Annales scientifiques de l'É.N.S.

W. Doeblin

Sur l'ensemble de puissances d'une loi de probabilité

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 63 (1946), p. 317-350
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1946_3_63__317_0>

SUR

L'ENSEMBLE DE PUISSANCES D'UNE LOI DE PROBABILITÉ

PAR M. W. DOEBLIN (1).

1. *Introduction.* — Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes ayant la même loi de probabilité $\mathcal{L}$. De nombreux auteurs ont étudié depuis presque deux cents ans la forme de la loi de probabilité de $S_n = \sum_1^n X_i$, ou, ce qui revient au même, la forme de la fonction de répartition $F_n(x)$ de S_n, lorsque $n \to \infty$. Ce problème peut être considéré comme résolu à l'heure actuelle (au moins en première approximation) et ne fait pas l'objet de ce mémoire. Les premières recherches avaient pour but de montrer que, sous des hypothèses très larges, la loi de probabilité de $\frac{(S_n - n\mathcal{E}(X))}{\sqrt{n}}$ converge vers la

(1) W. Dœblin, mort en 1940 en combattant pour la France, s'était fait connaître par sa Thèse de Doctorat (mars 1938), puis, par une série de mémoires consacrés au Calcul des Probabilités. Le nombre et l'importance des travaux qu'il a pu mener à bien dans ce court intervalle, permet de mesurer la perte que la Science a faite en sa personne. Certains mathématiciens s'intéressent surtout aux questions dont la portée est la plus grande. Dœblin était plutôt de ceux qui s'attachent aux problèmes les plus difficiles et les résolvent. Ceci ressort de tous ses travaux et, en particulier, du mémoire posthume publié ici. On y trouvera la démonstration de résultats énoncés par W. Dœblin dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*.

On devra, pour juger équitablement ce mémoire se souvenir que l'auteur n'a pu le corriger et que certaines imperfections de détail sont dues à cette circonstance. Je remercie ici M. Michel Loève qui a fait une première lecture de ce mémoire, M. Fortet, qui a bien voulu me signaler quelques légères corrections de forme, et surtout un ami anonyme de l'auteur qui a introduit avec discrétion de nombreuses améliorations de détail, mais qui a dû, de crainte de trahir la pensée de l'auteur, se résigner à laisser subsister quelques lacunes et bien des obscurités.

Une suite de ce mémoire, en ce moment à la révision, paraîtra plus tard si son état d'achèvement très imparfait le permet (Note de M. Maurice Fréchet).

loi de Gauss; toutefois l'exemple de la loi de Cauchy montrait qu'il pouvait y avoir d'autres lois-limites. Dans son livre *Calcul des Probabilités* [2] M. P. Lévy a indiqué toute une famille de lois de probabilité, les lois stables, qui sont, lorsque $\mathcal{L}$ satisfait à certaines conditions, les limites des lois de $\frac{(S_n - a_n)}{b_n}$, a_n et b_n étant choisis convenablement. Le même auteur montrait plus tard [3] que si $b_n \to \infty$ et $\frac{b_{n+1}}{b_n} \to 1$, et si pour une suite d'entiers $\{n_\rho\}$ la loi de $\frac{(S_{n_\rho} - a_{n_\rho})}{b_{n_\rho}}$ tend vers une loi limite, celle-ci est indéfiniment divisible, et M. Khintchine [4] a prouvé que toutes les lois indéfiniment divisibles peuvent être obtenues de cette façon.

Une expression asymptotique de la loi de S_n a été indiquée dans notre Note « Étude de l'ensemble de puissances d'une loi de probabilité » [4a].

Toutefois, l'étude dans le cas général de l'ensemble des lois de S_n, lorsque n varie, et de l'ensemble des lois I, limites de lois de $(S_{n_\rho} - a_{n_\rho})\, b_{n_\rho}^{-1}$, a été à peine ébauchée. On possède seulement sur ce sujet quelques remarques que P. Lévy a consacrées dans ses livres à ce qu'il appelle le groupe d'une loi de probabilité. C'est cette lacune que nous nous sommes efforcé de combler dans nos recherches sur « l'ensemble de puissances d'une loi de probabilité » dont la première partie est exposée dans ce Mémoire [5].

2. *L'espace des classes de lois de probabilité.* — Soient $\mathcal{L}$ la loi de probabilité d'une variable aléatoire, $F(x)$ sa fonction de répartition,

$$\Pr\{|X| > x\} = 1 - F(x+0) + F(-x-0).$$

On appelle dispersion pour la probabilité α d'une variable aléatoire X ou d'une loi de probabilité $\mathcal{L}$ la longueur du plus petit intervalle fermé auquel $\mathcal{L}$ affecte une probabilité $\geqq \alpha$. Nous noterons $(a^2\mathcal{L} + b)$ la loi de probabilité de la variable aléatoire $a^2X + b$, dont la fonction de répartition est $F(xa^{-2} - ba^{-2})$. Les lois $(a^2\mathcal{L} + b)$ sont dites du même type (généralisé) que $\mathcal{L}$; leur ensemble, si a et b varient $(a \neq 0)$, s'appelle, suivant M. A. Khintchine, la classe $K[\mathcal{L}]$ de $\mathcal{L}$ [6].

La courbe $y = F(x)$ n'est pas nécessairement continue, elle le devient si à chaque valeur de x pour laquelle $F(x)$ est discontinue, nous faisons correspondre le segment $F(x-0) \leqq y \leqq F(x+0)$. La courbe Γ ainsi obtenue est

---

[2] Gauthier-Villars, 1925.

[3] *Théorie de l'addition des variables aléatoires*. Gauthier-Villars, 1937.

[4] *Zur Theorie der unendlich-teilbaren Verteilungsgesetze* (*Rec. Math.*, Moscou, t. 1, nouvelle série, 1937, p. 71-120).

[4a] *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 206, 1938, p. 718-20.

[5] La plupart des théorèmes démontrés dans ce qui suit ont été énoncés dans deux Notes aux *Comptes rendus de l'Acad. des Sciences* de Paris, le 31 janvier et le 7 mars 1938.

[6] *Mitt. Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk*, t. 1, 1937, p. 258-261.

manifestement coupée en un point et un seul par n'importe quelle parallèle à la droite $x+y=0$. Deux lois $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ étant ainsi représentées par deux courbes Γ et Γ' que la droite $x+y=c$ coupe en A et A', nous appellerons avec M. P. Lévy [2] distance $d[\mathcal{L}, \mathcal{L}']$ de ces deux lois, le maximum de $\overline{AA'}$ quand c varie de $-\infty$ à $+\infty$. Ce maximum est sûrement atteint à cause de la continuité des courbes Γ et Γ'. $d[\mathcal{L}, \mathcal{L}']$ satisfait à l'inégalité triangulaire, et ne s'annule que pour $\mathcal{L}=\mathcal{L}'$. On dit qu'une suite de lois $\mathcal{L}_n$ converge vers une loi limite L, si les fonctions de répartition $F_n(x)$ convergent vers la fonction de répartition $F(x)$ de $\mathcal{L}$ en chaque point de continuité de $F(x)$ (ceci correspond à la convergence en mesure) et l'on a $d[\mathcal{L}, \lim \mathcal{L}_n] = \lim d[\mathcal{L}, \mathcal{L}_n]$. Il est bien connu qu'un ensemble de fonctions de répartition est compact (ou forme une famille normale) si pour une certaine fonction $\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to \infty} \varepsilon(x)=0$, on peut écrire

$$1-F(x)+F(-x)<\varepsilon(x),$$

quelle que soit la fonction $F(x)$ appartenant à l'ensemble considéré.

Envisageons maintenant une suite infinie de classes $K[\mathcal{L}_1], \ldots, K[\mathcal{L}_n], \ldots$; il peut arriver que, pour un choix convenable des $\mathcal{L}_n$ de $K[\mathcal{L}_n]$, $\mathcal{L}_n$ converge vers une loi $\mathcal{L}$. Si $\mathcal{L}$ n'est pas du type de la loi impropre dont la fonction de répartition est $E(x)=0$ si $x<0$, et $=1$, si $x>0$, nous dirons que $K[\mathcal{L}]$ est la limite de $K[\mathcal{L}_n]$. On prouve alors simplement [7] qu'on ne peut pas trouver une autre suite de lois $\mathcal{L}'_n$ de $K[\mathcal{L}_n]$ convergeant vers une loi $\mathcal{L}'$ non impropre avec $K[\mathcal{L}'] \neq K[\mathcal{L}]$. Par contre, on peut trouver dans toute classe $K[\mathcal{L}_n]$ une loi $\mathcal{L}''_n$ avec $F''_n\left(-\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$, $F''_n\left(\frac{1}{n}\right)>1-\frac{1}{n}$ et les lois $\mathcal{L}''_n$ convergent vers la loi impropre. La classe $K[E]$ joue donc ici un rôle tout à fait particulier; nous dirons que $K[\mathcal{L}_n]$ converge vers $K[E]$ seulement dans le cas où aucune sous-suite dénombrable $\{K[\mathcal{L}_{n_i}]\}$ ne converge vers une classe limite non impropre.

Étant donné un ensemble de classes $\neq K[E]$, nous dirons que $K[\mathcal{L}]$, $(\neq K[E])$ est une classe d'accumulation de cet ensemble s'il existe une suite infinie de classes de l'ensemble convergeant vers $K(\mathcal{L})$. Nous dirons qu'un ensemble de classes (différant de $K[E]$) est compact si toute suite dénombrable de classes de l'ensemble a au moins une classe d'accumulation différant de la classe impropre. L'ensemble des classes d'accumulation différentes de la classe impropre est appelé l'ensemble dérivé de l'ensemble.

Soient $\mathcal{L} \in K[F]$, $\beta[\mathcal{L}] = \beta(F)$ le maximum de $F(x+0)-F(x-0)$, $(\beta<1)$. Dans la classe $K[\mathcal{L}]$ nous allons choisir la loi $\overline{\mathcal{L}}$ dont la médiane est nulle (il est facile de définir la médiane d'une façon univoque) et dont la dispersion pour la probabilité $\frac{(1+\beta)}{2}$ est $=1$. $\mathcal{L}'$ étant une loi quelconque, nous

---

[7] *Cf.* A. Khintchine, *loc. cit.* [6].

appellerons écart $e[\mathcal{L}', \mathcal{L}]$ de la classe de $\mathcal{L}'$ à celle de $\mathcal{L}$ la borne inférieure des distances $d\big((a^2\mathcal{L}'+b), \overline{\mathcal{L}}\big)$ quand a et b varient. L'écart $e[\mathcal{L}', \mathcal{L}]$ est généralement différent de $e[\mathcal{L}, \mathcal{L}']$. Il a les propriétés suivantes : Si $K[\mathcal{L}_n] \to K[\mathcal{L}]$, $e[\mathcal{L}_n, \mathcal{L}] \to 0$, et inversement; $e[\mathcal{L}', \mathcal{L}] \neq 0$ si $K[\mathcal{L}'] \neq K[\mathcal{L}]$. $K[\mathcal{L}_n] \to K[\mathcal{L}']$ entraîne $e[\mathcal{L}_n, \mathcal{L}] \to e[\mathcal{L}', \mathcal{L}]$.

L'espace $\mathcal{K}$ des classes différentes de K[E], avec la définition de la limite que nous y avons donnée est un espace $\mathcal{E}$ de M. Fréchet, c'est-à-dire à chaque point $K[\mathcal{L}]$ de cet espace nous pouvons faire correspondre une fonction $e[\mathcal{L}', \mathcal{L}]$ tendant vers zéro si, et seulement si, $\mathcal{L}' \to \mathcal{L}$. L'espace $\mathcal{K}$ n'est pas distanciable, car nous verrons plus loin un exemple d'un ensemble qui n'est pas compact et qui est le dérivé d'un ensemble compact, et cela serait impossible dans un espace distancié.

Nous dirons qu'un ensemble de classes est fortement compact, s'il est compact ainsi que son ensemble dérivé. Notons que l'ensemble dérivé $\mathcal{H}'$ d'un ensemble de classes $\mathcal{H}$ est toujours fermé, comme on le vérifie aisément.

3. *Définition de l'ensemble de puissances.* — n étant un entier positif, on désigne par $\mathcal{L}^n$ la loi dont la fonction caractéristique est la $n^{\text{ième}}$ puissance de celle de $\mathcal{L}$ (c'est la loi de probabilité de S_n). L'ensemble des classes des lois $\mathcal{L}_n (n = 1, 2, \ldots)$ est appelé l'ensemble de puissances de la loi $\mathcal{L}$ (ou de la classe $K[\mathcal{L}]$) et désigné par $EP[\mathcal{L}]$ (M. P. Lévy l'appelle le groupe de cette loi).

4. On dit qu'une loi de probabilité I est indéfiniment divisible (ind. div.) si sa fonction caractéristique $\varphi(t)$ est de la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\exp\left\{iat-\sigma^2\frac{t^2}{2}+\int_{-\infty}^{0}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)d\,N^{(-)}(x)+\int_{0}^{\infty}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)d\,N^{(+)}(x)\right\},\\ &\qquad N^{(-)}(x)=\int_{-\infty}^{x-0}d\,N^{(-)}(x),\qquad -N^{(+)}(x)=\int_{x+0}^{\infty}d\,N^{(+)}(x).\end{aligned}\right.$$

Si I est ind. div., $[\varphi(t)]^u$ est la fonction caractéristique d'une loi de proba- que nous appellerons I^u.

Nous allons supposer dans tout ce qui suit que

$$K[\mathcal{L}] \neq K[E]$$

et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,d\,F(x) = \infty.$$

Les deux cas que nous écartons ainsi sont deux cas banals bien connus. Rappelons que si $K[\mathcal{L}] \neq K[E]$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF(x) < \infty$, $K[\mathcal{L}^n]$ converge si n augmente indéfiniment vers la classe de la loi de Gauss [*cf.* P. Lévy, *loc. cit.* (²)].

Soit $D_n(\alpha)$ la dispersion de $\mathcal{L}^n$ pour la probabilité α. Il résulte du théorème sur l'augmentation de la dispersion ([8]) que $D_n(\alpha)$ est au moins $O(\sqrt{n})$ pour $n \to \infty$. De plus, on a pour $n > n_0[\alpha;\, F(x)]$ les deux inégalités

$$n \Pr\{|X| > \eta D_n(\alpha)\} < \frac{K(\alpha)}{\eta^2} \qquad (\eta < 1), \tag{2}$$

$$n \int_{-D_n(\alpha)}^{D_n(\alpha)} x^2\, dF(x) - n\left(\int_{-D_n(\alpha)}^{D_n(\alpha)} x\, dF(x)\right)^2 < K'(\alpha) D_n^2(\alpha), \tag{3}$$

démontrées dans notre mémoire « Sur les sommes d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes » (*Bull. Sc. Math.* t. 63, 1939, p. 23-32 et 35-64) que nous citerons dans ce qui suit par Var. Ind.

Si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, dF(x) = \infty,$$

on a

$$n\left(\int_{-D_n(\alpha)}^{D_n(\alpha)} x\, dF(x)\right)^2 = o[D_n^2(\alpha)]. \tag{4}$$

En effet, on a pour $0 < C < D_n(\alpha)$

$$\left|\int_{-D_n(\alpha)}^{D_n(\alpha)} x\, dF(x)\right| < \left|\int_{-C}^{C} x\, dF(x)\right| + \left|\int_{D_n(\alpha) > |x| > C} x\, dF(x)\right|.$$

Choisissons C tel que $1 - F(C+0) + F(-C-0) < \varepsilon$. En appliquant l'inégalité de Schwarz, on obtient

$$\left|\int_{-D_n(\alpha)}^{D_n(\alpha)} x\, dF(x)\right| < C + \varepsilon \sqrt{\int_{-D_n(\alpha)}^{D_n(\alpha)} x^2\, dF(x)},$$

d'où résulte (4). Ceci permet de transformer (3) en

$$n \int_{-D_n(\alpha)}^{D_n(\alpha)} x^2\, dF(x) < K''(\alpha) D_n^2(\alpha). \tag{3'}$$

5. En appliquant le théorème principal de notre Mémoire cité, on obtient le

Lemme principal. — *Soit* T_n *un nombre* $\geq a D_n(\alpha)$ $(a > 0)$, *soit* $I(x)$ *la fonction de répartition de la loi de probabilité définie par la fonction caractéristique* (1) *avec*

$$a = n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dF(xT_n), \qquad \sigma^2 = \frac{n}{T_n^2} \int_{-\eta T_n}^{\eta T_n} x^2\, dF(x),$$

$$dN^{(+)}(x) = n\, dF[xT_n], \quad \text{si } x > \eta_n; \qquad dN^{(+)}(x) = 0, \quad \text{si } x \leqq \eta_n;$$

$$dN^{(-)}(x) = n\, dF[xT_n], \quad \text{si } x < -\eta_n; \qquad dN^{(-)}(x) = 0, \quad \text{si } x \geqq -\eta_n;$$

([8]) *Cf.* W. Doeblin et P. Lévy, *Sur les sommes de variables aléatoires indépendantes à dispersions bornées inférieurement* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 202, 1936, pp. 2027-2029).

alors, si η_n tend suffisamment lentement vers zéro,

$$\mathrm{F}_n(x\mathrm{T}_n) = \mathrm{I}_n[x + \theta\varphi(\eta_n)] + \theta'\varphi(\eta_n),$$

où

$$\varphi(\eta_n) \to 0, \qquad -1 < \theta, \quad \theta' < 1.$$

6. Théorème I. — *Si* $\mathrm{K}[\mathcal{L}^{n_p}] \to \mathrm{K}[\mathfrak{M}]$, *la fonction caractéristique d'une loi de* $\mathrm{K}[\mathfrak{M}]$ *est*

$$\exp\left\{-\sigma^2\frac{t^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)d\,\mathrm{N}(x)\right\},$$

où

$$\sigma^2 = \lim_{\eta\to 0}\ \overline{\lim_{p\to\infty}} \int_{|x|<\eta\mathrm{D}_{n_p}(\alpha)} x^2\,d\,\mathrm{F}(x),$$

$$\int_x^{\infty} d\,\mathrm{N}(x) = \underset{\text{(en mesure)}}{\text{limite}}\ n_p \Pr\{\mathrm{X} > x\,\mathrm{D}_{n_p}(\alpha)\} \qquad \text{pour } x > 0,$$

$$\int_{-\infty}^{x} d\,\mathrm{N}(x) = \underset{\text{(en mesure)}}{\text{limite}}\ n_p \Pr\{\mathrm{X} < x\,\mathrm{D}_{n_p}(\alpha)\} \qquad \text{pour } x < 0,$$

α étant un nombre convenable.

Démonstration. — La dispersion pour la probabilité β de $\mathfrak{M}$, soit $d(\beta)$, est une fonction monotone de β. Nous pouvons choisir une valeur α de β avec $d(\alpha) \neq 0$, $d(\beta)$ étant continue pour $\beta = \alpha$. Montrons que si

$$(1') \qquad \left(\frac{1}{\mathrm{T}_{n_p}}\mathcal{L}^{n_p} - \mathrm{A}_{n_p}\right) \to \mathfrak{M},$$

$\lim\limits_{p\to\infty} \mathrm{D}_{n_p}(\alpha)/\mathrm{T}_{n_p}$ existe. De (1′) résulte l'existence d'un intervalle (x_1, x_2), $x_2 - x_1 = d(\alpha + \varepsilon)$, tel que

$$\Pr\{x_1 - \varepsilon \leqq \mathrm{S}_{n_p}/\mathrm{T}_{n_p} - \mathrm{A}_{n_p} \leqq x_2 + \varepsilon\} > \alpha,$$

donc

$$\mathrm{D}_{n_p}(\alpha)/\mathrm{T}_{n_p} \leqq d(\alpha + \varepsilon) + 2\varepsilon;$$

d'autre part (1′) entraîne, quel que soit u,

$$\Pr\{u \leqq \mathrm{S}_{n_p}/\mathrm{T}_{n_p} - \mathrm{A}_{n_p} \leqq u + d(\alpha - \varepsilon) - \varepsilon\} < \alpha.$$

Par conséquent, $\mathrm{D}_{n_p}(\alpha)/\mathrm{T}_{n_p}$ tend vers une limite $\neq 0$. En appliquant alors le lemme principal on obtient immédiatement le théorème.

7. Théorème II. — $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$ *est fermé et composé uniquement de lois ind. div.* [*résultat dû à M. P. Lévy, loc. cit.* ([3])]; *si* $\exp\{\psi(t)\}$ *est la fonction caractéristique d'une loi de* $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$, $\exp\{u\psi(t)\}$ *est aussi, quel que soit* $0 < u < \infty$, *la fonction caractéristique d'une loi de* $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$.

$\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$ est fermé, étant l'ensemble dérivé d'un ensemble de classes. Si $\mathrm{K}[\mathcal{L}^{n_j}] \to \mathrm{K}[\mathrm{I}]$, il suffit d'envisager $\mathrm{K}[\mathcal{L}^{m_j}]$ où $m_j/n_j \to u$ et de tenir compte du lemme principal pour vérifier le reste de la proposition.

8. THÉORÈME III. — *Pour que* $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$ *contienne la loi ind. div.* I *dont la fonction caractéristique est* (1), *il faut et il suffit, si* I *n'est pas la loi de Gauss, qu'il existe une suite de nombres* $\{b_n\} \to \infty$, b_1 *étant un point de continuité de* $\mathrm{N}^{(+)}(x)$ *et de* $\mathrm{N}^{(-)}(-x)$ [*avec* $|\mathrm{N}^{(+)}(b_1)| + \mathrm{N}^{(-)}(-b_1) > 0$] *telle que, en tout point de continuité de* $\mathrm{N}(x)$,

$$(5)\qquad \frac{1-\mathrm{F}(xb_n)}{1-\mathrm{F}(b_n)+\mathrm{F}(-b_n)} \to \frac{|\mathrm{N}^{(+)}(xb_1)|}{|\mathrm{N}^{(+)}(b_1)|+\mathrm{N}^{(-)}(-b_1)} \qquad (x>0),$$

$$(6)\qquad \frac{\mathrm{F}(xb_n)}{1-\mathrm{F}(b_n)+\mathrm{F}(-b_n)} \to \frac{\mathrm{N}^{(-)}(xb_1)}{|\mathrm{N}^{(+)}(b_1)|+\mathrm{N}^{(-)}(-b_1)} \qquad (x<0)$$

et

$$(7)\qquad \lim_{\eta\to 0}\lim_{n\to\infty} \frac{|\mathrm{N}^{(+)}(b_1)|+\mathrm{N}^{(-)}(-b_1)}{1-\mathrm{F}(b_n)+\mathrm{F}(-b_n)} \cdot \frac{1}{b_n^2}\int_{-\eta b_n}^{\eta b_n} x^2\, d\mathrm{F}(x) = \sigma^2.$$

COROLLAIRE. — *Pour que la loi ind. div. différente de la loi de Gauss dont la fonction caractéristique est* (1) *soit un élément de* $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$, *il faut et il suffit qu'on ait* (5), (6) *et* (7) *où* $\mathrm{F}(-xb_n)$ et $1-\mathrm{F}(xb_n)$ *peuvent être respectivement remplacés par* $\mathrm{N}^{(-)}(-xb_n)$ et $|\mathrm{N}^{(+)}(xb_n)|$.

Démonstration. — Si I est ind. div., différente de la loi de Gauss, on peut prendre b_1 tel que l'indique le théorème. En écrivant les conditions du théorème I et en éliminant n_p, on obtient (5)-(7). C. Q. F. D.

Notons parmi les lois $\mathcal{L}$ avec $\mathcal{L} \in \mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$ les lois stables et semi-stables (9). Ces dernières sont caractérisées par le fait que $\frac{b_n}{b_{n-1}}$ tend vers une limite.

9. THÉORÈME IV. — (*Condition pour que la loi de Gauss fasse partie de* $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$) [condition établie par P. Lévy, *loc. cit.* (3)]. *Soit* $\mathcal{G}$ *la loi de Gauss; pour que* $\mathrm{K}[\mathcal{G}] \in \mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$, *il faut et il suffit que*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \Pr\{|\mathrm{X}|>x\}}{\displaystyle\int_{x}^{x} t^2\, d\mathrm{F}(t)} = 0.$$

Démonstration. — Soit $\{x_\rho\}$ une suite de nombres $\to\infty$, auquels nous faisons correspondre des nombres n_ρ (10) par la convention

$$n_\rho \Pr\{|\mathrm{X}|>x_\rho\} \simeq 1.$$

Pour que $\mathrm{K}[\mathcal{L}^{n_\rho}] \to \mathrm{K}[\mathcal{G}]$, il faut (Var. Ind. § 3) que

$$\frac{n_\rho}{x_\rho^2}\int_{-x_\rho}^{x_\rho} t^2\, d\mathrm{F}(t) \to \infty,$$

(9) *Cf.* P. LÉVY, *loc. cit.* (3).

(10) On prendra pour n_ρ l'entier le plus voisin de $[\Pr\{|\mathrm{X}|>x_\rho\}]^{-1}$.

c'est-à-dire que

$$\varphi(x_\rho) = \frac{x_\rho^2 \Pr\{|X| > x_\rho\}}{\int_{-x_\rho}^{x_\rho} t^2 d F(t)} \to 0.$$

D'autre part, si pour une suite $\{x_\rho\}$, on a $\varphi(x_\rho) \to 0$, nous pouvons trouver une suite d'entiers m_ρ tels que

$$m_\rho \Pr\{|X| > x_\rho\} \to 0, \qquad x_\rho^{-2} m_\rho \int_{-x_\rho}^{x_\rho} t^2 d F(t) \to \infty,$$

ce qui entraîne (*cf.* Var. Ind. § 3) $K[\mathcal{L}^{m_\rho}] \to K[\mathcal{G}]$.

Corollaire. — *Pour que*

$$K[\mathcal{L}^n] \to K[\mathcal{G}],$$

il faut et il suffit que

$$(7') \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 \Pr\{|X| > x\}}{\int_{-x}^{x} t^2 d F(t)} = 0.$$

Démonstration. — La nécessité de la condition (7′) résulte de la démonstration donnée ci-dessus. Pour que $K[\mathcal{L}^n] \to K[\mathcal{G}]$, il suffit que, quel que soit η, $n \Pr\{|X| > \eta D_n(\alpha)\} \to 0$. Or, soit

$$\gamma_n = n \Pr\{|X| > \eta D_n(\alpha)\}.$$

On a [formule (3′)]

$$\frac{n}{D_n^2(\alpha)} \int_{-\eta D_n(\alpha)}^{\eta D_n(\alpha)} x^2 d F(x) < K''(\alpha),$$

d'où, si $\varphi(x) \to 0$,

$$\gamma_n \eta^2 < K''(\alpha) \varphi[\eta D_n(\alpha)] \to 0,$$

γ_n tendant donc vers zéro, quel que soit η, on a $K[\mathcal{L}^n] \to K[\mathcal{G}]$.

C. Q. F. D.

10. Lemme. — *Si*

$$n \int_{-\eta D_n(\alpha)}^{\eta D_n(\alpha)} x^2 d F(x) > \varepsilon D_n^2(\alpha),$$

où $\eta \geq p^{-\frac{p}{2}}$, *alors il existe un nombre* n' *avec*

$$n p^{-p} < n' < n,$$

tel que la classe $K[\mathcal{L}^{n'}]$ *est d'autant plus voisine de* $K[\mathcal{G}]$ *que* $\sqrt{p}\,\varepsilon$ *et* n *sont plus grands. Si* $EP'[\mathcal{L}]$ *contient la loi* I *de fonction caractéristique* (1) *avec* $\sigma \neq 0$, alors $\mathcal{G} \in EP'[\mathcal{L}]$.

Démonstration. — Posons $L_i = p^{-\frac{i}{2}} D_n(\alpha)$ $(i = 0, 1, \ldots, p)$; en vertu de (3'), nous pouvons écrire (pour $n > n_0$)

$$\frac{K D_n^2(\alpha)}{n} > \int_{-D_n(\alpha)}^{D_n(\alpha)} x^2 \, dF(x) = I_1 + I_2 + \ldots + I_p + \int_{-L_p}^{L_p} x^2 \, dF(x),$$

où

$$I_i = \int_{L_i < |x| \leq L_{i-1}} x^2 \, dF(x).$$

Il y a au moins un $I_j < p^{-1} K D_n^2(\alpha) n^{-1}$, d'où

$$\Pr\{L_{j-1} \geqq |X| > L_j\} < p^{-1} K D_n^2(\alpha) n^{-1} L_j^{-2} = K p^{j-1} n^{-1}.$$

D'autre part, on a [*voir* (²)]

$$\Pr\{|X| > L_{j-1}\} = \Pr\left\{|X| > p^{-\frac{j-1}{2}} D_n(\alpha)\right\} < K(\alpha) p^{j-1} n^{-1},$$

donc, à l'aide de l'avant-dernière inégalité

$$\Pr\{|X| > L_j\} < K'(\alpha) n^{-1} p^{j-1}.$$

Soit $n' \approx p^{-j+\frac{1}{2}} n$; la quantité

$$n' \Pr\{|X| > L_j\} + L_j^2 n'^{-1} \left[\int_{-L_j}^{L_j} x^2 \, dF(x)\right]^{-1} = O\left(\frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{\varepsilon\sqrt{p}}\right)$$

tend vers zéro si $\varepsilon\sqrt{p} \to \infty$. Il en résulte la première partie du lemme en vertu d'une proposition connue (¹¹). La deuxième partie en découle aussi facilement en tenant compte du théorème I.

11. **Théorème V.** — *Si* $K[\mathcal{L}^n]$ *converge vers une classe limite (non impropre), celle-ci est soit la classe de Gauss, soit celle d'une autre loi quasi-stable. La condition nécessaire et suffisante pour le dernier cas est qu'on puisse écrire pour* $x \to \infty$,

$$F(-x) = h_1(x) x^{-\alpha}, \qquad 1 - F(x) = h_2(x) x^{-\alpha}$$

avec $h_i(kx)/h_i(x) \to 1$ *quel que soit* k *et que* $h_1/(h_1 + h_2)$ *tende vers une limite.*

(¹¹) Soient $X_{n_1}, \ldots, X_{n_n}$ des variables aléatoires indépendantes.
Soit $\overline{X}_{n_i} = 0$ si $|X_{n_i}| > L_n$, et $= X_{n_i}$ si $X_{n_i} < L_n$, σ_{n_i} désignant l'écart-type de $\overline{X}_{n_i}$. Si

$$\sum_{i=1}^{n} \Pr\{|X_{n_i}| > L_n\} + L_n^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_{n_i}^2\right)^{-1} \to 0,$$

la classe de la loi de $\sum_{i=1}^{n} X_{n_i}$ tend vers $K[\mathcal{G}]$. *Cf.* par exemple S. **Bernstein**, *Théorème limite du calcul des probabilités* (*Math. Ann.*, t. 97, 1927, p. 1-21).

Démonstration. — Supposons que $K[\mathcal{L}^n]$ converge vers une classe limite différente de $K[\mathcal{G}]$, définie par la loi I de fonction caractéristique (1).

Supposons en outre que X_1 et X_2 ont pour loi de probabilité la loi quasi-stable I; alors en vertu de la définition de ces lois, la loi de $\tau_1^2 X_1 + \tau_2^2 X_2$ est du même type que I, quels que soient τ_1 et τ_2. On démontre facilement [*cf.* p. ex. P. Lévy, *loc. cit.* (3)] que I est quasi stable si $K[\mathcal{L}^n] \to K[I]$. Si $K[I] \neq K[\mathcal{G}]$, le logarithme de la fonction caractéristique de I peut s'écrire, d'après les résultats classiques de P. Lévy, sous la forme (8)

$$\varphi(t) = C_1 \int_{-\infty}^{0} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{dx}{x^{1+\alpha}} \qquad (0 < \alpha < 2) \tag{8}$$

et de là, on déduit, en utilisant la démonstration du théorème III, la nécessité des conditions du théorème V.

Remarquons que la forme de $N(x)$ qui figure dans la dernière équation peut encore être déduite du théorème II, soit en montrant que la condition $K[I^u] = K[I]$ entraîne $u^{\alpha(u)} N^{(+)}(ux) = N^{(+)}(x)$, ce qui donne $\alpha(u/n) = \alpha(u) = \alpha$, soit en procédant de manière directe.

Avant de démontrer que les conditions indiquées sont suffisantes, nous allons établir le

Lemme. — *Soient* $k \geqq 1$, $0 < \alpha < 2$; *l'inégalité*

$$\Pr\{|X| > ku \geqq k^{-\alpha} \Pr\{|X| > u\} \qquad \text{pour} \quad u > u_0 \tag{8'}$$

entraîne

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \int_{-x}^{x} t^2 \, d\,F(t)/x^2 \Pr\{|X| > x\} \leqq \frac{k^\alpha}{1 - k^{\alpha-2}}. \tag{9}$$

Démonstration du lemme. — u étant un nombre convenable entre u_0 et ku_0, nous pouvons écrire, pour $x > ku_0$,

$$x = k^i u,$$

$$\int_{-x}^{x} t^2 \, d\,F(t) = \int_{-u}^{u} t^2 \, d\,F(t) + \int_{u < |t| \leqq ku} t^2 \, dF(t) + \ldots + \int_{k^{i-1} u < |t| \leqq x} t^2 \, d\,F(t).$$

Pour $j < i$, on a

$$\int_{k^{j-1} u < |t| \leqq k^j u} t^2 \, d\,F(t) < k^{2j} u^2 \Pr\{|X| > k^{j-1} u\}$$

et comme $\Pr\{|X| > k^{j-1} u\}$ est majoré en vertu de (8′) par $k^{\alpha(i-j+1)} \Pr\{|X| > k^i u\}$, il vient

$$\int_{-x}^{x} t^2 \, d\,F(t) < \int_{-uk_0}^{ku_0} t^2 \, d\,F(t) + k^\alpha \Pr\{|X| > x\} \, x^2 \sum_{i=0}^{\infty} k^{i(\alpha-2)}.$$

Or,

$$x^2 \Pr\{|X|>x\} \geqq x^2 k^{-l\alpha} \Pr\{|X|>u\} = x^2 \left(\frac{x}{u}\right)^{-\alpha} \Pr\{|X|>u\}$$

en vertu de (8′) et comme u est fixe et $\alpha < 2$ par hypothèse, $x^2 \Pr\{|X|>x\}$ augmente indéfiniment avec x, de telle sorte que (8′) entraîne bien (9).

C. Q. F. D.

Il résulte de la démonstration, que pour $\eta < k^{-l}$, on a

$$\int_{-\eta x}^{\eta x} t^2 \, d\mathrm{F}(t) < \mathrm{C} + \frac{k^\alpha k^{(\alpha-2)l}}{1-k^{\alpha-2}} x^2 \Pr\{|X|>x\}. \tag{11}$$

Revenons à la démonstration de la suffisance de nos conditions; n étant très grand, nous pouvons trouver un nombre x_n tel que

$$n \Pr\{|X|>x_n\} \simeq 1. \tag{12}$$

Appliquons le lemme principal, en écrivant x_n au lieu de T_n, à la loi de probabilité de S_n/x_n. Cette loi de probabilité est sensiblement celle d'une loi indéfiniment divisible (1) où σ^2 et $N(x)$ ont les valeurs résultant du lemme principal. Or, nous avons $\Pr\{|X|>x\} = [h_1(x)+h_2(x)]x^{-\alpha}$, $h_i(kx)/h_i(x)$ étant par hypothèse compris entre $1-\varepsilon$ et $1+\varepsilon$ [pour $k<\mathrm{C}$, $x>x(\varepsilon, \mathrm{C})$]. En prenant pour β un nombre quelconque entre 2 et α ($\alpha<\beta<2$), on aura

$$\Pr\{|X|>kx_n\} > \Pr\{|X|>x_n\} k^{-\beta}$$

et en posant $k=2$, il vient en vertu de (11) et (12), pour $\eta < 2^{-\rho}$, $n>n(\eta)$,

$$\sigma^2 = \frac{n}{x_n}\int_{-\eta x}^{\eta x} t^2 \, d\mathrm{F}(t) < 4\,\frac{2^{(\beta-2)\rho}}{1-2^{\beta-2}} < \varepsilon$$

et

$$|N^{(+)}(u)| \simeq n \Pr\{X > u x_n\} \simeq \Pr\{X>ux_n\}/\Pr\{|X|>x_n\} \simeq k_1 u^\alpha,$$

$K[\mathcal{L}^n]$ tend donc pour $n\to\infty$ vers la loi quasi stable (8), ce qui prouve la suffisance des conditions indiquées.

12. *Les lois universelles.* — Nous avons vu que toutes les lois de $EP'[\mathcal{L}]$ sont ind. div.; inversement, si nous nous donnons une loi ind. div. I, existe-t-il une loi $\mathcal{L}$ telle que $I \in EP'[\mathcal{L}]$? Ainsi que M. Khintchine l'a prouvé [12], la réponse est affirmative. Nous allons même montrer qu'il existe des lois que nous appelons des lois universelles dont l'ensemble de puissance a pour dérivé l'ensemble de toutes les lois ind. div.

---

[12] *Cf.* A. Khintchine, *loc. cit.* [6].

THÉORÈME VI. — *Un exemple d'une loi universelle est donné par la loi* U *dont la fonction caractéristique est de la forme*

$$\exp\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\nu^2}\left[\int_{\frac{k_\nu}{\nu}}^{\nu k_\nu}(e^{itx}-1)\,d\,\mathrm{N}_\nu^{(+)}(k_\nu x)+\int_{-\nu k_\nu}^{-\frac{k_\nu}{\nu}}(e^{itx}-1)\,d\,\mathrm{N}_\nu^{(-)}(k_\nu x)\right]\right\},$$

où $k_\nu = \exp \nu^3$ *et où l'ensemble des lois* I_ν *correspondant à*

$$\exp\left\{ita_\nu+\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{itx}-1)\,d\,\mathrm{N}_\nu(x)\right\}$$

est partout dense dans l'ensemble des lois ind. div. On peut supposer, et cela a été supposé dans la formule, que $d\mathrm{N}_\nu(x)=0$ en dehors des intervalles $(1/\nu, \nu)$ et $(-\nu, -1/\nu)$ et que $|\mathrm{N}_\nu^{(+)}(x)|$ et $|\mathrm{N}_\nu^{(-)}(x)|<\nu$ [13].

Démonstration. — Soit J une loi ind. div., $\mathrm{J}=\lim \mathrm{I}_{n_p}$. Soit $t_p=\exp\{n_p^2\}$. Je dis que $\mathrm{K}[\mathrm{J}]=\lim\limits_{p\to\infty}\mathrm{K}[\mathrm{U}^{t_p}]$. Soient $\mathrm{U}_i\,(i=1,2,\ldots)$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi U. Considérons la fonction caractéristique de $\sum_1^{t_p}\mathrm{U}_i/k_{n_p}$ qui est égale à $\varphi(t/k_{n_p})^{t_p}$. On a

$$\log\varphi(t/k_{n_p})^{t_p}=t_p\sum_{\nu<n_p}e^{-\nu^2}\int\cdots+t_p\,e^{-n_p^2}\int\cdots+t_p\sum_{\nu>n_p}\int\cdots.$$

Or,

$$\left|t_p\sum_{\nu>n_p}e^{-\nu^2}\int\cdots\right|<2\sum_{\nu>n_p}\nu\,e^{-\nu^2}e^{n_p^2}\to 0,$$

$$\left|t_p\sum_{\nu<n_p}e^{-\nu^2}\int(e^{itxk_{n_p}^{-1}}-1)\,d\,\mathrm{N}_\nu(xk_\nu^{-1})\right|$$

$$<t_p\sum_{\nu<n_p}2e^{-\nu^2}\nu^2|t|\frac{k_\nu}{k_{n_p}}<|t|\sum_{\nu=1}^{\infty}2\nu^2e^{-\nu^2}\exp\{n_p^2+(n_p-1)^3-n_p^3\}\to 0.$$

Donc, pour $|t|<\mathrm{T}$ on a

$$\varphi_{n_p}(t)=\varphi\left(\frac{t}{k_{n_p}}\right)^{t_p}\approx\exp\left\{\int(e^{itx}-1)\,d\,\mathrm{N}_{n_p}(x)\right\}.$$

On en déduit immédiatement que les fonctions de répartition des grandeurs $\frac{1}{k_{n_p}}\sum_1^{n_p}\mathrm{U}_{n_p}+a_{n_p}$ convergent vers celle de J, ce qui démontre le théorème.

---

(13) Le lecteur vérifiera facilement qu'une telle suite de lois I_ν existe.

13. THÉORÈME VII. — *Pour que* EP'[$\mathcal{L}$] *soit vide, il suffit que*

$$\alpha = \lim_{l \to \infty} \varliminf_{x \to \infty} \frac{\Pr\{|X| > lx\}}{\Pr\{|X| > x\}} \neq 0. \tag{13}$$

Démonstration. — Admettons que (13) soit satisfait et que K[$\mathcal{L}^{n_p}$] converge vers une classe limite différente de K[$\mathcal{G}$]. Alors il existe un nombre l, une suite de nombres x_p et une suite d'entiers n_p tels que

$$n_p \Pr\{|X| > x_p\} \sim \beta, \qquad n_p \Pr\{|X| > lx_p\} < \beta\frac{\alpha}{2},$$

ce qui est contraire à (13). K[$\mathcal{L}^{n_p}$] ne peut pas davantage converger vers K[$\mathcal{G}$], car il résulte du lemme du n° 11 que (13) est incompatible avec

$$\varliminf_{x \to \infty} \varphi(x) = \varliminf_{x \to \infty} \frac{x^2 \Pr\{|X| > x\}}{\displaystyle\int_{-x}^{x} t^2\, dF(t)} = 0.$$

14. THÉORÈME VII'. — *Pour que* EP'[$\mathcal{L}$] *soit vide, il faut et il suffit que, quelle que soit la fonction* G(l) *donnée d'avance avec* $\lim\limits_{l \to \infty} G(l) = 0$, *l'on ait*

$$\varliminf_{x \to \infty} \varphi(x) \neq 0,$$

et que pour $x > x_0[G(l)]$, *l'inégalité*

$$\frac{\Pr\{|X| > lx\}}{\Pr\{|X| > x\}} > G(l)$$

soit satisfaite pour au moins un l.

Démonstration. — La condition est nécessaire : Si $\varliminf \varphi(x) = 0$, EP'[$\mathcal{L}$] contient $\mathcal{G}$. Supposons que $\varliminf \varphi(x) \neq 0$ et que pour une fonction G(l) avec $\lim\limits_{l \to \infty} G(l) = 0$ et pour une suite $\{x_\rho\} \to \infty$, on ait

$$\frac{\Pr\{|X| > lx_\rho\}}{\Pr\{|X| > x_\rho\}} < G(l).$$

Posons $n_\rho \sim 1/\Pr\{|X| > x_\rho\}$; comme $\varliminf \varphi(x) \neq 0$, il vient

$$n_\rho \int_{-x_\rho}^{x_\rho} t^2\, dF(t) < K x_\rho^2 \qquad \text{et} \qquad n_\rho \Pr\{|X| > lx_\rho\} < 2G(l).$$

Les lois $\left[\mathcal{L}^{n_\rho} \cdot \frac{1}{x_\rho} - \frac{A_{n_\rho}}{x_\rho}\right]$ forment donc une famille normale.

C. Q. F. D.

La condition est suffisante : EP'[$\mathcal{L}$] ne peut pas contenir $\mathcal{G}$; et en vertu du raisonnement du numéro précédent l'éventualité K[$\mathcal{L}^{n_\rho}$] $\to$ K[I], I $\neq \mathcal{G}$ est également incompatible avec les conditions du théorème.

15. Théorème VIII. — *Pour que* EP[$\mathcal{L}$] *soit compact, il faut et il suffit que,* $\{n_i\}$ *étant une suite quelconque d'entiers positifs, on puisse extraire de* $\{n_i\}$ *une sous-suite* $\{n_\rho\}$ *à laquelle on puisse faire correspondre une suite de nombres* x_ρ *tels que*

$$(14) \qquad 1 \geqq n_\rho \Pr\{|X| > x_\rho\}, \qquad \underline{\lim}\, n_\rho \Pr\{|X| \geqq x_\rho\} \neq 0$$

et

$$(14') \qquad \lim_{k \to \infty} \overline{\lim_{\rho \to \infty}}\, n_\rho \Pr\{|X| > k\,L(x_\rho)\} = 0,$$

où

$$(14'') \qquad L^2(x) = \max\left\{x^2,\; n_\rho \int_{-x}^{x} t^2\, dF(t)\right\}.$$

Démonstration. — La condition est nécessaire : Si EP[$\mathcal{L}$] est compact, $\{n_i\}$ étant une suite quelconque d'entiers positifs, on peut extraire de $\{n_i\}$ une suite $\{n_\rho\}$ telle que K[$\mathcal{L}^{n_\rho}$] tende vers une classe limite K[I]. Si I est la loi de Gauss, I = G, on a, en déterminant les x_ρ par les conditions

$$1 \geqq n_\rho \Pr\{|X| > x_\rho\}, \qquad 1 \leqq n_\rho \Pr\{|X| \geqq x_\rho\} \quad (^{14}),$$

$$(15) \qquad x_\rho^2 = o\left(n_\rho \int_{-x_\rho}^{x_\rho} t^2\, dF(t)\right), \qquad L^2(x_\rho) = n_\rho \int_{-x_\rho}^{x_\rho} t^2\, dF(t),$$

$$(15') \qquad \lim_{\rho \to \infty} n_\rho \Pr\{|X| > L(x_\rho)\} = 0.$$

Si I n'est pas la loi de Gauss, il existe une fonction $N(x)$ telle que pour une suite $\{b_\rho\} \to \infty$

$$\begin{array}{llll} n_\rho[1 - F(t b_\rho)] \to -N(t), & & \text{en mesure} & \text{si } t > 0, \\ n_\rho F(t b_\rho) & \to N(t), & \text{»} & \text{si } t < 0; \end{array}$$

alors,

$$(16) \qquad n_\rho \int_{-b_\rho}^{b_\rho} x^2\, dF(x) = O(b_\rho^2).$$

Il existe au moins un nombre t_1 tel que

$$-N^{(+)}(t_1) + N^{(-)}(t_1) = \beta > 0.$$

Pour $\rho > \rho_0(\varepsilon)$, on a

$$\varepsilon + |N^{(+)}(t_1 - \varepsilon)| + N^{(-)}(-t_1 + \varepsilon) > n_\rho \Pr\left\{|X| > b_\rho\left(t_1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right\} > \beta - \varepsilon,$$

$$n_\rho \Pr\{|X| > b_\rho(t_1 + \varepsilon)\} < \beta + \varepsilon,$$

$$-N^{(+)}(t_1 - \varepsilon) + N^{(-)}(-t_1 + \varepsilon) < \beta + \eta,$$

où $\eta(\varepsilon)$ tend vers zéro avec ε. Si $\beta < 1$, nous prendrons $x_\rho = b_\rho\left(t_1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$, les conditions (14′) seront réalisées en vertu de (16), (15′) et (15), (16′) entraînent (14″).

(14) Ces nombres ne sont pas toujours bien déterminés, mais cela n'a aucune importance.

On ne peut pas prendre $\beta < 1$ dans le cas où $\int_{|x|>t} dN(x) = 0$ si $t > t_1$, et > 1 si $t < t_1$. En déterminant alors x_ρ par les conditions

$$n_\rho \Pr\{|X| > x_\rho\} \leqq 1, \qquad n_\rho \Pr\{|X| \geqq x_\rho\} \geqq 1,$$

il résulte de (15) que $x_\rho/b_\rho \to t_1$; donc, les conditions (14) sont encore satisfaites.

La condition est suffisante : Si les conditions (14) du théorème sont satisfaites, les lois de probabilité de $\left(S_{n_\rho} - n_\rho \int_{-x_\rho}^{x_\rho} t\, dF(t)\right)/L(x_\rho)$ forment une famille normale et en vertu de (14′), une loi limite quelconque est différente de $\mathbf{E}(x)$ (*cf.* Var. Ind.).

Théorème IX. — *Si* EP′[$\mathcal{L}$] *est compact,* EP′[$\mathcal{L}$] *ne comporte pas de lois discontinues et il existe une fonction* $\Phi(\alpha)$ *avec* $0 < \Phi(\alpha) < \infty$ $(0 < \alpha < 1)$, *telle que le rapport de la dispersion pour la probabilité* α *d'une loi quelconque de* EP′[$\mathcal{L}$] *à la dispersion pour la probabilité* $\frac{1}{2}$ *est* $< \Phi(\alpha)$, *si* $\alpha > \frac{1}{2}$, *et* $> \Phi(\alpha)$, *si* $\alpha < \frac{1}{2}$. *Si* EP[$\mathcal{L}$] *est compact, mais non* EP′[$\mathcal{L}$], EP′[$\mathcal{L}$] *contient des lois discontinues.*

Démonstration. — Si I est une loi discontinue, le nombre probable des sauts est $< \infty$ et la composante gaussienne est nulle :

$$-N^{(+)}(x) \leqq -N^{(+)}(+0) < C, \qquad N^{(-)}(-x) \leqq N^{(-)}(-0) < C, \qquad \sigma^2 = 0.$$

La fonction caractéristique est

$$\exp\left[iat + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1)\, dN(x)\right].$$

On peut définir $I^u (u > 0)$. Si u est très petit, le nombre probable des sauts pour I^u est très petit et $< 2Cu$. I^u affecte une probabilité voisine de 1 à la valeur ua, et par conséquent, l'ensemble dérivé de l'ensemble de classes $K\left[I^{\frac{1}{n}}\right]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ est vide; donc, I ne peut pas faire partie d'un EP′[$\mathcal{L}$] compact.

La dispersion pour la probabilité $\frac{1}{2}$ est donc différente de 0 pour toute loi de EP′[$\mathcal{L}$]. Si le rapport $D(\alpha)/DC\left(\frac{1}{2}\right)$ n'était pas borné inférieurement, pour $\alpha < \frac{1}{2}$, pour toute loi de EP′[$\mathcal{L}$], nous pourrions extraire de EP′[$\mathcal{L}$] une suite de classes convergeant vers une classe non impropre pour laquelle $D\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0$ [15] et qui serait par conséquent la classe d'une loi discontinue.

---

[15] En effet, nous pourrions alors trouver une suite de lois $I_1, \ldots, I_n \in$ EP′[$\mathcal{L}$] avec des fonctions de répartition $G_n(x)$ convergeant vers une certaine loi I de EP′[$\mathcal{L}$], le rapport $D(\alpha)/D\left(\frac{1}{2}\right)$ étant $< 1/n$

Ceci montre l'existence d'une fonction $\Phi(x)$ ayant pour $\alpha < \frac{1}{2}$ les propriétés indiquées. La démonstration est analogue pour $\alpha > \frac{1}{2}$.

Réciproquement, si EP'$[\mathcal{L}]$ est tel que pour toute loi I de EP'$[\mathcal{L}]$ $D(\alpha)/D\left(\frac{1}{2}\right)$ est $> \Phi(\alpha)$ pour $\alpha < \frac{1}{2}$, et $< \Phi(\alpha)$ pour $\alpha > \frac{1}{2}$ on voit immédiatement que l'ensemble fermé EP'$[\mathcal{L}]$ est compact.

Supposons maintenant que EP$[\mathcal{L}]$ est bien compact, mais non EP'$[\mathcal{L}]$; alors par exemple, $D(\beta)/D\left(\frac{1}{2}\right)$ ne sera pas borné inférieurement sur EP'$[\mathcal{L}]$ de sorte qu'il existera une suite de lois $I_1, \ldots, I_n$ de EP'$[\mathcal{L}]$ avec $D(\beta)/D\left(\frac{1}{2}\right) \to 0$. Nous pouvons donc trouver des indices n_p tels que, pour les lois $\mathcal{L}^{n_p}$, $D_{n_p}(\beta - \varepsilon)/D_{n_p}\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) \to 0$; car à chaque loi I_i correspond une suite d'indices $\{l^{(i)}\}$ avec $K[\mathcal{L}^{l^{(i)}}] \to K[I_i]$. De la suite $K[\mathcal{L}^{n_p}]$ nous pouvons extraire une suite partielle convergeant vers une classe limite; car EP$[\mathcal{L}]$ est compact. Pour cette classe limite $D(\beta - 2\varepsilon) = 0$; donc, c'est la classe d'une loi discontinue.

17. *Exemple d'un ensemble dérivé d'un ensemble compact de classes qui n'est pas compact.* — Soit I^z la loi de probabilité dont la fonction caractéristique est

$$\varphi_z(t) = \exp\{z \cos t\}.$$

Posons $I^\infty = \mathcal{G}$. Alors l'ensemble F des classes $K[I^z]$, $0 < z \leqq \infty$, est un ensemble fermé qui n'est pas compact puisque pour $z \to 0$, I^z prend la valeur 0 avec une probabilité de la forme $1 - O(z)$.

Déterminons la fonction de répartition $F(x)$ de la loi $\mathcal{L}$ par les conventions

$$\begin{array}{lll} dF(x) = 0 & \text{pour } |x| \neq \exp\{p^3\} & (p = 0, 1, \ldots), \\ dF(x) = C\exp\{-p^2\}\,dx^2 & \text{pour } |x| = \exp\{p^3\}; & \end{array}$$

on prouve facilement que EP$[\mathcal{L}]$ est compact et EP'$[\mathcal{L}] = $ F.

Supposons que $K[\mathcal{L}^{n_\rho}] \to K[I]$, n_ρ étant déterminé par

$$n_\rho \Pr\{|X| > x_\rho\} \simeq 1,$$

et que, d'autre part,

$$\int_{-x_\rho}^{x_\rho} t^2\, dF(t)/x_\rho^2 \Pr\{|X| > x_\rho\} \to 0;$$

alors, la loi I est discontinue ce que le lecteur vérifiera sans peine.

---

pour I_n. $D\left(\frac{1}{2}\right)$ serait borné supérieurement pour toute la suite $I_1, \ldots, I_n$ et $D(\alpha)$ tendrait vers zéro pour I_n tendant vers I; pour n suffisamment grand, on aurait $d[I_n, I] < \varepsilon$ et il existerait un intervalle de longueur ε avec $G_n(x+\varepsilon) - G_n(x) \geqq \alpha$, d'où $G(x + 2\varepsilon) - G(x - \varepsilon) > \alpha - 2\varepsilon$, ce qui entraîne bien $D\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0$ pour I.

18. Théorème X. — *Pour que l'ensemble de puissances soit fortement compact, il faut et il suffit qu'en désignant par* $\mathrm{T}(x)$ *la fonction*

$$\mathrm{T}(\mathrm{X}) = \frac{1}{\Pr\{|\mathrm{X}| > x\}} \int_{-x}^{x} t^2 \, d\mathrm{F}(t), \tag{17}$$

l'on ait

$$\lim_{l \to \infty} \overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{\Pr\{|\mathrm{X}| > l\mathrm{T}(x)\}}{\Pr\{|\mathrm{X}| > x\}} = 0. \tag{18}$$

Démonstration. — *La condition est nécessaire.* En effet le rapport $\mathrm{T}(x)/x$ est borné inférieurement si $\mathrm{EP}[\mathcal{L}]$ est fortement compact, car $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$ ne contient pas de lois discontinues. Supposons, par impossible, que

$$\frac{\Pr\{|\mathrm{X}| > l_\rho \mathrm{T}(x_\rho)\}}{\Pr\{|\mathrm{X}| > x_\rho\}} \to \alpha > 0$$

pour x_ρ et l_ρ tendant vers l'infini, et considérons les lois $\mathcal{L}^{n_\rho}$ où n_ρ sera déterminé par $n_\rho \Pr\{|\mathrm{X}| > x_\rho\} \cong 1$. Dans des cas de probabilité $\sim 1 - e^{-1}$, $\mathrm{S}_{n_\rho} - n_\rho \int_{-x_\rho}^{x_\rho} t\, d\mathrm{F}(t)$ est de l'ordre de $\mathrm{T}(x_\rho)$, donc $\mathrm{D}_{n_\rho}\left(\frac{1}{5}\right)$ est $< \mathrm{K}\,\mathrm{T}(x_\rho)$ et comme $n_\rho \Pr\{|\mathrm{X}| > l_\rho \mathrm{T}(x_\rho)\} > \frac{\alpha}{2} \to \alpha$, il existe une grandeur $\alpha_1(\alpha)$ telle que pour $\rho > \rho_0$ la dispersion $\mathrm{D}_{n_\rho}(\alpha_1)$ est $\geqq l_\rho \mathrm{T}(x_\rho)$ (*cf.* Var. Ind., § 1). Mais ceci est impossible, puisque $\mathrm{D}_{n_\rho}(\alpha_1)/\mathrm{D}_{n_\rho}\left(\frac{1}{5}\right)$ doit être borné. On a donc bien (18).

La condition est suffisante. Considérons les lois $\left(\frac{1}{\mathrm{T}'_n}\mathcal{L}^n - \mathrm{A}_n\right)$ où

$$\mathrm{T}'_n = \mathrm{T}(x_n), \qquad \mathrm{A}'_n = n\int_{-x_n}^{x_n} t\, d\mathrm{F}(t),$$

x_n étant déterminé par la condition

$$n\Pr\{|\mathrm{X}| > x_n\} \leqq 1, \qquad n\Pr\{|\mathrm{X}| \geqq x_n\} \geqq 1.$$

Pour que ces lois forment une famille normale, il faut et il suffit que

$$n\Pr\{|\mathrm{X}| > l\mathrm{T}'_n\} < \varepsilon(l), \qquad n\Pr\{|\mathrm{X}| \geqq \mathrm{T}'_n\} < \mathrm{K}, \tag{20}$$

avec

$$\lim_{l \to \infty} \varepsilon(l) = 0, \qquad [\varepsilon(l) < \varepsilon \quad \text{pour} \quad l > \mathrm{R}(\varepsilon)]$$

et

$$n\int_{-\mathrm{T}'_n}^{\mathrm{T}'_n} x^2\, d\mathrm{F}(x) < \mathrm{K}\mathrm{T}'^2_n. \tag{21}$$

Or,

$$n\int_{-\mathrm{T}'_n}^{\mathrm{T}'_n} t^2\, d\mathrm{F}(t) < n\left(\int_{-x_n}^{x_n} t^2\, d\mathrm{F}(t) + \mathrm{T}'^2_n \Pr\{|\mathrm{X}| > x_n\}\right) \leqq 2\mathrm{T}'^2_n,$$

de telle sorte qu'il suffit de vérifier la condition (19).

ε étant donné d'avance, nous distinguons deux cas suivant que

$$n\,\mathrm{Pr}\{|X| > x_n\} > \varepsilon \quad \text{ou} \quad \leqq \varepsilon.$$

Dans le premier cas, si $l > \mathrm{R}(\varepsilon)/\sqrt{\varepsilon}$,

$$\begin{aligned} n\,\mathrm{Pr}\{|X| > l\mathrm{T}'_n\} &\leqq n\,\mathrm{Pr}\{|X| > l\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{T}(x_n)\} \\ &\leqq \frac{\mathrm{Pr}\{|X| > l\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{T}(x_n)\}}{\mathrm{Pr}\{|X| > x_n\}} < \varepsilon \end{aligned}$$

Dans le second cas, on a

$$n\,\mathrm{Pr}\{|X| = x_n\} \geqq 1 - \varepsilon;$$

par conséquent,

$$\mathrm{T}'^2_n = n\int_{-x_n}^{x_n} t^2\,d\mathrm{F}(t) \geqq (1-\varepsilon)\,x_n^2$$

et

$$n\,\mathrm{Pr}\{|X| > 2\mathrm{T}'_n\} < n\,\mathrm{Pr}\{|X| > x_n\} < \varepsilon.$$

La condition (19) est donc une conséquence de (18) et les lois considérées forment une famille normale. Pour prouver que EP[$\mathcal{L}$] est fortement compact, il faudra prouver que les lois d'accumulation ne sont pas impropres et que EP′[$\mathcal{L}$] est compact. Soit $\varphi(t)$ la fonction caractéristique d'une loi limite; on tire du théorème I et de (20) et (21)

$$(22) \qquad \sigma^2 + \int_{-1}^{1} x^2\,d\mathrm{N}(x) \leqq 2, \qquad \int_{|x|\geqq 1} d\mathrm{N}(x) < 2, \qquad \int_{|x|\geqq l} d\mathrm{N}(x) \leqq \varepsilon(l)$$

et l'on a pour toute loi limite, soit

$$\sigma^2 + \int_{-1}^{1} x^2\,d\mathrm{N}(x) \geqq 1,$$

soit

$$\int_{|x|\geqq 1} d\mathrm{N}(x) \geqq 1.$$

Les lois I forment par conséquent une famille normale et ne font pas partie de K[E]. Une limite quelconque J de lois I_i satisfait aussi à (22) et ne fait non plus partie de K[E]. EP′[$\mathcal{L}$] est donc fortement compact. C. Q. F. D.

19. **Théorème XI.** — *Soient* I *une loi de* EP′[$\mathcal{L}$], $\mathrm{G}(x)$ *sa fonction de répartition,* $\mathrm{D}\left(\frac{1}{2}\right)$ *la dispersion de* I *pour la probabilité* $\frac{1}{2}$, *m la médiane de* I. *Si, quelle que soit la loi* I *de* EP′[$\mathcal{L}$], *on a*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x-m|^{\alpha}\,d\mathrm{G}(x) = \mathrm{K}\mathrm{D}^{\alpha}\left(\frac{1}{2}\right), \qquad 0 < \alpha < 2$$

et si $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$ *est compact, alors*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\alpha-\varepsilon} d\,\mathrm{F}(x) < \infty,$$

quel que soit $\varepsilon > 0$.

La démonstration utilisera deux lemmes.

Lemme 1. — *Si les hypothèses du théorème sont vérifiées, les conditions* $u > u_0$ *et*

$$\frac{1}{u^2 \Pr\{|\mathrm{X}| > u\}} \int_{-u}^{u} x^2 d\,\mathrm{F}(x) < \mathrm{M}^2 \tag{23}$$

entraînent

$$\Pr\{|\mathrm{X}| > ku\} < k^{-\alpha+\frac{\varepsilon}{3}} \Pr\{|\mathrm{X}| > u\}, \tag{24}$$

$$\int_{u \leqq |x| \leqq ku} x^2 d\,\mathrm{F}(x) < \Pr\{|\mathrm{X}| > u\}\, u^2 \mathrm{R}^{2-\alpha+\frac{\varepsilon}{3}}. \tag{25}$$

Démonstration. — Soit $\{x_i\}$ une suite de nombres augmentant indéfiniment, avec $\varphi(x_i) \geqq \mathrm{M}^{-2}$. Soit I une loi limite des lois de $(\mathrm{S}_{n_i} - \mathrm{A}_{n_i})/x_i$ où

$$\mathrm{A}_{n_i} = n_i \int_{-x_i}^{x_i} t\, d\,\mathrm{F}(t), \qquad n_i \Pr\{|\mathrm{X}| > x_i\} \approx 1. \tag{26}$$

Y étant une variable aléatoire dépendante de I, on peut considérer Y comme somme de deux variables aléatoires indépendantes Y_1 et Y_2, de fonctions caractéristiques

$$\varphi_1(t) = -\sigma^2 \frac{t^2}{2} + iat + \int_{-1}^{1} (e^{itx} - 1 - itx)\, d\,\mathrm{N}(x)$$

et

$$\varphi_2(t) = \int_{|x|>1} (e^{itx} - 1)\, d\,\mathrm{N}(x).$$

Il résulte de (23) et (26) que

$$\mathfrak{E}[\mathrm{Y}_1] \leqq 1, \qquad \mathfrak{E}[\mathrm{Y}_1^2] \leqq \mathrm{M}^2 + 2, \qquad \int_{|x|>1} d\,\mathrm{N}(x) \leqq 1.$$

le symbole $\mathfrak{E}$ désignant la valeur probable de la variable aléatoire entre crochets. En vertu de la condition (18), nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$ soit fortement compact, on a $\int_{|x|>l} d\mathrm{N}(x) < \varepsilon(l)$, car $\mathrm{T}(x) < 2\mathrm{M}x$. Les lois limites I obtenues de la façon indiquée forment donc une famille normale, il y a une constante K telle que

$$m < \mathrm{K}, \qquad \mathrm{D}\left(\frac{1}{2}\right) < \mathrm{K}.$$

Par conséquent

$$\mathfrak{E}[|Y|^\alpha]=\int_{-\infty}^{\infty}|x|^\alpha d\,G(x)<2^\alpha|m|^\alpha+2^\alpha\int_{|x|>2|m|}|x-m|^\alpha d\,G(x)$$
$$<2^\alpha|m|^\alpha+2^\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}|x-m|^\alpha d\,G(x)<C$$

et

$$C>\mathfrak{E}[|Y_1+Y_2|^\alpha]>\Pr\{|Y_1|<3\sqrt{M^2+2}\}\left(\frac{2}{3}\right)^\alpha\int_{|x|>3\sqrt{M^2+2}}|x|^\alpha d\,G(x).$$

D'autre part on a (*cf.* Var. Ind.)

$$d\,G(x)>e^{-1}d\,N(x),$$

c'est-à-dire

$$C'=[3\sqrt{M^2+2}]^\alpha+\frac{4}{3}e\,C\left(\frac{3}{2}\right)^\alpha>\int_{|x|>1}|x|^\alpha d\,N(x).$$

Nous en déduisons que, $\int_{|x|>k} dN(x)<k^{-\alpha+\frac{\varepsilon}{4}}$ pour $k^{\varepsilon}>\max\left\{2\,C',\ M^{2-\alpha+\frac{\varepsilon}{4}}\right\}$.

Il résulte facilement qu'on a pour $u>u_0$ et $\varphi(u)>M^{-2}$

$$\Pr\{|X|>uk\}<k^{-\alpha+\frac{\varepsilon}{3}}\Pr\{|X|>u\}.$$

On peut écrire

$$\int_{1<x\leq y}x^2 d\,N(x)$$
$$=\int_{1<x\leq y}\left[\int_{1<t\leq y}t^\alpha d\,N(t)-\int_{1<t\leq y}t^\alpha d\,N(t)\right]dx^{2-\alpha}+\int_{1<x\leq y}x^\alpha d\,N(x)<C'y^{2-\alpha}.$$

La seconde formule du lemme en résulte sans peine.

Lemme 2. — *Dans les hypothèses du théorème, on a*

$$\int_{-x}^{x}t^2 d\,F(t)<C''|x|^{2-\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}\qquad\text{pour}\quad x>x_0.$$

Démonstration. — Nous pouvons toujours supposer $M\neq k$. Posons

$$x_{i+1}=kx_i\quad\text{si}\quad\varphi(x_i)>M^{-2}\quad\text{et}\quad x_{i+1}=Mx_i\quad\text{si}\quad\varphi(x_i)\leq M^{-2}\quad(i=0,1,2,\ldots).$$

Posons en outre

$$y(x)=\int_{-x}^{x}t^2 d\,F(t).$$

Si $\varphi(x)\leq M^{-2}$, il vient

$$y(Mx)=y(x)+\int_{Mx\geq|t|>x}t^2\,d\,F(t)\leq y(x)+\Pr\{|X|>x\}\,x^2M^2,$$

(27) $$y(Mx)\leq 2y(x)<M^{2-\alpha}y(x).$$

Supposons maintenant $\varphi(x) > M^{-2}$; dans ce cas

$$y(kx) < k^{2-\alpha+\frac{\varepsilon}{3}} \Pr\{|X| > x\} x^2 + y(x).$$

$\varphi(x_i) > M^{-2}, \ldots, \varphi(x_{i+\rho}) > M^{-2}$ entraînent, en tenant compte du lemme 1, l'inégalité

$$y(x_{i+l}) < y(x_i) + \Pr\{|X| > x_i\} x_i^2 \left(\frac{x_{i+l}}{x_i}\right)^{2-\alpha+\frac{\varepsilon}{3}} \frac{1}{1 - k^{-\left(2-\alpha+\frac{\varepsilon}{3}\right)}} \qquad (l \leqq \rho).$$

Si le nombre des x_i avec $\varphi(x_i) \leqq M^{-2}$ (ou celui des x_i avec $\varphi(x_i) \geqq M^{-2}$) est limité, il en résulte immédiatement le lemme. S'il y a par contre un nombre infini d'indices j_r tels que

$$\varphi(x_i) \leqq M^{-2} \qquad \text{pour} \quad j_{2r-1} < i \leqq j_{2r},$$
$$\varphi(x_i) > M^{-2} \qquad \text{pour} \quad j_{2r} < i \leqq j_{2r+1},$$

il suit pour $j_{2r} < i \leqq j_{2r+1}$, $i = j_{2r} + l$,

$$y(x_i) < 2y(x_{j_{2r}}) + \Pr\{|X| > x_{1+j_{2r}}\} x_{1+j_{2r}}^2 \left[\frac{x_i}{x_{1+j_{2r}}}\right]^{2-\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$\Pr\{|X| > x_{1+j_{2r}}\} x_{1+j_{2r}}^2 < \Pr\{|X| > x_{j_{2r}}\} x_{j_{2r}}^2 M^2 < y(x_{j_{2r}}),$$

$$y(x_i) < y[x_{j_{2r}}] \left(2 + \left[\frac{x_i}{x_{j_{2r+1}}}\right]^{2-\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}\right)$$

$$< y[x_{j_{2r}}] \left(\frac{x_i}{x_{j_{2r}}}\right)^{2-\alpha+\frac{\varepsilon}{2}} \left(2 + M^{2-\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}\right),$$

$$(28) \qquad y(x_i) < y[x_{j_{2r}}] \left(\frac{x_i}{x_{j_{2r}}}\right)^{2-\alpha+\frac{3\varepsilon}{4}}.$$

On obtient immédiatement à partir de (27) et (28)

$$y(x_i) < C x_i^{2-\alpha+\frac{3\varepsilon}{4}}$$

et

$$y(x) < (M + k) C' x^{2-\alpha+\frac{3\varepsilon}{4}} \qquad \text{pour} \quad x > x_0.$$

Nous pouvons maintenant passer à la démonstration du théorème. Posons $u(x) = \int_{-x}^{x} |t|^\alpha dF(t)$, alors

$$y(x) = \int_{-x}^{x} [u(x) - u(t)]\, d(t^{2-\alpha}),$$
$$y(2x) > [u(2x) - u(x)] |x|^{2-\alpha};$$

ceci donne, en utilisant le lemme 2 pour $x > x_0$,

$$u(2x) - u(x) < K' |x|^{\frac{\varepsilon}{2}},$$

donc $\Pr\{2u \geqq |X| > u\} < K'u^{-\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}$, d'où l'on conclut immédiatement que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\alpha-\varepsilon} d\,F(x) < \infty. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — Il se peut très bien que $EP'[\mathcal{L}]$ contienne des lois sans moments et que quand même

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{\alpha} d\,F(x) < \infty \qquad (\alpha < 2).$$

Nous allons en donner un exemple. Soit

$$d\,F(x) = 0 \qquad \text{pour } |x| < x_1 = 1,$$

$$d\,F(x) = d\,F(-x) = \Pr\{X > x_{2i-1}\}\, d\left(\frac{x}{x_{2i-1}}\right) \qquad \text{pour } x_{2i-1} \leqq x < x_{2i},$$

$$d\,F(x) = d\,F(-x) = \Pr\{X > x_{2i}\}\, d\left(\frac{1}{lg\left[\frac{ex}{x_{2i}}\right]}\right) \qquad \text{pour } x_{2i} \leqq x < x_{2i+1},$$

$$x_{2i+1} = (lg\,ei)\,x_{2i}, \qquad x_{2i} = e^{i} x_{2i-1}.$$

On vérifie aisément que $EP'[\mathcal{L}]$ contient la loi dont la fonction de sauts est $N(x)$:

$$d\,N^{(+)}(x) = d\,N^{(-)}(-x) = d[x^{-\beta}] \quad \text{pour } 0 < x \leqq 1, \qquad = d(lg\,ex)^{-1} \quad \text{pour } x > 1$$
$$(2 > \beta > \alpha),$$

loi qui n'a pas de moments.

Le lecteur pourra prouver (la démonstration est analogue à celle du théorème XI) la

Proposition. — Pour que $EP[\mathcal{L}]$ soit fortement compact, il faut, mais il ne suffit pas, que pour un $\alpha > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{\alpha} d\,F(x) < \infty.$$

20. Théorème XII. — *Si* $EP'[\mathcal{L}]$ *n'est pas vide et* $EP[\mathcal{L}]$ *n'est pas compact,* $EP'[\mathcal{L}]$ *contient des lois discontinues ou, quel que soit* ε, *des lois avec*

$$(29) \qquad \int_{|x| \geqq 1} d\,N(x) = 1, \qquad \sigma^2 + \int_{|x|<1} x^2\, d\,N(x) < \varepsilon.$$

Démonstration. — $EP[\mathcal{L}]$ n'étant pas compact par hypothèse, il y aura une suite de classes $K[\mathcal{L}^{n_1}], \ldots, K[\mathcal{L}^{n_p}]$, telle que l'ensemble dérivé de $\sum_p K[\mathcal{L}^{n_p}]$ soit vide. Il y aura par suite, comme on le voit facilement [*voir* aussi (2), (3)], un nombre $\beta > 0$, tel que

$$\text{(30)} \qquad K\left(\frac{1}{2}\right) > n_\rho \Pr\left\{|X| > D_{n_\rho}\left(\frac{1}{2}\right)\right\} > \beta$$

et

$$\text{(31)} \qquad \frac{n_\rho}{D^2_{n_\rho}\left(\frac{1}{2}\right)} \int_{-D_{n_\rho}}^{D_{n_\rho}} x^2\, dF(x) < K'\left(\frac{1}{2}\right).$$

Soit T un nombre très grand; pour un certain entier m_ρ ($m_\rho \leqq \infty$), on aura

$$\frac{\Pr\left\{|X| > T^i D_{n_\rho}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}}{\Pr\left\{|X| > D_{n_\rho}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}} \leqq (1-\eta)^i \qquad \text{pour } i < m_\rho$$

et

$$\text{(32)} \qquad \Pr\left\{|X| > T^{m_\rho} D_{n_\rho}\left(\frac{1}{2}\right)\right\} > (1-\eta)^{m_\rho} \Pr\left\{|X| > D_{n_\rho}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

Le nombre m_ρ peut être borné supérieurement pour $\rho > \rho_0$. En effet, dans le cas contraire, s'il existait une infinité de $m_\rho = \infty$ ou si $m_{\rho'} \to \infty$ pour une sous-suite $\{n_{\rho'}\}$, on obtiendrait

$$n_{\rho'} \Pr\left\{|X| > K D_{n_{\rho'}}\left(\frac{1}{2}\right)\right\} < \varphi(K),$$

$\varphi(K)$ tendant vers zéro pour $K \to \infty$, d'où l'on déduirait que les lois de $S_{n_{\rho'}} D^{-1}_{n_{\rho'}}\left(\frac{1}{2}\right) - A_{n_{\rho'}}$ ($A_{n_{\rho'}}$ étant une grandeur convenable) forment une famille normale, contrairement à l'hypothèse faite sur la suite $\{K[\mathcal{L}^{n_\rho}]\}$.

Soient $\rho > \rho_0$, $D_\rho = D_{n_\rho}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $x_\rho = T^{m_\rho} D_{n_\rho}\left(\frac{1}{2}\right)$; on a les relations suivantes :

$$\int_{-x_\rho}^{x_\rho} t^2\, dF(t) = \int_{-D_\rho}^{D_\rho} t^2\, dF(t) + \int_{TD_\rho \geqq |t| > D_\rho} + \ldots + \int_{x_\rho \geqq |t| > T^{m_\rho - 1} D_\rho} t^2\, dF(t);$$

$$\int_{T^i D_\rho \geqq |t| > T^{i-1} D_\rho} t^2\, dF(t) < \Pr\{|X| > T^{i-1} D_\rho\} T^{2i} D_\rho^2 < (1-\eta)^{i-1} \Pr\{|X| > D_\rho\} D_\rho^2 T^{2i}$$
$$(i < m_\rho),$$

$$\int_{x_\rho \geqq |t| > T^{m_\rho - 1} D_\rho} t^2\, dF(t) < x_\rho^2 \Pr\{x_\rho \geqq |X| > T^{m_\rho - 1} D_\rho\},$$

$$\Pr\{|X| > x_\rho\} > (1-\eta)^{m_\rho} \Pr\{|X| > D_\rho\}.$$

Il vient donc

$$\int_{-x_\rho}^{x_\rho} t^2\, dF(t) < \int_{-D_\rho}^{D_\rho} t^2\, dF(t) + T^{2m_\rho - 2} D_\rho^2 (1-\eta)^{m_\rho - 2} \frac{1}{1 - (1-\eta)T^{-1}}$$
$$+ (1-\eta)^{m_\rho - 1} \eta x_\rho^2 \Pr\{|X| > D_\rho\},$$

$$\frac{1}{\Pr\{|X| > x_\rho\}\, x_\rho^2} \int_{-x_\rho}^{x_\rho} t^2\, dF(t) < \frac{\int_{-D_\rho}^{D_\rho} t^2\, dF(t)}{D_\rho^2 \Pr\{|X| > D_\rho\}} (1-\eta)^{-m_\rho} T^{-2m_\rho} + \frac{2}{T^2} + \frac{\eta}{1-\eta} < \varepsilon$$

Pour T suffisamment grand et η suffisamment petit, en vertu de (30) et (32) le premier terme du second membre de l'inégalité ci-dessus est $< 2K'\left(\frac{1}{2}\right)\beta^{-1}T^{-2}$.

Déterminons $n_\rho^{(1)}$ par la condition

$$n_\rho^{(1)} \Pr\{|X| > x_\rho\} \approx 1.$$

Appelons $m_\rho^{(2)}$ un entier $\leqq \alpha$ tel que

$$\begin{aligned} &\Pr\{|X| > T^i \; x_\rho\} < (1-\eta)^i \; \Pr\{|X| > x_\rho\} \qquad \text{pour} \quad i < m_\rho^{(2)} \\ &\Pr\{|X| > T^{m_\rho^{(2)}} x_\rho\} > (1-\eta)^{m_\rho^{(2)}} \Pr\{|X| > x_\rho\} \end{aligned}$$

et soit $x_\rho^{(2)} = T^{m_\rho^{(2)}} x_\rho$, si $m_\rho^{(2)} \neq \infty$. On aura

$$\frac{1}{\Pr\{|X| > x_\rho^{(2)}\} \; [x_\rho^{(2)}]^2} \int_{-x_\rho^{(2)}}^{x_\rho^{(2)}} t^2 \, d\mathrm{F}(t) < \varepsilon.$$

Nous pouvons alors déterminer $n_\rho^{(2)}$, $m_\rho^{(3)}$, etc. L'opération pourra se poursuivre indéfiniment si l'on ne rencontre pas de $m_\rho^{(i)} = \infty$.

Nous distinguerons deux cas :

A. Pour $\rho > \rho'$, les nombres $m_\rho^{(i)}$ sont tous $\neq \infty$ et $< k$. Considérons alors pour ρ fixe ($> \rho'$), la suite des nombres $n_\rho^{(1)}, \ldots, n_\rho^{(i)}, \ldots$. On a

$$\begin{aligned} 1 \simeq n_\rho^{(i)} \Pr\{|X| > x_\rho^{(i)}\} &= n_\rho^{(i)} \quad \Pr\{|X| > T^{m_\rho^{(i)}} x_\rho^{(i-1)}\} \\ &\geqq n_\rho^{(i)} (1-\eta)^k \Pr\{|x| > X_\rho^{(i-1)}\} \approx \frac{n_\rho^{(i)}}{n_\rho^{(i-1)}} (1-\eta)^k, \\ n_\rho^{(i-1)} < n_\rho^{(i)} &\leqq (1-\eta)^{-k-1} n_\rho^{(i-1)} \end{aligned}$$

$\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$ n'étant pas vide, par hypothèse, il y aura une suite $\{p_j\}$ avec $\mathrm{K}[\mathcal{L}^{p_j}] \to \mathrm{K}[\mathrm{I}]$; de $\{n_\rho^{(i)}\}$ nous pouvons extraire une suite partielle de nombres $\{p'_j\}$ avec $p'_j / p_j \to u$, $1 \leqq u \leqq (1-\eta)^{-k-1}$. Alors

$$\mathrm{K}[\mathcal{L}^{p'_j}] \to \mathrm{K}[\mathrm{I}^u] = \mathrm{K}[\mathrm{J}].$$

B. Il y a une infinité de ρ avec un $m_\rho^{(i)} = \infty$ ou une suite partielle de $m_\rho^{(i)}$ tendant vers l'infini. Soit $\{p_j\}$ la suite des entiers $n_\rho^{(i)}$ correspondant à cette suite partielle. On voit comme ci-dessus que les classes $\mathrm{K}[\mathcal{L}^{p_j}]$ forment un ensemble compact et pour une suite partielle $\{p'_j\}$ de $\{p_j\}$

$$\mathrm{K}[\mathcal{L}^{p'_j}] \to \mathrm{K}[\mathrm{J}].$$

Nous allons étudier cette loi limite J.

p'_i étant de la forme $n_\rho^{(i)}$, il y aura un nombre x'_i avec

$$p'_i \Pr\{|X| > x'_i\} \simeq 1$$

et

$$\frac{p'_i}{x_i'^2} \int_{-x'_i}^{x'_i} t^2 \, d\mathrm{F}(t) < \varepsilon; \tag{33}$$

en déterminant τ de telle sorte que

$$\tau\int_{|x|\geqq 1} d\,\mathrm{N}(x) = 1,$$

on a

$$\tau < 1, \qquad \tau\left(\sigma^2 + \int_{-1}^{1} x^2\,d\,\mathrm{N}(x)\right) < \varepsilon.$$

J^τ satisfait alors à (29). C. Q. F. D.

Il y aura d'autre part deux suites de constantes T_i et A_i telles que la loi de $\frac{1}{\mathrm{T}_i}\mathrm{S}_{p'_i} - \mathrm{A}_i$ tende vers J. Soit (1) la fonction caractéristique de J. L'équation (33) a pour conséquence

$$\frac{x'_i}{\mathrm{T}_i} < \varepsilon.$$

Si $\frac{x'_i}{\mathrm{T}_i} \to 0$, on aura

$$\sigma^2 = \lim_{\eta \to 0}\ \overline{\lim_{i \to \infty}}\ \frac{p'_i}{\mathrm{T}_i^2}\int_{-\eta\mathrm{T}_i}^{\eta\mathrm{T}_i} t^2\,d\,\mathrm{F}(t)$$

et

$$\frac{p'_i}{\mathrm{T}_i^2}\int_{-\eta\mathrm{T}_i}^{\eta\mathrm{T}_i} t^2\,d\,\mathrm{F}(t) \leqq \frac{p'_i}{\mathrm{T}_i^2}\int_{-x_i}^{x_i} t^2\,d\,\mathrm{F}(t) + 2\eta^2,$$

d'où $\sigma^2 = 0$ et, pour $i > i(\tau)$,

$$-\mathrm{N}^{(+)}(\tau) + \mathrm{N}^{(-)}(-\tau) < \tau + p'_i\,\mathrm{Pr}\left\{|\mathrm{X}| > \frac{\tau}{2}\mathrm{T}'_i\right\} \leqq \tau + p'_i\,\mathrm{Pr}\left\{|\mathrm{X}| > x'_i\right\} < 2\tau + 1,$$

donc

$$|\mathrm{N}^{(+)}(+0)| + \mathrm{N}^{(-)}(-0) \leqq 1;$$

J est donc discontinu.

Si $\frac{x'_i}{\mathrm{T}_i} > a > 0$, nous pouvons admettre (en considérant au besoin une suite partielle des lois $\mathcal{L}^{p'_i}$) que

$$\frac{x'_i}{\mathrm{T}_i} \to \mathrm{L} \neq 0.$$

Les lois de

$$\frac{\mathrm{S}_{p'_i}}{x'_i} - \frac{\mathrm{A}_i\mathrm{T}_i}{x'_i}$$

convergent également vers une limite $\in \mathrm{K}[\mathrm{J}]$. Pour cette limite on aura

$$\sigma^2 + \int_{-1<x<1} x^2\,d\,\mathrm{N}(x) \leqq \varepsilon, \qquad 1 \leqq \int_{|x|\geqq 1} d\,\mathrm{N}(x) \leqq 1 + \varepsilon.$$

Corollaire. — Si $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$ est compact, $\mathrm{EP}[\mathcal{L}]$ l'est aussi.

Démonstration. — Si $EP'[\mathcal{L}]$ est compact, $EP'[\mathcal{L}]$ ne contient pas de lois discontinues et la condition $\frac{D(\alpha)}{D(\beta)} > \frac{\Phi(\beta)}{\Phi(\alpha)}$ pour $\alpha < \beta$ est incompatible avec l'existence de lois J de $EP'[\mathcal{L}]$ avec

$$\sigma^2 + \int_{|x|<1} x^2 \, d\mathrm{N}(x) < \varepsilon, \qquad \int_{|x|\geqq 1} d\mathrm{N}(x) = 1 \qquad (\text{pour } \varepsilon \to 0).$$

En effet, la variable aléatoire Z de J pourrait être considérée comme la somme de deux termes indépendants, Z_1 et Z_2, de fonctions caractéristiques

$$\exp\left\{ -\sigma^2 \frac{t^2}{2} + \int_{|x|<1} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) d\mathrm{N}(x) \right\},$$

et

$$\exp\left\{ \int_{|x|\geqq 1} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) d\mathrm{N}(x) \right\}.$$

L'écart-type σ' de Z_1 serait $< \sqrt{\varepsilon}$ et Z_2 serait égale à une constante dans des cas de probabilité $\geqq e^{-1}$.

La dispersion $D\left(\frac{1}{4}\right)$ serait donc, en utilisant l'inégalité de Tchebichef, $\leqq 2\sqrt{\varepsilon}$; d'autre part, on vérifie aisément que la dispersion de Z_2 pour la probabilité $\frac{4}{5}$ est $\geqq 1$, donc

$$\frac{\Phi\left(\frac{1}{4}\right)}{\Phi\left(\frac{4}{5}\right)} < \frac{D\left(\frac{1}{4}\right)}{D\left(\frac{4}{5}\right)} \leqq 2\sqrt{\varepsilon},$$

ce qui est impossible. $EP[\mathcal{L}]$ doit donc être compact et sera fortement compact.

21. Soient I et $\overline{\mathrm{I}}$ deux lois ind. div. dont les fonctions caractéristiques sont respectivement (1) et

$$\exp\left\{ iat - \sigma^2 \frac{t^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) d\overline{\mathrm{N}}(x) \right\}.$$

Nous dirons que I est normé si la dispersion de I pour la probabilité $\frac{1}{2}$ est $= 1$. Une loi ne peut évidemment être normée que si la dispersion pour la probabilité $\frac{1}{2}$ est $\neq 0$. Si l'on a les relations suivantes (θ et θ' désignant des nombres compris entre -1 et 1, dont les valeurs ne sont généralement pas les mêmes dans deux formules différentes)

$$\int_{\pm x}^{\pm\infty} d\mathrm{N}(t) = \int_{\pm x + \theta\Delta}^{\pm\infty} d\overline{\mathrm{N}}(t) + \theta'\Delta \qquad \text{pour} \quad x > \Delta,$$

$$\sigma^2 + \int_{-x}^{x} t^2 \, d\mathrm{N}(t) = \bar{\sigma}^2 + \int_{-(x+\theta\Delta)}^{x+\theta\Delta} t^2 \, d\overline{\mathrm{N}}(t) + \theta'\Delta \qquad \text{pour} \quad 1 > x > \Delta,$$

nous écrirons $\varphi[\mathrm{I}, \bar{\mathrm{I}}] < \Delta$. Si l'on a, pour un z convenable,

$$n\int_{\pm xz}^{\pm\infty} d\,\mathrm{F}(t) = \int_{\pm x+\Delta 0}^{\pm\infty} d\,\mathrm{N}(t) + 0'\Delta \qquad \text{pour} \quad x > \Delta,$$

$$\frac{n}{z^2}\int_{-xz}^{xz} t^2\,d\,\mathrm{F}(t) = \sigma^2 + \int_{-x+0\Delta}^{x+0\Delta} t^2\,d\,\mathrm{N}(t) + 0'\Delta \qquad \text{pour} \quad 1 > x > \Delta,$$

nous écrirons $\varphi_n[\mathrm{I}] < \Delta$. La borne inférieure de $\varphi_n[\mathrm{I}]$ pour toutes les lois *normées* I de $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$ sera notée e_n. Si $\mathrm{K}[\mathcal{L}^{n_\varrho}] \to \mathrm{K}[\mathrm{I}]$, la dispersion de I pour la probabilité $\frac{1}{2}$ étant $= 1$, e_{n_ϱ} tend évidemment vers zéro.

Si I est normé, il existe des nombres K et R tels que

$$(34) \qquad \sigma^2 + \int_{-1}^{1} x^2\,d\,\mathrm{N}(x) < \mathrm{K}, \qquad \int_{|x|>1} d\,\mathrm{N}(t) < \mathrm{K},$$

$$(35) \qquad 2\,\mathrm{R} < \int_{|x|>b} d\,\mathrm{N}(x) + \sigma^2 + \int_{-b}^{b} x^2\,d\,\mathrm{N}(x),$$

quel que soit b.

Ceci étant, soit r un nombre entier et supposons que pour une certaine valeur z on ait $\varphi\left[\bar{\mathrm{I}}, \frac{\mathrm{I}^r}{z}\right] < \frac{1}{4}$, les lois I et $\bar{\mathrm{I}}$ étant normées. On aura

$$\mathrm{K} > \int_{|x|>\frac{1}{4}}^{\infty} d\,\bar{\mathrm{N}}(x) > r\int_{|x|>\frac{z}{2}}^{\infty} d\,\mathrm{N}(x) - \frac{1}{4},$$

d'où l'on déduit que si $1 + \mathrm{K} < rk$, on a

$$\int_{|x|>\frac{z}{2}} d\mathrm{N}(x) < k,$$

donc $\sigma^2 + \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} x^2 d\mathrm{N}(x) < k$, ce qui conduit à

$$\mathrm{K} > \sigma^2 + \int_{-1}^{1} x^2\,d\,\mathrm{N}(x) > rkz^{-2} - \frac{1}{4},$$

c'est-à-dire $z > 4$. Nous choisirons toujours dans ce qui suit

$$r > 16(k+1)k^{-1};$$

r satisfaisant à cette condition, nous écrirons $\varphi'[\mathrm{I}, \bar{\mathrm{I}}] < \varepsilon$, si pour un certain z on a $\varphi\left[\bar{\mathrm{I}}, \frac{\mathrm{I}^r}{z}\right] < \varepsilon$.

Lemme. — *I et $\bar{\mathrm{I}}$ étant normées, les inégalités suivantes sont satisfaites pour $\Delta < \frac{1}{4}$, $r > r_0$:*

$$m\int_{\pm x\mathrm{H}}^{\pm\infty} d\,\mathrm{F}(t) = \int_{\pm x+\theta\Delta}^{\pm\infty} d\,\mathrm{N}(t) + \theta'\Delta \qquad \text{pour} \quad x > \Delta,$$

$$\frac{m}{\mathrm{H}^2}\int_{-x\mathrm{H}}^{x\mathrm{H}} t^2\, d\,\mathrm{F}(t) = \int_{-x-\theta\Delta}^{x+\theta\Delta} t^2 d\,\mathrm{N}(t) + \sigma^2 + \theta'\Delta \qquad \text{pour} \quad 1 > x > \Delta$$

et

$$mr\int_{\pm x\bar{\mathrm{H}}}^{\pm\infty} d\,\mathrm{F}(t) = \int_{\pm x+\theta\Delta}^{\pm\infty} d\,\bar{\mathrm{N}}(t) + \theta'\Delta \qquad \text{pour} \quad x > \Delta,$$

$$\frac{mr}{\bar{\mathrm{H}}^2}\int_{-x\bar{\mathrm{H}}}^{x\bar{\mathrm{H}}} t^2\, d\,\mathrm{F}(t) = \int_{-(x+\theta\Delta)}^{x+\theta\Delta} t^2 d\,\bar{\mathrm{N}}(t) + \bar{\sigma}^2 + \theta'\Delta \qquad \text{pour} \quad 1 > x > \Delta$$

et si $\frac{\mathrm{H}}{\bar{\mathrm{H}}} > \sqrt{\Delta}$, on peut écrire, η étant $\mathrm{O}(\sqrt{\Delta})$,

$$(36)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\pm x}^{\pm\infty} d\,\bar{\mathrm{N}}(t) = r\int_{\pm\frac{\bar{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}(x+\theta\eta)}^{\pm\infty} d\,\mathrm{N}(t) + \theta'\eta \qquad \text{pour} \quad x > \eta, \\ \displaystyle\bar{\sigma}^2 + \int_{-x}^{x} t^2 d\,\bar{\mathrm{N}}(t) = \frac{r\mathrm{H}^2}{\bar{\mathrm{H}}^2}\left(\int_{-(x+\theta\eta)\frac{\bar{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}}^{(x+\theta\eta)\frac{\bar{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}} t^2 d\,\mathrm{N}(t) + \sigma^2\right) + \theta'\eta \qquad \text{pour} \quad 1 > x > \eta. \end{cases}$$

Démonstration. — On déduit de (35) qu'il existe un nombre a tel que

$$\frac{m}{\mathrm{H}^2}\int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} x^2 d\,\mathrm{F}(x) + m\int_{|x|>\mathrm{T}} d\,\mathrm{F}(x) > 2a,$$

quel que soit T et en particulier pour $\mathrm{T} = \bar{\mathrm{H}}$. D'autre part,

$$\frac{mr}{\bar{\mathrm{H}}^2}\int_{-\bar{\mathrm{H}}}^{\bar{\mathrm{H}}} x^2 d\,\mathrm{F}(x) + mr\int_{|x|>\bar{\mathrm{H}}} d\,\mathrm{F}(x) < \mathrm{K},$$

et pour $\eta > r_0 > \frac{16\,\mathrm{K}}{a}$, on déduit

$$\frac{m}{\mathrm{H}^2}\int_{-\bar{\mathrm{H}}}^{\bar{\mathrm{H}}} x^2 d\,\mathrm{F}(x) > a, \qquad \bar{\mathrm{H}} > 4\mathrm{H}.$$

Si $x > \Delta$, on a *a fortiori* $\frac{\bar{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}\, x > \Delta$ et

$$rm\int_{x\bar{\mathrm{H}}}^{\infty} d\,\mathrm{F}(t) = \int_{x+\theta\Delta}^{\infty} d\,\bar{\mathrm{N}}(t) + \theta'\Delta = rm\int_{x'\mathrm{H}}^{\infty} d\,\mathrm{F}(t) = 2\left(\int_{x'+\theta''\Delta}^{\infty} d\,\mathrm{N}(t) + \theta'''\Delta\right)$$

ce qui donne

$$\int_x^\infty d\overline{\mathrm{N}}(t) = r\int_{(x+2\theta\Delta)\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}}^\infty d\,\mathrm{N}(t) + \theta'(r\mathrm{H})\Delta \qquad \text{pour} \quad x > 2\Delta$$

et une formule analogue pour $x < 0$.

Si $\frac{\mathrm{H}}{\overline{\mathrm{H}}} - \Delta > x > 2\Delta$, nous pouvons écrire

$$\bar{\sigma}^2 + \int_{-(x+\theta\Delta)}^{x+\theta\Delta} t^2 d\overline{\mathrm{N}}(t) = \frac{r\mathrm{H}^2}{\overline{\mathrm{H}}^2}\left[\sigma^2 + \int_{-x\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}+\theta'\Delta}^{x\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}+\theta'\Delta} t^2 d\,\mathrm{N}(t)\right] + \theta'(r+1)\Delta$$

$$\bar{\sigma}^2 + \int_{-x}^{x} t^2 d\overline{\mathrm{N}}(t) = \frac{r\mathrm{H}^2}{\overline{\mathrm{H}}^2}\left[\sigma^2 + \int_{-(x+2\theta\Delta)\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}}^{(x+2\theta\Delta)\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}} t^2 d\,\mathrm{N}(t)\right] + \theta'(r+1)\Delta,$$

Supposons $\frac{\mathrm{H}}{\overline{\mathrm{H}}} - \Delta > y > \frac{\mathrm{H}}{2\overline{\mathrm{H}}}$, $2 > x > \frac{\mathrm{H}}{\overline{\mathrm{H}}} - \Delta$; on a

$$\int_y^x t^2 d\overline{\mathrm{N}}(t) = x^2\overline{\mathrm{N}}(x) - y^2\overline{\mathrm{N}}(y) - 2\int_y^x t\overline{\mathrm{N}}(t)\,dt,$$

$$(37) \qquad \left|\int_y^x t\overline{\mathrm{N}}(t)\,dt - r\int_y^x t\mathrm{N}\left(t\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}\right)dt\right| < \int_y^x t\left|\overline{\mathrm{N}}(t) - r\mathrm{N}\left(t\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}\right)\right|dt.$$

Soient B et B′ respectivement les ensembles des points de (x, y) et de $(-x, -y)$ avec $|\overline{\mathrm{N}}(t) - \mathrm{N}(t\overline{\mathrm{H}}\,\mathrm{H}^{-1})| > \tau$; on obtient

$$\int_y^x t^2 d\overline{\mathrm{N}}(t) = r\int_y^x t^2 d\,\mathrm{N}\left(t\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}\right) + x^2[\overline{\mathrm{N}}(x) - r\mathrm{N}(x\overline{\mathrm{H}}\,\mathrm{H}^{-1})]$$
$$- y^2\left[\overline{\mathrm{N}}(y) - r\mathrm{N}\left(y\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}\right)\right] + 2\theta\left[\operatorname{mes} \mathrm{B}.x.\max\left|\overline{\mathrm{N}}(t) - r\mathrm{N}\left(t\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}\right)\right| + \tau x^2\right]$$

et comme nous pouvons supposer que $8\Delta < \sqrt{\Delta} < \frac{\mathrm{H}}{\overline{\mathrm{H}}}$, en vertu de (37) il vient

$$\max|\overline{\mathrm{N}}(t) - r\mathrm{N}(t\overline{\mathrm{H}}\mathrm{H}^{-1})| < r\mathrm{N}\left(\frac{1}{4}\right) + (r+1)\Delta < \mathrm{K}.$$

Nous verrons plus loin qu'on peut prendre y tel que

$$(38) \qquad \left|y^2\int_{|t|>y} d\overline{\mathrm{N}}(t) - y^2 r\int_{|t|>y\overline{\mathrm{H}}\mathrm{H}^{-1}} d\,\mathrm{N}(t)\right| < \tau,$$

$$(39) \qquad \left|\bar{\sigma}^2 + \int_{-y}^{y} t^2 d\overline{\mathrm{N}}(t) - \frac{r\mathrm{H}^2}{\overline{\mathrm{H}}^2}\left(\int_{-y\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}}^{y\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}} t^2 d\,\mathrm{N}(t) + \sigma^2\right)\right| < \tau.$$

Par conséquent

$$\bar{\sigma}^2+\int_{-x}^{x} t^2 d\overline{\mathrm{N}}(t)=r\frac{\mathrm{H}^2}{\overline{\mathrm{H}}^2}\left(\sigma^2+\int_{-x\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}}^{x\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}} t^2 d\mathrm{N}(t)\right)$$

$$-x^2\left(\int_{|t|>x} d\overline{\mathrm{N}}(t)-r\int_{|t|>x\overline{\mathrm{H}}\mathrm{H}^{-1}} d\mathrm{N}(t)\right)+\mathrm{O}[\operatorname{mes}(\mathrm{B}+\mathrm{B}')+\tau].$$

Pour $x<2$, on a en vertu de la formule (37)

$$-x^2\left(\int_{|t|>x+2\Delta} d\overline{\mathrm{N}}(t)-r\int_{|t|>x\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}} d\mathrm{N}(t)\right)>-4\Delta(r+1),$$

$$\bar{\sigma}^2+\int_{-x-\Delta}^{x+\Delta} t^2 d\overline{\mathrm{N}}(t)>r\frac{\mathrm{H}^2}{\overline{\mathrm{H}}^2}\left(\sigma^2+\int_{-x\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}}^{x\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}} t^2 d\mathrm{N}(t)\right)-\mathrm{C}[\tau+\operatorname{mes}(\mathrm{B}+\mathrm{B}')+\Delta r]$$

et de même

$$\bar{\sigma}^2+\int_{-x+\Delta}^{x-\Delta} t^2 d\overline{\mathrm{N}}(t)=r\frac{\mathrm{H}^2}{\overline{\mathrm{H}}^2}\left(\sigma^2+\int_{-x\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}}^{x\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}} t^2 d\mathrm{N}(t)\right)+\mathrm{C}[\tau+\operatorname{mes}(\mathrm{B}+\mathrm{B}')+\Delta r].$$

Ces formules peuvent être réunies dans la suivante, valable pour $\eta<x<1$,

$$\bar{\sigma}^2+\int_{-x}^{x} t^2 d\overline{\mathrm{N}}(t)=r\frac{\mathrm{H}^2}{\overline{\mathrm{H}}^2}\left(\sigma^2+\int_{-(x+\theta\eta)\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}}^{(x+\theta\eta)\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}} t^2 d\mathrm{N}(t)\right)+\theta'\eta,$$

où

$$\eta=\mathrm{O}[\Delta+\tau+\operatorname{mes}(\mathrm{B}+\mathrm{B}')].$$

Reste à borner $\operatorname{mes}(\mathrm{B}+\mathrm{B}')$ et à prouver qu'on peut choisir y de la façon indiquée. Si $\operatorname{mes}\mathrm{B}>4l\Delta$, il existe l points de B, $x_1, \ldots, x_l$, avec $x_i-x_{i-1}>4\Delta$. L'inégalité

$$\int_{x_i}^{\infty} d\overline{\mathrm{N}}(t)>r\int_{x_i\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}}^{\infty} d\mathrm{N}(t)+\tau \qquad (x_i>2\Delta)$$

entraîne

$$(r+1)\Delta+r\int_{(x_i-2\Delta)\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}}^{\infty} d\mathrm{N}(t)\geqq r\int_{x_i\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}}^{\infty} d\mathrm{N}(t)+\tau,$$

$$r\int_{(x_i-2\Delta)\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}}^{x_i} d\mathrm{N}(t)>\tau-\Delta(r+1).$$

De même

$$\int_{x_i}^{\infty} d\overline{\mathrm{N}}(t)<r\int_{x_i\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}}^{\infty} d(\mathrm{N}t-\tau)$$

entraîne

$$r\int_{x_i\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}}^{(x_i+2\Delta)\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}} d\mathrm{N}(t) > \tau-(r+1)\Delta.$$

Donc

$$r\int_{(y-2\Delta)\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}}^{\infty} d\mathrm{N}(t) > l[\tau-(r+1)\Delta],$$

d'où, comme $(y-2\Delta)\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}} > \frac{1}{2}-2\Delta\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}} > \frac{1}{4}$ par hypothèse, et que

$$r\left|\mathrm{N}\left(\frac{1}{4}\right)\right| + \mathrm{N}\left(-\frac{1}{4}\right) < \mathrm{K},$$

$$\operatorname{mes}(\mathrm{B}+\mathrm{B}') < 4\Delta\mathrm{K}[\tau-(r+1)\Delta]^{-1}.$$

L'ensemble des points z de $\left(\frac{1}{2}\mathrm{H}\overline{\mathrm{H}}^{-1},\ \mathrm{H}\overline{\mathrm{H}}^{-1}\right)$ pour lesquels on n'a pas (38) est également de mesure $< 4\Delta\mathrm{K}[\tau-(r+1)\Delta]$.

Si (39) n'est pas vérifié pour un point z de $\left(\frac{1}{2}\mathrm{H}\overline{\mathrm{H}}^{-1},\ \mathrm{H}\overline{\mathrm{H}}^{-1}\right)$, on a par exemple

$$\overline{\sigma}^2+\int_{-z}^{z} t^2\,d\overline{\mathrm{N}}(t) > r\mathrm{H}^2\overline{\mathrm{H}}^{-2}\left(\sigma^2+\int_{-z\mathrm{H}\overline{\mathrm{H}}^{-1}}^{z\mathrm{H}\overline{\mathrm{H}}^{-1}} t^2\,d\mathrm{N}(t)\right)+\tau,$$

$$\int_{(z-2\Delta)\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}} < t \leqq \frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}} t^2\,d\mathrm{N}(t) > [\tau-(r+1)\Delta]\frac{\overline{\mathrm{H}}^2}{\mathrm{H}^2 r}.$$

Comme $\int_{-1}^{1} x^2\,d\mathrm{N}(x) < \mathrm{K}$, la mesure des points de $\left(\frac{1}{2}\mathrm{H}\overline{\mathrm{H}}^{-1}, \mathrm{H}\overline{\mathrm{H}}^{-1}\right)$ pour lesquels on n'a pas (39) est $< 4\mathrm{K}r\mathrm{H}^2\overline{\mathrm{H}}^{-2}\Delta[\tau-(r+1)\Delta]^{-1}$.

La mesure des points z de $\left(\frac{1}{2}\mathrm{H}\overline{\mathrm{H}}^{-1},\ \mathrm{H}\overline{\mathrm{H}}^{-1}\right)$ pour lesquels (38) ou (39) n'est pas vérifié est donc

$$\mathrm{O}[\Delta[\tau-(r+1)\Delta]^{-1}].$$

Si

$$\frac{\mathrm{H}}{\overline{\mathrm{H}}} > \frac{\mathrm{C}\Delta}{\tau-(r+1)\Delta}+\mathrm{C}\Delta,$$

cette mesure sera inférieure à $\frac{1}{2}\mathrm{H}\overline{\mathrm{H}}^{-1}-2\Delta$ et nous pouvons trouver un nombre y ayant les propriétés indiquées. Nous allons prendre

$$2\mathrm{C}\Delta[1+(\tau-r\Delta-\Delta)^{-1}] = \sqrt{\Delta}, \qquad \tau = \mathrm{O}(\sqrt{\Delta}),$$

on a l'équation (36) avec $\eta = \mathrm{O}(\sqrt{\Delta})$. C. Q. F. D.

22. Théorème XIII. — *Si* $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$ *n'est pas vide, il y a une suite de lois* I_i *normées telles que :*

1° *toute classe* $\mathrm{K}[\mathrm{J}]$ *de* $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$ *est de la forme*

$$\lim_{\rho \to \infty} \mathrm{K}[\mathrm{I}^t_{n_\rho}] \qquad (t > 0).$$

2° *il existe une suite d'entiers* j_p *et une suite de nombres* τ_p, $\{j_p\}$ *et* $\{\tau_p\}$ *pouvant être vides, telles que*

$$\varphi'[\mathrm{I}_n, \mathrm{I}_{n+1}] \to 0 \qquad \text{si } n \neq j_p,$$

$$\sigma_n^2 + \int_{-\tau_p}^{\tau_p} t^2 \, d\mathrm{N}_n(t) \to 0, \qquad \int_{|t|>\tau} d\mathrm{N}(t) < \mathrm{K} \qquad \text{si } n = j_p.$$

Démonstration. — Si $e_n < \varepsilon$, on peut trouver une loi I et une suite de nombres z_n tels qu'on ait

$$(40) \qquad r^n \int_{x z_n}^{\infty} d\mathrm{F}(t) = \int_{x+\theta\varepsilon}^{\infty} d\mathrm{N}(t) + \theta'\varepsilon \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Supposons d'abord que $e_n \to 0$ et que $\varliminf \frac{z_n}{z_{nr}} > 0$, z_n étant le nombre intervenant dans la formule (40) où nous prendrons $\varepsilon = 2e_n$. Il y aura une suite de lois I_n de $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$ normées avec $\varphi_{r^n}[\mathrm{I}_n] < 2e_n$, et en vertu du lemme, $\varliminf \frac{z_n}{z_{nr}}$ étant $\neq 0$, on a $\varphi'[\mathrm{I}_n, \mathrm{I}_{n+1}] \to 0$. Soit $\mathrm{K}[\mathrm{J}]$ une classe de $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$, nous pouvons trouver deux suites de nombres m_ρ et n_ρ telles que $m_\rho / r^{n_\rho} \to u$, $\mathrm{K}[\mathcal{L}^{m_\rho}] \to \mathrm{K}[\mathrm{J}]$, donc $\mathrm{K}[\mathcal{L}^{r^{n_\rho}}] \to \mathrm{K}\left[\mathrm{J}^{\frac{1}{u}}\right]$. Comme $\varphi_{r^{n_\rho}}[\mathrm{I}_{n_\rho}] \to 0$, on en tire $\mathrm{I}_{n_\rho} \to \mathrm{J}^{\frac{1}{u}}$. Si $e_n \to 0$ et $\varliminf z_n / z_{nr} \neq 0$, nous pouvons donc indiquer une suite I_n ayant les propriétés demandées et la suite $\{j_p\}$ est vide.

a. Supposons maintenant $\varlimsup e_n \neq 0$ ou $\varliminf \frac{z_n}{z_{nr}} = 0$. Soient I une loi de $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$ à dispersion $\neq 0$ pour la probabilité 1, que nous pouvons supposer normée, et ε un nombre très petit quelconque. Il y aura une suite de nombres $\{n_\rho\}$ avec $\mathrm{K}[\mathcal{L}^{n_\rho}] \to \mathrm{K}[\mathrm{I}]$. Soit $m_\rho = n_\rho r^{-i_\rho}$ (i_ρ entier) le nombre défini par les conditions

$$e_{m_\rho} \geqq \varepsilon^2, \qquad e_{m_\rho r} < \varepsilon^2, \qquad \ldots, \qquad e_{\frac{n_\rho}{r}} < \varepsilon^2,$$

ou

$$\frac{z_{m_\rho}}{z_{m_\rho r}} \leqq \varepsilon, \qquad \frac{z_{m_\rho r}}{z_{m_\rho r^2}} > \varepsilon, \qquad \ldots, \qquad \frac{z_{\frac{n_\rho}{r}}}{z_{n_\rho}} > \varepsilon.$$

Supposons $\varlimsup e_{m_\rho} \neq 0$ et $\varliminf \frac{z_{m'_\rho}}{z_{m_\rho r}} \neq 0$. Il y aura une suite de nombres m'_ρ avec $\varliminf e_{m'_\rho} \neq 0$ et $\mathrm{K}[\mathcal{L}^{m'_\rho}] \to \mathrm{K}[\mathrm{E}]$, l'hypothèse $\mathrm{K}[\mathcal{L}^{p_i}] \to \mathrm{K}[\mathrm{J}]$, $\mathrm{K}[\mathrm{J}] \neq \mathrm{K}[\mathrm{E}]$ entraînant $e_{p_i} \to 0$. Il résulte du théorème que pour $\rho > \rho_0$, il existe un entier p

de la forme $m'_\rho r^s$, $m'_\rho < p < n_\rho$ avec

$$\frac{p}{x^2}\int_{-x}^{x} t^2 d\,\mathrm{F}(t) < \varepsilon, \qquad 1 < p\int_{|t|>x} d\,\mathrm{F}(t) \leqq r,$$

$$p\int_{|t|>\frac{x}{2}} d\,\mathrm{F}(x) < r + 4\varepsilon < r + 1$$

et, comme on a pour une certaine loi I'

$$p\int_{yx}^{\infty} d\,\mathrm{F}(t) = \int_{x+\theta\varepsilon}^{\infty} d\,\mathrm{N}'(t) + \theta'\varepsilon, \qquad \ldots.$$

on en tire

$$(41) \qquad \int_{|t|>\frac{1}{2}\frac{x}{y}+2\varepsilon} d\,\mathrm{N}'(t) < \mathrm{K},$$

et pour $1 > \frac{x}{y} > 6\varepsilon$

$$\sigma'^2 + \int_{-\frac{x}{y}+\varepsilon}^{\frac{x}{y}-\varepsilon} t^2 d\,\mathrm{N}'(t) < 2\varepsilon.$$

Soit $c = \frac{x}{y} - \varepsilon$, on a

$$\int_{|t|>c} d\,\mathrm{N}'(t) < \mathrm{K}, \qquad \int_{-c}^{c} x^2 d\,\mathrm{N}'(x) + \sigma'^2 < 2\varepsilon.$$

Si $\frac{x}{y} > 1$, on a

$$\sigma'^2 + \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} t^2 d\,\mathrm{N}'(t) < 2\varepsilon,$$

et, comme la dispersion de I' pour la probabilité $\frac{1}{2}$ est 1, on a

$$\int_{|t|>1-\varepsilon} d\,\mathrm{N}'(t) < \mathrm{K}.$$

Si $\frac{x}{y} < 6\varepsilon$, on a toujours (41) et

$$\frac{p}{x^2}\int_{-6\varepsilon y}^{6\varepsilon y} t^2 d\,\mathrm{F}(t) < \frac{p}{y^2}\int_{-x}^{x} t^2 d\,\mathrm{F}(t) + 36 r\varepsilon^2 < 2\varepsilon,$$

donc

$$\int_{|t|>5\varepsilon} d\,\mathrm{N}'(t) < \mathrm{K}, \qquad \int_{-5\varepsilon}^{5\varepsilon} t^2 d\,\mathrm{N}'(t) + \sigma'^2 < 3\varepsilon.$$

Nous venons de prouver que dans tous ces cas, on peut écrire pour un nombre convenable c,

$$(42) \qquad \sigma'^2 + \int_{-c}^{c} t^2 d\,\mathrm{N}'(t) < \mathrm{K}\varepsilon, \qquad \int_{|t|>c} d\,\mathrm{N}'(t) < \mathrm{K}.$$

b. Admettons que pour un certain nombre m_ρ, l'on a $e_{m_\rho} < \varepsilon^2$, $e_{m_\rho r} < \varepsilon^2$, ..., $\frac{z_{m_\rho}}{z_{m_\rho r}} < \varepsilon$. Dans ce cas on a deux lois normées I′ et I″ de EP′[$\mathcal{L}$] respectivement avec les relations

$$m_\rho \int_{x z_{m_\rho}}^{\infty} d\,\mathrm{F}(t) = \int_{x+\theta\varepsilon}^{\infty} d\,\mathrm{N}''(t) + \theta'\varepsilon, \qquad \ldots,$$

et

$$r m_\rho \int_{x z_{m_\rho r}}^{\infty} d\,\mathrm{F}(t) = \int_{x+\theta\varepsilon}^{\infty} d\,\mathrm{N}'(t) + \theta'\varepsilon, \qquad \ldots.$$

Des inégalités

$$\frac{m_\rho}{z_{m_\rho}^2} \int_{-z_{m_\rho}}^{z_{m_\rho}} t^2 d\,\mathrm{F}(t) < \sigma''^2 + \int_{-1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} t^2 d\,\mathrm{N}''(t) < \mathrm{K}$$

et

$$r m_\rho \int_{|t| > z_{m_\rho}} d\,\mathrm{F}(t) < \mathrm{K},$$

qui résultent du fait que I′ est normé, on déduit

$$r m_\rho \int_{|t| > z_{m_\rho}} d\,\mathrm{F}(t) < \mathrm{K}, \qquad \frac{r m_\rho}{z_{m_\rho r}^2} \int_{-z_{m_\rho r}}^{z_{m_\rho r}} t^2 d\,\mathrm{F}(t) < r\varepsilon^2 \mathrm{K}$$

ce qui conduit encore aux équations (42). Il existe par conséquent une suite finie de lois normées de EP′[$\mathcal{L}$], $\mathrm{I}_1, \ldots, \mathrm{I}_l$ où $\mathrm{I}_1 = \mathrm{I}'$, $\mathrm{I}_l = \mathrm{I}$ avec $\varphi'[\mathrm{I}_i, \mathrm{I}_{i-1}] = \mathrm{O}(\tau)$, $(i = 2, \ldots, l)$, I_1 vérifiant (42).

Ceci étant, si I est une loi de EP′[$\mathcal{L}$], il existe un nombre t tel que la dispersion de I^t pour la probabilité $\frac{1}{2}$ est $\neq 0$ (ceci résulte du théorème sur l'augmentation de la dispersion). Nous pouvons donc trouver une suite de lois normées de EP′[$\mathcal{L}$], $\mathrm{I}_1, \ldots, \mathrm{I}_n$ telle que toute classe K[J] de EP′[$\mathcal{L}$] soit de la forme $\lim_{p\to\infty} \mathrm{K}[\mathrm{J}_{n_p}^{t}]$. A chaque loi J_n, nous pouvons faire correspondre une suite de lois normées $\mathrm{I}_{n1}, \ldots, \mathrm{I}_{nm}$ où $m = m_n$, telles que

$$\varphi'[\mathrm{I}_{n,i}, \mathrm{I}_{n,i+1}] < \frac{1}{n}, \qquad \mathrm{I}_{nm} = \mathrm{J}_{n1}, \qquad \sigma_{n1}^2 + \int_{-c_n}^{c_n} t^2 d\,\mathrm{N}_{n1}(t) < \frac{1}{n}, \qquad \int_{|t| > c_n} d\,\mathrm{N}_{n1}(t) < \mathrm{K}.$$

La suite des lois I_n obtenue en dénombrant la suite

$$\mathrm{I}_{11}, \quad \ldots, \quad \mathrm{I}_{nm_1}, \quad \mathrm{I}_{21}, \quad \ldots, \quad \mathrm{I}_{2m_2}, \quad \ldots, \quad \mathrm{I}_{n1}, \quad \ldots, \quad \mathrm{I}_{nm_n}$$

a bien les propriétés indiquées. Ce qui termine la démonstration du théorème.