ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

A. MARCHAUD

# Sur les propriétés differérentielles du premier ordre des surfaces simples de Jordan et quelques applications

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 63 (1946), p. 81-108

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1946_3_63__81_0>

SUR

# LES PROPRIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES

DU PREMIER ORDRE

# DES SURFACES SIMPLES DE JORDAN

ET QUELQUES APPLICATIONS

PAR M. A. MARCHAUD.

## Introduction.

Dans le présent travail je reprends l'étude des propriétés différentielles du premier ordre des surfaces simples de Jordan. Une Note des *Comptes rendus* (1) m'avait suffit pour établir les résultats fondamentaux suivants.

En tout point intérieur d'une surface simple de Jordan où le faisceau des tangentes (paratingent de M. Bouligand) ne remplit pas tout l'espace, il se compose des droites ne pénétrant pas à l'intérieur de deux demi-cônes convexes symétriques, pouvant se réduire à des dièdres ou à des demi-espaces; le faisceau dérivé (contigent de M. Bouligand) est l'ensemble des demi-droites issues du point considéré, remplissant la région comprise entre deux surfaces coniques (engendrées par la variation continue d'une demi-droite) ayant chacune d'elles une génératrice et une seule dans tout demi-plan dont l'arête passe par le point et n'est pas une tangente, ces surfaces coniques pouvant être confondues; enfin le faisceau des tangentes contient le faisceau dérivé et s'il se réduit partout à un plan, celui-ci varie continûment.

Je complète ici ces résultats en établissant d'autres relations entre le faisceau des tangentes et le faisceau dérivé en un point et en montrant le parti que l'on peut tirer de la connaissance du faisceau des tangentes en un point pour étudier la variation du faisceau dérivé dans son voisinage, ce qui conduit notamment à une propriété intéressante pour les nombres dérivés des fonctions

(1) A. MARCHAUD, *Sur le contingent et le paratingent en un point d'une surface simple de Jordan* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 208, 11 janvier 1937, p. 86).

de deux variables à nombres dérivés bornés et qui, semble-t-il, n'avait pas été remarquée jusqu'à présent : si pour une direction donnée un nombre dérivé d'une fonction $f(m)$ à nombres dérivés bornés est discontinu en $m_0$, les nombres dérivés dans toutes les directions, sauf peut-être dans deux directions opposées, sont tous discontinus en $m_0$.

La propriété essentielle du faisceau des tangentes est la convexité de son complémentaire, on en déduit en particulier que la condition nécessaire et suffisante pour que le faisceau des tangentes se réduise à un plan est que l'on puisse trouver deux plans distincts tels que chacun d'eux ne contienne qu'une seule tangente, celle-ci n'étant pas sur l'intersection des plans.

Je termine le Mémoire par diverses applications aux surfaces dont certaines familles de sections planes sont convexes. Voici quelques-uns des résultats obtenus.

1° Soit S une surface représentée par une équation

$$z = f(x, y) \quad (^1)$$

et dont les sections par les plans $x = \text{const.}$ et $y = \text{const.}$ sont des arcs convexes (pouvant comporter des segments de droites) et considérons un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de S non situé sur le bord.

*a*. La section du faisceau dérivé en $M_0$ par les plans $x = x_0$ et $y = y_0$ se réduit aux demi-tangentes aux sections de S par ces plans : $M_0\alpha_1$, $M_0\beta_1$ et $M_0\alpha_2$, $M_0\beta_2$.

*b*. La section du faisceau des tangentes par ces mêmes plans se compose des droites ne pénétrant pas à l'intérieur de l'angle $\alpha_1 M_0 \beta_1$ et de l'angle $\alpha_2 M_0 \beta_2$. Il en résulte que si les sections de S par les plans $x = \text{const.}$ et $y = \text{const.}$ ont partout une tangente la surface possède partout un plan tangent continu.

Dans le cas où les angles $\alpha_1 M_0 \beta_1$ et $\alpha_2 M_0 \beta_2$ sont non plats et tournés l'un vers le haut et l'autre vers le bas, le faisceau dérivé se compose des quatre secteurs plans $\alpha_1 M_0 \alpha_2$, $\alpha_2 M_0 \beta_1$, $\beta_1 M_0 \beta_2$, $\beta_2 M_0 \alpha_1$.

2° Si la surface S est limitée par un contour se projetant sur le plan $z = 0$ suivant un contour convexe, et si de plus toutes ses sections par les plans parallèles à $Oz$ sont convexes, elle ne peut être qu'un morceau de la frontière d'un corps convexe ou bien un morceau de *quadrique réglée* non dégénérée (2).

---

(1) La fonction $f$ n'est pas supposée à nombres dérivés bornés.

(2) Dans un travail antérieur A. MARCHAUD, *Sur les surfaces du troisième ordre de la géométrie finie* (*Journ. de Math.*, t. XVIII, fasc. IV, 1939), les résultats de la Note précitée m'avaient déjà conduit à une propriété remarquable et inattendue des surfaces réglées non coniques du troisième ordre, à savoir qu'elles possèdent partout, sauf aux points de la directrice rectiligne et peut-être le long des deux génératrices limites un plan tangent continu, il n'est bien entendu fait aucune hypothèse relativement à l'exsitence de tangentes aux sections planes.

J'ajoute que ce travail est indépendant des recherches de M. Bouligand et de ses élèves et de celles de M. Roger : *Sur les propriétés tangentielles des ensembles euclidiens de points*.

### I. — Faisceau des tangentes et faisceau dérivé.

1. Considérons un morceau de surface simple de Jordan : S, image biunivoque et bicontinue d'un disque circulaire plan $\sigma$. Je me propose, dans cette première partie, d'étudier la disposition des tangentes et des demi-tangentes en tout point intérieur de S où l'ensemble des tangentes ne remplit pas tout l'espace.

Précisons d'abord les définitions et les notations. Soit $M_0$ un point donné de S, une demi-tangente à S en $M_0$ est par définition toute demi-droite d'accumulation de demi-droites $M_0M'$, d'origine $M_0$, lorsque les points $M'$ de S tendent vers $M_0$, une *tangente* à S en $M_0$ est par définition toute droite d'accumulation de droites $MM'$ lorsque les points M et $M'$ de S tendent vers $M_0$, l'un d'eux pouvant toutefois rester confondu avec $M_0$. Comme à toute sécante $M_0M'$ on peut associer une sécante $MM'$ aussi voisine qu'on veut, il est immédiat que les tangentes peuvent se définir comme limites de sécantes $MM'$, les deux points étant distincts de $M_0$. Adoptant l'expression proposée par M. Roger [1] j'appellerai *faisceau dérivé* de S en $M_0$ l'ensemble des demi-tangentes à la surface en ce point; ce faisceau sera désigné par la notation $\mathcal{D}(S, M_0)$ ou plus simplement $\mathcal{D}(M_0)$ lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté. D'autre part j'appellerai *faisceau des tangentes* à S et $M_0$ l'ensemble des tangentes à la surface en ce point et le représenterai par $\mathfrak{T}(S, M_0)$, ou plus simplement par $\mathfrak{T}(M_0)$. Le faisceau dérivé et le faisceau des tangentes sont le « contigent » et le « paratingent » de M. Bouligand, qui nomme *paratingente* ce que j'appelle une *tangente* [2]. On observera que si le support de toute demi-tangente est une tangente, toute demi-droite d'origine $M_0$, dont le support est une tangente, n'est pas forcément une demi-tangente; mais il ne saurait y avoir de confusion si l'on prend le mot composé « demi-tangente » en bloc.

2. Les ensembles $\mathcal{D}(M_0)$ et $\mathfrak{T}(M_0)$ sont évidemment fermés et le second contient le premier. Il sera parfois commode de considérer $\mathfrak{T}(M_0)$ comme un ensemble de demi-droites : celui des éléments d'accumulation des demi-droites $MM'$ d'origine M.

Soit $[\mathfrak{T}(M_0)]_\varepsilon$ l'ensemble des droites obtenues en remplaçant chaque droite de $\mathfrak{T}(M_0)$ par le cône de révolution plein (ensemble de droites) de sommet $M_0$, d'angle au sommet $2\varepsilon$ ayant pour axe la droite considérée. Il

(1) F. Roger, *Sur les propriétés tangentielles des ensembles euclidiens de points* (*Thèse*, Paris, 1938; *Acta Math.*, t. 69).

(2) G. Bouligand, *Introduction à la Géométrie infinitésimale directe*, p. 65.

résulte immédiatement de la définition du faisceau des tangentes que si le point M de S est assez voisin de $M_0$ le faisceau de sommet $M_0$ déduit de $\mathfrak{T}(M)$ par translation sera contenu dans $[\mathfrak{T}(M_0)]_\varepsilon$. La propriété précédente est ce que M. Bouligand appelle la semi-continuité supérieure d'inclusion, on en déduit immédiatement que *si le faisceau des tangentes se réduit à un plan en* $M_0$ *et partout dans son voisinage, ce plan varie d'une manière continue*.

3. Supposons maintenant $M_0$ *intérieur* à S, c'est-à-dire que son image $\mu_0$ soit intérieure à $\sigma$, et *plaçons-nous dans l'hypothèse où* $\mathfrak{T}(M_0)$ *ne remplit pas tout l'espace*. Le faisceau de tangentes étant fermé on peut trouver une droite $A'_0 M_0 A_0$ qui lui soit étrangère. Soit alors le morceau $S_1$ de S défini par un cercle $\sigma_1$ de centre $\mu_0$ et contenu dans $\sigma$. Il résulte immédiatement de la définition de $\mathfrak{T}(M_0)$ que si le cercle $\sigma_1$ est assez petit, $S_1$ se projette sur un plan donné P, parallèlement à $A_0 A'_0$ d'une manière biunivoque et bicontinue suivant un domaine fermé ayant la projection de $M_0$ à son intérieur. De plus, $M_1$ et $M_2$ étant deux points de $S_1$ et $m_1$ et $m_2$ leurs projections sur P, le rapport

$$\frac{\overline{m_2 M_2} - \overline{m_1 M_1}}{m_1 m_2}$$

est borné. Ainsi un voisinage $S_0$ de $M_0$ (sur S) est représentable en axes rectangulaires ou obliques par une équation

$$z = f(x, y) = f(m), \tag{1}$$

où la fonction $f$ est uniforme dans un cercle (fermé) $s_0$, contenant à son intérieur la projection de $M_0$ et satisfait dans ce domaine à une condition de Lipschitz

$$|f(m_1) - f(m_2)| \leqq k\, m_1 m_2 \qquad (k = \text{const.}). \tag{2}$$

Réciproquement : en tout point intérieur d'un morceau de surface défini de la manière précédente le faisceau des tangentes ne contient évidemment pas la parallèle à l'axe des $z$.

4. Remarquons en passant qu'il suffit pour l'existence d'une relation telle que (2) que la fonction $f$ satisfasse à des conditions de Lipschitz par rapport à deux directions distinctes du plan des $xy$, que l'on peut toujours supposer être celle des axes, c'est-à-dire que l'on ait

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leqq k_1 |x_1 - x_2|,$$
$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqq k_2 |y_1 - y_2|,$$

ou si l'on préfère que les nombres dérivés de $f$ par rapport à $x$ et par rapport à $y$ soient séparément bornés [1].

---

[1] *Voir* plus loin, n° 12.

Soient en effet $M_1$ et $M_2$ deux points de $S_0$, $m_1(x_1, y_1)$ et $m_2(x_2, y_2)$ leurs projections, on a

$$|f(m_1)-f(m_2)| \leqq k_1|x_1-x_2|+k_2|y_1-y_2|,$$

et d'autre part, $\varphi$ désignant l'angle des axes,

$$\begin{aligned}\overline{m_1 m_2}^2 &= (x_1-x_2)^2\sin^2\varphi+[(x_1-x_2)\cos\varphi+(y_1-y_2)]^2,\\ &= (y_1-y_2)^2\sin^2\varphi+[(y_1-y_2)\cos\varphi+(x_1-x_2)]^2,\end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire

$$k_1|x_1-x_2|+k_2|y_1-y_2| < \frac{k_1+k_2}{\sin\varphi}\,m_1 m_2.$$

5. Nous allons étudier la structure de $\mathcal{C}(M_0)$ et de $\mathcal{D}(M_0)$ dans l'hypothèse énoncée au début du numéro 3. Soient M et M′ deux points de $S_0$, $m$ et $m'$ leurs projections sur le plan des $xy$ parallèlement à $Oz$. Appelons *pente* de la demi-droite MM′ le rapport $\frac{f(m')-f(m)}{mm'}$, si deux demi-droites sont parallèles et opposées leurs pentes sont opposées. Considérons alors quatre points de $S_0$ : $M_1$, $M'_1$, $M_2$, $M'_2$, leurs projections : $m_1$, $m'_1$, $m_2$, $m'_2$ et les points M et M′ dont les projections $m$ et $m'$ sont définiespar les relations

$$\overrightarrow{m_1 m} = t\,\overrightarrow{m_1 m_2}, \qquad \overrightarrow{m'_1 m'} = t\,\overrightarrow{m'_1 m'_2} \qquad (0 \leqq t \leqq 1).$$

Lorsque $t$ varie de 0 à 1, M et M′ restent sur $S_0$; d'autre part si l'angle des vecteurs $\overrightarrow{m_1 m'_1}$, et $\overrightarrow{m_2 m'_2}$ est moindre que $\pi$ la demi-droite $mm'$ tourne dans le même sens et la longueur $mm'$ ne s'annule pas. La pente de MM′ varie donc continûment et prend toutes les valeurs entre les pentes de $M_1M'_1$ et $M_2M'_2$. De là il résulte que si deux demi-droites d'origine $M_0$, situées dans un même demi-plan Q d'arête $A'_0M_0A_0$ parallèle à $Oz$ appartiennent toutes deux à $\mathcal{C}(M_0)$, il en est de même de l'angle qu'elles limitent; il suffit pour le voir de choisir $M_1M'_1$ et $M_2M'_2$ de manière qu'elles tendent respectivement vers les demi-droites données. En supposant $M_1$ et $M_2$ confondus avec $M_0$ on obtient la même propriété pour $\mathcal{D}(M_0)$.

Ainsi, *les sections respectives de* $\mathcal{C}(M_0)$ *et* $\mathcal{D}(M_0)$ *par tout demi-plan* Q *se composent de deux angles pleins* $T'M_0T$ *et* $D'M_0D$, *le premier contenant le second.* Bien entendu ce dernier ou tous les deux peuvent se réduire à une demi-droite unique. Désignons par $\alpha$ l'angle que fait $Ox$ avec la trace de Q sur le plan des $xy$ et soient $T(M_0, \alpha)$, $T'(M_0, \alpha)$, $D(M_0, \alpha)$, $D'(M_0, \alpha)$ les pentes respectives de $M_0T$, $M_0T'$, $M_0D$, $M_0D'$. Je supposerai $T'(M_0, \alpha)$ au plus égal à $T(M_0, \alpha)$ et $D'(M_0, \alpha)$ au plus égal à $D(M_0, \alpha)$. On a alors

$$-k \leqq T'(M_0, \alpha) \leqq D'(M_0, \alpha) \leqq D(M_0, \alpha) \leqq T(M_0, \alpha) \leqq +k,$$

$$T(M_0, \alpha+\pi) = -T'(M_0, \alpha), \qquad T'(M_0, \alpha+\pi) = -T(M_0, \alpha).$$

Nous allons voir dans un instant que les quatre fonctions de $\alpha$ : T′, D′, D, T, périodiques de période $2\pi$, satisfont à une même condition de Lipschitz de coefficient $k$. Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté possible nous supprimerons l'indication du point $M_0$.

6. Conservant les notations du numéro précédent, supposons que $m_1$ et $m_2$ soient confondus et que $m_2 m'_2$ se réduise de $m_1 m'_1$ par une rotation d'angle $\varepsilon$ de module moindre que $\pi$. Évaluons la pente de $M'_1 M'_2$. On a

$$f(m'_1) = f(m_1) + m_1 m'_1 \times \text{pente de } M_1 M'_1,$$
$$f(m'_2) = f(m_1) + m_1 m'_1 \times \text{pente de } M_1 M'_2.$$

D'où l'on déduit

$$\text{pente de } M'_1 M'_2 = \frac{m_1 m'_1}{m'_1 m'_2} (\text{pente de } M_1 M'_2 - \text{pente de } M_1 M'_1),$$

et par suite

$$|\text{pente de } M_1 M'_2 - \text{pente de } M_1 M'_1| \leqq \frac{m'_1 m'_2}{m_1 m'_1} K,$$

et enfin

$$|\text{pente de } M_1 M'_2 - \text{pente de } M_1 M'_1| \leqq k\,|\varepsilon|. \tag{3}$$

De cette dernière relation découlent immédiatement les propriétés suivantes :

1° *Le faisceau dérivé en un point intérieur de* S *s'obtient en prenant les demi-tangentes aux sections par les demi-plans ayant pour arête une droite étrangère au faisceau des tangentes* [1].

En effet, soit $M_0 L$ une demi-tangente obtenue comme limite de $M_1 M'_1$ ($M_1$ confondu avec $M_0$). Il suffit de prendre $m_1 m'_2$ dans le demi-plan d'arête $A'_0 M_0 A_0$ défini par $M_0 L$. L'angle $\varepsilon$ tend alors vers zéro et par suite $M_1 M'_1$ tend vers $M_0 L$.

2° *Pour obtenir la section du faisceau des tangentes par un plan contenant une droite qui lui est étrangère, on peut se borner aux cordes parallèles à ce plan.*

La démonstration est exactement la même.

3° *Les quatre fonctions de* $\alpha$ : $T(M_0, \alpha)$, $T'(M_0, \alpha)$, $D(M_0, \alpha)$, $D'(M_0, \alpha)$ *satisfont à une même condition de Lipschitz.*

Démontrons-le par exemple pour $T(\alpha)$. Soient $\alpha_1$ et $\alpha_2$ deux valeurs de $\alpha$ dont la différence est en module moindre que $\pi$. Prenons $m_1 m'_1$ et $m_1 m'_2$ d'angles polaires respectifs $\alpha_1$ et $\alpha_2$. On peut choisir $m_1 m'_1$ de manière que la pente

---

[1] Ce résultat a été établi d'une manière différente par M. Bouligand, Cf. *Introduction à la Géométrie infinitésimale directe*, p. 168.

de $M_1M'_1$ tende vers $T(\alpha_1)$. Soit alors $p$ la pente d'une des limites de $M_1M'_2$, on a d'une part,

$$p \leqq T(\alpha_2),$$

et d'autre part, d'après la relation (3),

$$T(\alpha_1) - p \leqq k\,|\alpha_1 - \alpha_2|,$$

d'où l'on déduit

$$T(\alpha_1) - T(\alpha_2) \leqq k\,|\alpha_1 - \alpha_2|.$$

En intervertissant les rôles de $\alpha_1$ et de $\alpha_2$, on obtiendrait

$$T(\alpha_2) - T(\alpha_1) \leqq k\,|\alpha_2 - \alpha_1|,$$

ce qui donne en définitive

$$|T(\alpha_1) - T(\alpha_2)| \leqq k\,|\alpha_1 - \alpha_2|,$$

quels que soient $\alpha_1$ et $\alpha_2$ tel que $|\alpha_1 - \alpha_2|$ soit moindre que $\pi$. La démons tration est exactement la même pour les autres fonctions.

On remarquera que le coefficient $k$ de la condition de Lipschitz commune aux quatre fonctions de $\alpha$ est indépendant de la position de $M_0$ à l'intérieur de $S_0$

En résumé nous avons obtenu les résultats suivants.

La section de $\mathcal{T}(M_0)$ par tout demi-plan Q d'arête $A'_0M_0A_0$, extérieure à $\mathcal{T}(M_0)$, est constituée par un angle $T'M_0T$ pouvant se réduire à un rayon unique. Lorsque Q tourne autour de $A'_0M_0A_0$ les demi-droites $M_0T$ et $M_0T'$ décrivent deux demi-cônes simples [1] symétriques par rapport à $M_0$ que j'appellerai les *frontières supérieure* et *inférieure* de $\mathcal{T}(M_0)$ et représenterai par les notations $\Theta(M_0)$ et $\Theta'(M_0)$. De même $\mathcal{D}(M_0)$ est engendré par la rotation d'un angle $D'M_0D$ dont les côtés décrivent deux demi-cônes simples $\Delta(M_0)$ $\Delta'(M_0)$, qui seront appelés les *frontières supérieure* et *inférieure* de $\mathcal{D}(M_0)$.

7. Je vais compléter ces résultats en considérant les complémentaires de $\mathcal{T}(M_0)$ et de $\mathcal{D}(M_0)$. L'angle $A_0M_0T$ dont on supprime le côté $M_0T$ engendre un faisceau ouvert de demi-droites que je désignerai par $\theta(M_0)$, la frontière de ce domaine est $\Theta(M_0)$. De même l'angle $A'_0M_0T'$ amputé de $M_0T'$ engendre un faisceau ouvert de demi-droites $\theta'(M_0)$, symétrique de $\theta(M_0)$, dont la frontière est $\Theta'(M_0)$. On voit immédiatement que $\theta(M_0)$ et $\theta'(M_0)$ n'ont pas de rayon commun et de plus que si deux demi-droites non opposées, issues de $M_0$, sont l'une intérieure, l'autre extérieure à $\theta(M_0)$, l'angle qu'elles forment contient au moins un rayon de sa frontière $\Theta(M_0)$. De même le complémentaire du faisceau dérivé est la somme de deux faisceaux ouverts sans rayons communs $\delta(M_0)$ et $\delta'(M_0)$, engendrés par la rotation des angles $A_0M_0D$

---

(1) Un demi-cône simple de sommet O est un ensemble de demi-droites issues de O dont la section par une sphère centrée en O est une courbe simple fermée.

$A'_0M_0D'$ amputés respectivement des rayons $M_0D$ et $M_0D'$; les frontières respectives de ces faisceaux sont $\Delta(M_0)$ et $\Delta'(M_0)$; de plus, si deux demi-droites non opposées, d'origine $M_0$, sont l'une intérieure, l'autre extérieure à $\delta(M_0)$, par exemple, il y a au moins un rayon de la frontière de ce faisceau à l'intérieur de leur angle. Remarquons enfin que $\delta(M_0)$ et $\delta'(M_0)$ contiennent respectivement $\theta(M_0)$ et $\theta'(M_0)$.

Ceci posé, soient $M_0A_1$ et $M_0A_2$ deux rayons distincts de $\theta(M_0)$, $M_0A'_1$ et $M_0A'_2$ les demi-droites respectivement opposées; le rayon $M_0A'_2$ appartenant à $\theta'(M_0)$ est extérieur à $\theta(M_0)$, il existe donc à l'intérieur de l'angle $A_1M_0A'_2$ au moins un rayon de $\mathcal{T}(M_0)$. Comme $A'_2M_0A_2$ est étrangère à $\mathcal{T}(M_0)$, elle peut jouer le même rôle que $A'_0M_0A_0$, par suite l'angle $A_1M_0A_2$ ne peut contenir de rayon de $\mathcal{T}(M_0)$, sans quoi $M_0A_1$ appartiendrait à ce faisceau. Mais alors $A_1M_0A_2$ ne peut renfermer non plus de rayons de $\theta'(M_0)$, car un tel rayon étant extérieur à $\theta(M_0)$ il y aurait nécessairement un rayon de $\mathcal{T}(M_0)$ à l'intérieur de $A_1M_0A_2$, ce qui, on vient de le voir, est impossible. Ainsi tout angle $A_1M_0A_2$ appartient à $\theta(M_0)$, ce dernier est donc convexe. Par suite :

*En tout point intérieur d'une surface simple de Jordan, où le faisceau des tangentes ne remplit pas tout l'espace, son complémentaire se décompose en deux faisceaux ouverts opposés sans rayons communs et* CONVEXES.

La convexité de $\theta(M_0)$ et de $\theta'(M_0)$ est comme on le verra une propriété très importante. Nous allons obtenir pour $\delta(M_0)$ et $\delta'(M_0)$, un résultat intéressant mais qui fera nécessairement intervenir $\theta(M_0)$ et $\theta'(M_0)$. Soient $M_0B_1$ et $M_0A_2$ deux rayons distincts appartenant respectivement à $\delta(M_0)$ et $\theta(M_0)$. Considérons encore $M_0A'_2$ opposé à $M_0A_2$, il appartient à $\theta'(M_0)$ donc à $\delta'(M_0)$. L'angle $B_1M_0A'_2$ contient donc à son intérieur au moins un rayon de $\Delta(M_0)$. En raisonnant exactement comme plus haut on voit que tout l'angle $B_1M_0A_2$ appartient à $\delta(M_0)$. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

*En tout point intérieur d'une surface simple de Jordan où le faisceau des tangentes ne remplit pas tout l'espace, le complémentaire du faisceau dérivé se décompose en deux faisceaux ouverts distincts et tels que tout angle dont les côtés appartiennent à l'un d'eux en fait entièrement partie, à condition que l'un au moins de ces côtés soit extérieur au faisceau des tangentes.*

8. Examinons maintenant les différents cas possibles pour $\theta(M_0)$.

1° *Les frontières* $\Theta(M_0)$ *et* $\Theta'(M_0)$ *n'ont pas de rayon commun.*

Dans ce cas la fermeture de $\theta(M_0)$, soit $\theta(M_0)+\Theta(M_0)$, ne possède pas de rayons opposés, c'est donc un vrai demi-cône (plein) convexe [1].

[1] Sur les cônes convexes on pourra consulter l'intéressant ouvrage de M. BONNESSEN, *Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes*, Gauthier-Villars, 1929.

L'ensemble $\Theta(M_0)+\Theta'(M_0)$ constitue un cône convexe (surface conique) qu'on peut appeler le *cône directeur* des tangentes en $M_0$. *Le faisceau des tangentes est l'ensemble des droites ne pénétrant pas à l'intérieur du cône directeur.* D'autre part les propriétés des cônes convexes montrent que les tangentes se distribuent par plans : les *plans de tangentes*, qui ne sont autres que les plans passant par $M_0$ et ne pénétrant pas à l'intérieur du cône directeur.

2° *Les frontières* $\Theta(M_0)$ *et* $\Theta'(M_0)$ *ont en commun un couple de rayon et un seul.*

Soient $GM_0H$ les rayons communs et $M_0A_1$ un rayon de $\theta(M_0)$, ce faisceau étant ouvert $M_0A_1$ est l'axe d'un demi-cône de révolution appartenant à $\theta(M_0)$. D'autre part il existe des rayons $M_0A$ de $\theta(M_0)$ aussi près qu'on veut de $M_0G$. On en déduit immédiatement que l'angle $GM_0A_1$, sauf son côté $M_0G$, appartient à $\theta(M_0)$. Il en est de même de l'angle $HM_0A_1$ amputé de $M_0H$. Le faisceau $\theta(M_0)$ est donc un *dièdre* ouvert d'arête $GM_0H$.

En utilisant la seconde proposition du numéro précédent on démontrerait de la même façon que $\delta(M_0)$ et $\delta'(M_0)$ sont des dièdres ouverts d'arête $GM_0H$.

*Si donc* $\Theta(M_0)$ *et* $\Theta'(M_0)$ *ont un couple de rayons communs et un seul, le faisceau des tangentes se compose de deux dièdres (pleins) opposés, ne pouvant être des demi-espaces*, car alors $\Theta(M_0)$ et $\Theta'(M_0)$ auraient une infinité de rayons communs, *le faisceau dérivé se compose lui aussi de deux drièdres pleins pouvant se réduire à des demi-plans.*

3° *Les frontières* $\Theta(M_0)$ *et* $\Theta'(M_0)$ *ont en commun plus d'un couple de rayons.*

Dans ce cas il est immédiat que *le faisceau des tangentes et le faisceau dérivé se réduisent à un plan unique:* la frontière commune de $\theta(M_0)$ et $\theta'(M_0)$.

Voici deux conséquences directes des considérations précédentes.

I. *Si en un point intérieur d'une surface simple de Jordan le faisceau des tangentes ne possède pas de rayon intérieur il se réduit à un plan.*

II. *La condition nécessaire et suffisante pour que le faisceau des tangentes en un point intérieur d'une surface simple de Jordan se réduise à un plan est que l'on puisse trouver deux plans distincts* (passant par le point donné) *tels que chacun d'eux ne contienne qu'une seule tangente, celle-ci étant distincte de l'intersection des deux plans.*

Les résultats obtenus jusqu'ici donnent la solution complète du problème de la disposition des tangentes en un point intérieur d'une surface simple de Jordan. Ils sont le développement de ceux que j'avais donnés dans la Note des *Comptes rendus* citée plus haut. Le problème en question avait été abordé par M. Bouligand et son élève M. Mirguet, qui avaient été conduits en deux étapes à la proposition I précédente par une méthode différente de celle du texte [1] et qui ne permettait pas d'apercevoir la convexité du complémentaire du faisceau des tangentes.

9. La dernière proposition du n° 7 conduit à des propriétés intéressantes dont nous aurons plus loin l'application (n° 20). Je ferai d'abord une remarque préliminaire. Soient $M_0A_1$, $M_0A_2$, $M_0B$ trois demi-droites formant un trièdre, appartenant les deux premières à $\theta(M_0)$ et la troisième à $\delta(M_0)$. Je dis que tout le trièdre fait partie de $\delta(M_0)$. Cela est vrai pour les faces, il suffit donc de considérer un rayon intérieur, soit $M_0I$. Le plan $BM_0I$ coupe la face $A_1M_0A_2$ suivant un rayon intérieur $M_0L$, qui par suite appartient à $\theta(M_0)$; donc $M_0I$, demi-droite intérieure à l'angle $BM_0L$ dont les côtés appartiennent l'un à $\delta(M_0)$, l'autre à $\theta(M_0)$ fait partie de $\delta(M_0)$.

Ceci posé, supposons : *a.* que quatre demi-droites $M_0L_i (i = 1, 2, 3, 4)$ dont trois quelconques ne sont pas coplanaires soient à la fois sur $\Theta(M_0)$ et $\Delta'(M_0)$. Ces quatre demi-droites forment nécessairement un angle polyèdre convexe, dont on peut supposer que les faces sont $L_1M_0L_2$, $L_2M_0L_3$, $L_3M_0L_4$, $L_4M_0L_1$. Les angles $L_1M_0L_3$ et $L_2M_0L_4$ ont une demi-droite commune $M_0A$, qui appartient à $\theta(M_0)$. Si l'on désigne par K et K' les droites d'intersection de chacun des couples de plans $L_1M_0L_2$, $L_3M_0L_4$ et $L_1M_0L_4$, $L_2M_0L_3$, les quatre demi-droites $M_0L_i$ sont d'un même côté par rapport au plan (K, K'), du côté de $M_0A$. Coupons-les par un plan parallèle à (K, K') et désignons par $L_i$ l'intersection de $ML_i$ par ce plan, et par $L_i$ le symétrique de $L_i$ par rapport à $M_0$, $(i = 1, 2, 3, 4)$. Nous formons ainsi un parallélépipède $L_1L_2L_3L_4L'_3L'_4L'_1L'_2$, dont les arêtes $L_1L'_3$, $L_2L'_4$, $L_3L'_1$, $L_4L'_2$ sont parallèles à $M_0A$, $L_1L_2$, $L_3L_4$, $L'_1L'_2$, $L'_3L'_4$ parallèles à K, $L_2L_3$, $L_4L_1$, $L'_2L'_3$, $L'_4L'_1$ parallèles à K'. Les faces $L_1L_2L_3L_4$ et $L'_1L'_2L'_3L'_4$ appartiennent respectivement à $\theta(M_0)+\Theta(M_0)$ et à $\theta'(M_0)+\Theta'(M_0)$, il en résulte que la trace du faisceau dérivé $\mathcal{D}(M_0)$ sur la surface du parallélépipède est tout entière sur les quatre faces qu'on peut appeler les faces latérales. Considérons, par exemple, la face $L_2L_3L'_1L'_4$, et soit $M_0A'$ la demi-droite opposée à $M_0A$, $M_0L_2$ est sur $\Delta'(M_0)$ tandis que $M_0L'_1$ est sur $\Theta'(M_0)$. Dans l'angle $A'M_0L_2$ prenons une demi-droite $M_0l_2$ voisine de $M_0L_2$ et dans $AM_0L'_1$ une demi-droite $M_0l'_1$ voisine de $M_0L'_1$; $M_0l_2$ et $M_0l'_1$ appartiennent respectivement à $\delta'(M_0)$ et $\theta'(M_0)$, le trièdre $(M_0, Al_2l'_1)$ fait donc partie de $\delta'(M_0)$. Comme $M_0l_2$ et $M_0l'_1$ peuvent être choisis aussi près qu'on veut de $M_0L_2$ et $M_0L'_1$ la trace de $\mathcal{D}(M_0)$ sur la face $L_2L_3L'_1L'_4$ n'a pas de points dans le triangle $L_2L'_1L'_4$, sauf peut-être sur $L_2L'_1$. On voit de même qu'elle n'en a pas dans le triangle $L_3L'_4L'_1$, sauf peut-être sur $L_3L'_4$. Désignons par $K_1$ l'intersection des diagonales $L_2L'_1$ et $L_3L'_4$,

[1] G. Bouligand, *Introduction à la Géométrie infinitésimale directe*, p. 167-171; J. Mirguet, *Nouvelles recherches sur les notions infinitésimales directes du premier ordre* (*Ann. Éc. Norm.*, 3e série, 51, 1934, p. 225-237).

la trace de $\mathcal{D}(M_0)$ sur la face considérée est tout entière dans le triangle $L_2L_3K_1$. On raisonnerait de même pour les autres faces latérales. En définitive la trace du faisceau dérivé sur la surface latérale du parallélépipède se trouve dans les triangles définis dans chaque face par son centre et les sommets situés dans la face $L_1L_2L_3L_4$. On en déduit que $\mathcal{D}(M_0)$ ne peut avoir de couples de rayons opposés que suivant K et K′.

*b*. Supposons maintenant que $\Theta(M_0)$ et $\Delta'(M_0)$ aient un rayon commun $M_0L_1$, et $\Theta'(M_0)$ et $\Delta(M_0)$ un rayon commun $M_0L_2$, non opposé au premier. Soient $M_0A$ et $M_0A'$ deux demi-droites opposées appartenant respectivement à $\theta(M_0)$ et $\theta'(M_0)$. Prenons dans $AM_0L_1$ une demi-droite $M_0l_1$ voisine de $M_0L_1$ et dans $AM_0L_2$ une demi-droite $M_0l_2$ voisine de $M_0L_2$. Elles appartiennent respectivement à $\theta(M_0)$ et $\delta(M_0)$, donc le trièdre $(M_0, Al_1l_2)$ appartient tout entier à $\delta(M_0)$. Comme $M_0l_1$ et $M_0l_2$ peuvent être choisis aussi près qu'on veut de $M_0L_1$ et $M_0L_2$, il en résulte que le trièdre $(M_0, AL_1L_2)$ diminué de sa face $L_1M_0L_2$ appartient à $\delta(M_0)$. Mais on voit de la même manière que le trièdre $(M_0, A'L_1L_2)$ diminué de la face $L_1M_0L_2$ appartient à $\delta'(M_0)$. Par suite cette face $L_1M_0L_2$ est commune à $\Delta(M_0)$ et $\Delta'(M_0)$. Autrement dit, *dans le dièdre* $(AA', L_1L_2)$ *le faisceau dérivé se réduit à l'angle* $L_1M_0L_2$.

Ce résultat peut être complété par une propriété de $\Theta(M_0)$. Soit $M_0L_2'$ la demi-droite opposée à $M_0L_2$, elle fait partie de $\Theta(M_0)$. Donc l'angle $L_1M_0L_2'$ appartient à $\theta(M_0)+\Theta(M_0)$, qui est convexe. Mais si cet angle contenait un rayon de $\theta(M_0)$, le plan $L_1M_0L_2$ couperait la frontière $\Delta(M_0)$ suivant deux rayons seulement, ce qui n'est pas. On peut donc affirmer que l'angle $L_1M_0L_2'$ est un secteur de $\Theta(M_0)$, et par suite que l'angle opposé est sur $\Theta'(M_0)$.

10. Je terminerai cette étude du faisceau des tangentes et du faisceau dérivé en un point par la recherche d'une condition nécessaire et suffisante pour que le faisceau dérivé $\mathcal{D}(M_0)$ se réduise à un demi-cône. Remarquons tout de suite qu'il en sera ainsi dans le cas où les sections par les demi-plans d'arête $A_0'M_0A_0$ extérieure à $\mathcal{T}(M_0)$ possèdent chacune une demi-tangente unique en $M_0$ (n° 3). Il suffit d'ailleurs que ceci ait lieu pour un ensemble partout dense de tels plans.

La condition que nous allons obtenir est analogue à celle que j'ai donnée pour l'existence d'une demi-tangente unique pour chaque côté en un point d'un arc simple de Jordan (¹). Voici cette condition dans le cas du plan : pour qu'un arc simple plan possède en un point donné M une demi-tangente unique pour chaque côté, il faut et il suffit qu'on puisse trouver un faisceau de droites de sommet M partout dense dont chaque sécante coupe l'arc suivant un ensemble dans lequel M est point isolé.

---

(¹) A. MARCHAUD, *Sur une condition nécessaire et suffisante d'existence des demi-tangentes en un point d'un arc simple* (*Bull. Sc. math.*, 2ᵉ série, t. LVI, juin 1932).

Remarquons d'abord que si $M_0$ fait partie du dérivé de l'intersection de S par une demi-droite $M_0L$, celle-ci est une demi-tangente en $M_0$. On en déduit que si le faisceau dérivé $\mathcal{D}(M_0)$ est un demi-cône simple, on peut trouver un faisceau partout dense de demi-droites issues de $M_0$, chacune d'elles coupant S suivant un ensemble dans lequel $M_0$ est point isolé. Inversement si $\Delta(M_0)$ et $\Delta'(M_0)$ ne sont pas confondus, le faisceau dérivé contiendra des rayons intérieurs (n° 5), soit $M_0L$ l'un d'eux. La section de $\mathcal{D}(M_0)$ par le demi-plan Q contenant $M_0L$ et dont l'arête est une droite $A'_0M_0A_0$ extérieure à $\mathfrak{T}(M_0)$ est un certain angle $D'M_0D$ ayant $M_0L$ à son intérieur. Mais $M_0D$ et $M_0D'$ sont des demi-tangentes à la section de $S_0$ par Q (n° 5); on en déduit que $M_0L$ rencontre cette section en une infinité de points au voisinage de $M_0$. Autrement dit, si $M_0L$ est intérieur à $\mathcal{D}(M_0)$, le point $M_0$ fait partie du dérivé de l'intersection de S par $M_0L$ (car $S_0$ est un morceau de S). Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

*Si en un point intérieur d'une surface simple de Jordan le faisceau des tangentes ne remplit pas tout l'espace, la condition nécessaire et suffisante pour que le faisceau dérivé en ce point soit un demi-cône simple (pouvant se réduire à un plan) est que l'on puisse trouver un faisceau de demi-droites, issues du point, et partout dense dont chaque rayon coupe la surface suivant un ensemble dans lequel le point considéré est point isolé* [1].

En particulier, si toute droite issue de $M_0$ rencontre S en un nombre fini de points, le faisceau dérivé en $M_0$ est un demi-cône simple.

## II. — Variation du faisceau dérivé.

11. Dans cette seconde Partie j'étudierai la variation du faisceau dérivé au voisinage d'un point où le faisceau des tangentes ne remplit pas tout l'espace, ce qui nous conduira, pour les fonctions de deux variables à nombres dérivés bornés, à des propriétés qui ne semblent pas toutes avoir été remarquées.

Soit toujours $M_0$ un point intérieur d'une surface simple de Jordan où le faisceau des tangentes ne remplit pas tout l'espace, un voisinage $S_0$ de $M_0$ sur S est représenté par une équation

$$(1) \qquad z = f(x, y) = f(m),$$

où la fonction $f$ est définie dans un cercle $s_0$, du plan des $xy$ ayant à son intérieur la projection de $M_0$ et satisfait dans ce domaine à une condition de Lipschitz

$$(2) \qquad |f(m_1) - f(m_2)| \leqq k\, m_1 m_2 \quad (\text{n}^\circ\ 3).$$

---

[1] On peut remplacer dans cet énoncé *demi-droites* par *droites*, mais la condition serait moins avantageuse.

En tout point intérieur de $S_0$ le faisceau des tangentes ne contient pas la parallèle à $Oz$ menée par le point.

Remarquons tout d'abord qu'il découle de théorèmes très généraux de M. Roger :

1° que l'ensemble des points de $S_0$ où le faisceau dérivé n'est pas un plan est de mesure 2-dimensionnelle nulle (¹);

2° que l'ensemble des points où $S_0$ ne possède pas deux rayons opposés est au plus dénombrable (²).

Bien que nous n'ayons pas à utiliser ces résultats ils devaient être signalés ici.

Les propriétés que j'ai en vue sont des conséquences des propositions établies dans la première Partie et d'une remarque élémentaire.

12. Appelons $Q_\alpha$ le demi-plan d'arête $Oz$ dont la trace sur le plan des $xy$ fait avec $Ox$ l'angle $\alpha$ et désignons par $Q_\alpha(M)$ le demi-plan déduit de $Q_\alpha$ par la translation OM. Soit M un point intérieur de $S_0$, conservant les notations du n° 6, les intersections de $Q_\alpha(M)$ avec $\Theta'(M)$, $\Delta'(M)$, $\Delta(M)$, $\Theta(M)$, auront pour pentes respectives

$$T'(M, \alpha), \quad D'(M, \alpha), \quad D(M, \alpha), \quad T(M, \alpha),$$

avec

$$-k \leqq T'(M, \alpha) \leqq D'(M, \alpha) \leqq D(M, \alpha) \leqq T(M, \alpha) \leqq +k.$$

$D(M, \alpha)$ et $D'(M, \alpha)$ sont respectivement les dérivés supérieur et inférieur de la fonction $f(m)$ au point $m$ (³) dans la direction qui fait l'angle $\alpha$ avec $Ox$, ou plus simplement, dans la direction $\alpha$.

Ceci rappelé, voici la remarque annoncée. Soit $M'$ un point de $S_0$ situé dans $Q_\alpha(M)$. Supposons d'abord que l'arc $\widehat{MM'}$ joignant M et $M'$ sur la section de $S_0$ par $Q_\alpha(M)$ ne se réduise pas au segment $MM'$ et considérons dans $Q_\alpha(M)$ une sécante L parallèle à $MM'$, laissant de part et d'autre d'elle-même des points de $\widehat{MM'}$. On peut toujours trouver sur cet arc deux arcs partiels $\widehat{IJ}$ et $\widehat{I'J'}$, tels que I et $J'$ soient, dans $Q_\alpha(M)$, au-dessus de L et J et $I'$ au-dessous; nous supposons J et $J'$ respectivement dans $Q_\alpha(I)$ et $Q_\alpha(I')$. Il existe sur $\widehat{IJ}$ un point $\overline{M}$, situé sur L et tel que l'arc partiel $\widehat{\overline{M}J}$ soit tout entier au-dessous de L, en ce point $\overline{M}$ $D(\overline{M}, \alpha)$ est au plus égal à la pente de $\overrightarrow{MM'}$. De la même manière prenons sur $\widehat{I'J'}$ le point $\overline{M}'$, situé sur L et tel que $\widehat{\overline{M}'J'}$ soit au-dessus de L,

(¹) FRÉDÉRIC ROGER, *Sur les propriétés tangentielles des ensembles euclidiens de points*, théor. II (2ᵉ partie, cas particulier).

(²) Même travail, théor. I.

(³) Nous désignons toujours par $m$ la projection de M sur le plan des $xy$ parallèlement à $Oz$.

en $\overline{M}'$ $D'(\overline{M}', \alpha)$ est au moins égal à la pente de $\overrightarrow{MM'}$. Lorsque l'arc $\widehat{MM'}$ est rectiligne, chacun de ses points peut jouer le rôle de $\overline{M}$ ou de $\overline{M}'$. En résumé, soient M et M' deux points de $S_0$, le second étant situé dans $Q_\alpha(M)$, il existe sur l'arc $\widehat{MM'}$ de la section de $S_0$ par $Q_\alpha(M)$ deux points $\overline{M}$ et $\overline{M}'$ satisfaisant aux inégalités suivantes :

$$D(\overline{M}, \alpha) \leqq \text{pente de } \overrightarrow{MM'} \leqq D'(\overline{M}', \alpha).$$

Dans le cas où l'on ne suppose pas $S_0$ à pentes bornées mais seulement la continuité de $f(m)$, le raisonnement précédent montre qu'il existe sur le segment $mm'$ des points où les nombres dérivés dans la direction $\alpha$ sont les uns supérieurs, les autres inférieurs à la pente de $\overrightarrow{MM'}$. On en déduit que si les nombres dérivés de $f$ dans la direction $\alpha$ sont bornés, la pente des cordes parallèles à $Q_\alpha$ est bornée. Par suite une fonction à nombres dérivés bornés, ou plus particulièrement à nombres dérivés bornés dans deux directions (n° 4) satisfait à une condition de Lipschitz. Les conclusions auxquelles nous parviendrons pour $f(m)$ seront donc valables pour toute fonction à nombres dérivés bornés.

13. Considérons maintenant la demi-droite frontière supérieure de $\mathfrak{T}(M_0)$ dans $Q_\alpha(M_0)$, $M_0$ désignant un point intérieur fixe de $S_0$; cette demi-droite $M_0T$ peut être obtenue comme limite d'une suite de sécantes $M_iM'_i$ ($M'_i$ étant dans $Q_\alpha(M_i)$) (n° 6-3°). La pente de $M_iM_i$ a donc pour limite $T(M_0, \alpha)$ quand $i$ croît indéfiniment. Mais il existe sur chaque arc $\widehat{M_iM_i}$ un point $\overline{M}'_i$ tel que $D'(\overline{M}'_i, \alpha)$ soit au moins égal à la pente de $\overrightarrow{M_iM'_i}$ dont la borne supérieure est $T(M_0, \alpha)$. On en déduit que $D'(\overline{M}'_i, \alpha)$ a pour limite $T(M_0, \alpha)$. Comme d'autre part $D(\overline{M}'_i, \alpha)$ est au moins égal à $D'(\overline{M}'_i, \alpha)$ et admet la même borne supérieure, $D(\overline{M}'_i, \alpha)$ tend aussi vers $T(M_0, \alpha)$.

En résumé, $M_0$ étant un point intérieur de $S_0$ il existe une suite de points $\overline{M}'_i$, ayant pour limite $M_0$, tels que $D'(\overline{M}'_i, \alpha)$ et $D(\overline{M}'_i, \alpha)$ tendent vers $T(M_0, \alpha)$ quand $i$ augmente indéfiniment. On démontrerait de la même manière l'existence d'une suite de points $\overline{M}_i$ tels que $D(\overline{M}_i, \alpha)$ et $D'(\overline{M}_i, \alpha)$ tendent vers $T'(M_0, \alpha)$. Géométriquement cela revient à dire que *tout rayon de la frontière supérieure ou de la frontière inférieure du faisceau des tangentes en* $M_0$ *est la limite unique d'une suite de demi-tangentes en des points qui tendent vers* $M_0$, *chacune de ces demi-tangentes pouvant être choisie sur la frontière supérieure ou la frontière inférieure du faisceau dérivé en son point d'application.*

Les rayons intérieurs de $\mathfrak{T}(M_0)$ ne sont pas nécessairement des limites de demi-tangentes, on le voit immédiatement en prenant pour $S_0$ un demi-cône de révolution. Mais si les sections de $S_0$ par les plans parallèles à $Oz$ ont partout deux demi-tangentes uniques et opposées, tout rayon de $\mathcal{C}(M_0)$ est limite d'une suite de demi-tangentes, car il y a, dans ce cas; sur tout arc $\widehat{MM'}$ un point où une demi-tangente est parallèle à $\overrightarrow{MM'}$. Dans tous les cas il est immédiat que toute limite d'une suite de demi-tangentes en des points qui tendent vers $M_0$ est un rayon de $\mathcal{C}(M_0)$.

14. Le résultat obtenu au numéro précédent peut encore s'énoncer ainsi : en tout point $m_0$ (intérieur à $s_0$) les nombres dérivés de $f(m)$ dans la direction $\alpha$ ont *même maximum* $T(M_0, \alpha)$ et *même minimum* $T'(M_0, \alpha)$, que ces nombres dérivés soient supérieur, inférieur ou médian. On en déduit que si l'un d'eux est continu tous le sont et aussi les nombres dérivés dans la direction opposée.

Voici d'autres conséquences :

1° S'il existe dans deux directions distinctes un nombre dérivé (extrême ou médian) continu en $m_0$, le faisceau des tangentes en $M_0$ se réduit à un plan et tous les nombres dérivés sont continus en $m_0$.

2° Si un nombre dérivé dans une direction $\alpha_1$ est discontinu en $m_0$, le faisceau des tangentes en $M_0$ se compose de deux dièdres opposés ou de l'ensemble des droites qui ne pénètrent pas à l'intérieur d'un vrai cône convexe, dans le premier cas $T(M_0, \alpha)$ et $T'(M_0, \alpha)$ sont égaux pour un seul couple de directions opposées, dans le second ils sont distincts quel que soit $\alpha$, autrement dit :

*Si pour une direction donnée un nombre dérivé de $f(m)$ est discontinu en $m_0$, les nombres dérivés dans toutes les directions, sauf peut-être dans deux directions opposées, sont tous discontinus en $m_0$.*

On observera que la condition précédente est réalisée si le faisceau des tangentes en $M_0$ ne se réduit pas à un plan.

La propriété qui vient d'être établie ne paraît pas avoir été signalée jusqu'à présent.

15. Les considérations du n° 13 vont nous conduire encore à un résultat intéressant. Supposons qu'à chaque point M, de $S_0$, voisin de $M_0$, l'on puisse associer une demi-tangente ML ayant une limite unique $M_0L_0$ quand M tend vers $M_0$. Soient $Q_\alpha(M)$ et $Q_{\alpha_0}(M_0)$ les demi-plans définis comme plus haut et contenant respectivement ML et $M_0L_0$, comme la première tend vers $M_0L_0$ lorsque M tend vers $M_0$, on peut choisir les déterminations des angles de manière que $\alpha$ tende vers $\alpha_0$. L'inégalité (3) du n° 6 montre qu'à chaque demi-tangente ML correspond dans $Q_{\alpha_0}(M)$ une demi-tangente $M\overline{L}$ telle que l'on ait

$$|\text{pente de ML} - \text{pente de } M\overline{L}| \leqq k\,|\alpha - \alpha_0|,$$

il suffit de prendre $M_1$ en $M$, de choisir $M_1M'_1$ de manière que cette demi-droite ait pour limite $ML$, et $M_1M'_2$ dans $Q_{\alpha_0}(M)$ de manière que $m_1m'_2$ se déduise de $m_1m'_1$ par rotation. On en déduit que $M\overline{L}$ tend vers $M_0L_0$. Il résulte alors du n° 13 que les rayons inférieur et supérieur de $\mathcal{C}(M)$ dans $Q_{\alpha_0}(M_0)$ sont confondus avec $M_0L_0$.

Nous avons donc établi la proposition suivante :

I. *Si à chaque point* $M$ *de* $S_0$, *voisin de* $M_0$, *l'on peut associer une demi-tangente en* $M$ *ayant une limite unique quand* $M$ *tend vers* $M_0$, *la section du faisceau des tangentes en* $M_0$ *par le plan parallèle à* $Oz$ *contenant cette limite se réduit au support de cette dernière.*

On en déduit que :

II. *La condition nécessaire et suffisante pour que le faisceau des tangentes en* $M_0$ *soit un plan est que l'on puisse associer à chaque point* $M$ *voisin de* $M_0$, *deux demi-tangentes en* $M$ *ayant chacune une limite unique quand* $M$ *tend vers* $M_0$, *pourvu seulement que ces limites déterminent un plan.*

En prenant, par exemple, les rayons supérieurs de $\mathcal{D}(M)$ dans les demi-plans $Q_{\alpha_1}(M)$ et $Q_{\alpha_2}(M)$, $\alpha_1$ et $\alpha_2$ étant deux angles fixes (non congrus mod. $\pi$) on voit que la condition est nécessaire, car ces rayons tendent respectivement vers les rayons de $\mathcal{C}(M_0)$ situés dans $Q_{\alpha_1}(M_0)$ et $Q_{\alpha_2}(M_0)$. Qu'elle soit suffisante cela résulte immédiatement de la proposition précédente et de celle énoncée au n° 8 (proposition II).

La proposition II qui vient d'être établie donne plus particulièrement la propriété suivante : si le faisceau dérivé est continu en $M_0$, le faisceau des tangentes en ce point se réduit à un plan.

Pour donner un sens précis à l'expression, le faisceau dérivé est continu en $M_0$, on peut se placer au point de vue analytique ou au point de vue géométrique. Dans le premier cas on dira que $\mathcal{D}(M)$ est continu en $M_0$ si les fonctions de $\alpha$, $D(M, \alpha)$ et $D'(M, \alpha)$ tendent respectivement vers $D(M_0, \alpha)$ et $D'(M_0\ \alpha)$ quand $M$ tend vers $M_0$. La proposition est alors immédiate, car dans chaque direction le rayon supérieur de $\mathcal{D}(M)$, par exemple, tend vers une limite unique.

Dans le second cas on dira que $\mathcal{D}(M)$ est continu en $M_0$ si l'*écart* des deux faisceaux $\mathcal{D}(M)$ et $\mathcal{D}(M_0)$ tend vers zéro avec $MM_0$. Avant d'aller plus loin, rappelons la définition de l'écart.

Soient $F_1$ et $F_2$ deux faisceaux fermés de demi-droites de même sommet O. Désignons par $(F_1)_\lambda$ le faisceau obtenu en remplaçant chaque rayon de $F_1$ par le demi-cône (plein) de révolution de sommet O, d'angle au sommet $2\lambda$ ayant pour axe le rayon considéré. Si $\lambda$ est assez grand $(F_1)_\lambda$ contient $F_2$. Désignons par $\lambda_1$ la borne inférieure des valeurs de $\lambda$ satisfaisant à cette condition. Soit de même $\lambda_2$ la borne inférieure des valeurs de $\lambda$ telles que $(F_2)_\lambda$ [construit à partir de $F_2$ comme $(F_1)_\lambda$ à partir de $F_1$] contienne $F_1$. L'*écart* des deux faisceaux $F_1$ et $F_2$ est par définition le plus grand des deux nombres $\lambda_1$ et $\lambda_2$. L'écart de deux faisceaux de sommets différents se définit en les déplaçant par translation, de manière à leur donner le même sommet. L'écart de deux demi-droites est leur angle, celui de deux plans est le plus petit des angles qu'ils font entre eux $\left(\frac{\pi}{2}\right.$ s'ils sont rectangulaires$\left.\right)$.

Il nous faut démontrer que si $\mathcal{D}(M)$ est continu au sens qui vient d'être défini, $\mathcal{C}(M_0)$ se réduit à un plan. La chose va être aisée. Soit $\varepsilon_M$ l'écart de $\mathcal{D}(M)$ et de $\mathcal{D}(M_0)$, cet écart tend vers zéro avec $MM_0$. Donnons-nous un rayon $M_0L_0$ de $\mathcal{D}(M_0)$, en chaque point M de $S_0$ il existe un rayon ML de $\mathcal{D}(M)$ tel que l'angle $(M_0L_0, ML)$ soit au plus égal à $\varepsilon_M$, cela résulte de la définition de l'écart. Alors ML tend vers $M_0L_0$ quand M tend vers $M_0$. Comme $M_0L_0$ a été choisi arbitrairement $\mathcal{C}(M_0)$ est forcément un plan.

Nous avons donc établi la proposition suivante :

III. *En tout point* $M_0$, *intérieur à* $S_0$, *où le faisceau dérivé est continu, le faisceau des tangentes, et par suite le faisceau dérivé, est un plan, et ceci quelle que soit la définition adoptée pour la continuité* (¹).

Cette proposition a été démontrée par M. Mirguet dans le cas particulier où le faisceau dérivé est supposé être partout un plan (²).

On déduit immédiatement de ce qui précède que le faisceau dérivé est discontinu partout où le faisceau des tangentes n'est pas un plan. Bien entendu il s'agit toujours du voisinage d'un point où le faisceau des tangentes ne remplit pas tout l'espace. Il est possible de modifier cette hypothèse dans l'énoncé général de la proposition III.

Supposons $S_0$ défini par une équation (1), (n° 11), la fonction $f(m)$ *étant seulement continue* dans $s_0$. Si $\mathcal{D}(M)$ *est continu en* $M_0$ et si de plus $\mathcal{D}(M_0)$ ne contient pas de rayon parallèle à $Oz$, il est immédiat que la fonction $f(m)$ est à nombres dérivés bornés au voisinage de $m_0$; on peut donc affirmer que le faisceau des tangentes en $M_0$ est un plan. Il ne m'a pas été possible de m'affranchir de l'hypothèse relative à la représentation de la surface par une équation telle que (1). M. Valiron a rencontré une difficulté analogue dans le cas où le faisceau dérivé est supposé être partout un plan (³).

---

(¹) Ces deux définitions sont ici équivalentes, cela résulte du fait que les fonctions de $\alpha$, $D(M, \alpha)$ et $D'(M, \alpha)$ satisfont à une même condition de Lipschitz dont le coefficient est indépendant de la position de $m$ à l'intérieur de $s$ (n° 6). Mais il est plus facile de faire la démonstration du théorème dans les deux cas.

(²) J. MIRGUET, Mémoire cité, p. 237.

(³) G. VALIRON, *Sur les surfaces qui admettent un plan tangent en chaque point* (*Bull. Soc. Math.*, t. LIV, p. 195).

16. On peut se demander s'il existe pour le faisceau des tangentes une proposition analogue à celle qui vient d'être établie pour le faisceau dérivé. La réponse est négative. Je vais construire en effet une surface pour laquelle le faisceau des tangentes (ne remplissant pas tout l'espace) est non seulement continu, mais se déplace par translation sans être un plan. J'utiliserai pour cela une remarque que je dois à l'obligeance de M. Denjoy.

Donnons-nous sur le segment $(0,1)$ de l'axe des $x$ deux ensembles mesurables complémentaires E et $E_1$, partout épais l'un et l'autre [1], et désignons par $m(x)$ la mesure de $E_1$ sur le segment $(0, x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$. Il résulte des propriétés de la mesure [2] que la fonction $m(x)$ a une dérivée (unique) égale à *un* sur une plénitude de $E_1$ et une dérivée (unique) égale à *zéro* sur une plénitude de E ; partout ailleurs ses dérivés sont compris entre zéro et un.

Considérons alors la fonction

$$g(x) = 2m(x) - x;$$

elle est continue dans $(0,1)$, où ses nombres dérivés sont compris entre $-1$ et $+1$, de plus elle possède une dérivée (unique) égale à $+1$ aux points d'un ensemble $\{a_1\}$ partout dense et une dérivée (unique) égale à $-1$ aux points d'un ensemble partout dense $\{a_2\}$.

La surface en question sera la surface de translation définie en axes rectangulaires par l'équation

$$z = g(x) + g(y),$$

le point $(x, y)$ décrivant le carré $\left\{\begin{array}{c} 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 \leqq y \leqq 1 \end{array}\right\}$.

Soit $M_0$ un point intérieur de S. Prenons sur la surface un point $M(x, y, z)$ voisin de $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et dans le demi-plan $Q_\alpha(M)$ un point voisin $M'$ dont l'abscisse et l'ordonnée seront respectivement $x + l\cos\alpha$ et $y + l\sin\alpha$ $(l > 0)$. La pente de MM′ est égale à

$$\begin{aligned} &\frac{1}{l}[g(x + l\cos\alpha) - g(x) + g(y + l\sin\alpha) - g(y)] \\ &\quad = \frac{g(x + l\cos\alpha) - g(x)}{l\cos\alpha}\cos\alpha + \frac{g(y + l\sin\alpha) - g(y)}{l\sin\alpha}\sin\alpha. \end{aligned}$$

Elle est comprise entre $|\cos\alpha| + |\sin\alpha|$ et $-|\cos\alpha| - |\sin\alpha|$.

Ceci posé, choisissons $x$ sur $\{a_1\}$ ou sur $\{a_2\}$ suivant que $\cos\alpha$ est positif ou négatif, n'importe où voisin de $x_0$ si $\cos\alpha$ est nul. De la même manière prenons $y$ sur $\{a_1\}$ ou sur $\{a_2\}$ suivant que $\sin\alpha$ est positif ou négatif, n'importe où voisin de $y_0$ si $\sin\alpha$ est nul. Le point M ainsi déterminé pourra être aussi voisin de $M_0$ que l'on voudra, les ensembles $\{a_1\}$ et $\{a_2\}$ étant partout denses.

---

(1) M. Denjoy a donné un exemple de tels ensembles dans la note (1) du nº 19 de son mémoire : *Sur les nombres dérivés des fonctions continues* (*Journ. Math.*, t. 80, 1915).

(2) Cf. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration*, p. 123-124, ou Denjoy, Mémoire cité, nº 20.

Il résulte immédiatement des propriétés de la fonction $g$ que l'on a

$$D(M, \alpha) = D'(M, \alpha) = |\cos\alpha| + |\sin\alpha|.$$

Par suite $T(M_0, \alpha)$ est donc au moins égal à $|\cos\alpha| + |\sin\alpha|$, mais, d'après une remarque faite à l'instant, il est au plus égal à cette même quantité. On a donc

$$T(M_0, \alpha) = |\cos\alpha| + |\sin\alpha|.$$

Comme $T'(M_0, \alpha) = -T(M_0, \alpha + \pi)$, on en déduit

$$T'(M_0, \alpha) = -|\cos\alpha| - |\sin\alpha|.$$

Le faisceau des tangentes $\mathfrak{T}(M_0)$ se déplace donc par translation. Soit $M_0XYZ$ le trièdre déduit par translation du trièdre de coordonnées, on obtient immédiatement les équations des frontières supérieure et inférieure de $\mathfrak{T}(M_0)$ dans ce système d'axes

$$\Theta(M_0) \qquad Z = |X| + |Y|,$$
$$\Theta'(M_0) \qquad -Z = |X| + |Y|.$$

$\Theta(M_0)$ est la surface d'un angle polyèdre régulier de quatre faces.

Remarquons en terminant que la fonction $g(x) + g(y)$ donne l'exemple d'une fonction à nombres dérivés bornés dont tous les nombres dérivés sont partout discontinus. C'est d'ailleurs en réponse à la question de savoir s'il pouvait exister de telles fonctions que M. Denjoy m'avait signalé le moyen d'en construire.

## III. — Applications.

17. Dans cette troisième Partie je vais donner quelques applications des résultats précédents aux *surfaces dont les sections par les plans parallèles à deux plans fixes (au moins) sont des arcs convexes.*

D'une manière précise, soit S un morceau de surface simple de Jordan se projetant sur un plan P, parallèlement à un axe $z'z$, d'une manière biunivoque et bicontinue suivant un domaine convexe $s$. Les points de S seront désignés par des majuscules et leurs projections sur le plan P (parallèlement à $z'z$) par les minuscules correspondantes. S est représenté par une équation

$$z = f(m),$$

où la fonction $f(m)$ est définie et continue dans $s$.

Soit $ab$ une corde du contour de $s$, le segment $\overline{ab}$ est tout entier dans $s$. Considérons la section de S par le plan mené par $ab$ parallèlement à $z'z$, c'est un arc simple $\widehat{AB}$ qui se projette suivant $\overline{ab}$ d'une manière biunivoque et bicontinue [1]. Je suppose qu'il existe deux directions de plans $\Pi_1$ et $\Pi_2$ parallèles à $z'z$ telles que, quel que soit $ab$ parallèle à l'une ou l'autre de ces directions, l'arc $\widehat{AB}$ est convexe au sens large, c'est-à-dire convexe ou réduit à un segment de droite. Un arc tel que $\widehat{AB}$ est dit convexe s'il est d'un même côté par rapport à sa corde et limite avec celle-ci un domaine convexe. Il possède alors des propriétés intuitives et bien connues. Je vais rappeler celles qui nous seront utiles [2].

1° Soient MM' deux points distincts de $\widehat{AB}$, les arcs partiels $\widehat{AM}$ et $\widehat{M'B}$ sont d'un même côté (au sens large) de la droite MM'.

2° En tout point de l'arc celui-ci possède pour chaque côté une demi-tangente unique, et l'ensemble des points pour lesquels ces deux demi-tangentes ne sont pas opposées est au plus dénombrable, si en un point elles forment un angle non plat celui-ci contient tout l'arc, lorsqu'elles sont opposées l'arc est d'un même côté de leur support.

3° Soient sur $\widehat{AB}$ trois points quelconques $M_1$, $M_2$, $M_3$, tels que les vecteurs $\overrightarrow{m_1 m_2}$ et $\overrightarrow{m_2 m_3}$ soient de même sens que $\overrightarrow{ab}$, on a

$$\text{pente de } \overrightarrow{M_1 M_2} \geqq \text{pente de } \overrightarrow{M_2 M_3},$$

ou bien

$$\text{pente de } \overrightarrow{M_1 M_2} \leqq \text{pente de } \overrightarrow{M_2 M_3},$$

le sens de l'inégalité dépendant uniquement de l'arc.

On observera que toutes ces propriétés subsistent si $\widehat{AB}$ se réduit à un segment de droite.

La troisième propriété nous servira d'abord dans sa conséquence suivante. Soient sur $\widehat{AB}$ trois arcs partiels emboîtés $\widehat{A'B'}$, $\widehat{A''B''}$, $\widehat{M'M''}$, le second intérieur au premier au sens strict, le troisième intérieur au second au sens large. D'une manière précise, les vecteurs $\overrightarrow{a'b'}$, $\overrightarrow{a''b''}$, $\overrightarrow{m'm''}$ sont de même sens que $\overrightarrow{ab}$, $a''$ et $b''$ sont distincts et intérieurs à $\overline{a'b'}$, $m'$ et $m''$ sont distincts et appartiennent au segment fermé $\overline{a''b''}$. Si $m'$ et $m''$ sont respectivement distincts de $a''$ et $b''$ on écrira

$$\text{pente de } \overrightarrow{A'A''} \geqq \text{pente de } \overrightarrow{A''M'} \geqq \text{pente de } \overrightarrow{M'M''} \geqq \text{pente de } \overrightarrow{M''B''} \geqq \text{pente de } \overrightarrow{B''B'},$$

---

(1) Si $s$ n'était pas supposé convexe la section de S par le plan pourrait se composer d'un nombre fini ou infini d'arcs.

(2) Si un arc convexe ne renferme aucun segment de droite, il est d'ordre deux au sens de la géométrie finie. Dans le cas général on peut dire que l'arc est du second ordre au sens large.

ou bien les inégalités inverses. Dans les deux cas on peut affirmer que la pente de $\overrightarrow{M'M''}$ est comprise entre celles de $\overrightarrow{A'A''}$ et $\overrightarrow{B''B'}$. On voit aisément qu'il en est de même si $\widehat{M'M''}$ a une ou deux extrémités communes avec $\widehat{A''B''}$.

18. Considérons le morceau de surface S défini au numéro précédent et supposons que les sections de S par les plans parallèles à deux plans fixes $\Pi_1$ et $\Pi_2$, parallèles à $z'z$, soient convexes au sens large. Je vais d'abord montrer qu'en tout point intérieur de S la parallèle à $z'z$ est étrangère au faisceau des tangentes. On ne peut évidemment conclure pour le bord, il suffit pour le voir de prendre pour S une demi-sphère posée sur le plan P et $z'z$ perpendiculaire à ce plan. Soit donc $M_0$ un point de S non situé sur le bord, sa projection $m_0$ est intérieure à $s$. On peut construire dans le plan P un parallélogramme de centre $m_0$, $a'_1 b'_1 b'_2 a'_2$, dont les côtés $a'_1 b'_1$ et $a'_2 b'_2$ sont parallèles à la trace $\pi_1$ de $\Pi_1$ et les deux autres à celle $\pi_2$ de $\Pi_2$, ce parallélogramme étant tout entier dans $s$. Soient $a'_0$ et $b'_0$ les milieux de $a'_1 a'_2$ et de $b'_1 b'_2$, appelons $a''_0$ et $b''_0$ les milieux de $a'_0 m_0$ et $m_0 b'_0$; enfin $a'$ étant un point quelconque du côté $a'_1 a'_2$, désignons par $a' a'' b'' b'$ la figure déduite de $a'_0 a''_0 b''_0 b'_0$ par la translation $a'_0 a'$. Lorsque $a'$ parcourt le côté $a'_1 a'_2$, le segment $\overline{a'' b''}$ balaye le parallélogramme $a''_1 b''_1 b''_2 a''_2$. Considérons alors sur le segment $\overline{a'' b''}$ deux points quelconques $m'$ et $m''$. D'après les conclusions du numéro précédent, la pente de $\overrightarrow{M'M''}$ est comprise entre celles de $\overrightarrow{A'A''}$ et de $\overrightarrow{B''B'}$. Mais lorsque $a'$ parcourt le segment $a'_1 a'_2$, ces deux pentes varient d'une manière continue; on peut donc affirmer que pour le morceau de S qui se projette suivant $a''_1 b''_1 b''_2 a''_2$, les cordes parallèles à $\Pi_1$ ont une pente bornée. La considération des cordes parallèles à $\Pi_2$, jointe à la remarque faite à la fin du n° 4, montre que le morceau de S qui se projette suivant le parallélogramme déduit de $a'_1 b'_1 b'_2 a'_2$ par l'homothétie de centre $m_0$ et de rapport $\frac{1}{2}$, est à pentes bornées; autrement dit la parallèle $z'_0 M_0 z_0$, menée à $z'z$ par $M_0$, est étrangère au faisceau des tangentes en $M_0$.

19. Désignons par $\Pi_1^0$ et $\Pi_2^0$ les plans menés par $M_0$ parallèlement à $\Pi_1$ et $\Pi_2$. Soient $M_0\alpha_1$ et $M_0\beta_1$ les demi-tangentes à la section $\Gamma_1$ de S par $\Pi_1^0$, d'après la remarque 1° du n° 6 la section de $\mathcal{D}(M_0)$ par ce plan se réduit aux deux demi-droites $M_0\alpha_1$ et $M_0\beta_1$. De même les demi-tangentes $M_0\alpha_2$ et $M_0\beta_2$ à la section $\Gamma_2$ de S par $\Pi_2^0$ composent la section de $\mathcal{D}(M_0)$ par ce plan. Ces quatre demi-droites sont donc à la fois sur la frontière supérieure et sur la frontière inférieure de $\mathcal{D}(M_0)$. Considérons maintenant la section de $\mathcal{C}(M_0)$ par $\Pi_1^0$ par exemple. Elle s'obtiendra en cherchant les limites de cordes M'M'' parallèles à ce plan (n° 6, 2°). Les supports de $M_0\alpha_1$ et de $M_0\beta_1$ font partie de cette section, qui comprendra donc l'ensemble des droites ne pénétrant pas à l'intérieur de

l'angle $\alpha_1 M_0 \beta_1$ (n° 5), si $M_0\alpha_1$ et $M_0\beta_1$ sont opposées, cet ensemble se réduit à leur support commun. Je dis que l'ensemble en question épuise la section de $\mathcal{T}(M_0)$. Soit, en effet, T une tangente en $M_0$ située dans $\Pi_1^0$, elle peut être obtenue comme limite d'une suite de sécantes parallèles à $\Pi_1$. Conservant les notations du n° 18, soient $c_0$ un point de $a_0'' m_0$ et $c$ le point déduit de $c_0$ par la translation $a_0'' a''$. Lorsque $M'$ et $M''$ sont assez voisins de $M_0$, $m'$ et $m''$ sont compris entre $c$ et $b''$, par suite C et $B''$ sont, dans le plan mené par $M'M''$ parallèlement à $\Pi_1$, d'un même côté de $M'M''$ (n° 17). Il en résulte que $C_0$ et $B_0''$ sont d'un même côté de T, car C, $B''$ et $M'M''$ tendent respectivement vers $C_0$, $B_0''$ et T. Comme $C_0$ est quelconque sur l'arc partiel $\widehat{A_0'' M_0}$ de $L_1$ on en déduit que $\widehat{A_0'' M_0}$ et $B_0''$ sont d'un même côté par rapport à T. On démontrait de la même manière que $A_0''$ et $\widehat{M_0 B_0''}$ sont d'un même côté. Autrement dit, si T est une tangente en $M_0$ située dans $\Pi_1^0$, l'arc partiel $\widehat{A_0'' M_0 B_0''}$ de $\Gamma_1$ est d'un même côté par rapport à T, ce qui prouve bien que cette dernière ne peut pénétrer à l'intérieur de $\alpha_1 M_0 \beta_1$, ou bien être différente du support commun des deux demi-tangentes si celles-ci sont opposées.

En définitive nous avons obtenu la proposition suivante.

*Soit* S *un morceau de surface simple de Jordan se projetant sur un plan* P *parallèlement à un axe $z'z$ suivant un domaine convexe et dont les sections par les plans parallèles à deux plans fixes* $\Pi_1$ *et* $\Pi_2$, *contenant $z'z'$, sont toutes convexes au sens large; alors en tout point* $M_0$ *de* S, *non situé sur le bord, les sections du faisceau dérivé par les plans menés par* $M_0$ *parallèlement à* $\Pi_1$ *et* $\Pi_2$ *sont les demi-tangentes* $M_0\alpha_1$, $M_0\beta_1$ *et* $M_0\alpha_2$, $M_0\beta_2$ *aux sections de* S *par ces plans, les sections du faisceau des tangentes par ces mêmes plans sont l'ensemble des droites ne pénétrant pas à l'intérieur de l'angle* $\alpha_1 M_0 \beta_1$ *et celui de celles ne pénétrant pas à l'intérieur de l'angle* $\alpha_2 M_0 \beta_2$.

20. Examinons maintenant les différents cas possibles.

1° $M_0\alpha_1$ *et* $M_0\beta_1$ *sont opposées ainsi que* $M_0\alpha_2$ *et* $M_0\beta_2$. — Alors $\mathcal{T}(M_0)$ et par suite $\mathcal{D}(M_0)$ se réduisent au plan défini par ces deux couples de demi-tangentes opposées (n° 8, II). On en déduit que *si les sections de* S *par les plans parallèles à* $\Pi_1$ *et* $\Pi_2$ *ont partout deux demi-tangentes opposées,* S *possède partout un plan unique de tangentes variant d'une manière continue* (n° 2).

2° *Pour une seule section les demi-tangentes sont opposées* (par exemple, $M_0\alpha_1$ et $M_0\beta_1$). — Dans ce cas $\mathcal{T}(M_0)$ se compose de deux dièdres opposés, $\mathcal{D}(M_0)$ se réduit à deux demi-plans d'arête $\alpha_1 M_0 \beta_1$ (n° 8, 2°) déterminés par $M_0\alpha_2$ et $M_0\beta_2$ puisque sa section par $\Pi_0^2$ se réduit à ces deux demi-droites.

3° *Les sections par* $\Pi_1^0$ *et par* $\Pi_2^0$ *ont chacune un point anguleux en* $M_0$. — Deux circonstances pourront se présenter suivant que ces sections ont des concavités de même sens ou de sens opposés par rapport à $z'z$. Nous pouvons toujours supposer $M_0z'_0$ dans l'angle $\alpha_1 M_0 \beta_1$, alors suivant le cas c'est $M_0 z'_0$ ou $M_0 z_0$ qui sera dans l'angle $\alpha_2 M_0 \beta_2$.

*a.* Plaçons-nous dans la première hypothèse. Les quatre rayons $M_0\alpha_1$, $M_0\beta_1$, $M_0\alpha_2$, $M_0\beta_2$ sont à la fois sur la frontière inférieure de $\mathcal{T}(M_0)$ et sur la frontière supérieure de $\mathcal{D}(M_0)$. Nous nous trouvons dans le cas *a* étudié au n° 9. Rappelons seulement que $\mathcal{D}(M_0)$ est situé tout entier du même côté (au sens large) d'un certain plan et qu'il possède au plus deux couples de rayons opposés, qui ne peuvent être que les intersections des plans $\alpha_1 M_0 \alpha_2$, $\beta_1 M_0 \alpha_2$ et $\alpha_2 M_0 \beta_1$, $\alpha_1 M_0 \beta_2$.

*b.* Dans la seconde hypothèse $M_0\alpha_1$ et $M_0\beta_1$ sont sur la frontière inférieure de $\mathcal{T}(M_0)$ et $M_0\alpha_2$ et $M_0\beta_2$ sur sa frontière supérieure; mais les quatre rayons sont à la fois sur la frontière inférieure et sur la frontière supérieure de $\mathcal{D}(M_0)$. Les conclusions du n° 9 *b* montrent que *le faisceau dérivé se compose des quatre secteurs plans* $\alpha_1 M_0 \alpha_2$, $\alpha_2 M_0 \beta_1$, $\beta_1 M_0 \beta_2$, $\beta_2 M_0 \alpha_1$. On voit immédiatement que les droites communes à chacun des couples de plans $\alpha_1 M_0 \alpha_2$, $\beta_1 M_0 \beta_2$ et $\alpha_2 M_0 \beta_1$, $\alpha_1 M_0 \beta_2$ sont sur $\mathcal{D}(M_0)$, ce dernier contient exactement deux couples de rayons opposés. Enfin la remarque faite à la fin du n° 9 permet d'affirmer que les frontières inférieure et supérieure du faisceau des tangentes sont les faces des angles polyèdres symétriques $(M_0, \alpha_1 \alpha'_2 \beta_1 \beta'_2)$ et $(M_0, \alpha'_2 \alpha_2 \beta'_1 \beta_2)$, où $M_0\alpha'_1$, $M_0\beta'_1$, $M_0\alpha'_2$, $M_0\beta'_2$ sont respectivement opposés à $M_0\alpha_1$, $M_0\beta_1$, $M_0\alpha_2$, $M_0\beta_2$.

Voici une dernière remarque : si en plus de l'hypothèse initiale faite sur S, à savoir que les plans parallèles à $\Pi_1$ et à $\Pi_2$ le coupent suivant des arcs convexes au sens large, on suppose que le faisceau dérivé en M contient au moins trois couples de rayons opposés, on peut affirmer que le faisceau des tangentes en ce point se réduit à un plan. En effet les cas 2° et 3° doivent être écartés.

21. Les résultats du numéro précédent s'appliquent *a fortiori* au cas où toutes les sections de S par les plans parallèles à $z'z$ sont convexes au sens large. Ils vont nous conduire à des conclusions intéressantes.

Soit toujours M un point de S non situé sur le bord. Examinons tous les cas possibles en considérant les demi-tangentes en $M_0$ aux sections par les plans contenant $z'_0 M_0 z_0$.

1° Deux au moins de ces sections possèdent en $M_0$ deux demi-tangentes opposées, alors $\mathcal{T}(M_0)$ se réduit à un plan.

2° L'une d'elles et une seulement possède en $M_0$ deux demi-tangentes opposées, alors $\mathcal{D}(M_0)$ se réduit aux faces d'un dièdre et $\mathcal{T}(M_0)$ est le système des deux dièdres (pleins) opposés, ne contenant pas $z'_0 M_0 z_0$, dont les faces sont les plans qui contiennent $\mathcal{D}(M_0)$. Il résulte des propriétés des arcs convexes rappelées au n° 17 que la section de S par tout plan contenant $z'_0 M_0 z_0$, sauf peut-être celui qui passe par l'arête de $\mathcal{D}(M_0)$, est dans ce dièdre. On peut donc affirmer que S tout entier est dans le dièdre $\mathcal{D}(M_0)$.

3° Aucune des sections ne possède deux demi-tangentes opposées. On sait (n° 19) que toutes les demi-tangentes sont sur $\Theta(M_0)$ ou sur $\Theta'(M_0)$. Ces frontières sont dans le cas présent nécessairement de vrais demi-cônes convexes. Le faisceau dérivé est donc confondu avec l'un d'eux. Il contient S, cela résulte immédiatement de la propriété des arcs convexes rappelée à l'instant.

22. Je terminerai par une propriété remarquable de S, toujours dans l'hypothèse où toutes les sections par les plans parallèles à $z'z$ sont convexes au sens large. Si l'on écarte le cas où S est un disque plan, il y a nécessairement des sections strictement convexes ([1]), et alors deux cas peuvent se présenter : ou bien ces sections tournent toutes leur concavité du même côté de l'axe $z'z$ ou bien deux d'entre elles ont des concavités de sens différents.

Considérons d'abord le premier cas. On peut supposer S au-dessus du plan et la concavité tournée vers le bas. Il est alors immédiat que le domaine limité par S, sa projection $s$ et le cylindre projetant le bord est convexe. Autrement dit, S est un morceau de la frontière d'un domaine convexe.

Je vais montrer que dans le second cas S est un morceau de quadrique réglée non dégénérée. Quelques remarques préalables nous seront utiles. Soit $\widehat{A_0 B_0}$ une section de S strictement convexe dont la projection est le segment $\overline{a_0 b_0}$. On peut trouver sur $\widehat{A_0 B_0}$ trois points $M_1^0$, $M_2^0$, $M_3^0$, tels que les vecteurs $\overrightarrow{m_1^0 m_2^0}$ et $\overrightarrow{m_2^0 m_3^0}$ soient de même sens et que la différence

$$d = \text{pente de } \overrightarrow{M_1^0 M_2^0} - \text{pente de } \overrightarrow{M_2^0 M_3^0}$$

soit positive ou négative, suivant le sens de la concavité. Traçons dans le plan P trois petits cercles centrés sur $m_1^0$, $m_2^0$, $m_3^0$. On peut choisir leurs rayons assez petits pour que les trois points $m_1$, $m_2$, $m_3$ étant pris respectivement dans chacun d'eux, la différence

$$\text{pente de } \overrightarrow{M_1 M_2} - \text{pente de } \overrightarrow{M_2 M_3}$$

soit de même signe que $d$. Si donc on prend $\overline{ab}$ de manière que ce segment rencontre chacun des trois cercles, l'arc $\widehat{AB}$ sera strictement convexe et sa concavité sera orientée dans le même sens que celle de $\widehat{A_0 B_0}$.

Soient alors $\widehat{A_1 B_1}$ et $\widehat{A_2 B_2}$ deux sections strictement convexes dont les concavités sont de sens opposés. Il n'est pas exclu que l'une d'elles ou même

---

([1]) S ne peut évidemment avoir un seule section strictement convexe. Cela résultera d'ailleurs de ce qui suit.

les deux soient sur le bord. La remarque précédente montre que l'on peut supposer $\overline{a_1 b_1}$ et $\overline{a_2 b_2}$ intérieurs à $s$. Supposons d'abord que $\overline{a_1 b_1}$ et $\overline{a_2 b_2}$ ne se croisent pas à l'intérieur de $s$. On pourra toujours trouver une section strictement convexe dont la projection $\overline{a'b'}$ rencontre $\overline{a_1 b_1}$ et $\overline{a_2 b_2}$ à l'intérieur de $s$, autrement toutes ces sections seraient rectilignes et alors $\widehat{A_1 B_1}$ et $\widehat{A_2 B_2}$ seraient dans un même plan et par suite rectilignes, ce qui est contraire à l'hypothèse. Nous aurons donc toujours deux sections strictement convexes, dont les concavités sont orientées dans des sens différents et dont les projections se croisent à l'intérieur de $s$. Il est permis de supposer que ce sont $\widehat{A_1 B_1}$ et $\widehat{A_2 B_2}$. Soit $m_0$ le point commun aux segments $\overline{a_1 b_1}$ et $\overline{a_2 b_2}$ et considérons dans les angles opposés $a_1 m_0 a_2$ et $b_1 m_0 b_2$ une corde $a m_0 b$ voisine de $a_1 b_1$. Si l'angle $a_1 m_0 a$ est inférieur à un certain angle l'arc $\widehat{AB}$ sera strictement convexe et sa concavité sera orientée dans le même sens que celle de $\widehat{A_1 B_1}$. Soit $\overline{a_3 b_3}$ la position de $\overline{ab}$ correspondant à la borne supérieure de l'angle $a_1 m_0 a$ satisfaisant à cette condition, $\overline{a_3 b_3}$ est intérieur aux angles opposés $a_1 m_0 a_2$ et $b_1 m_0 b_2$, et $\widehat{A_3 B_3}$ est nécessairement rectiligne. On raisonnerait de même dans les angles $a_1 m_0 b_2$ et $a_2 m_0 a_1$. Nous avons donc montré l'existence de deux sections rectilignes (au moins) se croisant en $M_0$. Mais, d'après la remarque faite au début du présent numéro, on peut trouver dans P un cercle $\gamma$ de centre $m_0$ et intérieur à $s$, tel qu'en tout point M se projetant dans ce cercle se croisent deux sections strictement convexes dont les concavités sont orientées dans des sens différents, par suite, en chacun de ces points se croisent au moins deux sections rectilignes de S, que j'appellerai des *génératrices*. Soient $\overline{G_0 G'_0}$ et $\overline{H_0 H'_0}$ les deux génératrices se croisant en $M_0$, le faisceau dérivé en ce point est le plan R de ces deux génératrices (n° 20). L'arc $\widehat{A_1 B_1}$ étant strictement convexe l'une de ses extrémités, $A_1$, par exemple, est en dehors de R, il en est de même pour les extrémités de $\widehat{A_2 B_2}$; supposons que $A_2$, par exemple, soit en dehors de R, il résulte de l'hypothèse faite sur le sens de la concavité des arcs $\widehat{A_1 B_1}$ et $\widehat{A_2 B_2}$ que les points $A_1$ et $A_2$ sont de part et d'autre de R. Pour fixer les idées supposons $g_0$ sur l'arc $a_1 a_2$ du bord de $s$ (l'arc ne contenant pas $b_1$). Soit alors $m_1$ un point de $\overline{g_0 g'_0}$ appartenant à $\gamma$; par $M_1$ passe au moins une génératrice autre que $\overline{G_0 G'_0}$, soit $\overline{H_1 H'_1}$. Je dis que $\overline{H_1 H'_2}$ ne peut être dans un même plan avec $\overline{H_0 H'_0}$. En effet, supposons le contraire et prenons sur $\overline{h_0 h'_0}$ un point $n_0$ voisin de $m_0$, la droite $g_0 n_0$ rencontre $\overline{h_1 h'_1}$ en un point $n_1$, et les points $G_0$, $N_0$, $N_1$, situés dans le plan R, sont alignés. Il en résulte que le segment $\overline{G_0 N_0}$ est sur S. Considérons alors la section de S qui se projette sur $\overline{a_1 a_2}$, ou plutôt, comme $\overline{a_1 a_2}$ pourrait être tout entier sur le bord, une section se projetant suivant une parallèle à $\overline{a_1 a_2}$ et voisine. Soient $A'_1$, $M'_0$, $N'_0$, $A'_2$, les points de cette section qui se projettent respectivement sur $\overline{a_1 m_0}$, $\overline{g_0 m_0}$, $\overline{g_0 n_0}$, $\overline{a_2 m_0}$. Si la parallèle est assez voisine de $\overline{a_1 a_2}$ les points $A'_1$ et $A'_2$ seront de part et d'autre de R, alors que $M'_0$ et $N'_0$ sont dans ce plan, ce qui est impossible.

Soit de même $m_2$ un point de $m_0 g'_0$ situé dans $\gamma$, il passe par $M_2$ une génératrice $\overline{H_2 H'_2}$ et l'on démontrerait comme précédemment qu'elle n'est dans un même plan ni avec $\overline{H_0 H'_0}$, ni avec $\overline{H_1 H'_1}$. Les trois droites $H_0 H'_0$, $H_1 H'_1$, $H_2 H'_2$, définissent donc une vraie quadrique (Q). Soit alors G une génératrice de (Q) rencontrant les trois segments $H_0 H'_0$, $H_1 H'_1$, $H_2 H'_2$, aux points $L_0$, $L_1$, $L_2$. Ces trois points alignés appartiennent à la section de S par le plan projetant G, cette section comprend nécessairement le segment $\overline{L_1 L_2}$. En résumé, $M_0$ est intérieur à un morceau $S_1$ de S situé sur (Q). Il reste à montrer que S tout entier est sur (Q). Soit $\overline{m_0 u}$ un segment arbitraire joignant $m_0$ au bord de $s$. Considérons l'arc $\widehat{M_0 U}$ de S qui se projette sur $\overline{m_0 u}$. Si $\overline{m_0 u}$ est la projection d'une des génératrices de (Q) passant par $M_0$, $\widehat{M_0 U}$ est un segment de droite tout entier sur (Q). Dans le cas contraire prenons sur $\overline{M_0 U}$ un point $U'$ intérieur à $S_1$ et considérons un point quelconque M de l'arc partiel $\widehat{M_0 U'}$ de $\widehat{M_0 U}$. Le point M est intérieur à $S_1$ tout entier sur (Q), on peut donc trouver deux plans parallèles à $z'z$, passant par M, coupant (Q) suivant deux coniques dont les concavités en M sont orientées dans des sens différents. Il en sera de même des sections de S par ces plans, par conséquent les segments des génératrices G et H, de (Q), se croisant en M, sont sur S dans leurs parties qui se projettent dans $s$. Ceci posé, soit $U_1$ la borne des points tels que $U'$, il suffira de montrer que $U_1$ est confondu avec U. Supposons le contraire, et considérons un point $M_1$ situé sur l'arc $\widehat{U_1 U}$ dans le voisinage de $U_1$, la projetante de $M_1$ rencontre une génératrice G de (Q) qui pénètre nécessairement (si $M_1$ est assez voisin de $U_1$) à l'intérieur de la région balayée par le segment de la génératrice H situé sur S, lorsque M parcourt l'arc $\widehat{M_0 U_1}$, par suite $M_1$ est nécessairement sur (Q), parce que toute génératrice de (Q) qui pénètre à l'intérieur d'une région où cette quadrique est confondue avec S est elle-même sur S dans sa partie qui se projette dans $s$. La borne $U_1$ ne peut donc être distincte de U. La démonstration est achevée, car $\overline{m_0 u}$ a été pris arbitrairement.

En définitive nous pouvons énoncer le théorème suivant :

*Soit* S *un morceau de surface qui se projette sur un plan* P *parallèlement à un axe* $z'z$ *suivant un domaine convexe, si toutes les sections par des plans parallèles à* $z'z$ *sont convexes (au sens large),* S *est ou bien un morceau de la frontière d'un domaine convexe, ou bien un morceau de quadrique réglée non dégénérée.*

23. Nous avons remarqué plus haut [n° 17, note (2)] qu'un arc convexe était du second ordre au sens large. La surface S est donc si l'on veut du *second ordre* au sens élargi. Je vais préciser ce point, ce qui nous donnera une autre forme pour l'énoncé du dernier théorème.

Soit toujours S un morceau de surface se projetant sur le plan P parallèlement à l'axe $z'z$ d'une manière biunivoque et bicontinue suivant un domaine convexe. Je dirai que S est du *second ordre* (au sens large), si toute sécante ne contenant pas de segment entièrement situé sur S le coupe en deux points au plus, et si l'une d'elles rencontre S exactement en deux points.

Je vais montrer que tout plan parallèle à $z'z$ coupe S suivant un arc convexe au sens large. Soit $\widehat{AB}$ une section de S par un tel plan. Si $\widehat{AB}$ possède des segments rectilignes, ceux-ci forment un ensemble au plus dénombrable, puisque leurs projections sont des segments de $\overline{ab}$ n'empiétant pas. Supposons que $\widehat{AB}$ ne soit pas rectiligne, il aura un point $M_1$ au-dessus de sa corde, par exemple. Je dis que $\widehat{AB}$ est tout entier au-dessus de $\overline{AB}$ et limite avec ce dernier un domaine convexe. Considérons d'abord un second point de $\widehat{AB}$, distinct des extrémités, soit $M_2$. Supposons que $M_2$ soit sur $\overline{AB}$ ou au-dessous, en intervertissant au besoin A et B on peut faire en sorte que $M_2$ soit sur $\widehat{M_1B}$. On pourra alors mener par B une sécante laissant A et $M_1$ de part et d'autre et ne contenant aucun segment de $\widehat{AB}$; cette sécante coupera l'arc en deux points au plus. Or il est immédiat que $\widehat{AM_1}$ et $\widehat{M_1M_2}$ coupent la sécante, ce qui ferait trois points au moins pour l'arc $\widehat{AB}$. L'arc est donc bien tout entier au-dessus de sa corde. Soit alors M un point parcourant $\widehat{AB}$, N l'intersection de la projetante de M avec $\overline{AB}$, il reste à montrer que le domaine E balayé par le segment $\overline{NM}$ est convexe. Considérons deux points quelconques de domaine $M'_1$ et $M'_2$, les parallèles à $z'z$ menées par $M'_1$ et $M'_2$ rencontrent $\widehat{AB}$ en $M_1$ et $M_2$, $\overline{AB}$ en $N_1$ et $N_2$. Le segment $\overline{M'_1M'_2}$ est tout entier dans le trapèze $N_1N_2M_2M_1$, qui peut se réduire à un triangle ou au segment $\overline{AB}$ lorsque $M'_1M'_2$ a une ou deux extrémités confondues avec celles de $\widehat{AB}$. Pour montrer que $M'_1M'_2$ fait partie tout entier de E il suffira de constater que l'arc $\widehat{M_1M_2}$ n'a pas de point au-dessous de sa corde lorsqu'une de ses extrémités au moins est distincte de celles de $\widehat{AB}$. On peut supposer $M_1$ sur $\widehat{AM_2}$ et $M_2$ distinct de B. Considérons la droite $M_1M_2$, si elle ne rencontre pas le segment $\overline{N_2B}$, B est au-dessous d'elle, dans le cas contraire $M_1$ ne peut être confondu avec A, alors en permutant A et B, $M_1$ et $M_2$ on sera ramené au cas précédent, et B sera encore au-dessous de la droite $M_1M_2$. Il est immédiat que si $\widehat{M_1M_2}$ avait un point $M_3$ au-dessous de $\overline{M_1M_2}$, on pourrait trouver une sécante voisine de $M_1M_2$, ne contenant aucun segment de $\widehat{AB}$ et coupant chacun des arcs partiels $\widehat{M_1M_3}$, $\widehat{M_3M_2}$ et $\widehat{M_2B}$ en un point au moins, ce qui est impossible.

La démonstration est achevée. Le dernier théorème peut donc s'énoncer ainsi :

*Un morceau de surface du second ordre (au sens large) qui se projette d'une manière biunivoque et bicontinue (obliquement ou normalement), suivant un domaine convexe plan est ou bien la frontière d'un domaine convexe, ou bien un morceau de quadrique réglée non dégénérée.*

Ce résultat généralise celui que j'ai établi pour les surfaces (closes) du second ordre dans le cas où les sections non décomposées ne renferment aucun segment de droite [1]. Ainsi, *pour le second ordre, même au sens élargi, la non convexité implique nécessairement l'algébricité. Pour le troisième ordre elle implique presque toujours l'existence d'un plan tangent continu.* C'est ce que je montre dans un Mémoire (qui paraîtra dans un autre Recueil) consacré à l'étude du faisceau dérivé des surfaces d'ordre borné au sens large.

---

(1) A. MARCHAUD, *Sur les surfaces du second ordre de la Géométrie finie* (*Journ. Math.*, t. XV, fasc. 131, 1936, p. 295).