 & + a_2\alpha_2 & + \ldots + a_n\alpha_n & = -A_1, \\
 & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots, \\
 & a_1\alpha_1^{n-1} & + a_2\alpha_2^{n-1} & + \ldots + a_n\alpha_n^{n-1} & = (-1)^{n-1}A_{n-1}, \\
b_0 + & a_1\alpha_1^{n} & + a_2\alpha_2^{n} & + \ldots + a_n\alpha_n^{n} & = (-1)^{n}A_{n}, \\
b_1 + & a_1\alpha_1^{n+1} & + a_2\alpha_2^{n+1} & + \ldots + a_n\alpha_n^{n+1} & = (-1)^{n+1}A_{n+1}, \\
\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\
b_p + & a_1\alpha_1^{m} & + a_2\alpha_2^{m} & + \ldots + a_n\alpha_n^{m} & = (-1)^{m}A_{m}.
\end{array}\right. \tag{4}$$

Les n premières déterminent $a_1, a_2, \ldots, a_n$, puisque les α_j sont différents. Les autres donnent $b_0, b_1, \ldots, b_p$.

Par hypothèse, le polynome f vérifie l'équation (2); il en est de même de P, donc aussi de $f - \mathrm{P} = \mathrm{Q}$,

$$\mathrm{Q} \equiv y^n(\mathrm{C}_m^p b_0 x^h + \mathrm{C}_m^{p-1} b_1 x^{p-1} y + \ldots b_p y^p).$$

Toutes les dérivées de Q vérifient l'équation (2); en particulier, les dérivées d'ordre p

$$\frac{\partial^p \mathrm{Q}}{\partial x^p} = \mathrm{C} b_0 y^n, \qquad \frac{\partial^p \mathrm{Q}}{\partial x^{p-1} \partial y} = \mathrm{C} b_1 y^n, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial^p \mathrm{Q}}{\partial y^p} = \mathrm{C} b_p y^n,$$

avec $\mathrm{C} = m(m-1)\ldots(m-p+1)$. On en déduit

$$b_0 = b_1 = \ldots = b_p = 0.$$

Donc : *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynome de degré m vérifie l'équation fonctionnelle* (2) *est qu'il puisse se mettre sous la forme* (3).

On modifierait aisément cet énoncé pour l'adapter au cas où certains des α_i seraient égaux.

La condition précédente ne fait intervenir que les pentes des vecteurs accroissements; on en conclut que l'on peut prendre arbitrairement les grandeurs de ces vecteurs et supposer en particulier que ce sont des vecteurs unitaires.

6. Rappelons la définition des polynomes apolaires. Soit le polynome $\mathrm{F}(x)$ de degré n

$$\mathrm{F}(x) \equiv \mathrm{A}_0 x^n + \mathrm{C}_n^1 \mathrm{A}_1 x^{n-1} + \ldots + \mathrm{A}_n$$

et le polynome de degré n'

$$\Phi(x) \equiv \mathrm{B}_0 x^n + \mathrm{C}_n^1 \mathrm{B}_1 x^{n-1} + \ldots + \mathrm{B}_n$$

admettant les zéros distincts $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, on dit que les polynomes $\mathrm{F}(x)$ et $\Phi(x)$ sont apolaires lorsque $\mathrm{F}(x)$ peut se mettre sous la forme

$$\mathrm{P}(x) \equiv a_1(x-\alpha_1)^n + a_2(x-\alpha_2)^n + \ldots + a_n(x-\alpha_n)^n.$$

Comme on peut toujours écrire

$$\mathrm{F}(x) \equiv \mathrm{P}(x) + b_0$$

et calculer b_0 comme dans le paragraphe précédent, on voit, en multipliant les deux membres des $n+1$ équations d'identification (4) par $\mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n^1 \mathrm{B}_{n-1}, \ldots, \mathrm{B}_0$ et ajoutant, que l'on obtient

$$b_0 = \mathrm{A}_0 \mathrm{B}_n - \mathrm{C}_n^1 \mathrm{A}_1 \mathrm{B}_{n-1} + \mathrm{C}_n^2 \mathrm{A}_2 \mathrm{B}_{n-2} - \ldots + (-1)^n \mathrm{A}_n \mathrm{B}_0 = 0.$$

Cette condition est symétrique par rapport aux coefficients A_i et B_j. O voit donc que l'on peut écrire $\Phi(x)$ sous la forme

$$Q(x) \equiv b_1(x-\beta_1)^n + b_2(x-\beta_2)^n + \ldots + b_n(x-\beta_n)^n,$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ désignant les zéros de $F(x)$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$, des constantes.

On démontre que, si les polynomes $F(x)$ et $\Phi(x)$ sont apolaires, tout domaine circulaire contenait les zéros de l'un des polynomes contient un zéro de l'autre (¹). Dans le cas de $n=2$, les quatre nombres $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ forment un rapport harmonique.

Considérons maintenant un polynome de degré m

$$F(x) \equiv A_0 x^m + C_m^1 A_1 x^{m-1} + \ldots + A_n.$$

Si m est inférieur à n, on peut toujours le mettre sous la forme

$$F(x) \equiv a_1(x-\alpha_1)^m + a_2(x-\alpha_2)^m + \ldots + a_n(x-\alpha_n)^m, \tag{5}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ désignant les zéros de $\Phi(x)$. Si m est supérieur où égal à n, proposons-nous de trouver les conditions sous lesquelles il peut se mettre sous la forme (5). Les équations d'identification des polynomes $F(x)$ et $P(x)$ sont encore les équations (4), en posant toujours $m=n+p$, $p \geqq 0$, dans lesquelles les coefficients $b_0, b_1, \ldots, b_p$ sont remplacés par zéro. En multipliant successivement par B_n, $C_n^1 B_{n-1}, \ldots, B_0$, les deux membres des $n+1$ premières équations, puis ceux des $n+1$ équations à partir de la seconde, etc., jusqu'aux $n+1$ à partir de la $n^{\text{ième}}$, on remplace les $p+1$ dernières équations par les équations

$$\left\{\begin{array}{l} A_0 B_n - C_n^1 A_1 \quad B_{n-1} + C_n^2 A_2 \quad B_{n-2} + \ldots + (-1)^n A_n \quad B_0 = 0, \\ A_1 B_n - C_n^1 A_2 \quad B_{n-1} + C_n^2 A_3 \quad B_{n-2} + \ldots + (-1)^n A_{n+1} B_0 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_p B_n - C_n^1 A_{p+1} B_{n-1} + C_n^2 A_{p+2} B_{n-2} + \ldots + (-1)^n A_m \quad B_0 = 0. \end{array}\right. \tag{6}$$

B_0 n'étant pas nul, les $p+1$ équations (6) peuvent remplacer les $p+1$ dernières équations (4). Elles donnent les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces équations (4), aux inconnues $a_1, a_2, \ldots, a_n$, soient compatibles, c'est-à-dire pour que $F(x)$ puisse se mettre sous la forme (5).

Si nous reprenons le polynome homogène $f(x, y)$, de degré m et si nous posons

$$F(x) \equiv f(x, 1),$$

nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Pour que le polynome $F(x)$ *puisse se mettre sous la forme* (5), *il faut et il suffit*

(¹) *Cf.* J. H. GRACE, *The zeros of a polymonial* (*Proceedings of the Cambridge, Phi. Soc.*, t. 11, 1900-1902, p. 352-357); G. SZEGÖ, *Bemerkungen zu einem Satz von J. H. Grace über die Würzeln algebraischer Gleichungen* (*Math. Zeitschrift*, Bd. 13, 1922, p. 28-55). PAUL MONTEL, *Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes* (Paris, Gauthier-Villars, 1933, p. 16-22).

que les $p+1$ dérivées partielles d'ordre p de $f(x, y)$, dans lesquelles on remplace y par 1, soient apolaires avec le polynome $\Phi(x)$.

Il résulte d'une remarque faite plus haut que tout domaine circulaire contenant tous les zéros de $\Phi(x)$ contient un zéro de chacun des $p+1$ polynomes en x déduits des dérivées partielles d'ordre p de $f(x, y)$ en remplaçant y par l'unité.

Pour simplifier l'écriture, nous écrirons $\Phi(x)$ sous la forme

$$\Phi(x) = \mathrm{H} - \mathrm{K}x + \mathrm{L}x^2 - \ldots + (-1)^{n-1}\mathrm{S}x^{n-1} + (-1)^n \mathrm{T}x^n.$$

Les conditions (6) deviennent alors

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{A}_0\mathrm{H} + \mathrm{A}_1\mathrm{K} + \ldots + \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{S} + \mathrm{A}_n \mathrm{T} = 0, \\ \mathrm{A}_1\mathrm{H} + \mathrm{A}_2\mathrm{K} + \ldots + \mathrm{A}_n \mathrm{S} + \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{T} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{A}_p\mathrm{H} + \mathrm{A}_{p+1}\mathrm{K} + \ldots + \mathrm{A}_{m-1}\mathrm{S} + \mathrm{A}_m \mathrm{T} = 0, \end{array} \right.$$

7. Cherchons dans quels cas le polynome $f(x, y)$ peut satisfaire à plusieurs équations (2) correspondant à des vecteurs h_i et k_j tels que les directions des premiers ne soient pas identiques à celles des seconds. En d'autres termes les polynomes $\Phi(x)$ relatifs aux h_i et aux k_j n'ont pas les mêmes zéros; les coefficients H, K, ..., S, T de ces polynomes ne sont pas proportionnels.

Considérons les équations (7) comme déterminant les inconnues H, K, ..., S, T au nombre de $n+1$. Si un déterminant d'ordre $n+1$ formé avec le tableau des coefficients A_s est différent de zéro, les équations (7) n'admettent que la solution zéro. Si un déterminant d'ordre n est différent de zéro, le système admet des solutions dont le rapport est constant : il leur correspond un seul polynome $\Phi(x)$. Si tous les déterminants d'ordre n sont nuls, le système admet une infinité de solutions non proportionnelles; il y a plusieurs polynomes $\Phi(x)$. Il en est en particulier ainsi lorsque $p \leqq n-2$, c'est-à-dire $m \leqq 2(n-1)$.

Examinons le cas où $p > n-2$. Alors le tableau des A_s contient des déterminants d'ordre n qui doivent être nuls. Désignons par r le rang du tableau. Il existe un déterminant d'ordre r au moins extrait du tableau qui est différent de zéro et tous les déterminants d'ordre $r+1$ extraits du tableau sont nuls; on a $r \leqq n-1$.

Puisque tous les déterminants d'ordre $r+1$ sont nuls, les coefficients A_0, A_1, ..., A_m sont liés par une relation de récurrence homogène à coefficients constants d'ordre r. On a alors

$$\begin{array}{l} \mathrm{A}_0 = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_r, \\ \mathrm{A}_1 = \mu_1\gamma_1 + \mu_2\gamma_2 + \ldots + \mu_r\gamma_r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{A}_m = \mu_1\gamma_1^m + \mu_2\gamma_2^m + \ldots + \mu_r\gamma_r^m, \end{array}$$

en supposant les γ_i tous différents. Aucun des μ_i n'est nul sinon les A_s vérifieraient une relation de récurrence d'ordre inférieur à r, ce qui est impossible puisqu'un déterminant d'ordre r est différent de zéro. En portant ces valeurs des A_s dans les équations (7), on obtient

$$\begin{aligned}
&\mu_1 \quad \Phi(\gamma_1) + \mu_2 \quad \Phi(\gamma_2) + \ldots + \mu_r \quad \Phi(\gamma_r) = 0,\\
&\mu_1\gamma_1\Phi(\gamma_1) + \mu_2\gamma_2\Phi(\gamma_2) + \ldots + \mu_r\gamma_r\Phi(\gamma_r) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\mu_1\gamma_1^p\Phi(\gamma_1) + \mu_2\gamma_2^p\Phi(\gamma_2) + \ldots + \mu_r\gamma_r^p\Phi(\gamma_r) = 0.
\end{aligned}$$

Or, p est supérieur à $n-2$ et r inférieur ou égal à $n-1$, donc $p \geqq r$ et le système précédent, dans lequel un déterminant d'ordre r, tiré du tableau des coefficients des inconnues $\Phi(\gamma_i)$ est différent de zéro, entraîne

$$\Phi(\gamma_1) = \Phi(\gamma_2) = \ldots = \Phi(\gamma_r) = 0.$$

Ainsi, tout polynome $\Phi(x)$ admet les zéros $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$. Deux systèmes d'accroissements relatifs à deux polynomes $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ sont représentés par des vecteurs dont r au moins ont la même direction. Il en est de même pour trois systèmes d'accroissements h_i, k_j, l_s. Il y a au moins r groupes h_i, k_j, l_s qui sont semi-dépendants ou dépendants. Donc :

Si une fonction continue $f(x, y)$ vérifie les équations (1) *dans lesquelles les périodes h_i, k_j $l_s(i, j, s = 1, \ldots, n)$ sont indépendantes, cette fonction est un polynome dont le degré ne dépasse pas* $2(n-1)$.

On remarquera que si p est inférieur ou égal à $n-2$, un déterminant d'ordre $p+1$ tiré du tableau des coefficients A_s doit être différent de zéro si $f(x, y)$ doit vérifier deux équations aux différences dont les vecteurs accroissements ont des directions distinctes.

8. Supposons $p \leqq n-2$ et que le polynome $f(x, y)$ soit une solution du système (1); $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\Phi_3(x)$ désigneront les polynomes dont les zéros représentent les pentes, par rapport à Oy convenablement choisi, des vecteurs h_i, k_j, l_s. Les coefficients A_s sont déterminés par un système de $3(p+1)$ équations obtenues, en remplaçant dans les équations (7), H, K, ..., T successivement par les coefficients $H_1, K_1, \ldots, T_1$; $H_2, K_2, \ldots, T_2$; $H_3, K_3, \ldots T_3$ des polynomes $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\Phi_3(x)$, lorsque le degré m de $f(x, y)$ dépasse $n-1$.

Si

$$3(p+1) \leqq m = n + p,$$

ou $p \leqq \frac{1}{2}(n-3)$, le système admet des solutions et les coefficients des $\Phi(x)$ ne sont assujettis à aucune condition.

Si $p > \frac{1}{2}(n-3)$, tous les déterminants d'ordre $m+1$ doivent être nuls. Leur nombre est égal à

$$3(p+1) - m = 2p - (n-3) = \delta.$$

Comme $p < n-2$, $p+2 < n$, $2(p+1) < n+p = m$, chaque déterminant est constitué de la manière suivante :

$$\Delta_i = \left|\begin{array}{ccccccccc}
H_1 & K_1 & L_1 & \ldots & T_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & H_1 & K_1 & \ldots & S_1 & T_1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & H_1 & \ldots & R_1 & S_1 & T_1 & \ldots & 0 \\
.. & .. & .. & \ldots & .. & .. & .. & \ldots & .. \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & H_1 & K_1 & \ldots & T_1 \\
H_2 & K_2 & L_2 & \ldots & T_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & H_2 & K_2 & \ldots & S_2 & T_2 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & H_2 & \ldots & R_2 & S_2 & T_2 & \ldots & 0 \\
.. & .. & .. & \ldots & .. & .. & .. & \ldots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & H_2 & K_2 & \ldots & T_2 \\
H_3 & K_3 & L_3 & \ldots & T_3 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & H_3 & K_3 & \ldots & S_3 & T_3 & 0 & \ldots & 0 \\
.. & .. & .. & \ldots & .. & .. & .. & \ldots & .. \\
.. & .. & H_3 & \ldots & .. & S_3 & T_3 & \ldots & 0 \\
\multicolumn{3}{c}{\underbrace{\hphantom{H_3\quad K_3\quad L_3}}_{p-\delta+1+i}} & & & & & &
\end{array}\right|
\begin{array}{l}
\left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} p+1 \\
\left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} p+1 \\
\left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} p+2-\delta. \\
\\
\end{array}$$

La dernière est obtenue en plaçant H_3, successivement dans les colonnes $p-\delta+2, p-\delta+3, \ldots, p+1$. Dans ce déterminant, multiplions par $-x$, $+x^2$, $-x^3, \ldots, (-x)^m$, les éléments des colonnes de rangs $2, 3, 4, \ldots, m+1$, et ajoutons les produits aux éléments de la première colonne. Le nouveau déterminant, égal au premier Δ_i, aura comme éléments de la première colonne

$$\Phi_1(x),\quad x\Phi_1(x),\quad \ldots,\quad x^p\Phi_1(x),\quad \Phi_2(x),\quad x\Phi_2(x),\quad \ldots,\quad x^p\Phi_2(x),$$
$$\Phi_3(x),\quad x\Phi_3(x),\quad \ldots,\quad x^{p-\delta+i-1}\Phi_3(x),\quad x^{p-\delta+i}\Phi_3(x).$$

Développons ce déterminant par rapport aux éléments de la première colonne et ajoutons-le à zéro, nous aurons l'identité

$$\varpi_1^{(i)}\Phi_1 + \varpi_2^{(i)}\Phi_2 + \varpi_3^{(i)}\Phi_3(x) \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \delta),$$

$\varpi_1^{(i)}$ et $\varpi_2^{(i)}$ désignant des polynomes de degré p et $\varpi_3^{(i)}$ un polynome de degré $p-\delta+i$. On obtient ainsi δ identités distinctes puisque les degrés des polynomes $\varpi_3^{(i)}$ sont tous différents. En multipliant les deux membres de ces δ identités par des paramètres arbitraires, on a l'identité unique

$$(8) \qquad \varpi_1\Phi_1 + \varpi_2\Phi_2 + \varpi_3\Phi_3 \equiv 0,$$

ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 désignant des polynomes de degré p contenant δ paramètres indépendants entrant d'une manière linéaire et homogène.

Réciproquement, si les polynomes $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\Phi_3(x)$ sont liés par une telle identité (8), les déterminants Δ_i sont nuls et les équations définissant les A_s sont compatibles. Il suffit pour le voir d'écrire l'identité (8) en donnant aux polynomes ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 des coefficients indéterminés. En explicitant l'identité, on obtient $m+1$ équations à $3(p+1)$ inconnues homogènes. Le nombre des paramètres arbitraires est

$$3(p+1)-m-1=\delta-1.$$

Pour qu'il y ait un paramètre arbitraire de plus, il faut et il suffit que les déterminants d'ordre $m+1$ tirés du tableau des inconnues soient nuls : ce sont les déterminants Δ_i.

En résumé :

Pour que le polynome homogène $f(x, y)$, de degré m, vérifie le système (1) *d'équations aux différences mêlées, il faut que son degré ne dépasse pas* $2(n-1)$.

Si $m \leqq n-1$, *le polynome $f(x, y)$ est arbitraire.*

Si $n-1 < m \leqq \frac{3}{2}(n-1)$, *le polynome $f(x, y)$ dépend en général de* $3(n-1)-2m$ *paramètres arbitraires linéaires et homogènes.*

Si $\frac{3}{2}(n-1) < m \leqq 2(n-1)$, *le polynome n'existe que si les polynomes* Φ_1, Φ_2, Φ_3 *qui admettent comme zéros les pentes sur l'axe des y des vecteurs accroissements vérifient l'identité*

$$\varpi_1\Phi_1+\varpi_2\Phi_2+\varpi_3\Phi_3\equiv 0,$$

ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3, *désignant des polynomes de degré p qui dépendent de* $2m-3(n-1)$ *paramètres linéaires et homogènes. En général, ce polynome est unique.*

9. Supposons maintenant que la fonction $f(x, y)$ soit une fonction analytique des deux variables complexes

$$x=x_1+ix_2, \qquad y=x_3+ix_4.$$

Nous introduirons les accroissements h, k, l, u, v représentés par des vecteurs de l'espace à quatre dimensions; par exemple, le vecteur h se déduira des accroissements

$$\eta=\eta_1+i\eta_2, \qquad \eta'=\eta_3+i\eta_4$$

donnés aux variables x, y ou des accroissements réels η_1, η_2, η_3, η_4 donnés aux variables réelles, x_1, x_2, x_3, x_4.

Nous conserverons les définitions et notations du paragraphe 3 et remplacerons le système des équations (1) du paragraphe 4 par le système

$$(9)\qquad \begin{cases} \Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\ldots\Delta_{h_n}[f]=0, \\ \Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\ldots\Delta_{k_n}[f]=0, \\ \Delta_{l_1}\Delta_{l_2}\ldots\Delta_{l_n}[f]=0, \\ \Delta_{u_1}\Delta_{u_2}\ldots\Delta_{u_n}[f]=0, \\ \Delta_{v_1}\Delta_{v_2}\ldots\Delta_{v_n}[f]=0 \end{cases}$$

pour lequel les périodes h_i, k_j, l_r, u_s, v_t sont indépendantes ou semi-dépendantes d'ordre 3.

On démontre d'abord qu'une fonction f vérifiant les équations

$$\Delta_h = 0, \qquad \Delta_k = 0, \qquad \Delta_l = 0, \qquad \Delta_u = 0, \qquad \Delta_v = 0,$$

est une constante. En effet, si les périodes sont indépendantes, les points-périodes sont partout denses dans l'espace à quatre dimensions et $f(x, y)$ est constante en ces points, donc partout. Si les périodes sont semi-dépendantes d'ordre 3, les points-périodes sont partout denses sur une variété linéaire à trois dimensions. La fonction est aussi constante, car une fonction analytique non constante ne peut prendre la même valeur que sur des variétés à deux dimensions.

On en déduit aussitôt la solution du système

$$\Delta_h = C_1, \qquad \Delta_k = C_2, \qquad \Delta_l = C_3, \qquad \Delta_u = C_4, \qquad \Delta_v = C_5.$$

En effet, les dérivées f'_x et f'_y, vérifiant le système écrit plus haut, sont des constantes, donc

$$f(x, y) = Ax + By + C,$$

A, B, C, désignant des constantes. A et B sont nuls, et f est encore une constante, lorsque trois des C_i sont nulles. Supposons en effet

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0.$$

On en déduit

$$A\eta + B\eta' = 0,$$
$$A\varkappa + B\varkappa' = 0,$$
$$A\lambda + B\lambda' = 0.$$

Alors, $A = B = 0$, sinon on aurait

$$\frac{\eta}{\eta'} = \frac{\varkappa}{\varkappa'} = \frac{\lambda}{\lambda'}$$

et les périodes seraient semi-dépendantes d'ordre inférieur à 3.

En reprenant le raisonnement du paragraphe 4, on démontrerait la proposition suivante :

Toute solution du système (9) *est un polynome aux variables complexes x, y.*

Il suffit de répéter la suite des opérations du paragraphe 4; on peut même simplifier le calcul en remplaçant chacun des accroissements arbitraires Δ_u par une dérivée de $f(x, y)$ par rapport à l'une des variables lorsque les seconds membres des égalités intermédiaires contiennent moins de trois constantes nulles. La condition que tous les systèmes h_i, k_j, l_r, u_s, v_t soient formés de périodes indépendantes ou semi-dépendantes d'ordre 3 est ici aussi indispensable.

10. La plupart des démonstrations employées dans le cas de deux variables réelles peuvent être reprises, *mutatis mutandis*, dans celui de deux variables complexes. On peut ainsi établir que le degré des polynomes solutions ne dépasse pas $2(n-1)$ et que la forme de ces polynomes est la même que dans le domaine réel.

Tout polynome de degré inférieur ou égal à $n-1$ est une solution. Lorsque ce degré m dépasse $n-1$ et demeure inférieur ou égal à $\frac{5}{4}(n-1)$, la solution homogène est donnée par un polynome dépendant de $5(n-1)-4m$ paramètres arbitraires; lorsque ce degré dépasse $\frac{5}{4}(n-1)$, les polynomes Φ_1, Φ_2, ..., Φ_5 qui ont pour zéros, les quotients $\frac{\eta}{\eta'}$ supposés finis doivent vérifier des conditions. Celles-ci peuvent être exprimées de la manière suivante : il existe des polynomes ϖ_1, ϖ_2, ..., ϖ_5, homogènes, de degré $m-n$ et dépendant de $4m-5(n-1)$ paramètres arbitraires qui vérifient l'identité

$$\varpi_1\Phi_1+\varpi_2\Phi_2+\varpi_3\Phi_3+\varpi_4\Phi_4+\varpi_5\Phi_5\equiv 0.$$

Les résultats qui précèdent résolvent entièrement le problème de déterminer les solutions des systèmes d'équations aux différences mêlées (1) ou (9). Il serait intéressant de trouver la solution générale de ces équations lorsque certains des systèmes des accroissements qui y figurent ne sont pas indépendants.